

99-06

**UNE  
CONTRADICTION  
DANS  
L'INDICATEUR DE  
DÉVELOPPEMENT  
HUMAIN DU PNUD**

**André LEMELIN**

**Inédits**

**INRS-Urbanisation**

3465, rue Durocher  
Montréal, Québec  
H2X 2C6

**Avril 1999**



# **UNE CONTRADICTION DANS L'INDICATEUR DE DÉVELOPPEMENT HUMAIN DU PNUD**

André LEMELIN  
INRS-Urbanisation  
(Université du Québec)  
avril 1999

INRS-Urbanisation (Institut national de la recherche scientifique, Université du Québec)  
3465, rue Durocher  
Montréal H2X 2C6  
Québec

andre\_lemelin@inrs-urb.quebec.ca  
Tel. : (514) 499-4042  
FAX : (514) 499-4065



## **RESUME**

---

Dans le calcul de l'Indicateur de Développement Humain du PNUD, la composante revenu, le PIB réel per capita à parité de pouvoir d'achat, est corrigée pour refléter l'hypothèse de l'utilité marginale décroissante du revenu, au moyen de la soi-disant formule d'Atkinson. Cela constitue une utilisation impropre de la fonction d'utilité proposée par Atkinson (1970), Qui plus est, la formule employée par le PNUD est en contradiction directe avec le principe de l'utilité marginale décroissante du revenu qu'elle est censée représenter. Pourtant, il y a une manière simple de rétablir la cohérence avec le principe de l'utilité marginale décroissante (ou du moins non croissante), sans pour autant modifier substantiellement les rangs des pays par rapport à l'IDH.

## **MOTS CLES**

---

Indicateur de développement humain, mesures de bien-être, utilité marginale décroissante



C'est en 1990 que le Programme des Nations-Unies pour le Développement (PNUD) a commencé à publier chaque année son *Rapport Mondial sur le Développement Humain* (PNUD, 1990), avec le tableau de l'Indicateur de Développement Humain (IDH). L'IDH est constitué de trois composantes de poids égaux, basées sur l'espérance de vie à la naissance, l'éducation (une combinaison de l'alphabétisation et de la scolarisation) et le revenu per capita. Le détail des formules utilisées se trouvent dans PNUD (1998).

Dès le début, l'IDH a été une source de controverse (Anand et Ravallion, 1993 ; Sugden, 1993 ; Aturupane, Glewwe et Iesenman, 1994 ; Srinivasan, 1994 ; Streeten, 1994 ; Ravallion, 1997). Mais, même si l'on accepte le paradigme du développement humain et que l'on fait droit aux nécessités pragmatiques, il y a une nette incohérence dans le calcul de la composante revenu de l'IDH. Cette incohérence tient à la manière dont le PIB réel per capita, ajusté en fonction de la parité des pouvoirs d'achat, est corrigé pour refléter l'hypothèse de l'utilité marginale décroissante du revenu.

La correction est appliquée selon la soi-disant formule d'Atkinson :

$$W(y) = \left[ \sum_{t=1}^m t (y^*)^{1/t} \right] + (m+1)(y - my^*)^{1/m+1}$$

où

$y$  est le PIB per capita à parité de pouvoir d'achat

$y^*$  est la valeur seuil, égale à la moyenne mondiale de  $y$  (5990 \$ dans le Rapport de 1998)

$W(y)$  est la fonction de bien-être social, c'est-à-dire le PIB per capita corrigé pour refléter l'utilité marginale décroissante du revenu

$m$  est le nombre entier pour lequel  $(m+1) y^* \geq y \geq m y^*$

Disons d'abord que cette formule mathématique constitue un emploi inapproprié de la fonction d'utilité proposée par Atkinson (1970). Dans son article, Atkinson examine la façon de ranger différentes distributions de revenu par ordre de leur degré d'inégalité, à partir d'une fonction de bien-être social additive, séparable et symétrique, dont les arguments sont les revenus individuels :

