

**Record Number:** 11970  
**Author, Monographic:** Fortin, V.//Bobée, B.  
**Author Role:**  
**Title, Monographic:** Incertitude sur le débit mesuré à l'aide d'un courantomètre *AFFRA*  
**Translated Title:**  
**Reprint Status:**  
**Edition:**  
**Author, Subsidiary:**  
**Author Role:**  
**Place of Publication:** Québec  
**Publisher Name:** INRS-Eau  
**Date of Publication:** 1996  
**Original Publication Date:** Juin 1996  
**Volume Identification:**  
**Extent of Work:** 88  
**Packaging Method:** pages incluant un annexe  
**Series Editor:**  
**Series Editor Role:**  
**Series Title:** INRS-Eau, rapport de recherche  
**Series Volume ID:** 469  
**Location/URL:**  
**ISBN:** 2-89146-433-8  
**Notes:** Rapport annuel 1996-1997  
**Abstract:** ISBN double avec le R000438  
15.00\$  
**Call Number:** R000469  
**Keywords:** rapport/ ok/ dl

**INCERTITUDE SUR LE DÉBIT MESURÉ À  
L'AIDE D'UN COURANTOMÈTRE *AFFRA***

**INCERTITUDE SUR LE DÉBIT MESURÉ  
À L'AIDE D'UN COURANTOMÈTRE *AFFRA***

Rapport rédigé pour

**Klaus Wiebe  
Environnement Canada  
Service de l'Environnement atmosphérique**

par

**Vincent Fortin  
Bernard Bobée**

**Institut national de la recherche scientifique, INRS-Eau  
2800, rue Einstein, Case postale 7500, SAINTE-FOY (Québec), G1V 4C7**

**Rapport de recherche No R-469**

**Juin 1996**



## RÉSUMÉ

---

Pour permettre l'estimation du débit d'une rivière en continu lorsqu'il est difficile d'obtenir une estimation précise à partir du niveau, Environnement Canada a développé un courantomètre acoustique adapté à ses besoins, l'AFFRA (pour *Acoustic Flowmeter For Remote Areas*, Environnement Canada 1988). La précision des mesures de vitesse du courantomètre AFFRA a été évaluée en laboratoire (Engel et Fast 1988). À partir de ces résultats, le présent rapport discute de l'incertitude sur les estimations du débit obtenues à partir des vitesses mesurées.

Les résultats de cette analyse de l'incertitude des débits mesurés par l'AFFRA suggèrent une méthode plus adaptée pour la calibration de l'appareil à partir de jaugeages, étape nécessaire lorsqu'un seul faisceau acoustique est installé au site. L'utilisation de l'AFFRA pour établir plus rapidement et avec plus de précision la relation niveau-débit d'une section de contrôle est étudiée de façon particulière, de même que l'estimation du débit en présence d'un couvert de glace. L'analyse théorique suggère que la précision de la relation niveau-débit établie en utilisant un courantomètre AFFRA calibré à l'aide de jaugeages risque fort d'être du même ordre de grandeur que celle de la relation niveau-débit établie directement à partir des quelques jaugeages de calibration; l'utilisation de deux paires de transducteurs permettant une calibration par modélisation du profil de vitesse semble plus prometteuse.

Deux exemples d'application de la méthodologie proposée sont présentés: l'estimation de la relation niveau-débit au reversoir 3, une structure de contrôle située sur le Fleuve Saint-Laurent près de Sorel, et l'estimation des débits d'hiver sur la Red River près d'Emerson. Dans le premier cas, l'utilisation de l'AFFRA permet de mettre en évidence une relation niveau-débit complexe, mais des doutes subsistent sur la qualité de l'information parce que l'appareil est calibré à partir de jaugeages.. Dans le second cas, l'utilisation de l'AFFRA permet d'évaluer les débits en présence de glace avec une précision de l'ordre de 3% 19 fois sur 20.

Enfin, une méthodologie est proposée pour estimer et prévoir la valeur économique de l'installation d'un courantomètre AFFRA à un site, en tenant compte de l'utilisation qui sera faite des données obtenues.

## REMERCIEMENTS

---

Ce rapport a été rendu possible grâce à la collaboration du personnel d'Environnement Canada rattaché à la direction de l'Environnement Atmosphérique (division Monitoring et Technologies), et plus particulièrement:

- Monsieur Jean-François Cantin, hydrologue régional;
- Monsieur Jacques Laroche, technicien spécialisé en hydrométrie;
- Monsieur Guy Morin, technicien spécialisé en hydrométrie.

Pour les aspects techniques de ce travail, nous avons eu recours à l'expertise de Monsieur François Godin, consultant en environnement. Les conseils et renseignements qu'il nous a fournis ont été très appréciés.



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>1. INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
<b>2. FONCTIONNEMENT DE L’AFFRA.....</b>	<b>3</b>
2.1 ESTIMATION DE LA VITESSE DU COURANT.....	3
2.2 ESTIMATION DU NIVEAU D’EAU.....	4
2.3 ESTIMATION DE LA TEMPÉRATURE.....	5
2.4 INDICE DE QUALITÉ DES MESURES.....	5
2.5 ESTIMATION DU DÉBIT.....	5
2.6 PRÉCISION DE L’ESTIMATION DE L’AIRE DE LA SECTION D’ÉCOULEMENT.....	6
2.7 PRÉCISION DES MESURES DE VITESSE.....	6
<b>3. CALIBRATION DE L’AFFRA.....</b>	<b>11</b>
3.1 CHOIX DE LA FORME PARAMÉTRIQUE DU MODÈLE DE $K(H)$ : CRITÈRE D’AKAIKE.....	11
3.2 CALIBRATION À L’AIDE DE JAUGEAGES MANUELS.....	12
3.2.1 <i>Jaugeages au moulinet Price: avantages, inconvénients et précision.....</i>	<i>13</i>
3.2.2 <i>Jaugeages au profileur acoustique à effet Doppler: avantages, inconvénients et précision.....</i>	<i>14</i>
3.2.3 <i>Précision du rapport de la vitesse moyenne à la vitesse mesurée par l’AFFRA.....</i>	<i>15</i>
3.2.4 <i>Précision de la fonction de calibration estimée.....</i>	<i>16</i>
3.2.4.1 Estimation de la précision sous l’hypothèse d’identique distribution des erreurs.....	17
3.2.4.2 Estimation de la précision de la fonction de calibration par Jackknife.....	17
3.2.5 <i>Interprétation de l’estimation de la précision de la fonction de calibration.....</i>	<i>18</i>
3.3 CALIBRATION PAR MODÉLISATION DU PROFIL DE VITESSE.....	19
3.3.1 <i>Estimation du débit sans établir de courbe de calibration.....</i>	<i>20</i>
3.3.2 <i>Estimation du débit à l’aide d’une courbe de calibration.....</i>	<i>21</i>
3.3.3 <i>Limites de la méthode de calibration par modélisation du profil de vitesse.....</i>	<i>21</i>
<b>4. INCERTITUDE SUR LES DÉBITS MESURÉS PAR L’AFFRA.....</b>	<b>23</b>
4.1 INCERTITUDE, VARIABILITÉ ET ERREUR SYSTÉMATIQUE.....	23
4.2 EFFET DE LA CALIBRATION SUR L’INCERTITUDE.....	24
<b>5. INCERTITUDE SUR UNE RELATION NIVEAU-DÉBIT ÉTABLIE À L’AIDE DE L’AFFRA.....</b>	<b>29</b>
<b>6. INCERTITUDE SUR LE DÉBIT EN PRÉSENCE DE GLACE.....</b>	<b>33</b>
<b>7. APPLICATIONS.....</b>	<b>35</b>

7.1 ESTIMATION D'UNE RELATION NIVEAU-DÉBIT AU REVERSOIR 3 (SAINT-LAURENT) .....	35
7.1.1 Relation niveau-surface .....	35
7.1.2 Calibration de l'AFFRA.....	36
7.1.2.1 Précision des jaugeages .....	36
7.1.2.2 Précision des estimations du rapport $v_m/v_a$ .....	38
7.1.2.3 Modélisation de la relation $K(h)=v_m/v_a$ .....	39
7.1.2.4 Précision de la relation $K(h)$ estimée .....	40
7.1.3 Calibration d'une relation niveau-débit à l'aide de l'AFFRA.....	41
7.1.3.1 Forme paramétrique de la relation niveau-débit au reversoir 3 .....	42
7.1.3.2 Courbe de tarage établie à partir des jaugeages de calibration .....	44
7.1.3.3 Utilisation de l'AFFRA pour améliorer la courbe de tarage .....	45
7.1.4 Information obtenue par l'utilisation de l'AFFRA au reversoir 3 .....	49
7.2 ESTIMATION DU DÉBIT EN PRÉSENCE DE GLACE (RED RIVER À EMERSON) .....	50
7.2.1 Calibration de l'AFFRA.....	51
7.2.1.1 Précisions des estimations du rapport $v_m/v_a$ .....	52
7.2.1.2 Modélisation de la relation $K(h)=v_m/v_a$ .....	53
7.2.2 Incertitude sur les débits estimés à l'aide de l'AFFRA .....	55
<b>8. VALEUR DE L'INFORMATION FOURNIE PAR L'AFFRA .....</b>	<b>59</b>
8.1 INTERPRÉTATION BAYÉSIENNE DES PROBABILITÉS.....	60
8.2 FACTEURS À CONSIDÉRER POUR L'ESTIMATION DE LA VALEUR DE L'INFORMATION .....	60
8.3 ANALYSE POSTÉRIEURE DE LA VALEUR DE L'INFORMATION.....	62
8.4 ANALYSE PRÉVISIONNELLE DE LA VALEUR DE L'INFORMATION.....	63
8.5 VALEUR DE L'AFFRA POUR ÉTABLIR UNE RELATION NIVEAU-DÉBIT .....	63
8.6 EXTENSION DE L'ANALYSE À L'ENSEMBLE D'UN RÉSEAU HYDROMÉTRIQUE.....	66
<b>9. CONCLUSION .....</b>	<b>67</b>
<b>10. RÉFÉRENCES .....</b>	<b>69</b>
<b>ANNEXE A: RÉGRESSION PAR MOINDRES CARRÉS PONDÉRÉS .....</b>	<b>71</b>

## LISTE DES TABLEAUX

---

TABLEAU 1: ÉCART-TYPE DES MESURES DE VITESSE DE L'AFFRA (RÉSUMÉ DES RÉSULTATS DE L'ÉTUDE DE LABORATOIRE DE ENGEL ET FAST 1988).....	7
TABLEAU 2: DONNÉES SERVANT À LA CALIBRATION DE L'AFFRA AU RÉVERSOIR 3 .....	36
TABLEAU 3: MESURES INDIVIDUELLES DE VITESSE OBTENUES À L'AIDE DE L'ADCP POUR 3 JAUGEAGES AU RÉVERSOIR 3 .....	37
TABLEAU 4: ÉCART-TYPE DES MESURES DE VITESSE D'ÉCOULEMENT AU RÉVERSOIR 3 LORS DES CAMPAGNES DE JAUGEAGE.....	37
TABLEAU 5: ÉCART-TYPE DU RAPPORT $V_M/V_A$ POUR LES JAUGEAGES RÉALISÉS AU RÉVERSOIR 3 .....	38
TABLEAU 6: CRITÈRE D'AKAIKE POUR DIFFÉRENTS MODÈLES DE $K(H)$ AU RÉVERSOIR 3 .....	40
TABLEAU 7: APPROXIMATION DE L'ÉCART-TYPE DE L'ESTIMATION DE $K(H)$ PAR JACKKNIFE..	41
TABLEAU 8: BATHYMÉTRIE DU RÉVERSOIR 3.....	43
TABLEAU 9: DONNÉES SERVANT À LA CALIBRATION DE L'AFFRA À EMERSON (RED RIVER)....	52
TABLEAU 10: ÉCART-TYPE DU RAPPORT $V_M/V_A$ POUR LES JAUGEAGES RÉALISÉS À EMERSON.	52



# LISTE DES FIGURES

---

FIGURE 1: CONFIGURATION D'UNE PAIRE DE TRANSDUCTEURS D'UN SYSTÈME AFFRA (ADAPTÉE DE LAENEN ET SMITH 1983).....	3
FIGURE 2: ÉCART-TYPE DE LA VITESSE MESURÉE PAR L'AFFRA (SELON WIEBE ET AL. 1993).....	8
FIGURE 3: MODÉLISATION DU RAPPORT $V_M/V_A$ EN FONCTION DE $H$ .....	39
FIGURE 4: FONCTION DE CALIBRATION AU RÉVERSOIR 3, AVEC INTERVALLE DE CONFIANCE À 95%.....	41
FIGURE 5: BATHYMÉTRIE DU RÉVERSOIR 3.....	43
FIGURE 6: COURBE DE TARAGE ÉTALBIE À PARTIR DES JAUGEAGES DE CALIBRATION AU RÉVERSOIR 3.....	45
FIGURE 7: RELATION NIVEAU-DÉBIT THÉORIQUE ÉTABLIE À L'AIDE DE L'AFFRA AU RÉVERSOIR 3.....	46
FIGURE 8: DISTRIBUTION DES RÉSIDUS DE LA RELATION NIVEAU-DÉBIT THÉORIQUE AJUSTÉE AUX DÉBITS MESURÉS PAR L'AFFRA AU RÉVERSOIR 3.....	47
FIGURE 9: RELATION NIVEAU-DÉBIT EMPIRIQUE ÉTABLIE À L'AIDE DE L'AFFRA AU RÉVERSOIR 3.....	48
FIGURE 10: DISTRIBUTION DES RÉSIDUS DE LA RELATION NIVEAU-DÉBIT EMPIRIQUE AJUSTÉE AUX DÉBITS MESURÉS PAR L'AFFRA AU RÉVERSOIR 3.....	49
FIGURE 11: COMPARAISON DE LA RELATION $Q(H)$ THÉORIQUE ÉTABLIE À PARTIR DES JAUGEAGES AVEC LA RELATION $Q(H)$ EMPIRIQUE ÉTABLIE À L'AIDE DE L'AFFRA AU RÉVERSOIR 3.....	50
FIGURE 12: EXTRAPOLATION DE LA FONCTION $K(H)$ CALBRÉE EN EAUX LIBRES POUR LES JAUGEAGES EN PRÉSENCE DE GLACE À EMERSON (RED RIVER).....	53
FIGURE 13: CALIBRATION DE LA FONCTION $K(H)$ À PARTIR DES 6 JAUGEAGES À EMERSON (RED RIVER).....	54
FIGURE 14: AIRE DE LA SECTION D'ÉCOULEMENT EN FONCTION DE LA HAUTEUR D'EAU À EMERSON (RED RIVER).....	55
FIGURE 15: RELATION NIVEAU-DÉBIT ÉTALIE À PARTIR DE 6 JAUGEAGES À EMERSON (RED RIVER).....	56
FIGURE 16: ERREUR MAXIMALE COMMISE SUR LE DÉBIT 19 FOIS SUR 20.....	57



# 1. INTRODUCTION

---

Environnement Canada travaille depuis près de dix années au perfectionnement d'un courantomètre acoustique, nommé AFFRA (pour *Acoustic Flowmeter For Remote Areas*) qui peut être installé en permanence dans la section d'écoulement d'une rivière pour estimer en continu le débit à partir de la vitesse d'écoulement (Environnement Canada 1988). La précision des mesures de vitesse effectuées à l'aide de l'AFFRA a été déterminé en laboratoire (Engel et Fast 1988). Ce rapport a pour objectif d'étudier l'incertitude sur les débits mesurés par l'AFFRA, qui sont obtenus en appliquant une correction de calibration au produit de la vitesse mesurée et de l'aire de la section d'écoulement.

De cette étude théorique de l'incertitude sur les débits nous obtiendrons une façon simple d'estimer l'erreur commise par l'AFFRA mais aussi des recommandations permettant de réduire cette erreur, entre autres en optimisant le processus de calibration. Nous étudierons plus en profondeur deux utilisations de l'AFFRA:

- pour établir une relation niveau-débit précise rapidement;
- pour estimer le débit en présence d'un couvert de glace.

Pour ces deux utilisations, nous comparerons sommairement la qualité des données fournies par l'AFFRA avec ce que peut raisonnablement donner l'estimation du débit à partir du niveau mesuré à l'aide d'un limnimètre à pression. Le modèle d'incertitude proposé sera ensuite appliqué pour deux cas d'études, permettant ainsi de le vérifier, et du même coup de tirer des conclusions intéressantes sur l'utilité de l'AFFRA à ces deux sites:

- estimation de la relation niveau-débit au reversoir 3 (Fleuve Saint-Laurent près de Sorel);
- estimation du débit en présence de glace à Emerson (sur la Red River).

Enfin, nous proposerons une méthodologie permettant d'évaluer et de prédire la valeur économique des données fournies par l'AFFRA, en fonction des caractéristiques du site et de l'utilisation subséquente des données.



## 2. FONCTIONNEMENT DE L'AFFRA

Le débit  $Q$  d'une rivière est, par définition, le produit de la vitesse moyenne  $v_m$  et de l'aire  $A$  de la section d'écoulement, qui est une fonction de la hauteur d'eau  $h$  à cet endroit:

$$Q = v_m \cdot A(h) \quad (1)$$

On peut donc estimer  $Q$  à partir de mesures de  $v_m$  et de  $h$ , si l'on connaît la bathymétrie de la section d'écoulement. L'AFFRA permet de mesurer ainsi le débit à partir de la vitesse. L'appareil ne mesure cependant pas la vitesse moyenne de l'écoulement mais plutôt la vitesse à un ou deux niveaux d'eau fixés (donc à des profondeurs variables). La vitesse moyenne pour toute la colonne d'eau est estimée à partir de ces mesures. Comme l'indique la Figure 1, à chaque niveau auquel la vitesse est mesurée, deux transducteurs (émetteurs-récepteurs) sont installés. Le niveau d'eau, quant à lui, peut aussi être mesuré à un ou deux endroits, à l'aide de sondes-niveau acoustiques installées juste au-dessus des transducteurs.

### 2.1 Estimation de la vitesse du courant

À chaque niveau où est installé une paire de transducteurs, le courantomètre AFFRA procède comme l'indique la Figure 1: il mesure le temps que prend une onde sonore pour parcourir à l'aller et au retour la distance entre les deux transducteurs  $A$  et  $C$ , séparés d'une distance  $B$  et faisant un angle  $\theta$  avec la direction du courant, ce qui permet de déterminer à la fois la vitesse  $c$  du son dans l'eau et la vitesse du courant  $v_a$  au niveau du chemin de l'onde. En effet, on peut exprimer le temps  $t_{AC}$  que prend une onde pour parvenir de  $A$  à  $C$  et le temps  $t_{CA}$  que prend une onde pour parvenir de  $C$  à  $A$  respectivement par les équations (2) et (3):

$$t_{AC} = \frac{B}{c - v_p} \quad (2)$$

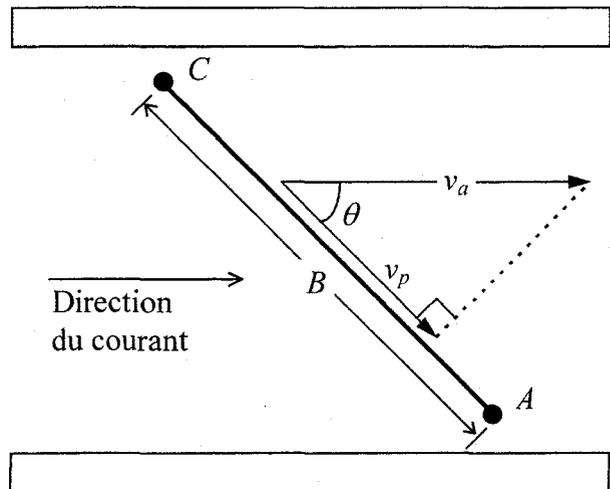


Figure 1: Configuration d'une paire de transducteurs d'un système AFFRA (adaptée de Laenen et Smith 1983)

$$t_{CA} = \frac{B}{c + v_p} \quad (3)$$

où  $v_p$  est la composante de la vitesse  $v_a$  parallèle au segment  $AC$ . En observant la Figure 1, on note finalement la relation suivante entre  $v_a$  et  $v_p$ :

$$v_p = v_a \cdot \cos \theta \quad (4)$$

En combinant les trois équations précédentes, on peut isoler à la fois la vitesse du son dans l'eau  $c$  et la vitesse du courant à la profondeur des transducteurs  $v_a$ :

$$v_a = \frac{B}{2 \cdot \cos \theta} \left( \frac{1}{t_{CA}} - \frac{1}{t_{AC}} \right) \quad (5)$$

$$c = \frac{B}{2} \left( \frac{1}{t_{CA}} + \frac{1}{t_{AC}} \right) \quad (6)$$

Notons qu'en pratique chaque mesure de  $v_a$  et de  $c$  est obtenue en faisant la moyenne des valeurs obtenues pour un ensemble d'impulsions.

## 2.2 Estimation du niveau d'eau

En utilisant la vitesse du son, il est possible d'estimer la profondeur d'eau  $d$  au-dessus d'un transducteur équipé d'une sonde-niveau acoustique. La sonde mesure le temps  $t_s$  que prend une onde sonore pour atteindre la surface et être réfléchiée vers l'appareil, qui est relié à la profondeur  $d$  selon l'équation suivante:

$$d = \frac{1}{2} \cdot t_s \cdot c \quad (7)$$

Le niveau d'eau  $h$  peut alors être déterminé en additionnant  $d$  à la hauteur  $h_a$  à laquelle sont installés les deux transducteurs:

$$h = \frac{t_s \cdot B}{4} \cdot \left( \frac{1}{t_{CA}} + \frac{1}{t_{AC}} \right) + h_a \quad (8)$$

Notons en passant que cette méthode acoustique permet d'obtenir des estimations précises du niveau d'eau en hiver en déterminant réellement la position de l'interface eau-glace, alors qu'un limnimètre à bulles mesure plutôt la pression totale causée par l'eau, la glace et éventuellement la neige déposée sur le couvert, menant à une surestimation du niveau réel.

### 2.3 Estimation de la température

Les données brutes du courantomètre AFFRA permettent aussi d'estimer une autre variable, moins utile cependant pour déterminer le débit: la température de l'eau. En effet, en eau douce la vitesse du son dans l'eau est déterminée par sa température (Drenthen 1986).

### 2.4 Indice de qualité des mesures

L'AFFRA fournit enfin un indice de qualité pour chaque mesure, qui correspond au pourcentage d'impulsions acceptables parmi les impulsions émises. Une impulsion n'est pas acceptable si le rapport signal/bruit est insuffisant, ou si d'autres conditions d'opération particulières ne sont pas rencontrées (Wiebe et al. 1993).

### 2.5 Estimation du débit

Les données obtenues à partir de l'AFFRA et pertinentes pour calculer le débit sont donc:

- la vitesse du courant à la hauteur de chaque paire (une ou deux) de transducteurs;
- la hauteur d'eau au dessus d'un ou deux transducteurs.

Il n'est pas possible d'évaluer directement le débit à partir de ces mesures. Il faut en effet d'abord:

- déterminer la relation déterministe  $A(h)$  qui existe entre la hauteur d'eau et l'aire de la section d'écoulement à partir de la bathymétrie;
- estimer la vitesse moyenne  $v_m$  à partir de la vitesse  $v_a$  à la hauteur des transducteurs et de la hauteur d'eau:  $v_m = f(v_a, h)$ , une fonction que l'on suppose généralement de la forme  $v_m = K(h) \cdot v_a$ .

Alors que la première tâche est relativement facile, la seconde demande réflexion et sera discutée plus en détail. Il faut aussi réaliser que dans tous les cas on ne mesure aucune variable sans erreur. Au lieu d'obtenir exactement la valeur de  $h$  et  $v_a$ , on dispose plutôt d'estimateurs  $\hat{h}$  et  $\hat{v}_a$  de ces quantités, ainsi que d'une approximation  $\hat{A}(\cdot)$  de l'aire de la section d'écoulement et d'une estimation  $\hat{K}(h)$  de la relation entre  $v_m/v_a$  et  $h$ . À partir de ces estimations, on obtient donc évidemment une approximation  $\hat{Q}$  du débit réel  $Q$ :

$$\hat{Q} = \hat{A}(\hat{h}) \cdot \hat{K}(\hat{h}) \cdot \hat{v}_a \quad (9)$$

En pratique cependant, il sera nécessaire de supposer que  $h$  est mesuré sans erreur pour pouvoir étudier analytiquement l'incertitude sur  $Q$ . En effet, on simplifiera le problème en déterminant l'incertitude sur  $Q$  pour  $h$  fixé. On étudiera donc concrètement l'approximation suivante:

$$\hat{Q} = \hat{A}(h) \cdot \hat{K}(h) \cdot \hat{v}_a \quad (10)$$

Le reste de ce travail sera consacré principalement à estimer l'écart entre  $\hat{Q}$  et  $Q$ , et à proposer des façons de le réduire, par exemple en estimant la fonction  $K(h)$  de façon optimale. Nous étudierons brièvement l'erreur sur  $A(h)$ , plus en détail la précision des mesures  $\hat{v}_a$ , et nous consacrerons le chapitre suivant à la fonction  $K(h)$ .

## 2.6 Précision de l'estimation de l'aire de la section d'écoulement

En théorie l'aire d'une section d'écoulement est une fonction déterministe du niveau d'eau si les berges sont stables, et peut être établie presque sans erreur à partir de la bathymétrie. Cependant, il faut considérer que l'AFFRA mesure la vitesse du courant sur une portion de la rivière ayant une longueur non négligeable, exprimée par  $B \cdot \cos \theta$ . Ce n'est donc que l'aire moyenne sur cette distance qu'il est possible d'établir avec précision. Évidemment, il ne devrait pas exister une variation importante de l'aire de la section d'écoulement entre les points  $A$  et  $C$  si la section choisie pour l'installation de l'AFFRA est appropriée. On peut donc en général négliger l'erreur sur l'aire de la section d'écoulement si celle-ci est établie à partir d'une bathymétrie précise; dans le cas contraire, il faudrait remettre en cause le site choisi pour l'installation de l'AFFRA. Une façon de mesurer l'imprécision sur l'aire de la section, si l'on veut tout de même en tenir compte, est de déterminer la bathymétrie pour plusieurs sections entre  $A$  et  $C$ , et d'établir l'aire de chaque section en fonction du niveau d'eau. La variabilité de ces fonctions pour  $h$  fixé donne alors une mesure de l'incertitude sur l'aire de la section efficace entre  $A$  et  $C$ .

## 2.7 Précision des mesures de vitesse

La précision de la vitesse  $\hat{v}_a$  mesurée à la profondeur des transducteurs a été étudiée au laboratoire d'hydraulique de l'Institut national de recherche sur les eaux par Engel et Fast (1988). Les résultats principaux ont été reproduits par Wiebe et al. (1993). Un courantomètre AFFRA fut installé sur une plate-forme mobile, tirée à une vitesse fixe et connue au dessus d'un bassin pour permettre de comparer les mesures de l'AFFRA avec la vitesse de la plate-forme, pour des vitesses réelles allant de 0 à 3 m/s. Il n'a cependant pas été possible d'établir

adéquatement la précision de l'appareil pour des vitesses de l'ordre de 2 m/s; il semble que les conditions hydrauliques engendrées par le montage déplacé dans le bassin à cette vitesse engendre une onde de pression ayant un effet sensible sur les résultats (Wiebe et al. 1993).

En combinant les résultats des tableaux A1 à A6 et A8 à A14 de Wiebe et al. (1993), on obtient une importante quantité d'information sur la variabilité des estimations  $\hat{v}_a$  de la vitesse réelle  $v_a$ , qui est résumée par le Tableau 1. On retrouve, pour chaque vitesse de la plate-forme, l'écart-type des estimations  $\hat{v}_a$  et le nombre d'observations sur lequel est basé chaque évaluation de l'écart-type. On observe que pour les vitesses de 2.0 m/s et 2.2 m/s la variabilité est décuplée. Comme expliqué ci-haut, il s'agirait d'un artefact expérimental. Nous ne tiendrons donc pas compte des essais effectués à ces vitesses.

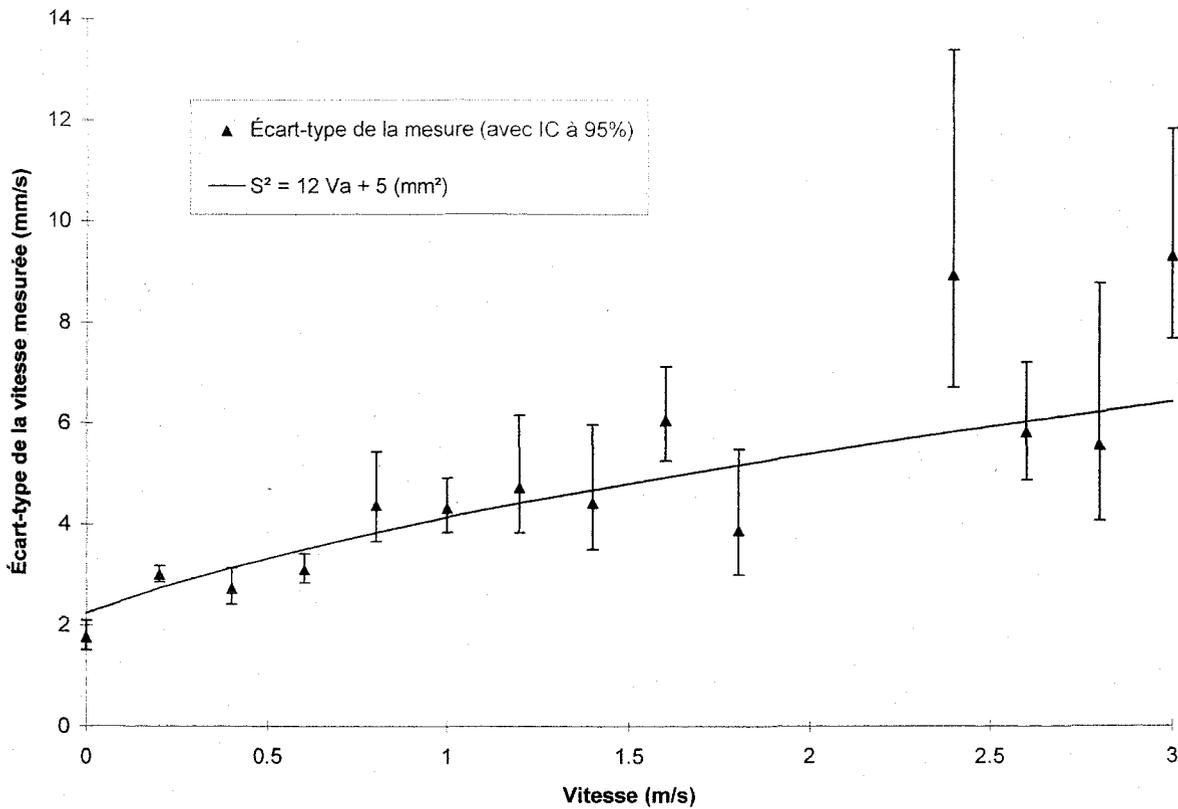
**Tableau 1: Écart-type des mesures de vitesse de l'AFFRA**  
(résumé des résultats de l'étude de laboratoire de Engel et Fast, 1988)

vitesse réelle $v_a$ (m/s)	écart-type $S(\hat{v}_a)$ (mm/s)	nombre $n$ de tests	vitesse réelle $v_a$ (m/s)	écart-type $S(\hat{v}_a)$ (mm/s)	nombre $n$ de tests
0.0	1.8	74	1.6	6.0	84
0.2	3.0	655	1.8	3.9	23
0.4	2.7	112	2.0	34.2	59
0.6	3.1	226	2.2	21.5	18
0.8	4.4	51	2.4	8.9	18
1.0	4.3	129	2.6	5.8	52
1.2	4.7	36	2.8	5.6	15
1.4	4.4	29	3.0	9.3	43

Pour chaque vitesse  $v_a$ , on peut aisément obtenir un intervalle de confiance pour chaque variance  $\sigma(\hat{v}_a)$  à partir de  $S(\hat{v}_a)$  et de  $n$ , si l'on suppose que la distribution de  $\hat{v}_a$  est normale. En effet, la statistique  $X^2 = (n-1) \cdot S^2(\hat{v}_a) / \sigma^2(\hat{v}_a)$  est distribuée selon une Chi-deux ayant  $\nu = n-1$  degrés de liberté (Walpole et Myers 1985). Conséquemment, un intervalle de confiance de niveau  $100(1-\alpha)\%$  pour  $\sigma(\hat{v}_a)$  est donné par:

$$\Pr \left[ \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\hat{v}_a)}{\chi_{\alpha/2}^2}} < \sigma(\hat{v}_a) < \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\hat{v}_a)}{\chi_{1-\alpha/2}^2}} \right] = 1 - \alpha \quad (11)$$

où  $\chi_{\alpha/2}^2$  est le quantile de probabilité au dépassement  $\alpha/2$  de la distribution du Chi-deux à  $\nu = n-1$  degrés de liberté. Notons de plus que puisque la variance d'une Chi-deux est  $2\nu$  (Walpole et Myers 1985), la variance de  $S^2(\hat{v}_a)$  est donc  $2/(n-1) \cdot \sigma^4(\hat{v}_a)$ .



**Figure 2: Écart-type de la vitesse mesurée par l'AFFRA (selon Wiebe et al. 1993)**

En traçant  $S(\hat{v}_a)$  en fonction de  $v_a$ , on obtient la Figure 2. On voit alors clairement que l'écart-type de  $\hat{v}_a$  augmente lentement avec la vitesse  $v_a$ , de même que la variabilité de cet écart-type, telle qu'exprimée par l'intervalle de confiance à 95%. L'écart-type correspondant à une vitesse de 2.4 et 3.0 m/s semble anormalement élevé; l'artefact expérimental causant des résultats erronés autour de 2 m/s peut probablement expliquer cet écart pour  $v_a=2.4$  m/s. Dans tous les cas cependant l'écart-type est inférieur à 1 cm/s.

Pour simplifier légèrement les calculs subséquents, il serait utile de disposer d'une fonction simple permettant de prédire  $\sigma(\hat{v}_a)$  en fonction de  $v_a$ . Il n'est cependant pas approprié d'ajuster un modèle à l'aide de la méthode des moindres carrés, puisque la variabilité des mesures n'est pas la même pour tous les points. Une méthode plus adéquate consiste à minimiser la somme des carrés des erreurs pondérées par leur variance. Les détails mathématiques de cette méthode sont donnés à l'Annexe A. Il s'agit d'une méthode d'ajustement que nous utiliserons constamment dans cette étude. Au lieu de minimiser la fonction  $\sum [y_i - f(x_i)]^2$  pour ajuster un modèle  $f$  à des données  $(x_i, y_i)$ , on minimise plutôt

$\sum [y_i - f(x_i)]^2 / \sigma_i^2$ , où  $\sigma_i^2$  est la variance de la mesure  $y_i$ . L'avantage de cette méthode est de donner plus de poids aux points de mesure les plus précis.

On ne connaît pas la variance de  $S(\hat{v}_a)$  mais celle de  $S^2(\hat{v}_a)$  a été établie à  $2/(n-1) \cdot \sigma^4(\hat{v}_a)$ , que l'on peut estimer par  $2/(n-1) \cdot S^4(\hat{v}_a)$ . Il est donc possible d'appliquer la méthode des moindres carrés pondérés pour déterminer une fonction permettant de prédire  $\sigma^2(\hat{v}_a)$ , et par conséquent  $\sigma(\hat{v}_a)$ . Nous avons choisi par souci de simplicité une fonction linéaire pour  $\sigma^2(\hat{v}_a)$ , dont l'ajustement est présenté à la Figure 2. On remarque que la courbe ajuste raisonnablement bien les points, en particulier pour les vitesses de moins de 2 m/s, ce qui est une conséquence prévisible de l'utilisation de la méthode des moindres carrés pondérés puisque ces points sont plus précis. L'équation de cette courbe est simplement  $\sigma^2(\hat{v}_a) = 12 v_a + 5$ , où  $v_a$  est exprimé en m/s, et  $\sigma(\hat{v}_a)$  est exprimé en mm.

La variabilité d'une mesure de  $\hat{v}_a$  obtenue en laboratoire devrait en pratique être supérieure à celle des mesures obtenues sur le terrain. En effet, le montage minimisait la distance entre les transducteurs, maximisant ainsi les erreurs de chronométrage. De plus, l'erreur obtenue porte sur une seule impulsion, alors qu'un grand nombre d'impulsions peuvent être combinées pour obtenir une seule mesure de  $\hat{v}_a$ . Si  $m$  impulsions sont utilisées et que l'on suppose l'erreur sur chacune de ces impulsions indépendante des autres, le théorème central limite permet d'affirmer que la variance de la moyenne des vitesses mesurées pour les  $m$  impulsions sera  $\sigma^2(\hat{v}_a)/m$  (Walpole et Myers 1985). Pour  $m$  fixé, la variance réelle des mesures de  $\hat{v}_a$  devrait être proportionnelle, et non égale, à  $12 v_a + 5 \text{ mm}^2$ . Parce que nous ne connaissons pas l'amplitude de l'erreur réelle, nous supposons cependant celle-ci égale à sa borne maximum dans ce qui suit. L'écart-type de l'estimation de  $v_a$  est tout de même relativement faible, et n'atteint pas 7 mm/s pour des vitesses usuelles (si l'on considère le modèle ajusté plus haut). Il existe par contre une autre source potentielle d'erreur sur les mesures de débit obtenues à l'aide de l'AFFRA: la calibration de l'appareil.



### 3. CALIBRATION DE L'AFFRA

---

Comme mentionné à la section précédente l'AFFRA doit être calibré pour permettre d'estimer le débit. En effet l'AFFRA estime la vitesse  $v_a$  à la hauteur des transducteurs, et non la vitesse moyenne  $v_m$  dans la section d'écoulement, nécessaire pour évaluer le débit. On suppose en pratique que ces deux quantités sont proportionnelles pour  $h$  fixé:

$$v_m = K(h) \cdot v_a \quad (12)$$

Il existe deux façons d'obtenir une estimation de la fonction  $K(h)$ : soit à l'aide d'un ensemble de jaugeages manuels donnant directement des estimations de  $v_m$  que l'on peut comparer avec les mesures de  $v_a$  et de  $h$  fournies par l'AFFRA, soit par modélisation du profil de vitesse vertical, ce qui requiert que deux paires de transducteurs soient installés pour mesurer la vitesse à deux hauteurs différentes. Les deux méthodes, que nous décrirons plus loin, nécessitent de fixer la forme paramétrique de la fonction  $K(h|\theta)$ , dont les paramètres  $\theta$  sont ensuite estimés par régression. Il faut donc se pencher d'abord sur le choix de cette fonction.

#### 3.1 Choix de la forme paramétrique du modèle de $K(h)$ : critère d'Akaike

Wiebe et al. (1993) rapportent qu'une parabole permet habituellement d'ajuster les observations de  $K(h)$ . Cependant, il s'agit d'une observation empirique qui ne repose pas sur une justification théorique de la forme paramétrique de cette fonction. Pourtant, le choix de la forme paramétrique a une importance et doit être étudié: un modèle trop peu souple engendrera un biais important, alors qu'un modèle ayant un grand nombre de paramètres (donc plus souple) aura une variabilité importante à l'extrapolation particulièrement. Il faut effectuer un compromis judicieux entre un modèle n'ayant pas assez de souplesse et un modèle en ayant trop. Une façon de procéder au choix du modèle est d'utiliser le critère AIC (*Akaike Information Criterion*, Akaike 1973).

Le critère d'Akaike est une mesure d'adéquation d'un modèle statistique à un échantillon aléatoire  $\mathbf{x} = \{x_i, i=1,2,\dots,N\}$  de  $N$  observations, qui tient à la fois compte de la qualité de l'ajustement et du nombre de paramètres. Pour évaluer cette mesure d'adéquation d'une distribution statistique  $f(\cdot|\theta)$  déterminée par un vecteur de paramètres  $\theta$ , que l'on note  $AIC(f,\mathbf{x})$ , il faut d'abord ajuster le modèle à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, c'est à dire déterminer un estimateur  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ . On peut ensuite calculer la statistique suivante:

$$AIC(f, \mathbf{x}) = -2 \sum_{i=1}^N \log f(x_i | \hat{\theta}) + 2k \quad (13)$$

où  $\log$  dénote le logarithme népérien et  $k$  le nombre de paramètres du modèle (i.e. la taille du vecteur  $\theta$ ). Le critère d'Akaike est donc une fonction décroissante de la vraisemblance du modèle (donc de la qualité de l'ajustement) et croissante du nombre de paramètres. Évidemment, le meilleur modèle selon cette approche est celui qui minimise la valeur du critère.

Cette méthode s'applique aisément à la régression. Lorsque l'on ajuste un modèle  $K(h|\theta)$  ayant  $k$  paramètres à partir de  $N$  observations  $\{(K_i, h_i), i=1, 2, \dots, N\}$  à l'aide de la méthode des moindres carrés, on suppose que les erreurs (ou résidus) de la régression ont une distribution normale de moyenne nulle et que ces erreurs sont des variables indépendantes entre elles. On obtient alors un modèle  $K(h|\hat{\theta})$  qui estime la moyenne de  $K(h)$ . Si les résidus  $e(h_i) = K(h_i|\hat{\theta}) - K_i$  sont supposés avoir la même variance  $\sigma^2$ , on peut l'estimer par l'écart quadratique moyen entre  $K(h|\hat{\theta})$  et  $K_i$ :  $S^2 = \sum_{i=1}^n e^2(h_i) / (N - k)$ . Sinon, la variance  $\sigma^2[e(h)]$  doit être connue *a priori* en fonction de  $h$  (et l'on doit utiliser la méthode des moindres carrés pondérés pour l'ajustement). Dans tous les cas, on obtient au moins une estimation  $S^2[e(h)]$  de la variance  $\sigma^2[e(h)]$  des résidus pour  $h$  fixé. La vraisemblance de chaque résidu  $e(h_i)$  est alors obtenue ainsi:

$$f(e(h_i) | \hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S[e(h_i)]} \exp \left\{ - \left( \frac{e(h_i)}{S[e(h_i)]} \right)^2 \right\} \quad (14)$$

Connaissant la vraisemblance des résidus  $\mathbf{e} = \{e(h_i), i=1, 2, \dots, N\}$ , il est alors facile de calculer le critère d'Akaike  $AIC(K, \mathbf{e})$  en appliquant la formule (13). Pour choisir un modèle pour  $K(h)$ , sachant qu'une parabole est souvent adéquate, on peut calculer le critère d'Akaike pour des polynômes de différents degrés (par exemple de 0 à 4) et choisir le modèle minimisant le critère d'Akaike. On peut aussi inclure d'autres modèles qui semblent adéquats pour les données disponibles.