$$W \equiv \int_0^{\bar{y}} U(y)f(y)dy$$

où  $y$  est le revenu,  $U()$  est la fonction d'utilité *individuelle* et  $f()$  est la fonction de densité de probabilité des revenus. Afin de ne prendre en considération que l'inégalité en soi, indépendamment du niveau moyen de revenu, la mesure de l'inégalité doit être invariable par rapport à des déplacements proportionnels du revenu, c'est-à-dire des déplacements de revenu tels que

$$f_A(y) = f_B(\theta y)$$

Cette propriété, qu'Atkinson appelle *aversion (relative) constante à l'inégalité*, implique que la fonction d'utilité *individuelle* soit de la forme

$$U(y) = A + B \frac{y^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}, \text{ pour } \varepsilon \neq 1$$

et

$$U(y) = \log_e(y), \text{ pour } \varepsilon = 1$$

Or, la fonction de bien-être social du PNUD a la même forme que la fonction d'utilité *individuelle* d'Atkinson, comme on peut le voir en substituant

$$A = \left[ \sum_{t=1}^m t(y^*)^{1/t} \right]$$

$$B = 1$$

$$1-\varepsilon = \frac{1}{m+1}$$

Les paramètres  $A$  et  $\varepsilon$  changent d'un pays à l'autre, mais cela est sans conséquence, puisqu'il n'est pas question de construire une fonction mondiale de bien-être social en agrégeant les niveaux de bien-être des différents pays. Mais alors, quelle est la pertinence de la propriété d'aversion (relative) constante à l'inégalité ? Aucune. La référence à Atkinson ne justifie donc en rien le recours à cette formule par le PNUD.

Mais il y a pire. La formule du PNUD entre en contradiction avec le principe de l'utilité marginale décroissante qu'elle est censée représenter. Elle engendre une courbe de forme plutôt bizarre de la relation entre le revenu et l'utilité, comme le montre la figure 1. À tous les multiples  $m$  de la valeur seuil  $y^*$ , la dérivée à gauche est égale à

$$\frac{d}{dy^-} W(y) = [y - (m-1)y^*]^{(1-m)/m}$$

c'est-à-dire, au point  $y = my^*$ ,

$$\frac{d}{dy^-} W(y) = y^{*(1-m)/m}$$

Quant à la dérivée à droite, elle est égale à

$$\frac{d}{dy^+} W(y) = (y - my^*)^{-m/(m+1)}$$

Puisque la valeur de la dérivée à droite tend vers l'infini lorsque  $y$  s'approche de  $my^*$  du côté droit, alors, au point  $y = my^*$ , elle est nettement supérieure à la dérivée à gauche. L'utilité marginale du revenu est donc discontinue : à tous les multiples de la



valeur seuil  $y^*$ , l'utilité marginale *augmente* subitement, ce qui constitue une contradiction flagrante du principe de l'utilité marginale décroissante du revenu.

Le tableau 1 présente un exemple réaliste de la façon dont, à certains niveaux de revenu, le taux de substitution d'un *accroissement* de revenu est *plus élevé* que celui d'une *diminution*, contredisant en cela le principe de l'utilité marginale décroissante du revenu. À partir des données pour 1995 contenues dans le Rapport de 1998<sup>1</sup>, et au moyen des formules données dans PNUD (1998), on compare la Grèce à deux pays hypothétiques, l'un avec un PIB per capita supérieur de 2000 \$, et l'autre avec un PIB per capita inférieur du même montant. La Grèce a été choisie parce qu'à 11 636 \$, son PIB per capita est voisin du double de la valeur seuil de 5990 \$ (c'est-à-dire voisin d'un point de discontinuité de l'utilité marginale).

La première partie du tableau 1 montre comment une réduction du PIB per capita fait diminuer l'IDH d'un montant moindre qu'un accroissement de même ampleur ne le fait augmenter (bien que la différence dans la variation de l'IDH soit au niveau de la quatrième décimale). La seconde partie du tableau 1 montre que, pour compenser une baisse de 2000 \$ du PIB per capita, il suffit d'un accroissement de l'espérance de vie de 0,29 an, alors qu'il faut une diminution de 0,39 an pour annuler l'effet d'une hausse de 2000 \$. La troisième partie montre qu'une diminution de 2000 \$ du PIB per capita serait compensée par une hausse de 0,71 point de pourcentage du taux d'alphabétisation, tandis une chute de 0,91 point de pourcentage du taux d'alphabétisation serait nécessaire pour annihiler l'impact d'une augmentation. Enfin, en termes du taux de scolarisation, le taux de substitution est de 1,43 points de pourcentage pour une baisse de 2000 \$, et de 1,93 points pour une augmentation.