### 3.2 Calibration à l'aide de jaugeages manuels

Cette méthode de calibration peut être appliquée lorsque l'installation de l'AFFRA ne comporte qu'une seule paire de transducteurs permettant d'estimer la vitesse  $v_a$  à une hauteur d'eau fixée. Elle consiste simplement à effectuer après la mise en fonction de l'AFFRA un

ensemble de  $N$  jaugeages manuels pour différentes hauteurs d'eau  $h$ . Chaque jaugeage manuel fournit une estimation directe  $\hat{v}_m$  de la vitesse moyenne  $v_m$ . On obtient ainsi un ensemble de  $N$  couples  $\mathbf{k} = \{(\hat{K}_i = \hat{v}_{m(i)} / \hat{v}_{a(i)}, h_i), i=1, 2, \dots, N\}$  qui, portés sur un graphique, permettent d'estimer la fonction  $K(h)$  par régression. Il faut utiliser la méthode des moindres carrés pondérés (cf. Annexe A), car l'erreur sur chaque point de mesure n'est pas la même. Il faut bien sûr calculer cette erreur pour pouvoir appliquer la méthode des moindres carrés pondérés. Celle-ci dépend à la fois de l'erreur sur les jaugeages  $\hat{v}_m$  et sur les mesures  $\hat{v}_a$  données par l'AFFRA. Un modèle pour l'écart-type de  $\hat{v}_a$  a été adopté précédemment:  $\sigma^2(\hat{v}_a) \approx 12 \hat{v}_a + 5$ . Cependant, pour déterminer l'erreur sur les jaugeages, il faut étudier les appareils utilisés à cet effet. En pratique, deux types d'appareils sont employés pour les jaugeages: le moulinet Price et le profileur acoustique à effet Doppler. Nous déterminerons d'abord la précision de ces appareils pour ensuite expliquer comment l'écart-type du rapport  $\hat{v}_m / \hat{v}_a$  peut être évalué.

### 3.2.1 Jaugeages au moulinet Price: avantages, inconvénients et précision

Pour déterminer le débit des cours d'eau, les Relevés Hydrologiques du Canada (RHC) utilisent surtout le moulinet Price no 622 type AA. C'est un moulinet à godets à axe vertical. La vitesse de rotation de la roue à godets détermine la vitesse de passage de l'eau à l'endroit où est placé le moulinet. Avant la mise en service du moulinet, le rapport entre sa vitesse de rotation et la vitesse d'écoulement du cours d'eau est établi dans un bassin d'étalonnage. Une fois calibré, le moulinet permet de mesurer avec précision les vitesses allant de 5 à 300 cm/s, et avec moins de précision les vitesses allant de 2 à 5 cm/s (Terzi 1981).

Malgré sa résistance, sa fiabilité et sa facilité d'utilisation, le moulinet Price a cependant un désavantage majeur: il faut un temps important pour estimer le débit à l'aide de cet appareil. En effet, pour mesurer le débit avec précision, il est recommandé de diviser la section de la rivière en une vingtaine de bandes verticales et de mesurer pour chaque bande la vitesse à 20% et à 80% de la profondeur pendant 40 à 80 secondes chaque fois. Il est donc difficile de prendre moins de 40 minutes pour effectuer un jaugeage, et l'on peut facilement prendre près de deux heures pour effectuer un jaugeage sur une rivière importante.

Selon Terzi (1981), en respectant les règles de l'art il est possible d'atteindre une précision de l'ordre de 5%, 19 fois sur 20. En supposant la normalité des mesures individuelles de débit (ce qui est sensé puisque chaque mesure de débit est une moyenne pondérée d'une quarantaine de mesures de vitesse) on peut estimer l'écart-type  $\sigma(\hat{v}_m)$  des mesures de débit à

2.6% (car 5% est un intervalle de confiance à 95%, et l'on sait que la largeur d'un tel intervalle est 1.96 fois l'écart-type pour une population normale).

RHC utilise également d'autres types de moulinets pour des besoins spécifiques:

- le moulinet DRHC est un moulinet Price mais adapté pour les jaugeages d'hiver; il est caractérisé par une dérive plus courte;
- le moulinet Pygmée est environ 40% de la grosseur du modèle Price 622 AA; il a été conçu pour mesurer des vitesses de l'ordre de 2.5 à 140 cm/s.

Ces moulinets sont aussi précis, mais les conditions sous lesquelles ils sont utilisés tendent à augmenter l'erreur. Pour les jaugeages d'hiver, la méthode consistant à estimer la vitesse moyenne à partir des vitesses mesurées à 20% et 80% de la profondeur peut s'avérer inefficace, car le profil vertical de vitesse est différent en présence de glace. Il est donc recommandé d'effectuer des mesures à un plus grand nombre de profondeurs, au moins pour quelques unes des bandes jaugées, de façon à valider la méthode d'estimation de la vitesse moyenne.

### **3.2.2 Jaugeages au profileur acoustique à effet Doppler: avantages, inconvénients et précision**

Le profileur acoustique à effet Doppler est un appareil récent permettant de mesurer rapidement le débit avec précision. Environnement Canada emploie présentement un profileur ADCP (*Acoustic Doppler Current Profiler*) fonctionnant à 600 kHz de la compagnie RD Instruments. L'ADCP utilise l'effet Doppler pour déterminer la vitesse de l'écoulement, terme qui réfère au changement de fréquence de toute onde sonore émise ou réfléchi par un objet en mouvement. L'ADCP émet en effet des ondes sonores à une fréquence connue qui sont réfléchies par les particules intrinsèques à l'eau en mouvement. Comme ces particules se déplacent à la même vitesse que l'eau, cela permet de déterminer précisément la vitesse d'écoulement. La méthode de calcul de cette vitesse est expliquée dans le manuel technique de l'appareil (RD Instruments 1993), et ne sera pas détaillée ici. Notons simplement que l'appareil permet de découper à la fois la section en bandes verticales et en cellules horizontales, et que plusieurs mesures sont effectuées dans chaque cellule pour calculer le débit total.

L'ADCP permet de mesurer des vitesses supérieures ou égales à 4 cm/s. Pour plus de précision, il est recommandé de répéter la mesure un certain nombre de fois pour s'assurer du

bon fonctionnement de l'appareil et pour stabiliser l'estimateur. Environnement Canada respecte les normes américaines à cet égard, qui consistent à effectuer six mesures successives du débit telles que l'écart entre la plus faible et la plus élevée soit inférieur à 5%, et à prendre leur moyenne pour estimer le débit. Selon le manuel technique de l'ADCP, l'écart-type des mesures individuelles de vitesse dépend de la taille des cellules et de la distance qui les sépare de l'appareil de mesure, mais varie très peu avec la vitesse du courant. On peut donc s'attendre à ce que l'erreur totale sur les mesures de débit soit aussi assez indépendante de la vitesse d'écoulement.

Parce qu'il est d'usage d'effectuer plusieurs mesures successives du débit lors d'une campagne de jaugeage ( $n=6$  selon le standard), l'écart-type  $\sigma(\hat{v}_m)$  des mesures peut être estimé directement par  $s(\hat{v}_m)$ . De plus, si l'on suppose la normalité de l'erreur sur chaque mesure du débit (encore une fois une hypothèse raisonnable puisque ces mesures sont elles-mêmes des moyennes) alors l'écart-type sur la moyenne des mesures peut être estimé par  $s(\hat{v}_m)/\sqrt{n}$ , selon le théorème central limite (Walpole et Myers 1985), où  $n$  est le nombre de mesures successives effectuées.

### 3.2.3 Précision du rapport de la vitesse moyenne à la vitesse mesurée par l'AFFRA

Il est maintenant possible d'étudier la précision des valeurs individuelles  $K_i$ . Chacune d'elles est un rapport d'une vitesse moyenne estimée  $\hat{v}_{m(i)}$  à une vitesse mesurée à la profondeur des transducteurs  $\hat{v}_{a(i)}$ . La distribution de ces deux estimateurs est connue (en fait c'est plutôt l'écart-type de l'erreur commise qui est connu; la distribution de ces erreurs est supposée normale de moyenne nulle, une hypothèse que nous avons expliquée être raisonnable), mais cela ne permet pas de déterminer analytiquement la distribution du rapport. Il est nécessaire de procéder par simulation Monte-Carlo pour obtenir la distribution de l'erreur sur  $K_i$ . Rappelons que cette méthode de simulation statistique consiste à tirer au hasard un grand nombre d'observations dans les distributions de  $\hat{v}_{m(i)}$  et de  $\hat{v}_{a(i)}$ , de diviser chaque paire de nombres ainsi générés pour obtenir un grand nombre d'observations de  $K_i$ , et donc la distribution statistique du rapport des deux estimateurs. Notons en passant que cette façon d'établir la distribution de chaque  $K_i$  repose sur l'hypothèse de l'indépendance de l'erreur commise sur  $v_a$  et sur  $v_m$ , une hypothèse raisonnable puisque les mesures du débit sont établies de façon indépendante.

Avec les outils de mathématiques appliquées moderne, effectuer une telle simulation est très simple, comme le montre la fonction suivante, écrite dans le langage mathématique MATLAB®.

```

function [sk, mck] = skaffra(va, sva, vm, svm, R)
for i=1:size(va,2)
    mcva(i,1:R)=normrnd(va(i), sva(i), 1, R);
    mcvm(i,1:R)=normrnd(vm(i), svm(i), 1, R);
    mck=mcvm./mcva;
    sk=std(mck');
end

```

Cette fonction prend comme argument quatre vecteurs de  $N$  éléments nommés  $va$ ,  $sva$ ,  $vm$  et  $svm$ , qui représentent respectivement les valeurs mesurées de  $v_a$ , l'écart-type de chacune de ces valeurs, les valeurs mesurées de  $v_m$ , et l'écart-type de ces valeurs. Le dernier argument  $R$  est un scalaire qui indique le nombre d'itérations de la simulation Monte-Carlo, et contrôle ainsi à la fois la précision et le temps d'exécution de la routine. La fonction retourne aussi deux arguments,  $sk$  et  $mck$  qui représentent respectivement l'écart-type de chaque  $K_i$  ainsi que l'ensemble des valeurs simulées de  $K_i$ , à partir desquelles l'écart-type a été estimé. Ce second vecteur permet, si désiré, d'obtenir une information plus complète sur la distribution de  $K_i$  que son écart-type. La routine boucle d'abord sur les éléments des quatre vecteurs d'entrée, pour traiter toutes les observations. Pour chacun des  $N$  couples de mesures  $(\hat{v}_{m(i)}, \hat{v}_{a(i)})$ , on tire alors  $R$  observations provenant de la distribution de ces deux variables aléatoires, qui sont normales de moyenne nulle et de variance connue (on utilise pour cela la fonction `normrnd`, qui appartient à la librairie *Statistics Toolbox*). On divise ensuite les deux vecteurs élément par élément, ce qui permet d'obtenir  $mck$ , la distribution de  $K_i$  et par conséquent  $sk$ , son écart-type.

Une fois l'écart-type de chaque  $K_i$  déterminé, il est alors possible d'estimer les paramètres de la fonction  $K(h|\theta)$  par la méthode des moindres carrés pondérés (cf. Annexe A). Il reste encore, une fois cette fonction estimée par  $K(h|\hat{\theta})$ , à déterminer la précision de cette dernière estimation.

### 3.2.4 Précision de la fonction de calibration estimée

L'utilisation de la méthode des moindres carrés pondérés pour estimer la relation  $K(h)$  complique l'évaluation de la précision de cette fonction, spécialement lorsque la forme paramétrique choisie pour  $K(h|\theta)$  est un polynôme. En effet, on peut dans ce cas déterminer analytiquement un intervalle de confiance, si l'on fait l'hypothèse que l'amplitude de l'erreur de mesure est indépendante de  $h$ , une supposition qui ne correspond pas à la réalité. Il est évidemment possible d'utiliser ce résultat analytique en première approximation. Une seconde méthode, cette fois numérique, peut être appliquée lorsque  $K(h|\theta)$  n'est pas un polynôme ou lorsque l'erreur est très dépendante de  $h$ . Nous présentons les deux approches.

**3.2.4.1 Estimation de la précision sous l'hypothèse d'identique distribution des erreurs**

Sous les hypothèses de normalité, d'indépendance et d'identique distribution des résidus, si la fonction  $K(h|\theta)$  est un polynôme de degré  $k-1$  (i.e. un modèle à  $k$  paramètres) alors la statistique  $T$  suivante a une distribution de Student à  $N-k$  degrés de liberté (Walpole et Myers 1985):

$$T = \frac{K(h|\hat{\theta}) - K(h|\theta)}{S\sqrt{\mathbf{h}'(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{h}}} \tag{15}$$

où  $S^2 = \sum_{i=1}^n e^2(h_i)/(N - k)$ ,  $\mathbf{h}' = [1, h, h^2, \dots, h^{k-1}]$  et finalement  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & h_1^2 & \dots & h_1^{k-1} \\ 1 & h_2 & h_2^2 & \dots & h_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & h_N & h_N^2 & \dots & h_N^{k-1} \end{bmatrix}$ .

Connaissant la distribution de  $T$  on peut facilement trouver un intervalle de confiance à  $100(1-\alpha)\%$  pour  $K(h|\theta)$ :

$$\Pr\left[ K(h|\hat{\theta}) - t_{\alpha/2} S\sqrt{\mathbf{h}'(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{h}} < K(h|\theta) < K(h|\hat{\theta}) + t_{\alpha/2} S\sqrt{\mathbf{h}'(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{h}} \right] = 1 - \alpha \tag{16}$$

où  $t_{\alpha/2}$  est le quantile de la distribution de Student de probabilité au dépassement  $\alpha/2$  ayant  $N-k-1$  degrés de liberté. Ce résultat approximatif n'est applicable cependant que si fonction  $K(h|\theta)$  est un polynôme. Autrement, et cela peut arriver comme nous le verrons plus loin dans un des exemples présentés, on peut toujours utiliser une approche numérique simple: le Jackknife.

**3.2.4.2 Estimation de la précision de la fonction de calibration par Jackknife**

Lorsque la méthode analytique d'estimation de la précision de la fonction  $K(h|\hat{\theta})$  ne s'applique pas, soit parce que la forme paramétrique n'est pas polynomiale, soit parce que l'erreur est fortement dépendante de  $h$ , on peut utiliser la méthode du Jackknife (Efron 1979). Notons d'abord qu'il s'agit d'un méthode numérique approximative, et qu'elle ne permet pas d'obtenir la distribution de l'estimateur  $K(h|\hat{\theta})$  mais seulement une estimation de son écart-type.

Le principe de cette méthode est fort simple. À partir de l'échantillon  $\mathbf{k} = \{(\hat{K}_i, h_i), i=1,2,\dots,N\}$ , on construit tous les sous-échantillons différents comportant toute les observations de  $\mathbf{k}$  sauf

une. On montre facilement qu'il y a  $N$  sous-échantillons de ce type, que nous noterons  $\{\mathbf{k}_i, i=1,2,\dots,N\}$ . Par exemple, si  $\mathbf{k}=\{a,b,c,d\}$ , on obtient les quatre échantillons  $\mathbf{k}_1=\{a,b,c\}$ ,  $\mathbf{k}_2=\{a,b,d\}$ ,  $\mathbf{k}_3=\{a,c,d\}$ ,  $\mathbf{k}_4=\{b,c,d\}$ . On ajuste alors le modèle  $K(h|\theta)$  à chacun de ces échantillons, obtenant ainsi  $N$  ajustements que nous noterons respectivement  $\{K(h|\hat{\theta}_i), i=1,2,\dots,N\}$ . On peut alors estimer pour  $h$  fixé la variance de  $K(h|\hat{\theta})$  par celle des  $K(h|\hat{\theta}_i)$ :

$$S^2[K(h|\hat{\theta})] = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^N K^2(h|\hat{\theta}_i) - \frac{N}{N-k} \left( \sum_{i=1}^N K(h|\hat{\theta}_i) \right)^2 \quad (17)$$

Pour obtenir un intervalle de confiance, on doit alors faire une supposition supplémentaire sur la distribution de l'estimateur. En général on suppose que la statistique  $T$  suivante a approximativement une distribution de Student à  $N-k$  degrés de liberté, par analogie avec la solution analytique, où  $k$  est le nombre de paramètres du modèle:

$$T = \frac{K(h|\hat{\theta}) - K(h|\theta)}{S[K(h|\hat{\theta})]} \quad (18)$$

Conséquemment, on obtient l'intervalle de confiance suivant à  $100(1-\alpha)\%$  pour  $K(h|\theta)$ :

$$\Pr\left[K(h|\hat{\theta}) - t_{\alpha/2} S[K(h|\hat{\theta})] < K(h|\theta) < K(h|\hat{\theta}) + t_{\alpha/2} S[K(h|\hat{\theta})]\right] = 1 - \alpha \quad (19)$$

où  $t_{\alpha/2}$  est le quantile de la distribution de Student de probabilité au dépassement  $\alpha/2$  ayant  $N-k$  degrés de liberté. On peut justifier empiriquement l'utilisation du Jackknife en considérant que la méthode estime la variabilité du modèle ajusté à partir de  $N-1$  observations, et que cette valeur est une bonne approximation de la variabilité du modèle pour  $N$  observations.

### 3.2.5 Interprétation de l'estimation de la précision de la fonction de calibration

Lors de la calibration par jaugeages de l'AFFRA, on suppose que la relation  $K(h)$  existe de façon précise (i.e. que c'est une relation déterministe), qu'elle est de la forme paramétrique  $K(h|\theta)$  et que s'il est impossible de faire passer une courbe de cette forme par les points de mesure  $\{K_i, i=1,2,\dots,N\}$ , c'est uniquement dû au fait que ces mesures sont entachées d'erreur. L'incertitude que l'on estime par la suite sur  $K(h|\theta)$  mesure le niveau d'ignorance qui subsiste sur cette fonction déterministe après observation mais ne mesure d'aucune façon le fait que le modèle  $K(h|\theta)$  peut être lui-même une approximation de la réalité. Dans les faits, la relation

$K(h)$  peut ne pas avoir une forme paramétrique simple, et plus important encore peut ne pas être tout à fait déterministe: il est fort possible que pour un même  $h$  plusieurs valeurs de  $K$  soient possibles, nonobstant les erreurs de mesure. Comme nous le verrons, cette limite peut être levée en partie si l'on calibre l'AFFRA par modélisation du profil de vitesse.

### 3.3 Calibration par modélisation du profil de vitesse

L'AFFRA peut d'une certaine façon s'auto-calibrer, c'est à dire qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer de campagnes de jaugeage pour calibrer l'appareil si celui-ci dispose de deux paires de transducteurs permettant de mesurer simultanément la vitesse d'écoulement à deux hauteurs d'eau différentes, à condition qu'il soit possible de modéliser le profil vertical de vitesse. Wiebe et al. (1993) mentionnent deux modèles acceptés pour ce profil: la loi universelle de Prandtl-von Karman et le modèle basé sur l'entropie. Nous illustrerons ici la calibration à l'aide du premier modèle, qui repose sur l'hypothèse que le profil de vitesse est logarithmique: la vitesse est présumée nulle entre le lit de la rivière et une faible distance  $y_0$ , et supposée augmenter de façon logarithmique jusqu'à la surface. Si l'on divise la section d'écoulement en  $n_b$  bandes verticales, que l'on note  $h$  le niveau d'eau de la rivière,  $d_i(h)$  la profondeur d'eau dans la  $i$ ème bande et  $v_m(i)$  la vitesse moyenne dans cette bande, alors la vitesse d'écoulement dans cette bande à la profondeur  $h_a$ ,  $v(h_a, i)$ , peut s'exprimer approximativement ainsi selon le modèle de Prandtl-von Karman (Wiebe et al. 1993):

$$v(h_a, i) = v_m(i) \cdot \frac{\log(d_i(h) - h + h_a) - \log(y_0)}{\log(d_i(h)) - \log(y_0) - 1} \quad (20)$$

où  $0 < y_0 < d_i$  est un paramètre d'ajustement. Supposons que l'on mesure la vitesse moyenne sur l'horizontale à l'aide de l'AFFRA à deux hauteurs d'eau différentes  $h_a$  et  $h'_a$  par  $\hat{v}_a$  et  $\hat{v}'_a$ , et que la vitesse varie peu sur l'horizontale à la hauteur des transducteurs. Dans ce cas,  $\hat{v}_a$  et  $\hat{v}'_a$  estiment respectivement  $v(h_a, i)$  et  $v'(h_a, i)$  pour  $i=1, 2, \dots, n_b$ . alors on montre facilement que l'on peut estimer le paramètre  $y_0$  par  $\hat{y}_0$  à partir de  $\hat{v}_a$  et  $\hat{v}'_a$ , sans connaître  $v_m(i)$ , en résolvant l'équation suivante:

$$\hat{y}_0 = \exp \left\{ \frac{\hat{v}'_a \cdot \log(d_i(h) - h + h_a) - \hat{v}_a \cdot \log(d_i(h) - h + h'_a)}{\hat{v}'_a - \hat{v}_a} \right\} \quad (21)$$

Ceci permet d'estimer le rapport  $K(i) = v_m(i)/v(h_a, i)$  par  $\hat{K}(i)$ :

$$\hat{K}(i) = \frac{\hat{v}_m(i)}{\hat{v}_a} = \frac{\log(d_i(h)) - \log(\hat{y}_0) - 1}{\log(d_i(h) - h + h_a) - \log(\hat{y}_0)} \quad (22)$$

On peut aussi remplacer dans l'équation précédente  $\hat{y}_0$  par sa valeur pour obtenir la solution suivante pour  $\hat{K}(i)$  :

$$\hat{K}(i) = \frac{\hat{v}_a \left[ 1 + \log\left(\frac{d_i(h) - h + h'_a}{d_i(h)}\right) \right] - \hat{v}'_a \left[ 1 + \log\left(\frac{d_i(h) - h + h_a}{d_i(h)}\right) \right]}{\hat{v}_a \left[ \log(d_i(h) - h + h'_a) - \log(d_i(h) - h + h_a) \right]} \quad (23)$$

La vitesse moyenne  $v_m$  pour toute la section peut alors être estimée par la moyenne des  $\hat{v}_m(i)$ , où chaque valeur est pondérée par l'aire de la bande correspondante, qui est égale au produit de la profondeur  $d_i(h)$  et de la largeur  $w_i$  de la bande :

$$\begin{aligned} \hat{v}_m &= \hat{v}_a \cdot \sum_{i=1}^{n_b} \hat{K}(i) \cdot d_i(h) \cdot w_i \Big/ \sum_{i=1}^{n_b} d_i(h) \cdot w_i \\ &= \hat{v}_a \cdot \sum_{i=1}^{n_b} \hat{K}(i) \cdot d_i(h) \cdot w_i \Big/ A(h) \end{aligned} \quad (24)$$

On peut donc estimer la vitesse moyenne pour toute la section sans calibration en utilisant deux paires de transducteurs installées à deux niveaux différents. Deux possibilités s'offrent ensuite: utiliser directement l'équation précédente pour évaluer le débit, ou estimer une courbe de calibration  $K(h|\theta)$  à partir d'un ensemble de  $N$  couples  $\mathbf{k} = \{(\hat{K}_i = \hat{v}_{m(i)}/\hat{v}_{a(i)}, h_i), i=1,2,\dots,N\}$  obtenus à partir de la technique présentée dans cette section. Nous étudierons les mérites de ces deux approches.

### 3.3.1 Estimation du débit sans établir de courbe de calibration

Il n'est pas absolument nécessaire d'établir une courbe de calibration pour estimer le débit lorsque deux paires de transducteurs sont utilisés. En multipliant l'estimation de la vitesse moyenne obtenue précédemment par l'aire de la section d'écoulement, on peut estimer directement le débit :

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^{n_b} d_i(h) \cdot w_i \cdot \frac{\hat{v}_a \left[ 1 + \log\left(\frac{d_i(h) - h + h'_a}{d_i(h)}\right) \right] - \hat{v}'_a \left[ 1 + \log\left(\frac{d_i(h) - h + h_a}{d_i(h)}\right) \right]}{\left[ \log(d_i(h) - h + h'_a) - \log(d_i(h) - h + h_a) \right]} \quad (25)$$

Il est relativement simple de programmer cette équation pour pouvoir estimer le débit en temps réel, dès l'installation de l'AFFRA dans la section d'écoulement. Il devient alors possible de déterminer par simulation Monte-Carlo la variabilité attendue de  $\hat{Q}$  en fonction de l'erreur sur les mesures de vitesses (en supposant ces erreurs indépendantes). Un désavantage de cette méthode est qu'elle nécessite l'installation permanente de deux paires de transducteurs. Si l'on choisit d'ajuster une fonction de calibration, la seconde paire de transducteurs peut être installée seulement pour la période de calibration.

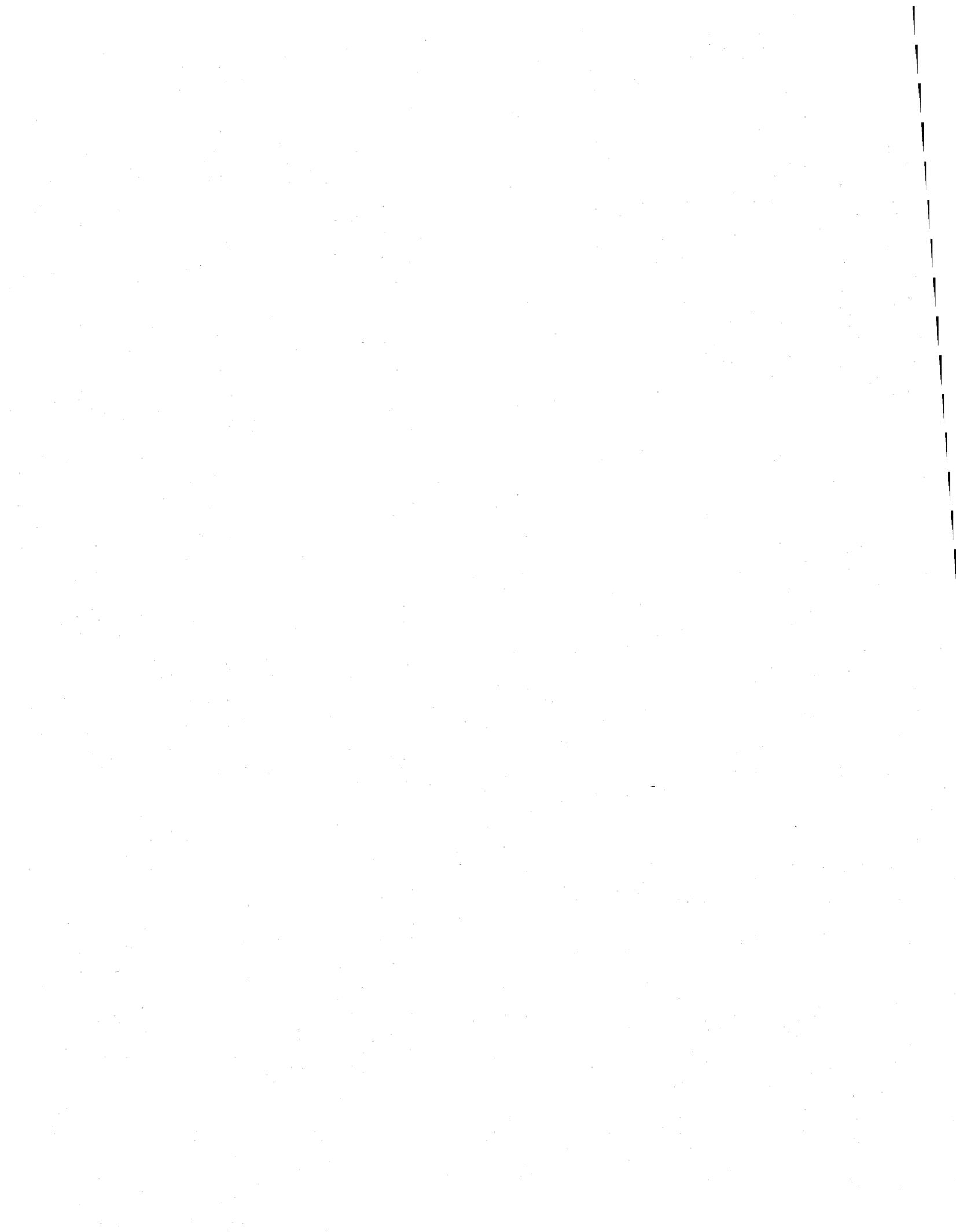
### 3.3.2 Estimation du débit à l'aide d'une courbe de calibration

Une façon alternative d'estimer le débit à l'aide de deux paires de transducteurs consiste à déterminer pendant une période de calibration un grand nombre de couples  $(\hat{K}_i, h_i)$  à l'aide de l'équation (23). Ces couples peuvent alors servir à estimer une relation  $K(h)$ , qui peut être établie par régression. Parce que l'on dispose alors d'un grand nombre de points de mesure pour établir cette courbe, l'erreur d'estimation de  $K(h)$  devient négligeable, si la forme paramétrique choisie est correcte.

### 3.3.3 Limites de la méthode de calibration par modélisation du profil de vitesse

Le désavantage principal de la calibration de l'AFFRA par modélisation du profil de vitesse est que la méthode repose sur deux hypothèses: le modèle de Prandtl-von Karman (ou éventuellement un autre modèle) pour le profil de vitesse et la supposition que la vitesse est relativement homogène sur l'horizontale à la hauteur des transducteurs. Le biais engendré par ces deux hypothèses est difficile à quantifier. Il faut donc prévoir valider ces hypothèses, ce qui ne peut raisonnablement être effectué que par une ou plusieurs campagnes de jaugeages.

Nous recommandons donc, si cette méthode de calibration théorique est employée, d'effectuer quelques jaugeages dans des conditions hydrologiques différentes, d'estimer la précision du jaugeage (ce sujet a été traité précédemment) et de s'assurer que la valeur du débit estimée à l'aide de l'AFFRA est vraisemblable compte tenu de ce jaugeage, ce qui peut être vérifié à l'aide d'un test statistique comparant les moyennes des deux mesures du débit. Si la différence entre les deux estimations du débit est jugée significative, il serait alors sage soit de modifier le modèle du profil de vitesse, soit de calibrer l'appareil à l'aide de jaugeages.



## 4. INCERTITUDE SUR LES DÉBITS MESURÉS PAR L'AFFRA

---

L'incertitude totale sur le débit mesuré par l'AFFRA dépend de l'erreur sur la vitesse  $v_a$  à la hauteur des transducteurs, de l'erreur sur le coefficient de calibration  $K(h)$  et de l'erreur sur l'aire  $A(h)$  de la section. Pour mesurer cette incertitude, on peut procéder encore une fois par simulation Monte-Carlo, si l'on suppose l'indépendance de ces erreurs: il s'agit simplement de tirer au hasard des valeurs des trois variables aléatoires  $\hat{v}_a$ ,  $K(h|\hat{\theta})$  et  $\hat{A}(h)$  dans leur distribution respective et d'en effectuer le produit. La distribution des nombres obtenus par ce procédé représente alors l'incertitude totale sur le débit.

### 4.1 Incertitude, variabilité et erreur systématique

Il importe de distinguer l'incertitude de la variabilité des mesures du débit. En effet, pour une installation de l'AFFRA les fonctions  $K(h|\hat{\theta})$  et  $\hat{A}(h)$  sont fixées; pour des valeurs données de  $v_a$  et  $h$ , la variabilité du débit estimé  $\hat{Q}$  ne sera liée qu'à l'erreur d'estimation de  $v_a$ , c'est à dire la variabilité de son estimateur  $\hat{v}_a$ . L'incertitude totale intègre à la fois la variabilité et les erreurs systématiques. La mesure numérique usuelle de la variabilité d'un estimateur  $\hat{\varphi}$  d'une quantité  $\varphi$  est sa variance  $\sigma^2(\hat{\varphi})$ , définie comme l'espérance de l'écart quadratique entre les valeurs de l'estimateur et la moyenne  $E[\hat{\varphi}]$  de ces valeurs:

$$\sigma^2(\hat{\varphi}) = E\left[(\hat{\varphi} - E[\hat{\varphi}])^2\right] = E[\hat{\varphi}^2] - E[\hat{\varphi}]^2 \quad (26)$$

Il est aussi utile de définir le coefficient de variation  $cv(\hat{\varphi})$  de l'estimateur, qui est le rapport de l'écart-type  $\sigma(\hat{\varphi})$  à la moyenne:

$$cv(\hat{\varphi}) = \sigma(\hat{\varphi}) / E[\hat{\varphi}] \quad (27)$$

On peut remarquer que les calculs de la variance et du coefficient de variation n'utilisent pas la valeur réelle du paramètre. Ces mesures ne peuvent donc tenir compte d'une erreur systématique. On quantifie habituellement l'erreur systématique commise par un estimateur par son biais  $b(\hat{\varphi}, \varphi)$ , qui correspond à l'écart entre l'espérance  $E[\hat{\varphi}]$  de l'estimateur et la valeur réelle du paramètre  $\varphi$ :

$$b(\hat{\varphi}, \varphi) = E[\hat{\varphi}] - \varphi \quad (28)$$

Enfin, l'incertitude totale peut être mesurée par l'écart quadratique moyen entre les valeurs de l'estimateur et celle du paramètre, que l'on note usuellement  $mse(\hat{\varphi}, \varphi)$  pour *mean square error*:

$$mse(\hat{\varphi}, \varphi) = E\left[(\hat{\varphi} - \varphi)^2\right] \quad (29)$$

On montre facilement que ces trois quantités sont reliés par l'équation suivante:

$$mse(\hat{\varphi}, \varphi) = \sigma^2(\hat{\varphi}) + b^2(\hat{\varphi}, \varphi) \quad (30)$$

Conséquemment, l'écart quadratique moyen d'un estimateur (qui est une mesure de l'incertitude totale) est égal à sa variance uniquement si ce dernier a un biais nul. Autrement, seul l'écart quadratique moyen fournit une mesure d'incertitude totale. Lorsqu'un estimateur est fortement biaisé, on peut souvent appliquer une correction pour diminuer ce biais. Cependant, multiplier un estimateur  $\hat{\varphi}$  par une constante  $c$  pour en diminuer ne diminue pas nécessairement l'écart quadratique moyen. En effet, la variance du nouvel estimateur  $\hat{\varphi} \cdot c$  est alors  $\sigma^2(\hat{\varphi} \cdot c) = \sigma^2(\hat{\varphi}) \cdot c^2$ . Une diminution du biais n'est donc profitable que si l'augmentation de la variance est faible en comparaison.

## 4.2 Effet de la calibration sur l'incertitude

Étant donné les mesures d'incertitudes définies ci-haut, on peut se demander si le fait de corriger les mesures de vitesse de l'AFFRA, c'est à dire de calibrer l'appareil, contribue à diminuer l'incertitude sur la vitesse moyenne, telle que mesurée par l'écart quadratique moyen. Pour  $h$  fixé, on veut savoir laquelle des deux mesures suivantes de la vitesse moyenne est la plus précise:  $\hat{v}_a$  ou  $K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a$ . Pour cela nous comparerons l'erreur quadratique moyenne de ces deux estimateurs de  $v_m$ :

$$mse(\hat{v}_a, v_m) = \sigma^2(\hat{v}_a) + b^2(\hat{v}_a, v_m) \quad (31)$$

$$mse(K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a, v_m) = \sigma^2(K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a) + b^2(K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a, v_m) \quad (32)$$

Les propriétés de l'estimateur  $\hat{v}_a$  ont été étudiées précédemment. On connaît donc sa variance, et l'on sait aussi qu'il estime  $v_a$  sans biais significatif (i.e.  $E[\hat{v}_a] = v_a$ ). De cette information on peut déduire le biais et la variance des deux estimateurs:

$$\sigma^2(K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a) = K^2(h|\hat{\theta}) \cdot \sigma^2(\hat{v}_a) \quad (33)$$

$$b(\hat{v}_a, v_m) = v_a \cdot [1 - K(h)] \quad (34)$$

$$b(K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a, v_m) = v_a \cdot [K(h|\hat{\theta}) - K(h)] \quad (35)$$

L'erreur quadratique moyenne de  $K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a$  est inférieure à celle de  $\hat{v}_a$  seulement si  $mse(K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a, v_m) < mse(\hat{v}_a, v_m)$ , c'est à dire si:

$$K^2(h|\hat{\theta}) \cdot \sigma^2(\hat{v}_a) + v_a^2 \cdot [K(h|\hat{\theta}) - K(h)]^2 < \sigma^2(\hat{v}_a) + v_a^2 \cdot [1 - K(h)]^2 \quad (36)$$

En développant les carrés et en divisant par  $v_a^2$  on obtient l'inégalité équivalente suivante:

$$[K^2(h|\hat{\theta}) - 1] \cdot cv^2(\hat{v}_a) < [2K(h) - K(h|\hat{\theta}) - 1] \cdot [K(h|\hat{\theta}) - 1] \quad (37)$$

On peut alors isoler  $K(h)$  et déterminer les conditions sous lesquelles  $K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a$  est plus précis:

$$mse(K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a, v_m) < mse(\hat{v}_a, v_m) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } K(h|\hat{\theta}) > 1: K(h) > \frac{(K(h|\hat{\theta}) + 1)(cv^2[\hat{v}_a] + 1)}{2} \\ \text{si } K(h|\hat{\theta}) < 1: K(h) < \frac{(K(h|\hat{\theta}) + 1)(cv^2[\hat{v}_a] + 1)}{2} \end{cases} \quad (38)$$

En pratique cependant, on connaît  $cv[\hat{v}_a]$  et  $K(h|\hat{\theta})$  mais non la correction exacte  $K(h)$ . Par contre, le procédé d'estimation de  $K(h|\hat{\theta})$  peut fournir une certaine information sur les valeurs probables de  $K(h)$ . En effet, comme expliqué au chapitre précédent, si la forme paramétrique choisie est correcte, alors  $K(h|\hat{\theta})$  est un estimateur non biaisé de  $K(h)$  ayant une distribution de Student telle que:

$$\Pr[K(h) < K(h|\hat{\theta}) - s_{K(h|\hat{\theta})} t_\alpha] = \Pr[K(h) > K(h|\hat{\theta}) + s_{K(h|\hat{\theta})} t_\alpha] = \alpha \quad (39)$$

où  $s_{K(h|\hat{\theta})}$  est l'estimateur de l'écart-type de  $K(h|\hat{\theta})$ , et  $t_\alpha$  est le quantile de probabilité au dépassement  $\alpha$  de la loi de Student à  $N-k$  degrés de libertés, où  $N$  est le nombre de couples observés pour établir  $K(h|\hat{\theta})$  et  $k$  est le nombre de paramètres du modèle  $K(h|\hat{\theta})$ . On peut maintenant étudier la probabilité que  $K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a$  soit plus précis que  $\hat{v}_a$ . Si  $K(h|\hat{\theta}) > 1$ , alors:

$$\Pr\left[mse(K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a, v_m) < mse(\hat{v}_a, v_m)\right] = \Pr\left[K(h) > \frac{(K(h|\hat{\theta}) + 1)(cv^2[\hat{v}_a] + 1)}{2}\right] \quad (40)$$

que l'on peut calculer en déterminant  $\alpha$  tel que:

$$t_\alpha = \frac{(K(h|\hat{\theta}) + 1)(cv^2[\hat{v}_a] + 1) - 2K(h|\hat{\theta})}{2s_{K(h|\hat{\theta})}} \quad (41)$$

c'est à dire en déterminant  $\Pr[T > t_\alpha]$ , où  $T$  suit une distribution de Student à  $N-k$  degrés de liberté. De la même façon, on peut calculer  $\Pr[mse(K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a) < mse(\hat{v}_a)]$  lorsque  $K(h|\hat{\theta}) < 1$  en déterminant  $\alpha$  tel que:

$$t_\alpha = \frac{2K(h|\hat{\theta}) - (K(h|\hat{\theta}) + 1)(cv^2[\hat{v}_a] + 1)}{2s_{K(h|\hat{\theta})}} \quad (42)$$

Par exemple, pour  $K(h|\hat{\theta}) = 1.1$ ,  $cv[\hat{v}_a] = 5\%$ ,  $s_{K(h|\hat{\theta})} = 10\%$  et  $N-k=3$ , on obtient  $t_\alpha = -0.47$ , donc une probabilité  $\alpha = \Pr[T > t_\alpha]$  de réduire l'erreur sur la vitesse moyenne de 67%. En particulier, on peut s'intéresser aux valeurs de  $K(h|\hat{\theta})$  telles que  $\Pr[mse(K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a) < mse(\hat{v}_a)] > 1/2$ , c'est à dire les cas pour lesquels il est plus probable que la correction  $K(h|\hat{\theta})$  diminue l'erreur qu'il est probable qu'elle l'augmente. Puisque la distribution Student est symétrique, cela revient à déterminer les cas pour lesquels  $t_\alpha < 0$ . On peut montrer la relation suivante à partir des deux équations précédentes:

$$t_\alpha < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} K(h|\hat{\theta}) < 1 \\ \text{ou} \\ K(h|\hat{\theta}) > \frac{1 + cv^2[\hat{v}_a]}{1 - cv^2[\hat{v}_a]} \text{ et } cv^2[\hat{v}_a] < 1 \end{cases} \quad (43)$$

Conséquemment:

- il est toujours plus probable qu'une correction  $K(h|\hat{\theta})$  inférieure à un diminue l'erreur quadratique moyenne;
- sauf pour de très petites corrections ou un très grand coefficient de variation, il est toujours plus probable qu'une correction  $K(h|\hat{\theta})$  supérieure à diminue l'erreur quadratique moyenne.