En principe, cette violation du principe de l'utilité marginale décroissante du revenu pourrait influencer les rangs de pays ayant un PIB per capita supérieur à la valeur seuil de 5990 \$. En pratique, c'est une autre affaire : étant donné la très faible utilité marginale du revenu au-delà de 5990 \$, il est probable que l'élimination des anomalies de la fonction de correction du PIB per capita n'aurait que peu d'impact sur l'ordonnement des pays. Raison de plus pour restaurer la cohérence !

Or il y a une façon très simple de rétablir la cohérence avec le principe de l'utilité marginale décroissante (ou du moins, non croissante) du revenu : il suffit d'appliquer une interpolation linéaire entre les multiples entiers de la valeur seuil de 5990 \$ :

$$W'(y) = \left[ \sum_{t=1}^m t(y^*)^{1/t} \right] + \frac{(y - my^*)}{y^*} (m+1)(y^*)^{1/m+1}$$

Nous avons recalculé l'IDH au moyen de cette formule, et nous n'avons constaté que quatre cas d'inversion de rangs. Ces cas sont présentés au tableau 2.

<sup>1</sup> On peut trouver ces données sur le web à l'adresse URL suivante : <http://www.undp.org/hdro/>.

Mais si cela est sans conséquence, pourquoi s'en préoccuper ? D'abord, s'il est vrai qu'une certaine dose d'incohérence théorique est acceptable quand elle n'a pas grand impact et qu'il serait coûteux de réaliser une cohérence parfaite, tel n'est pas le cas ici, tant s'en faut.

Deuxièmement, si les angles de la courbe d'ajustement du PIB per capita n'ont pas de conséquences pratiques, cela est dû en grande partie à la quasi-absence d'impact de tout accroissement du revenu au-delà de 5990 \$. Car si les deux axes de la figure 1 étaient à la même échelle, la courbe paraîtrait presque horizontale au-delà du seuil de 5990 \$. D'ailleurs, cette caractéristique a conduit Ravallion (1997) à conclure, après avoir comparé les taux de substitution d'une année d'espérance de vie en termes de revenu, pour différents niveaux de revenu, que « la construction de l'IDH suppose que la vie a beaucoup moins de valeur dans les pays pauvres que dans les pays riches » (p. 633)<sup>2</sup> : ce qui est implicite dans l'IDH, cependant, ce n'est pas que la vie a moins de valeur dans les pays pauvres, mais au contraire, qu'un accroissement du revenu (au-delà de 5990 \$) ne contribue au bien-être que de façon négligeable. Avec une hypothèse moins extrême, comme celle que propose Noorbakhsh (1998), où l'utilité marginale du revenu décroît de façon moins abrupte, les dérogations au principe de l'utilité marginale décroissante du revenu risquent d'avoir un effet plus substantiel sur les rangs des pays.

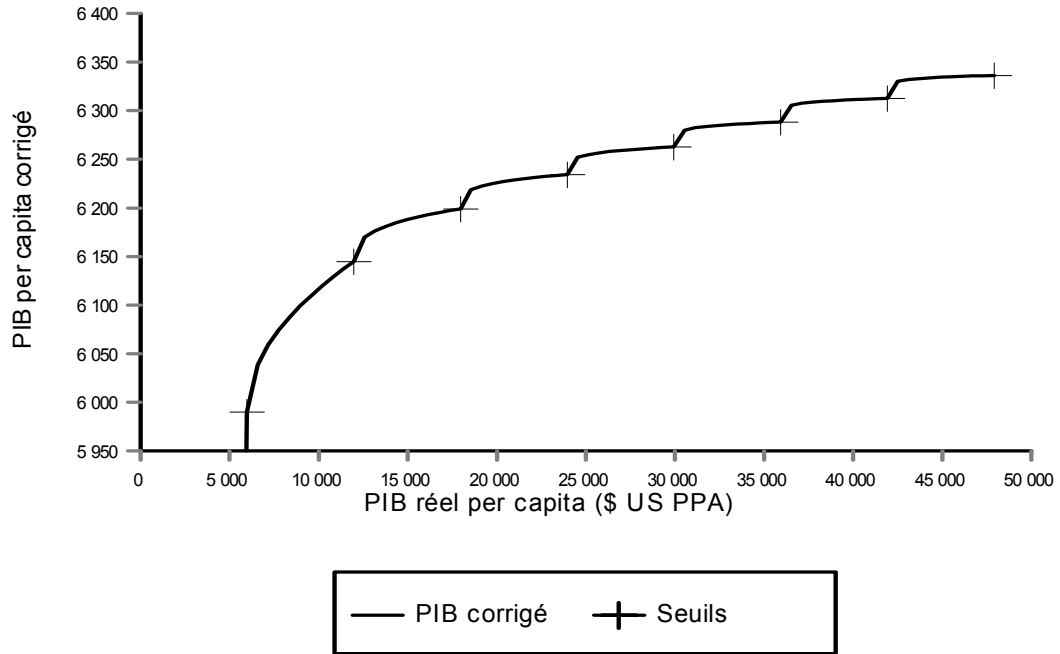
Enfin, la soi-disant formule d'Atkinson est symptomatique, à mes yeux, d'un fort penchant pour les formules absconses qui prévaut à l'occasion au sein de l'équipe qui compile l'IDH au PNUD : en l'occurrence, il semble que ces gens aient réussi à s'éblouir eux-mêmes. On se prend à espérer que cet exemple les incitera à s'appuyer aussi sur le gros bon sens.

---

<sup>2</sup> « [...] the construction of the HDI assumes that life is far less valuable in poor countries than in rich ones ».

Figure 1

**Utilité marginale décroissante?**  
Le PIB per capita dans l'IDH du PNUD



**Tableau 1 – Le taux de substitution d'une hausse de revenu est plus grand que celui d'une baisse**

|  | Données      |              |               |            |            | Indicateurs |       |       |       | Différences par rapport à la Grèce |               |            |            |         |
|--|--------------|--------------|---------------|------------|------------|-------------|-------|-------|-------|------------------------------------|---------------|------------|------------|---------|
|  | PIB per cap. | PIB Atkinson | Espér. de vie | Taux alph. | Taux scol. | Vie         | Éduc. | PIB   | IDH   | PIB per cap.                       | Espér. de vie | Taux alph. | Taux scol. | IDH     |
| Grèce  | 11636        | 6140         | 77,9          | 96,7       | 82         | 88,2%       | 91,8% | 97,3% | 0,924 | 0                                  | 0,00          | 0,00       | 0,00       |         |
| Grèce-2000   | 9636         | 6111         | 77,9          | 96,7       | 82         | 88,2%       | 91,8% | 96,8% | 0,922 | -2000                              | 0,00          | 0,00       | 0,00       | -0,0016 |
| Grèce+2000   | 13636        | 6180         | 77,9          | 96,7       | 82         | 88,2%       | 91,8% | 97,9% | 0,926 | 2000                               | 0,00          | 0,00       | 0,00       | 0,0021  |
| <b>Variations compensatoires de l'espérance de vie</b>     |              |              |               |            |            |             |       |       |       |                                    |               |            |            |         |
| Grèce-2000   | 9636         | 6111         | 78,2          | 96,7       | 82         | 88,6%       | 91,8% | 96,8% | 0,924 | -2000                              | 0,29          | 0,00       | 0,00       | 0,0000  |
| Grèce+2000   | 13636        | 6180         | 77,5          | 96,7       | 82         | 87,5%       | 91,8% | 97,9% | 0,924 | 2000                               | -0,39         | 0,00       | 0,00       | 0,0000  |
| <b>Variations compensatoires du taux d'alphabétisation</b> |              |              |               |            |            |             |       |       |       |                                    |               |            |            |         |
| Grèce-2000   | 9636         | 6111         | 77,9          | 97,4       | 82         | 88,2%       | 92,3% | 96,8% | 0,924 | -2000                              | 0,00          | 0,71       | 0,00       | 0,0000  |
| Grèce+2000   | 13636        | 6180         | 77,9          | 95,7       | 82         | 88,2%       | 91,2% | 97,9% | 0,924 | 2000                               | 0,00          | -0,97      | 0,00       | 0,0000  |
| <b>Variations compensatoires du taux de scolarisation</b>  |              |              |               |            |            |             |       |       |       |                                    |               |            |            |         |
| Grèce-2000   | 9636         | 6111         | 77,9          | 96,7       | 83         | 88,2%       | 92,3% | 96,8% | 0,924 | -2000                              | 0,00          | 0,00       | 1,43       | 0,0000  |
| Grèce+2000   | 13636        | 6180         | 77,9          | 96,7       | 80         | 88,2%       | 91,2% | 97,9% | 0,924 | 2000                               | 0,00          | 0,00       | -1,93      | 0,0000  |