Par exemple, si le coefficient de variation de  $\hat{v}_a$  atteint 1% (une valeur seulement dépassée pour des vitesses de moins de 6 cm/s selon le modèle développé précédemment), on peut

vérifier que la correction du débit mesuré par l'AFFRA aura probablement pour effet de diminuer l'erreur lorsque  $K(h|\hat{\theta})$  ne sera pas compris dans l'intervalle  $[1,1.0002]$ . Évidemment, si  $K(h|\hat{\theta})$  est compris dans cet intervalle, alors la correction apportée aura un effet tout à fait négligeable (même s'il est plus probable qu'elle contribue à augmenter l'erreur). On peut donc conclure que la correction  $K(h|\hat{\theta})$  apportée aux mesures de vitesse de l'AFFRA est utile et contribue généralement à réduire l'erreur ou à l'augmenter de façon négligeable.



## 5. INCERTITUDE SUR UNE RELATION NIVEAU-DÉBIT ÉTABLIE À L'AIDE DE L'AFFRA

---

Parce qu'un courantomètre AFFRA peut mesurer en continu le débit d'une rivière sans supervision, cet appareil pourrait permettre de déterminer la relation niveau-débit à un site à coût inférieur à celui de la procédure usuelle, qui consiste à mesurer manuellement le débit périodiquement, et ceci particulièrement pour les sites situés en région éloignée.

Considérons un site où se produit un changement de régime de la rivière. À un tel endroit, on peut montrer qu'il existe une relation biunivoque entre la hauteur d'eau  $h$  et le débit  $Q$ . Lorsqu'une telle relation existe, on peut déterminer le débit à partir de la hauteur d'eau, une quantité plus facile à mesurer. Pour établir la relation, on installe un limnimètre pour mesurer la hauteur d'eau, et on effectue un certain nombre de mesures du débit pour des hauteurs d'eau différentes. Ces mesures, portées sur un graphique, permettent alors d'estimer la relation  $Q(h)$ . Les mesures du débit peuvent être réalisées de différentes façons, mais que ce soit à l'aide d'un moulinet, d'un ADCP ou d'un courantomètre AFFRA, le principe est le même. Cependant l'incertitude résultante peut varier avec l'appareil utilisé.

On peut se demander comment la relation obtenue à l'aide d'un courantomètre AFFRA se compare à la relation obtenue à l'aide d'un ensemble de jaugeages manuels. Pour simplifier le raisonnement, nous supposons que les jaugeages sont réalisés en amont de la section critique, assez près de celle-ci pour que la hauteur d'eau mesurée à cet endroit soit la même que la hauteur d'eau à la section critique, ou du moins soit en relation biunivoque avec cette dernière. Dans ce cas, il existe non seulement une relation entre le débit  $Q$  et la hauteur d'eau  $h$ , mais aussi entre la vitesse moyenne  $v_m$  à l'endroit où sont effectués les jaugeages et la hauteur d'eau  $h$ . Cette relation est obtenue en divisant  $Q(h)$  par  $A(h)$ :

$$v_m(h) = Q(h)/A(h) \quad (44)$$

Comparer l'incertitude sur  $Q(h)$  pour différentes méthodes de jaugeage est donc équivalent à comparer l'incertitude sur  $v_m(h)$ , même si en pratique on utilise une approximation de  $A(h)$ , puisque cette approximation est la même pour toutes les méthodes de jaugeages. Nous avons établi précédemment l'écart quadratique moyen des mesures de vitesses de l'AFFRA, corrigées pour le biais:

$$mse(K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a, v_m) = K^2(h|\hat{\theta}) \cdot \sigma^2(\hat{v}_a) + v_a^2 \cdot [K(h|\hat{\theta}) - K(h)]^2 \quad (45)$$

En utilisant l'AFFRA pour construire la relation niveau-débit on peut obtenir un très grand nombre d'estimations du débit qui, portées sur un graphique en fonction de la hauteur d'eau, permettent de déterminer très précisément pour chaque hauteur d'eau la valeur moyenne de  $K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a$ . Cet estimateur de  $E[K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a]$ , que nous noterons simplement  $\hat{v}(h)$ , aura donc une variance presque nulle, mais le même biais que  $K(h|\hat{\theta}) \cdot \hat{v}_a$ . Son écart quadratique moyen sera donc:

$$mse(\hat{v}(h), v_m(h)) = v_a^2 \cdot [K(h|\hat{\theta}) - K(h)]^2 \quad (46)$$

Si l'on utilise uniquement un petit nombre de jaugeages manuels  $\hat{v}_m$  pour estimer directement la relation niveau-débit par une fonction  $\hat{Q}_m(h)$ , on obtient alors une estimation de la vitesse moyenne  $\hat{v}_m(h) = \hat{Q}_m(h) / \hat{A}(h)$  fort différente. Celle-ci a une variance significative  $\sigma^2[\hat{v}_m(h)]$  mais aucun biais, dans la mesure où les jaugeages manuels  $\hat{v}_m$  sont des estimations non biaisées de la vitesse moyenne réelle (i.e.  $E[\hat{v}_m] = v_m$ ). L'écart quadratique moyen de  $\hat{v}_m(h)$  est donc simplement sa variance:

$$mse(\hat{v}_m(h), v_m(h)) = \sigma^2[\hat{v}_m(h)] \quad (47)$$

L'utilisation de l'AFFRA permettra d'obtenir une meilleure estimation de la relation niveau-débit uniquement si  $mse(\hat{v}(h), v_m(h)) < mse(\hat{v}_m(h), v_m(h))$ , c'est à dire si:

$$v_a^2 \cdot [K(h|\hat{\theta}) - K(h)]^2 < var[\hat{v}_m(h)] \quad (48)$$

Prenant avantage de la relation  $v_a = v_m / K$  on obtient:

$$\left( \frac{K(h|\hat{\theta}) - K(h)}{K(h)} \right)^2 < cv^2[\hat{v}_m(h)] \quad (49)$$

La relation niveau-débit obtenue à l'aide de l'AFFRA sera donc plus précise uniquement si l'écart relatif entre la correction  $K(h|\hat{\theta})$  et  $K(h)$  est plus faible que le coefficient de variation de  $\hat{v}_m(h)$ . Avant d'estimer  $K(h)$ , on peut déterminer la valeur espérée de cet écart quadratique moyen en supposant  $K(h|\hat{\theta})$  variable. Si l'on réalise que  $cv[\hat{v}_m(h)] = cv[\hat{Q}_m(h)]$  pour  $\hat{A}(h)$  fixé on obtient:

$$E[mse(\hat{v}(h), v_m(h))] < mse(\hat{v}_m(h), v_m(h)) \Leftrightarrow cv[K(h|\hat{\theta})] < cv[\hat{Q}_m(h)] \quad (50)$$

Cette dernière équation montre bien que la qualité des données de débit de l'AFFRA dépend énormément de la calibration. Nous avons vu que l'appareil peut être calibré de deux façons:

- en effectuant plusieurs jaugeages manuels permettant d'estimer  $v_a/v_m$  pour différentes hauteurs d'eau;
- en installant deux paires de transducteurs et en calibrant un modèle de profil vertical d'écoulement.

Lorsque l'objectif est d'établir une relation niveau-débit, la première méthode de calibration risque de donner des résultats décevants. Supposons en effet que  $N$  jaugeages soient disponibles. Directement à partir de ces jaugeages, sans utiliser les données de l'AFFRA, on pourrait établir une relation niveau-débit  $\hat{Q}_m(h)$  de coefficient de variation  $cv[\hat{Q}_m(h)]$ . Ce coefficient, pour  $N$  fixé, dépendrait de la forme paramétrique de la fonction calibrée, et principalement du nombre de degrés de liberté de cette fonction (c'est à dire du nombre de paramètres pouvant être ajustés indépendamment). En pratique, le modèle physique à deux paramètres  $Q=c_1 \cdot h^{c_2}$  est souvent approprié.

Si l'on doit calibrer l'AFFRA à partir de ces mêmes  $N$  jaugeages, on est contraint à estimer les paramètres d'une fonction  $K(h)$  inconnue. Wiebe et al. (1993) rapportent que la fonction  $K(h)$  est usuellement quadratique (i.e.  $K(h)=c_0+c_1h+c_2h^2$ ), et a donc trois degrés de liberté. Il est donc assez plausible que la fonction  $K(h|\hat{\theta})$  soit plus incertaine que  $\hat{Q}_m(h)$ , et donc on peut s'attendre à une plus grande erreur sur les débits mesurés par l'AFFRA que sur ceux obtenus en établissant directement une relation niveau-débit à partir des quelques jaugeages utilisés pour calibrer l'AFFRA. On doit donc conclure qu'il est vraisemblable que l'installation de deux paires de transducteurs mesurant la vitesse pour deux hauteurs d'eau différentes soit nécessaire pour permettre d'établir une relation niveau-débit en rivière à l'aide de l'AFFRA.

Il faut noter que l'utilisation de l'AFFRA donne tout de même de l'information supplémentaire, mais que celle-ci est plus difficilement quantifiable: parce que l'appareil mesure le débit directement, l'AFFRA permet de vérifier qu'il existe bel et bien une relation niveau-débit au site, et que celle-ci peut être représentée par le modèle paramétrique choisi. Pour certains sites d'installation, où l'on croit qu'une relation niveau-débit tient de façon approximative, il peut s'agir d'une information vitale.



## 6. INCERTITUDE SUR LE DÉBIT EN PRÉSENCE DE GLACE

Un attrait majeur du courantomètre AFFRA est la possibilité d'obtenir en temps réel des mesures du débit en présence d'un couvert de glace. Bien qu'il soit possible d'effectuer des jaugeages d'hiver, il devient très difficile d'estimer le débit à partir de la hauteur d'eau. D'abord, si un limnimètre à pression est utilisé pour déterminer la hauteur d'eau, celui-ci sera biaisé par la présence de glace, contrairement à un appareil acoustique comme l'AFFRA. Ensuite, la relation niveau-débit d'une rivière se modifie l'hiver, varie avec l'état du couvert de glace, et ne tient généralement pas lors de la débâcle. Pour les débits d'hiver, l'AFFRA peut donc fournir une information de meilleure qualité. Encore une fois cependant, la qualité des débits mesurés dépendra grandement de la calibration de l'appareil. Parce que le profil de vitesse en présence d'un couvert de glace est différent, on doit s'attendre à ce que le rapport entre la vitesse moyenne et la vitesse mesurée par l'AFFRA (qui correspond à  $K(h)$ , la fonction de calibration) ne soit pas le même l'été et l'hiver. Conséquemment, des jaugeages d'été ne sont pas suffisants pour estimer avec précision le débit en présence de glace.

Pour auto-calibrer un courantomètre AFFRA en présence de glace, il faut tenir compte du couvert dans le modèle du profil vertical de vitesse. Le modèle simple de Prandtl-von Karman ne s'applique plus par exemple. En effet, la vitesse n'augmente pas de façon logarithmique du fond de la rivière à la surface en présence de glace; le couvert cause aussi de la friction, diminuant ainsi la vitesse. Conséquemment, la vitesse maximale se retrouve quelque part entre le fond et la surface, à un endroit déterminé par la rugosité du couvert et du lit de la rivière (Zhidkikh et al. 1974). En pratique, on modélise le profil de vitesse par deux courbes logarithmiques: l'une augmentant du fond vers la surface, et l'autre augmentant de la surface vers le fond (Larsen 1969). Ces deux courbes se rejoignent au point où la vitesse est maximale. Évidemment, ce modèle plus réaliste comporte plus de paramètres, et ne peut donc être calibré avec seulement des mesures de vitesse à deux profondeurs.

On pourrait être tenté d'appliquer le modèle de profil de vitesse en eaux libres en faisant l'hypothèse que l'influence du couvert est négligeable. Rouvé et al. (1974) rapportent cependant que le débit d'une rivière est souvent réduit de 20% ou plus à cause de la rugosité du couvert de glace. Nous suggérons donc une calibration de l'AFFRA par jaugeages manuels l'hiver; une méthode qui donnera des résultats plus variables mais moins biaisés. Une fois l'appareil calibré par jaugeages, l'incertitude totale sur l'AFFRA peut être établie par simulation Monte-Carlo, de la même façon que pour son utilisation en eaux libres.



## 7. APPLICATIONS

---

Pour illustrer les développements théoriques présentés jusqu'ici, nous étudierons l'incertitude sur les mesures de débit obtenues à l'aide de l'AFFRA à deux sites: le reversoir 3, dans le delta de Sorel, et la Red River à Emerson. Dans le premier cas, l'AFFRA a été installé pour établir une relation niveau-débit et dans le second pour estimer les débits hivernaux.

### 7.1 Estimation d'une relation niveau-débit au reversoir 3 (Saint-Laurent)

Le reversoir 3 est une structure de contrôle aménagée dans le delta de Sorel, située à une centaine de kilomètres en aval de Montréal. Le delta de Sorel est constitué d'un ensemble d'îles séparées par des chenaux d'importance variable. Les eaux du fleuve se répartissent ainsi à l'intérieur de neuf chenaux, dont cinq sont munis de structures de retenue (reversoires R1 à R5) visant à ramener vers le chenal de navigation une partie du débit qui normalement transiterait dans ces chenaux. Ces réversoires ont été construits dans les années 1930 et sont caractérisés par un rehaussement de fond réalisé à l'aide d'enrochements. Depuis plusieurs années, on dénote un phénomène d'érosion se caractérisant par un abaissement généralisé de la crête des reversoirs et par l'ouverture de brèches. Cet état de choses a pour effet de modifier le comportement hydraulique des reversoirs rendant ainsi la mesure du débit plus difficile.

C'est dans le but d'améliorer l'évaluation des débits qu'un courantomètre AFFRA a été installé au mois d'août 1993 dans le chenal menant au reversoir 3, quelques 800 m en amont. L'installation comporte deux transducteurs séparés d'une distance de 259 m et faisant un angle de 48° avec les lignes de courant, ainsi que deux sondes-niveau: l'une ( $h$ ) couplée à un transducteur, l'autre ( $h'$ ) placée en aval de la structure de contrôle, à environ 30 m du reversoir. À l'aide de cet appareil, Environnement Canada espérait pouvoir développer une relation niveau-débit tenant compte de la géométrie particulière du reversoir.

#### 7.1.1 Relation niveau-surface

À l'automne 1993, la Garde Côtière canadienne a effectué une étude pour déterminer la bathymétrie moyenne du secteur d'intérêt où sont installés les transducteurs. Cantin (1994) a pu établir précisément la relation niveau-surface à partir de ces données:

$$A(h) = 1942.1622 + 297.6847 h + 9.7717 h^2 \quad (51)$$

où  $h$  est le niveau d'eau donné par l'AFFRA en amont du reversoir 3 en c.d. de Sorel (m). Étant donné que cet ingénieur mentionne que la relation est précise et qu'il prend la peine de donner assez de décimales pour estimer l'aire au  $\text{cm}^2$  près, nous supposons que l'aire est mesurée sans erreur.

### 7.1.2 Calibration de l'AFFRA

Comme l'installation ne comporte qu'une seule paire de transducteurs, l'AFFRA doit être calibré par jaugeages. Godin (1995) a répertorié 7 jaugeages pouvant servir à la calibration; ceux-ci sont présentés au Tableau 2, classés en ordre croissant de hauteur d'eau  $h$ . On peut y voir la date de chaque jaugeage, la méthode employée, la hauteur d'eau en amont du reversoir 3, les vitesses jaugées et les vitesses mesurées par l'AFFRA ainsi que le rapport de ces deux vitesses.

**Tableau 2: Données servant à la calibration de l'AFFRA au reversoir 3**

No	Date	Méthode	Hauteur d'eau $h$ (m)	Vitesse $\hat{v}_m$ jaugée (m/s)	Vitesse $\hat{v}_a$ selon l'AFFRA (m/s)	Rapport $\hat{v}_m/\hat{v}_a$
1	95-09-22	ADCP	0.251	0.064	0.074	0.87
2	94-10-18	ADCP	0.543	0.124	0.119	1.04
3	95-04-12	ADCP	0.599	0.144	0.138	1.04
4	95-08-16	ADCP	0.642	0.148	0.140	1.06
5	93-10-26	ADCP	1.435	0.282	0.281	1.00
6	94-05-18	moulinet	1.744	0.369	0.343	1.08
7	94-04-20	moulinet	2.420	0.459	0.448	1.02

On voit que la vitesse mesurée par l'AFFRA est très près de celle jaugée. Si le rapport  $\hat{v}_m/\hat{v}_a$  semble très différent pour le premier jaugeage (0.87), l'écart entre les deux vitesses n'est tout de même que de 1 cm/s.

#### 7.1.2.1 Précision des jaugeages

Pour pouvoir estimer la relation  $K(h)$ , il est nécessaire d'étudier la précision de chaque mesure de vitesse, de façon à pouvoir utiliser la méthode des moindres carrés pondérés (cf. Annexe A). Pour la vitesse mesurée par l'AFFRA, on utilisera à nouveau la relation  $\sigma^2(\hat{v}_a) \approx 12\hat{v}_a + 5$ , où  $\hat{v}_a$  est exprimé en m/s et  $\sigma^2(\hat{v}_a)$  en  $\text{mm}^2$ . Pour les jaugeages au moulinet, on supposera un écart-type de 2.6%, correspondant à un intervalle de confiance à 95% de l'ordre de 5%, tel que suggéré par Terzi (1981). Pour les jaugeages à l'aide de l'ADCP, on sait que chaque mesure est en fait la moyenne d'un ensemble de passes; la variabilité de ces passes individuelles peut permettre d'estimer la précision de l'ADCP. Parmi les 5 jaugeages

effectués à l'aide du profileur acoustique à effet Doppler, nous n'avons pu retrouver les résultats des passes individuelles que pour trois d'entre eux. Les résultats de ces passes sont présentés au Tableau 3.

**Tableau 3: Mesures individuelles de vitesse obtenues à l'aide de l'ADCP pour 3 jaugeages au reversoir 3**

Passe	Vitesse mesurée (m/s)		
	Jaugeage 1	Jaugeage 2	Jaugeage 3
1	0.066	0.121	0.148
2	0.059	0.122	0.145
3	0.067	0.132	0.140
4	0.065	0.124	
5	0.060	0.122	
6	0.070	0.127	
7	0.059	0.127	
8	0.065	0.121	
9	0.063	0.120	
Moyenne	0.064	0.124	0.144
Écart-type	0.004	0.004	0.004

On remarque que l'écart-type des trois groupes de mesures individuelles est le même, soit 4 mm/s, une valeur relativement faible. Nous supposons donc que les 5 jaugeages effectués à l'aide de l'ADCP sont basés sur des mesures individuelles ayant cette précision. La variabilité de la moyenne des mesures individuelles, qui correspond à la valeur de vitesse moyenne reportée au Tableau 2, est encore plus faible.

**Tableau 4: Écart-type des mesures de vitesse d'écoulement au reversoir 3 lors des campagnes de jaugeage**

No	Nombre de passes	ADCP et moulinet Price		AFFRA	
		Vitesse jaugée (m/s)	Écart-type (mm/s)	Vitesse mesurée (m/s)	Écart-type (mm/s)
1	9 (ADCP)	0.064	1.3 (2.1%)	0.074	2.4 (3.2%)
2	9 (ADCP)	0.124	1.3 (1.1%)	0.119	2.5 (2.1%)
3	3 (ADCP)	0.144	2.3 (1.6%)	0.138	2.6 (1.9%)
4	6 (ADCP)	0.148	1.6 (1.1%)	0.140	2.6 (1.9%)
5	6 (ADCP)	0.282	1.6 (0.6%)	0.281	2.9 (1.0%)
6	1 (moulinet)	0.369	9.4 (2.6%)	0.343	3.0 (0.9%)
7	1 (moulinet)	0.459	11.7 (2.6%)	0.448	3.2 (0.7%)

En effet, selon le théorème central limite (Walpole et Myers 1985), la variance de la moyenne est donnée par la variance des valeurs individuelles divisée par le nombre de mesures. Nous

connaissions ce nombre pour les jaugeages 1, 2 et 3, mais nous n'avons pu retrouver l'information pour les jaugeages 4 et 5. Pour illustrer la méthode de calcul, nous supposons que 6 passes ont été effectuées, en accord avec les normes américaines. Le Tableau 4 montre la variabilité des jaugeages effectués à l'aide de l'ADCP obtenue par application du théorème central limite (i.e. en divisant 4 mm/s par la racine carré du nombre de passes). Les deux jaugeages au moulinet sont aussi inclus dans ce tableau; leur coefficient de variation est fixé à 2.6%. On peut comparer dans ce même tableau l'écart type des vitesses mesurées par l'AFFRA. On observe aisément que les mesures obtenues avec l'ADCP sont plus précises que celle de l'AFFRA, elles-mêmes plus précises que les jaugeages au moulinet.