**Table 2 – Interversions de rangs résultant de la correction proposée**

|                      | Espérance de vie à la naissance (années) 1995 | Taux d'alphab. des adultes (%) 1995 | Taux brut combiné d'inscription aux niveaux 1, 2 et 3 (%) 1995 | PIB réel per capita (\$PPA) 1995 | PIB réel per capita ajusté PNUD (\$PPA) 1995 | Indic. de Dévelop. Humain (IDH) 1995 | Rang p/r IDH | PIB réel per capita ajusté proposé (\$PPA) 1995 | IDH modifié | Rang p/r IDH modifié |
|----------------------|---|-------------------------------------|--|----------------------------------|--|--------------------------------------|--------------|---|-------------|----------------------|
| Suisse               | 78,2  | 99,0                                | 76   | 24881                            | 6254,05                                      | 0,9304                               | 16           | 6238,84   | 0,9295      | 17                   |
| Irlande              | 76,4  | 99,0                                | 88   | 17590                            | 6198,10                                      | 0,9304                               | 17           | 6195,82   | 0,9302      | 16                   |
| Chili                | 75,1  | 95,2                                | 73   | 9930                             | 6115,55                                      | 0,8935                               | 31           | 6091,82   | 0,8922      | 32                   |
| Bahamas              | 73,2  | 98,2                                | 72   | 15738                            | 6191,43                                      | 0,8931                               | 32           | 6178,97   | 0,8924      | 31                   |
| Argentine            | 72,6  | 96,2                                | 79   | 8498                             | 6090,16                                      | 0,8876                               | 36           | 6054,81   | 0,8857      | 37                   |
| Slovénie             | 73,2  | 96,0                                | 74   | 10594                            | 6125,71                                      | 0,8868                               | 37           | 6108,97   | 0,8859      | 36                   |
| Mexique              | 72,1  | 89,6                                | 67   | 6769                             | 6045,81                                      | 0,8546                               | 49           | 6010,13   | 0,8527      | 50                   |
| Saint Kitts et Nevis | 69,0  | 90,0                                | 78   | 10150                            | 6119,00                                      | 0,8541                               | 50           | 6097,50   | 0,8530      | 49                   |

## REFERENCES

---

- Anand, Sudhir et Ravallion, Martin (1993). Human development in poor countries: on the role of private incomes and public services. *Journal of Economic Perspectives*. Winter; 7(1):133-150.
- Atkinson, Anthony Barnes (1970) On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*. 2:244-263.
- Aturupane, Harcha; Glewwe, Paul, et Isenman, Paul (1994). Poverty, human development and growth : an emerging consensus. *American Economic Review*. May; 84(2):244-249.
- Noorbakhsh, Farhad (1998) A modified Human Development Index. *World Development*. 26(3):517-528.
- Programme des Nations-Unies pour le Développement (PNUD) (1990). *Rapport mondial sur le développement humain, 1990*. Paris: Economica.
- Programme des Nations-Unies pour le Développement (PNUD) (1998). *Rapport mondial sur le développement humain, 1998*. Paris: Economica.
- Ravallion, Martin (1997) Good and bad growth: The Human Development Reports. *World Development*. 25(5):631-638.
- Srinivasan, T. N. (1994). Human development: a new paradigm or reinvention of the wheel ? *American Economic Review*. May; 84(2):238-243.
- Streeten, Paul (1994). Human development: means and ends. *American Economic Review*. May; 84(2):232-237.
- Sugden, Robert (1993). Welfare, resources, and capabilities: A review of *Inequality Reexamined* by Amartya Sen. *Journal of Economic Literature*. Dec; 31(4):1947-1962.