### 7.1.2.2 Précision des estimations du rapport $v_m/v_a$

Le Tableau 4 fournit toutes les entrées nécessaires pour le calcul de l'incertitude sur le rapport  $\hat{v}_m/\hat{v}_a$  par simulation Monte-Carlo (un programme MATLAB® a été proposé précédemment pour réaliser cette simulation, voir Figure 1). Après  $R=10\,000$  répétitions, le Tableau 5 présente l'estimation de l'écart-type du rapport  $K_i = \hat{v}_m/\hat{v}_a$  pour chaque jaugeage  $i=1,2,\dots,N$ .

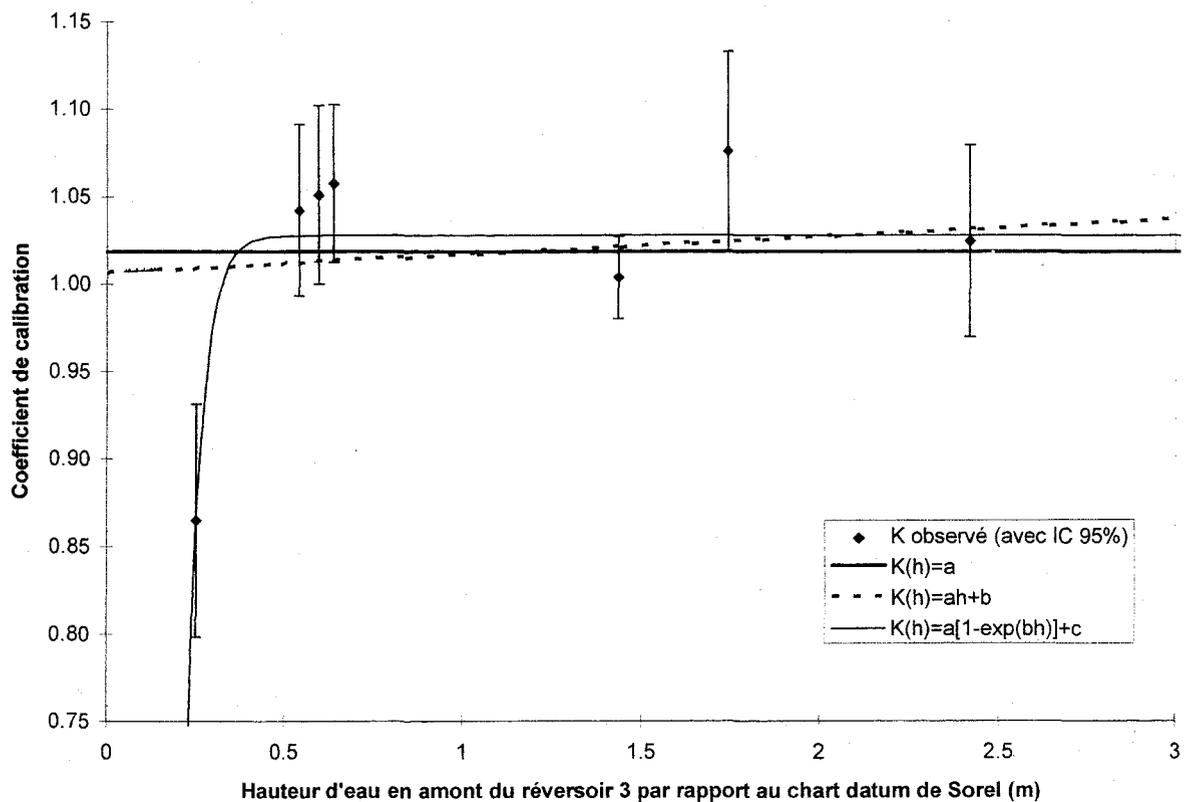
**Tableau 5: Écart-type du rapport  $\hat{v}_m/\hat{v}_a$   
pour les jaugeages réalisés au reversoir 3**

Jaugeage	rapport $K_i = \hat{v}_m/\hat{v}_a$	Écart-type
1	0.87	0.034
2	1.04	0.025
3	1.04	0.026
4	1.06	0.023
5	1.00	0.012
6	1.08	0.029
7	1.02	0.028

Certains jaugeages donnent donc une idée plus précise du rapport  $\hat{v}_m/\hat{v}_a$ , puisque l'écart-type varie du simple au triple pour ces 7 jaugeages. On peut tirer avantage de cette information en utilisant la méthode des moindres carrés pondérés pour ajuster un modèle à ces données. En portant sur un graphique  $K_i$  en fonction de  $h$  (Figure 3), on remarque que le rapport est à peu près constant, sauf pour le premier point. Il faut cependant accorder un poids limité à cet écart, puisqu'il s'agit du point de mesure le plus variable.

### 7.1.2.3 Modélisation de la relation $K(h)=v_m/v_a$

Pour modéliser la relation entre le rapport des vitesses et la hauteur d'eau, on peut imaginer facilement trois modèles paramétriques plausibles: une fonction exponentielle, dont la queue pourra aller chercher le premier point de mesure et qui atteindra un plateau par la suite, ou encore une droite de pente faible, on pourrait enfin même envisager une constante et ignorer à toutes fins pratiques le premier point. La Figure 3 montre l'ajustement obtenu pour ces trois modèles. Les observations sont tracées avec un intervalle de confiance à 95% basé sur l'hypothèse approximative de normalité de ces variables (hypothèse nécessaire pour pouvoir appliquer le modèle de régression).



**Figure 3: Modélisation du rapport  $v_m/v_a$  en fonction de  $h$**

Il n'est pas aisé de choisir entre ces modèles, étant donné le petit nombre de points de mesure et l'erreur importante sur ces derniers. Comme proposé dans la partie théorique de ce rapport, nous utiliserons le critère d'Akaike pour discriminer entre les modèles. Le Tableau 6 présente différents modèles paramétriques ajustés aux 7 jaugeages, avec la valeur de la vraisemblance, le nombre de paramètres et finalement le critère d'Akaike. Parmi les modèles polynomiaux,

c'est la fonction constante qui l'emporte; c'est elle qui a le plus faible AIC. Cependant, malgré ses trois paramètres, le modèle exponentiel a une vraisemblance tellement plus élevée qu'il décline les autres modèles; son AIC est nettement plus faible.

**Tableau 6: Critère d'Akaike pour différents modèles de  $K(h)$  au reversoir 3**

Modèle	log-vraisemblance	Nb. par.	AIC
$K(h)=1.02$	4.0	1	-6.0
$K(h)=0.01h+1.006$	4.3	2	-4.6
$K(h)=-0.02h^2+0.06h+0.98$	4.7	3	-3.4
$K(h)=80.754[1-\exp(-24.73h)]-79.727$	14.8	3	-23.6

Nous utiliserons donc le modèle exponentiel, mais avec précaution tout de même. D'abord notons que le plateau qu'atteint ce modèle est 1.027, une valeur très proche de celle obtenue pour le modèle constant. Ensuite il faut remarquer que ce modèle donne des résultats insensés pour des valeurs très faibles de  $h$ ; on peut même obtenir un coefficient de calibration négatif pour des niveaux d'eau inférieurs à 0,18 m en c.d. de Sorel. Il serait donc imprudent d'extrapoler le modèle pour de très faibles valeurs. Pour l'extrapolation de grandes valeurs, il faut aussi être prudent parce que le modèle est empirique. Cependant, les observations disponibles supportent bien l'hypothèse d'un plateau. Une façon de quantifier la confiance que l'on peut avoir dans ce modèle est de déterminer par Jackknife sa précision.

#### 7.1.2.4 Précision de la relation $K(h)$ estimée

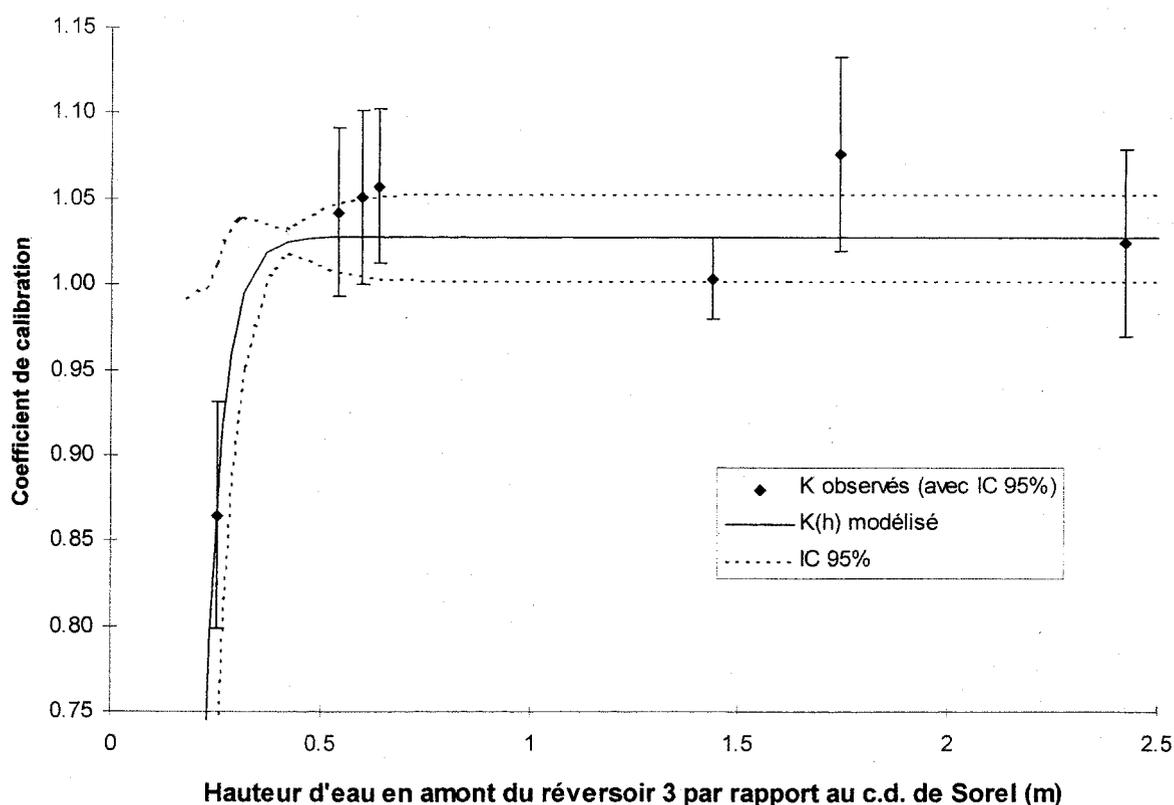
Il est important de quantifier l'incertitude qui subsiste sur la relation  $K(h)$  après calibration d'un modèle paramétrique de la forme  $K(h)=a[1-\exp(bh)]+c$ . Comme expliqué dans la première partie de ce travail, une façon simple d'obtenir un intervalle de confiance pour  $K(h)$  consiste à utiliser la méthode du Jackknife. Pour appliquer cette méthode, il s'agit d'abord d'ajuster le modèle paramétrique aux  $N=7$  groupes de  $N-1$  observations formés à partir de l'échantillon  $\mathbf{k}=\{(K_i, h_i), i=1,2,\dots,N\}$ , que l'on note  $\{\mathbf{k}_i, i=1,2,\dots,N\}$  où  $\mathbf{k}_i$  désigne l'échantillon  $\mathbf{k}$  auquel on a retranché l'observation  $(K_i, h_i)$ . On obtient alors un ensemble de modèles dont la variabilité, pour  $h$  fixé, approxime la variabilité de l'estimation de  $K(h)$ .

Le Tableau 7 présente les résultats de l'application de la méthode du Jackknife aux données du reversoir 3. Les résultats obtenus sont typiques: l'écart-type des paramètres est très grand, mais l'écart-type des prévisions est beaucoup plus faible: à partir de 0.5 m de niveau d'eau, l'écart-type est de 0.01. On peut obtenir un intervalle de confiance approximatif pour  $K(h)$ , comme mentionné dans la première partie de ce travail, à partir de la distribution de Student à  $N-k=4$  degrés de liberté. La Figure 4 montre un intervalle de confiance à 95% pour  $K(h)$ .

**Tableau 7: Approximation de l'écart-type de l'estimation de  $K(h)$  par Jackknife**

Modèle basé sur	$a$	$b$	$c$	$K(h_1)$	$K(h_2)$	$K(h_3)$	$K(h_4)$	$K(h_5)$	$K(h_6)$	$K(h_7)$
$k_1$	72.978	-43.81	-71.950	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03
$k_2$	80.742	-24.78	-79.716	0.86	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03
$k_3$	80.736	-24.80	-79.711	0.86	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02
$k_4$	80.731	-24.84	-79.708	0.86	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02
$k_5$	3.446	-11.59	-2.394	0.86	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05
$k_6$	88.899	-25.22	-87.875	0.86	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02
$k_7$	80.756	-24.72	-79.728	0.86	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03
Écart-type	36.251	11.52	36.264	0.07	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01

Notons que le carré de l'écart-type est obtenu en divisant les écarts au carré par  $N-k=4$ .



**Figure 4: Fonction de calibration au réservoir 3, avec intervalle de confiance à 95%**

### 7.1.3 Calibration d'une relation niveau-débit à l'aide de l'AFFRA

En utilisant la fonction de calibration  $K(h)$  dérivée à la section précédente, il est possible d'estimer le débit au réservoir 3 directement à partir de la vitesse mesurée par l'AFFRA.

Cependant, pour améliorer la précision et gagner en compréhension du comportement hydraulique du reversoir, il est utile d'établir une relation niveau-débit théorique. Cependant, selon les développements théoriques que nous avons effectués sur cette question, l'utilisation de l'AFFRA ne devrait pas permettre de faire beaucoup mieux qu'une simple courbe de tarage établie uniquement à partir des jaugeages de calibration. Il est donc intéressant de comparer les deux approches. Après avoir présenté la forme paramétrique de la relation niveau-débit au reversoir 3, nous considérerons donc son ajustement d'abord simplement à partir des jaugeages de calibration et ensuite en utilisant les débits mesurés par l'AFFRA.

### 7.1.3.1 *Forme paramétrique de la relation niveau-débit au reversoir 3*

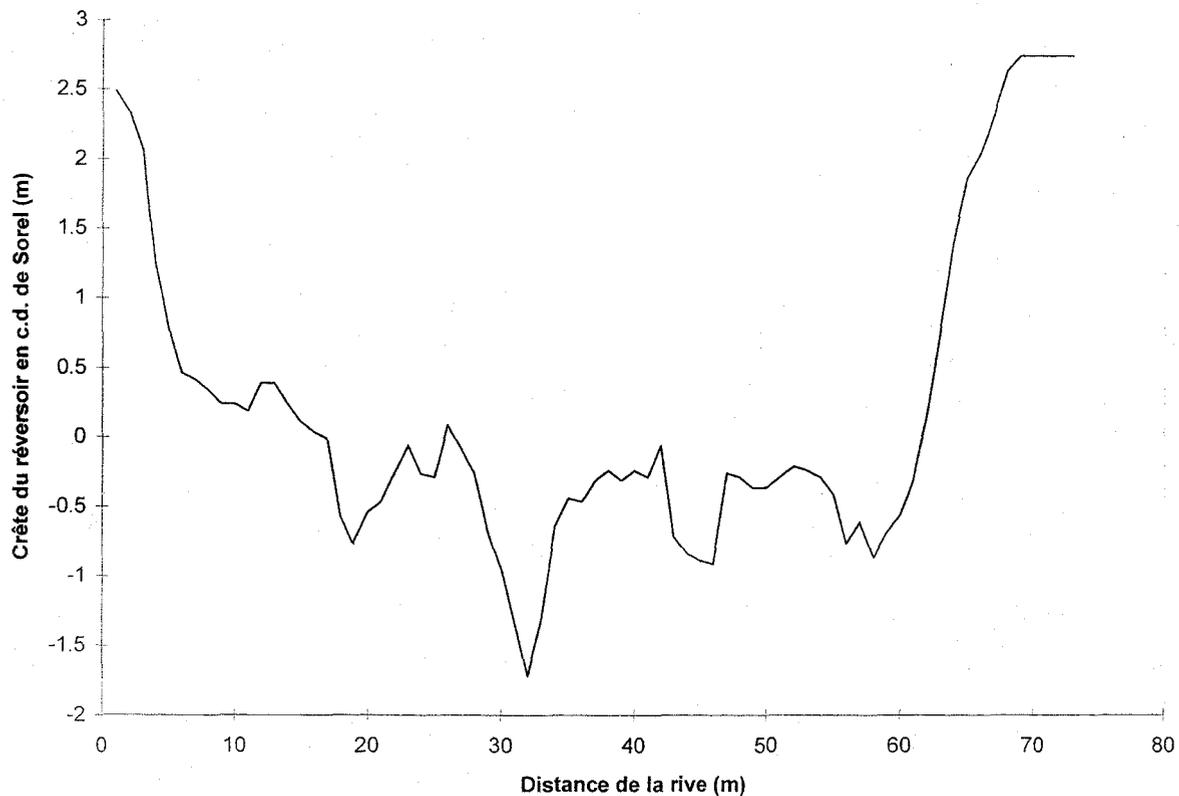
Godin (1995) a montré que la bathymétrie irrégulière du reversoir doit être prise en compte pour établir la relation niveau-débit au reversoir 3. En pratique, on peut diviser la section d'écoulement en  $n$  bandes de largeur  $dL$  et établir pour chaque bande une relation de la forme  $dQ(h) = a(h-h_0)^b dL$ . Le débit total peut alors être calculé en faisant la somme des débits traversant chaque bande. Si l'on note  $z(x)$  la hauteur de la crête du reversoir à une distance  $x$  de la berge, alors l'équation suivante permet de calculer le débit ( $a$  et  $b$  étant des paramètres d'ajustement):

$$Q = a \cdot dL \cdot \sum_{i=0}^{n-1} [\max(0, h - z(i \cdot dL))]^b \quad (52)$$

**Tableau 8: Bathymétrie du reversoir 3**

$x$	$z(x)$								
0	2.482	75	0.032	150	-1.318	225	-0.918	300	-0.318
5	2.332	80	-0.018	155	-1.718	230	-0.268	305	0.132
10	2.057	85	-0.568	160	-1.318	235	-0.293	310	0.732
15	1.232	90	-0.768	165	-0.643	240	-0.368	315	1.382
20	0.782	95	-0.543	170	-0.443	245	-0.368	320	1.857
25	0.457	100	-0.468	175	-0.468	250	-0.293	325	2.032
30	0.407	105	-0.268	180	-0.318	255	-0.218	330	2.307
35	0.332	110	-0.068	185	-0.243	260	-0.243	335	2.632
40	0.232	115	-0.268	190	-0.318	265	-0.293	340	2.732
45	0.232	120	-0.293	195	-0.243	270	-0.418	345	2.732
50	0.182	125	0.082	200	-0.293	275	-0.768	350	2.732
55	0.382	130	-0.093	205	-0.068	280	-0.618	355	2.732
60	0.382	135	-0.268	210	-0.718	285	-0.868	360	2.732
65	0.232	140	-0.668	215	-0.843	290	-0.693		
70	0.107	145	-0.943	220	-0.893	295	-0.568		

Le Tableau 8 présente les valeurs de  $z(x)$  obtenues en divisant la section d'écoulement à la hauteur du reversoir 3 en bandes de 5 m. La Figure 5 montre la crête du reversoir telle que décrite par les données du Tableau 8. On remarque d'importantes brèches dans la crête du reversoir.