### Données pour la figure 1

| PIB réel per capita<br>(\$PPA) 1995 | PIB réel per capita<br>(\$PPA) ajusté PNUD<br>1995 | Seuils |
|-------------------------------------|--|--------|
| y                                   | W(y)   |        |
| 5 990                               | 5 990  | 5 990  |
| 6 589                               | 6 039  |        |
| 7 188                               | 6 059  |        |
| 7 787                               | 6 075  |        |
| 8 386                               | 6 088  |        |
| 8 985                               | 6 099  |        |
| 9 584                               | 6 110  |        |
| 10 183                              | 6 120  |        |
| 10 782                              | 6 128  |        |
| 11 381                              | 6 137  |        |
| 11 980                              | 6 145  | 6 145  |
| 12 579                              | 6 170  |        |
| 13 178                              | 6 177  |        |
| 13 777                              | 6 181  |        |
| 14 376                              | 6 185  |        |
| 14 975                              | 6 188  |        |
| 15 574                              | 6 191  |        |
| 16 173                              | 6 193  |        |
| 16 772                              | 6 195  |        |
| 17 371                              | 6 197  |        |
| 17 970                              | 6 199  | 6 199  |
| 18 569                              | 6 219  |        |
| 19 168                              | 6 223  |        |
| 19 767                              | 6 225  |        |
| 20 366                              | 6 227  |        |
| 20 965                              | 6 229  |        |
| 21 564                              | 6 230  |        |
| 22 163                              | 6 231  |        |
| 22 762                              | 6 233  |        |
| 23 361                              | 6 234  |        |
| 23 960                              | 6 234  | 6 234  |
| 24 559                              | 6 252  |        |
| 25 158                              | 6 255  |        |
| 25 757                              | 6 257  |        |
| 26 356                              | 6 258  |        |
| 26 955                              | 6 259  |        |
| 27 554                              | 6 260  |        |
| 28 153                              | 6 261  |        |
| 28 752                              | 6 262  |        |
| 29 351                              | 6 262  |        |

**Données pour la figure 1 (suite)**

| PIB réel per capita<br>(\$PPA) 1995 | PIB réel per capita<br>(\$PPA) ajusté PNUD<br>1995 | Seuils |
|-------------------------------------|--|--------|
| y                                   | W(y)   |        |
| 29 950                              | 6 263  | 6 263  |
| 30 549                              | 6 280  |        |
| 31 148                              | 6 282  |        |
| 31 747                              | 6 284  |        |
| 32 346                              | 6 285  |        |
| 32 945                              | 6 286  |        |
| 33 544                              | 6 286  |        |
| 34 143                              | 6 287  |        |
| 34 742                              | 6 288  |        |
| 35 341                              | 6 288  |        |
| 35 940                              | 6 289  | 6 289  |
| 36 539                              | 6 306  |        |
| 37 138                              | 6 308  |        |
| 37 737                              | 6 309  |        |
| 38 336                              | 6 310  |        |
| 38 935                              | 6 310  |        |
| 39 534                              | 6 311  |        |
| 40 133                              | 6 312  |        |
| 40 732                              | 6 312  |        |
| 41 331                              | 6 312  |        |
| 41 930                              | 6 313  | 6 313  |
| 42 529                              | 6 331  |        |
| 43 128                              | 6 332  |        |
| 43 727                              | 6 333  |        |
| 44 326                              | 6 334  |        |
| 44 925                              | 6 335  |        |
| 45 524                              | 6 335  |        |
| 46 123                              | 6 335  |        |
| 46 722                              | 6 336  |        |
| 47 321                              | 6 336  |        |
| 47 920                              | 6 336  | 6 336  |