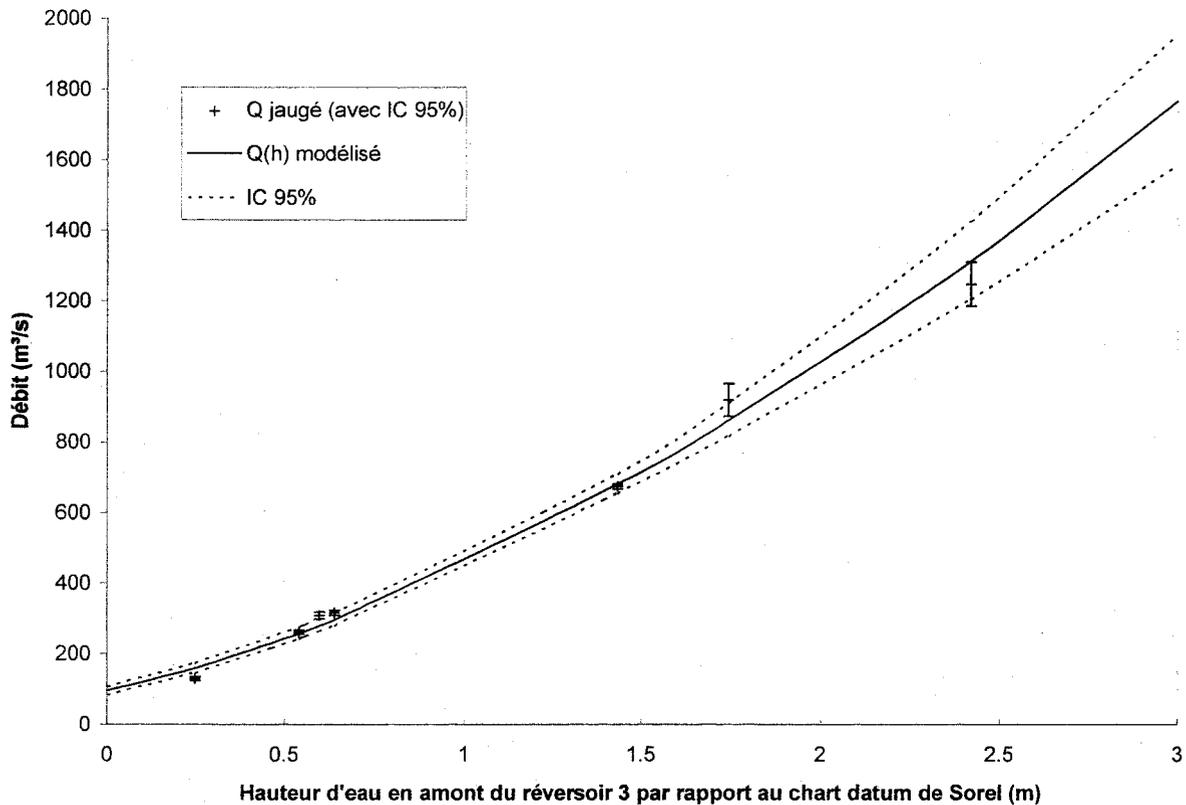
**Figure 5: Bathymétrie du réservoir 3**

### *7.1.3.2 Courbe de tarage établie à partir des jaugeages de calibration*

Les paramètres de la relation niveau-débit dont la forme paramétrique a été établie précédemment peuvent être estimés avec une précision raisonnable à l'aide des 7 jaugeages de calibration. On obtient, en ajustant les paramètres à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés,  $\alpha=0.99$  et  $b=1.47$ . La Figure 6 montre l'ajustement, avec un intervalle de confiance approximatif à 95% calculé par Jackknife.

Dans la mesure où le modèle paramétrique utilisé est valable, on peut avoir une bonne confiance dans la courbe de tarage établie uniquement à partir des jaugeages, même si celle-ci n'est établie qu'à partir de 7 points. On remarque que la taille de l'intervalle de confiance augmente avec le niveau d'eau. Ceci est causé principalement par la moins grande précision des jaugeages 6 et 7, qui ont été effectués au moulinet. On remarque aussi que le débit n'est pas nul pour une hauteur d'eau  $h$  de zéro en c.d. de Sorel. Ceci est normal, si l'on considère la bathymétrie du réservoir. Il y a encore pour cette hauteur d'eau une bonne partie de la crête du

reversoir qui est toujours sous l'eau. La cote moyenne de la crête du reversoir est d'ailleurs d'environ -0.5 m en c.d. de Sorel (Godin 1995).

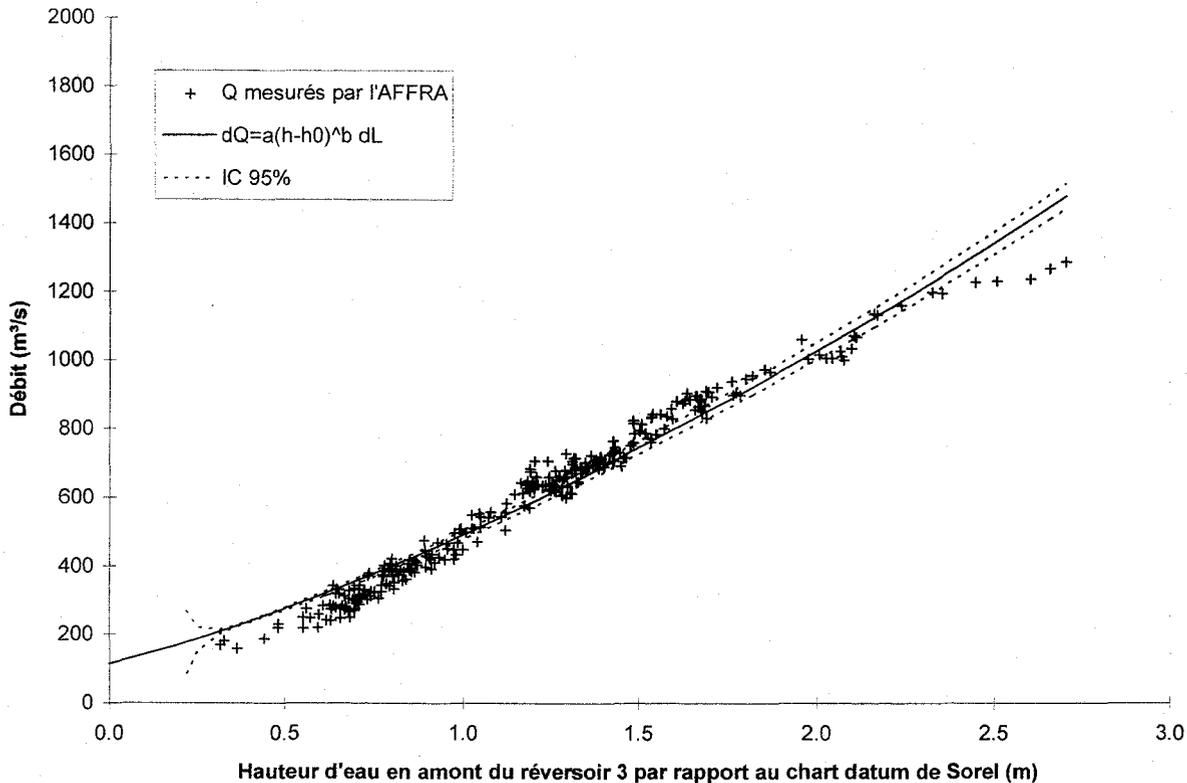


**Figure 6: courbe de tarage établie  
à partir des jaugeages de calibration au reversoir 3**

### 7.1.3.3 Utilisation de l'AFFRA pour améliorer la courbe de tarage

L'AFFRA installé au reversoir 3 fournit une mesure de débit à chaque quart d'heure. Pendant sa période de fonctionnement, de septembre 1993 à septembre 1994, l'appareil a donc fourni des milliers de points de mesure pouvant être utilisés pour calibrer une courbe de tarage. Godin (1995) a tiré de ces mesures les débits moyens journaliers en eaux libres, et c'est eux que nous utiliserons par la suite. En ajustant par la méthode des moindres carrés l'équation paramétrique proposée précédemment, on obtient  $a=1.14$  et  $b=1.32$ . La variabilité de la relation estimée est presque nulle, étant donné le grand nombre de points de mesures, mais l'incertitude totale est égale à l'incertitude sur le coefficient de calibration  $K(h)$ . On obtient donc un intervalle de confiance pour le débit  $Q(h)$  pour  $h$  fixé en multipliant l'intervalle de confiance sur  $K(h)$  par  $A(h)$ . On ne peut estimer cet intervalle de confiance pour des hauteurs

d'eau inférieures à 0.25 m, puisque la fonction  $K(h)$  n'a pu être évaluée correctement pour ces faibles hauteurs d'eau.

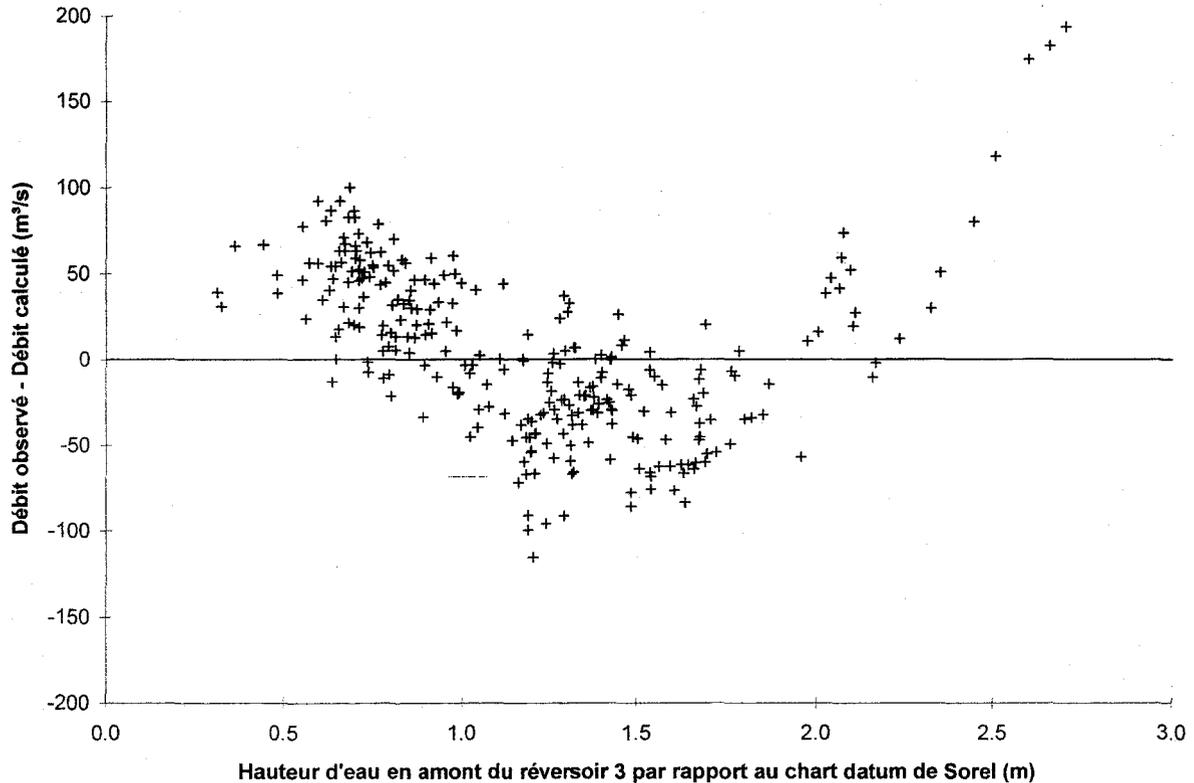


**Figure 7: Relation niveau-débit théorique établie à l'aide de l'AFFRA au reversoir 3**

L'ajustement obtenu, et présenté à la Figure 7 est visiblement inadéquat, particulièrement pour les débits élevés. On peut le vérifier en observant la distribution des résidus en fonction de la hauteur d'eau, qui devrait avoir pour  $h$  fixé une moyenne nulle. La Figure 8 montre bien que ces résidus ne forment pas un nuage de point sans structure mais plutôt une parabole, qui indique que le modèle utilisé est inexact.

Cette constatation nécessite de remettre en question soit la forme paramétrique de la relation niveau-débit théorique proposée, soit la forme paramétrique du coefficient de calibration  $K(h)$ . En effet, le fait que le modèle ne s'ajuste pas aux débits élevés peut venir du fait que la véritable correction  $K(h)$  devrait être beaucoup plus élevée pour ces valeurs de  $h$ . On se rappelle que  $K(h)$  est une fonction dont la forme a été déterminée de façon empirique; c'est une exponentielle qui atteint rapidement un plateau. Nous avons supposé qu'il était raisonnable de l'extrapoler, mais cette hypothèse pourrait éventuellement s'avérer fausse. Il

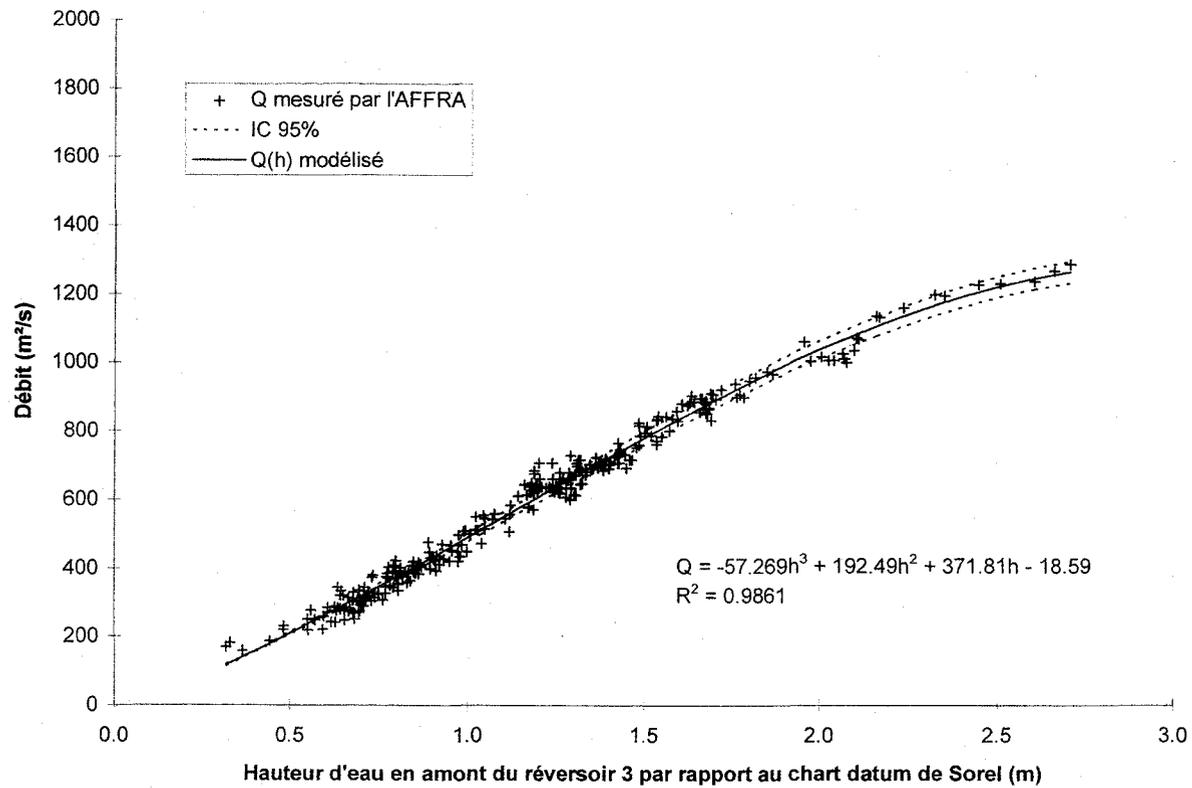
faudrait cependant que  $K(h)$  soit de l'ordre de 1.15 pour ramener les débits estimés à l'aide de l'AFFRA sur la courbe théorique, alors que cette fonction est présentement évaluée à 1.02 pour les hauteurs d'eau élevées.



**Figure 8: Distribution des résidus de la relation niveau-débit théorique ajustée aux débits mesurés par l'AFFRA au réservoir 3**

Il est donc possible que le modèle théorique proposé soit inadéquat. Godin (1995) a suggéré d'incorporer l'effet du niveau aval du réservoir, en utilisant une correction développée pour modéliser les déversoirs noyés (Carlier 1980). Cependant, les résultats obtenus avec cette approche ne sont pas satisfaisants pour les débits élevés (>2.5 m). Si l'intérêt de développer une relation niveau-débit au réservoir 3 est de simplifier l'estimation du débit (et non de comprendre les phénomènes hydrauliques en cours), on peut ajuster un modèle empirique simple aux données de l'AFFRA, et ainsi obtenir une façon simple d'estimer le débit à l'intérieur de la plage de hauteurs d'eau observées par l'AFFRA. Un polynôme du troisième degré donne de bons résultats, comme le montre la Figure 9. Les résidus (Figure 10) de cette régression ressemblent beaucoup plus à un bruit blanc que ceux de la régression précédente. L'intervalle de confiance donné pour cette régression correspond encore une fois au produit

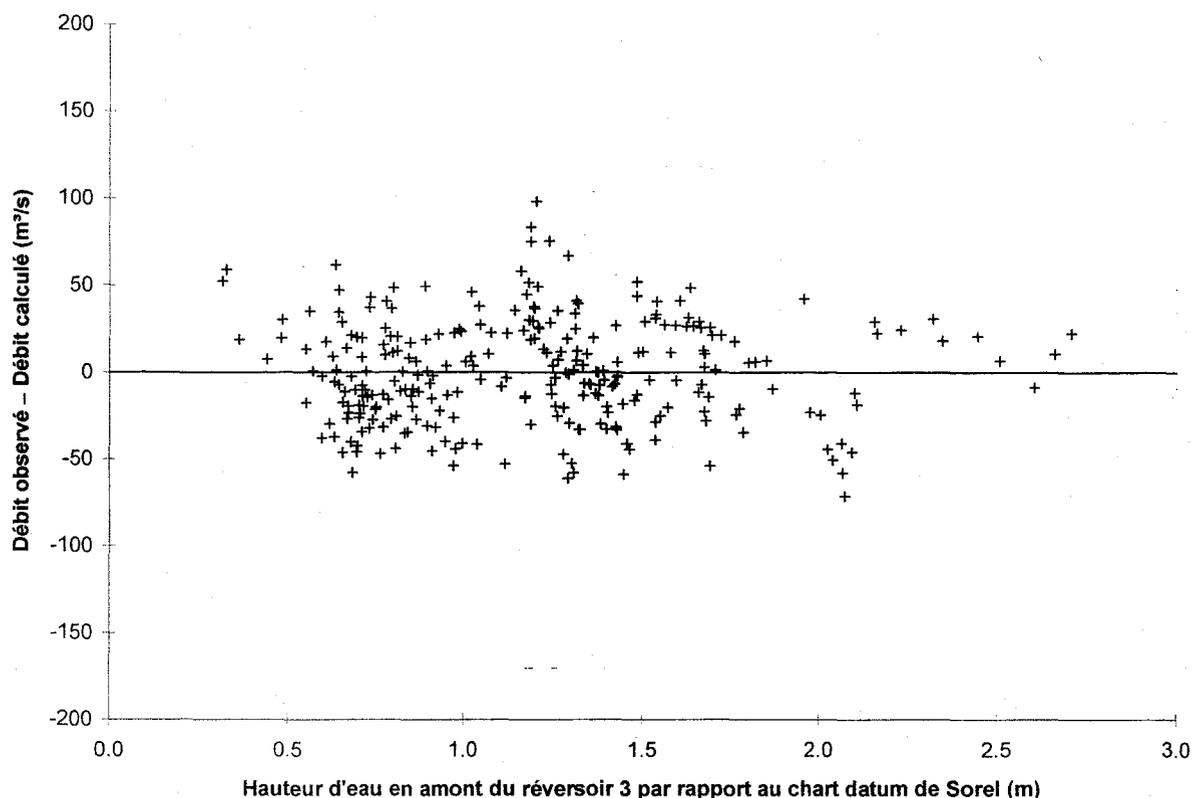
de l'intervalle de confiance sur  $K(h)$  par l'aire  $A(h)$  de la section d'écoulement, puisque la variabilité de l'estimation du modèle est négligeable.



**Figure 9: Relation niveau-débit empirique établie à l'aide de l'AFFRA au réservoir**

**3**

Il est important de réaliser que l'extrapolation de la fonction obtenue n'est pas à conseiller. Cependant, l'extrapolation ne serait nécessaire que pour estimer le débit correspondant à des hauteurs d'eau mesurées avant l'installation de l'AFFRA, ou après son démantèlement.



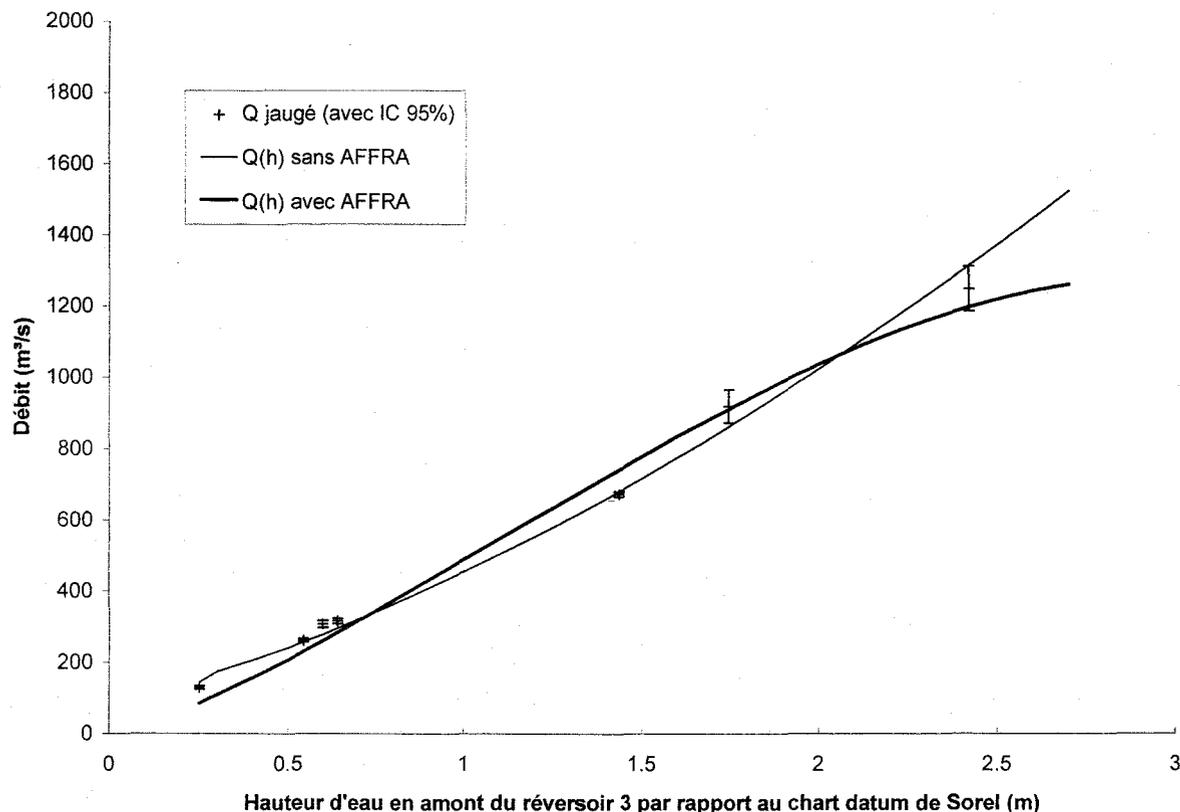
**Figure 10: Distribution des résidus de la relation niveau-débit empirique ajustée aux débits mesurés par l'AFFRA au reversoir 3**

#### 7.1.4 Information obtenue par l'utilisation de l'AFFRA au reversoir 3

En employant l'AFFRA pour établir une relation niveau-débit au reversoir 3, il a été possible de mettre en évidence un comportement hydraulique particulier à ce site, particulièrement pour les débits élevés. Nous n'avons cependant pas trouvé de modèle théorique permettant d'expliquer ce comportement. Un modèle empirique a été ajusté; il n'est cependant valable que pour l'interpolation ( $0.25\text{m} < h < 2.7\text{m}$ ). De plus, pour les hauteurs d'eau faibles ( $h < 0.25\text{m}$ ), la calibration de l'appareil à l'aide de jaugeages n'a pas permis d'évaluer correctement le coefficient de correction  $K(h)$ . Et pour les fortes hauteurs d'eau ( $h > 2.4\text{m}$ ), il n'est pas certain que l'on puisse se fier à l'extrapolation de l'estimation de  $K(h)$  puisqu'il s'agit d'une fonction empirique.

À l'intérieur du domaine de validité du modèle empirique, la différence entre celui-ci et la courbe de tarage établie uniquement à partir des jaugeages de calibration (Figure 6) sont relativement faibles, comme le montre la Figure 11. Pour les hauteurs d'eau de l'ordre de 2.7

m (correspondant par exemple à la crue de printemps de 1994), si l'on croit raisonnable que la fonction  $K(h)$  ne passe pas subitement de 1.02 à 1.15, alors l'utilisation de l'AFFRA pourrait permettre d'éviter une surestimation du débit de l'ordre de 15%.



**Figure 11: Comparaison de la relation  $Q(h)$  théorique établie à partir de jaugeages avec la relation  $Q(h)$  empirique établie à l'aide de l'AFFRA au réservoir 3**

Pour croire en l'estimation adéquate des débits élevés ( $2.4\text{m} < h < 2.7\text{m}$ ) obtenue à l'aide de l'AFFRA, il faut cependant être convaincu à la fois que l'extrapolation du modèle empirique du coefficient  $K(h)$  est correcte que le modèle physique du débit proposé, pourtant généralement applicable, est incorrect dans le cas du réservoir 3. La confiance que l'on peut avoir dans les estimations de débit obtenues à l'aide de l'AFFRA serait plus élevée si le coefficient  $K(h)$  était dérivé de façon théorique, par modélisation du profil vertical de vitesse.

## 7.2 Estimation du débit en présence de glace (Red River à Emerson)

Un courantomètre acoustique AFFRA a été installé sur la Red River, dans la ville d'Emerson au Manitoba, à environ 1.5 kilomètre de la frontière canado-américaine. Un courantomètre

AFFRA a été implanté à cet endroit entre autres pour mesurer précisément le débit sous un couvert de glace. Les communautés de la région d'Emerson dépendent principalement de l'apport de cette rivière pour leur alimentation en eau potable; d'où l'importance d'une connaissance des régimes d'étiage.

Les caractéristiques hydrauliques de la Red River sont typiques d'un bon nombre de rivières des prairies. Ainsi, le cours d'eau a une pente très faible et on peut observer des variations du niveau d'eau d'environ 7 mètres au cours d'une année. La section hydraulique à l'étude a une largeur de 65 mètres en période d'étiage sévère et peut atteindre une largeur d'environ 200 mètres en période de crue. Une bonne relation niveau-débit existe en eaux libres. Les berges sont principalement composées d'argile. En hiver, la courbe de tarage sous le couvert de glace semble valide sauf pour des étiages d'hiver extrêmement sévères. Dans ce cas, le jaugeage au moulinet s'avère inadéquat et imprécis en raison de la faible vitesse de l'eau ( $<10$  cm/s).

L'installation du courantomètre AFFRA a été effectuée en novembre 1988 et l'appareil est fonctionnel depuis ce temps. Cette installation comprend 2 niveaux. La première paire de transducteurs est séparée de 35.4 mètres et la seconde de 149 mètres. Deux sondes-niveau, séparées de 130 mètres, ont été installées dans la section. Cependant, nous ne disposons que des mesures de vitesse pour l'une d'entre elles; nous ne pourrions donc illustrer l'utilisation de deux paires de transducteurs. De toutes façons, nous avons suggéré que la calibration par modélisation du profil de vitesse n'était pas appropriée pour les débits sous couvert de glace.

Nous illustrerons pour cet exemple l'estimation de la précision des débits mesurés par l'AFFRA sous couvert de glace. À la différence de l'exemple précédent, les vitesses d'écoulement et hauteurs d'eau mesurées par l'AFFRA ne seront pas utilisées pour construire une relation niveau-débit, mais pour directement estimer le débit. Nous effectuerons donc la calibration de l'appareil, à partir de laquelle nous estimerons l'incertitude sur les mesures de débit.

### **7.2.1 Calibration de l'AFFRA**

Pour la calibration de l'AFFRA, 6 jaugeages au moulinet sont disponibles: quatre ont été effectués l'été, et deux l'hiver en présence de glace. Ceux-ci sont présentés au Tableau 9, classés en ordre croissant de hauteur d'eau  $h$ . On y retrouve la date de chaque jaugeage, les conditions hydrauliques (eaux libres, glace présente), la hauteur d'eau moyenne pendant le jaugeage, les vitesses jaugées et les vitesses mesurées par l'AFFRA (en fait la moyenne des

mesures de l'AFFRA pendant la période de jaugeage) ainsi que le rapport de ces deux vitesses.

**Tableau 9: Données servant à la calibration de l'AFFRA à Emerson (Red River)**

No	Date	Conditions	Hauteur d'eau $h$ (m)	Vitesse $\hat{v}_m$ jaugée (m/s)	Vitesse $\hat{v}_a$ selon l'AFFRA (m/s)	Rapport $\hat{v}_m/\hat{v}_a$
1	94/01/11	glace	228.753	0.278	0.321	0.87
2	94/03/02	glace	228.953	0.288	0.330	0.87
3	94/07/05	eaux libres	230.563	0.621	0.565	1.10
4	94/05/06	eaux libres	231.436	0.712	0.612	1.16
5	94/07/19	eaux libres	233.754	0.895	0.742	1.21
6	94/07/14	eaux libres	234.696	0.910	0.781	1.17

On remarque que les valeurs du rapport  $\hat{v}_m/\hat{v}_a$  sont très différentes pour les jaugeages en présence d'un couvert de glace. Cependant, ces deux jaugeages correspondent aussi aux hauteurs d'eau et vitesses les plus faibles. On se souvient que dans le cas du reversoir 3 le rapport  $\hat{v}_m/\hat{v}_a$  était aussi beaucoup plus faible pour le jaugeage effectué lors d'un étiage d'été.

### 7.2.1.1 Précisions des estimations du rapport $v_m/v_a$

En supposant les jaugeages au moulinet précis à 5% 19 fois sur 20, en prenant la variance des vitesses mesurées par l'AFFRA comme étant  $\sigma^2(\hat{v}_a) \approx 12\hat{v}_a + 5$ , et en effectuant une simulation Monte-Carlo pour trouver la distribution de leur rapport, on obtient les écarts-types présentés au Tableau 10 pour le rapport  $\hat{v}_m/\hat{v}_a$ :

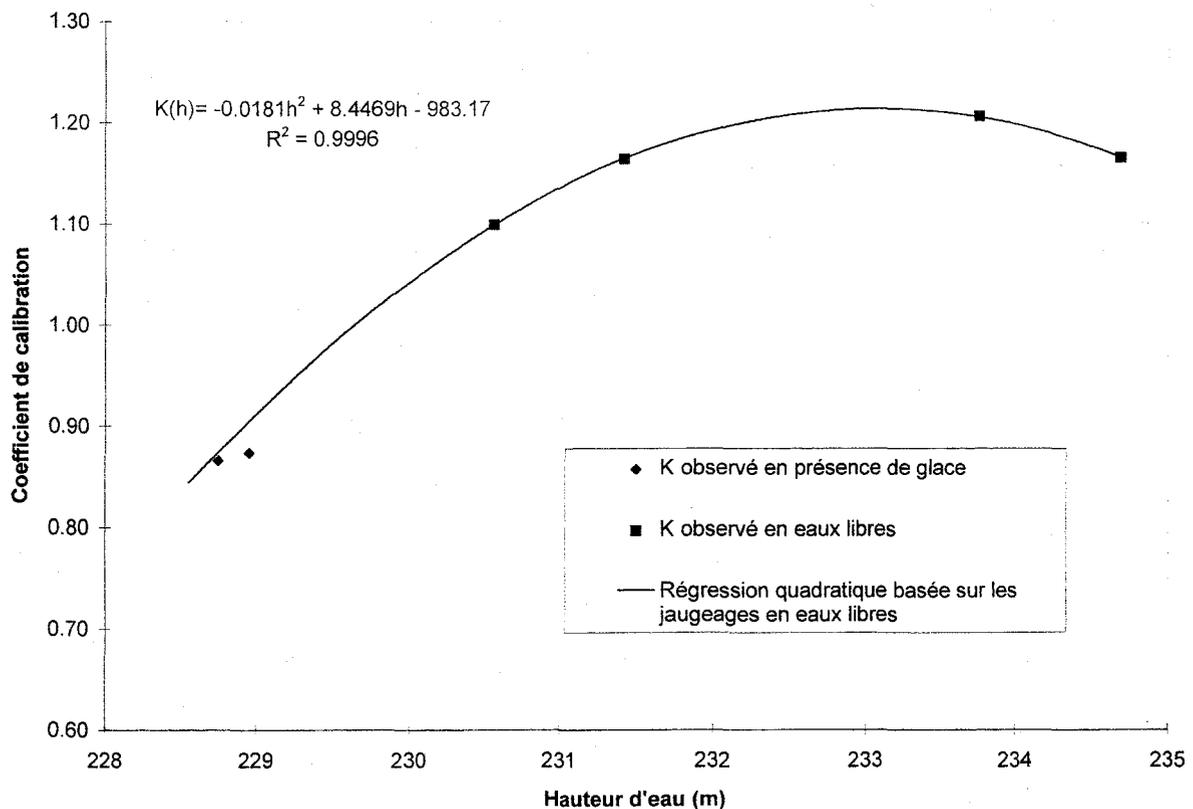
**Tableau 10: Écart-type du rapport  $\hat{v}_m/\hat{v}_a$   
pour les jaugeages réalisés à Emerson**

Jaugeage	rapport $K_i = \hat{v}_m/\hat{v}_a$	Écart-type
1	0.87	0.024
2	0.87	0.023
3	1.10	0.029
4	1.16	0.031
5	1.21	0.031
6	1.17	0.030

L'erreur est beaucoup plus uniforme que dans le cas du reversoir 3. Pour simplifier les calculs, nous supposons qu'elle est indépendante de  $h$ , et pourrons ainsi utiliser la méthode de régression par moindres carrés.

### 7.2.1.2 Modélisation de la relation $K(h)=v_m/v_a$

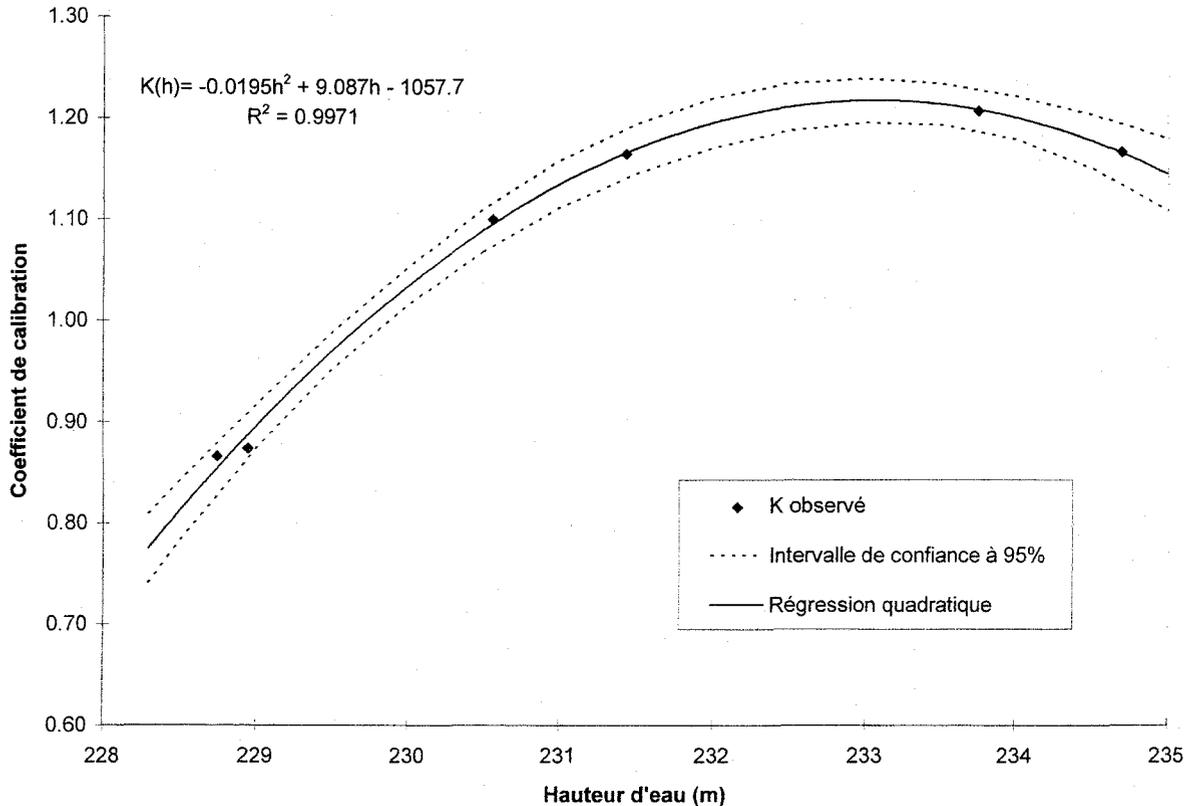
Nous avons proposé, pour améliorer la qualité des données, de considérer séparément les jaugeages d'été et d'hiver pour estimer la correction  $K(h)$ , puisque la présence de glace modifie considérablement les conditions hydrauliques. Mais avec seulement deux jaugeages d'hiver il est difficile d'estimer une fonction de calibration. Dans ces conditions, nous proposons de regarder si une seule fonction de calibration peut être appliquée pour ces six jaugeages. En supposant, comme Wiebe et al. (1993) le proposent, que  $K(h)$  est une fonction quadratique, nous avons ajusté une parabole aux quatre jaugeages en eaux libres, et extrapolé pour estimer  $K(h)$  pour les débits en présence de glace. La Figure 12 montre le résultat.



**Figure 12: Extrapolation de la fonction  $K(h)$  calibrée en eaux libres pour les jaugeages en présence de glace à Emerson (Red River)**

Force est de constater que la fonction  $K(h)$  calibrée à partir des 4 jaugeages en eaux libres ne se trompe pas de beaucoup lorsqu'elle est extrapolée aux jaugeages en présence de glace. Évidemment un test statistique pour vérifier si les valeurs observées en hiver sont significativement différentes ne serait pas assez puissant étant donné le faible nombre

d'observations. L'hypothèse que la fonction  $K(h)$  ne change pas énormément en hiver pour le site à l'étude semble tout de même raisonnable: le coefficient de calibration est bien différent (il passe d'environ 1.15 l'été à environ 0.85 l'hiver), mais les points peuvent encore être reliés par une même parabole. Nous calibrerons donc une fonction quadratique sur les six jaugeages sans faire de distinction. La Figure 13 montre le résultat de l'ajustement d'une parabole aux 6 jaugeages, avec un intervalle de confiance à 95% basé sur l'équation (16).



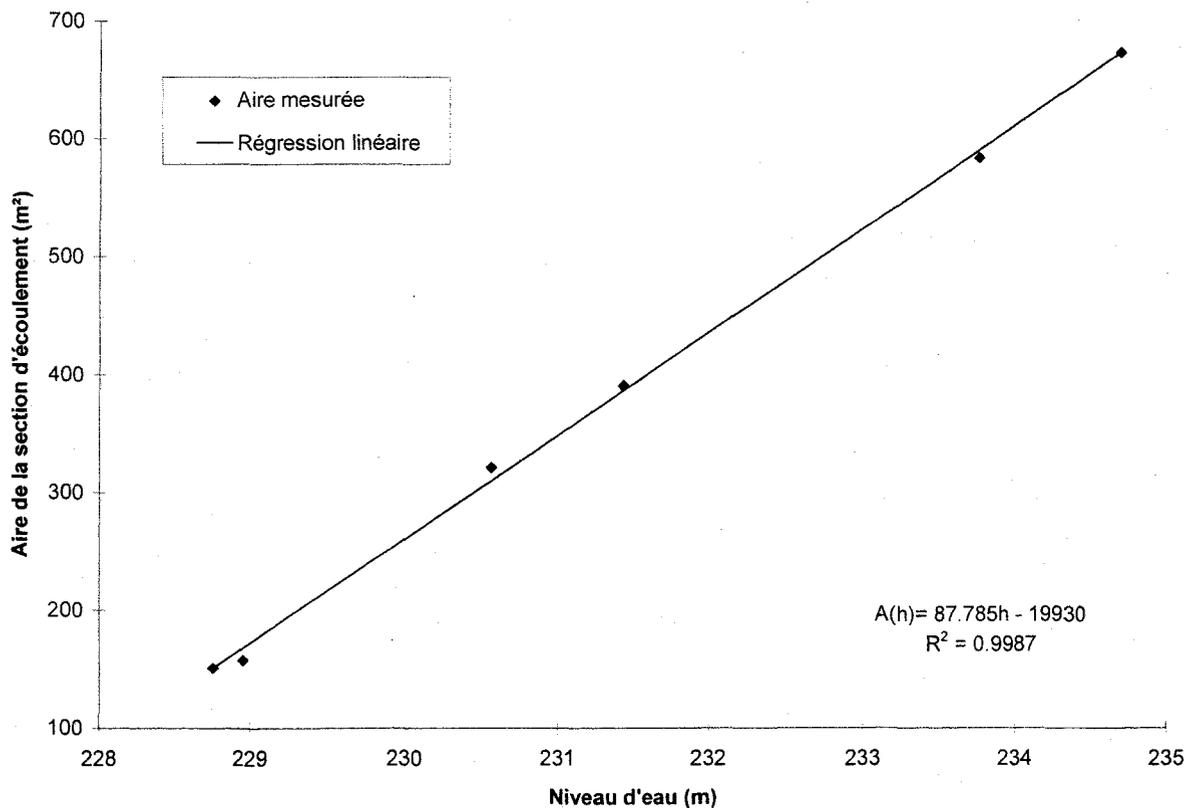
**Figure 13: Calibration de la fonction  $K(h)$   
à partir des 6 jaugeages à Emerson (Red River)**

On remarque que l'ajustement est meilleur pour les jaugeages effectués en présence de glace. Il est intéressant de constater que l'écart-type des résidus de cette régression est seulement de 0.01, une valeur inférieure à l'écart-type prédit par les essais en laboratoire (qui varie de 0.023 à 0.031, voir Tableau 10). On peut en conclure que les vitesses mesurées par l'AFFRA sont très précises; il avait déjà été mentionné d'ailleurs que les essais en laboratoire avaient été conçus pour mesurer l'erreur maximale. La stabilité des mesures de l'AFFRA au mm/s près à Emerson avait aussi été remarquée par Wiebe et al. (1993). Cette constatation nous

permet de négliger l'erreur sur les mesures de vitesse à la hauteur des transducteurs dans ce qui suit; utiliser l'erreur mesurée en laboratoire gonflerait l'erreur totale sans raison.

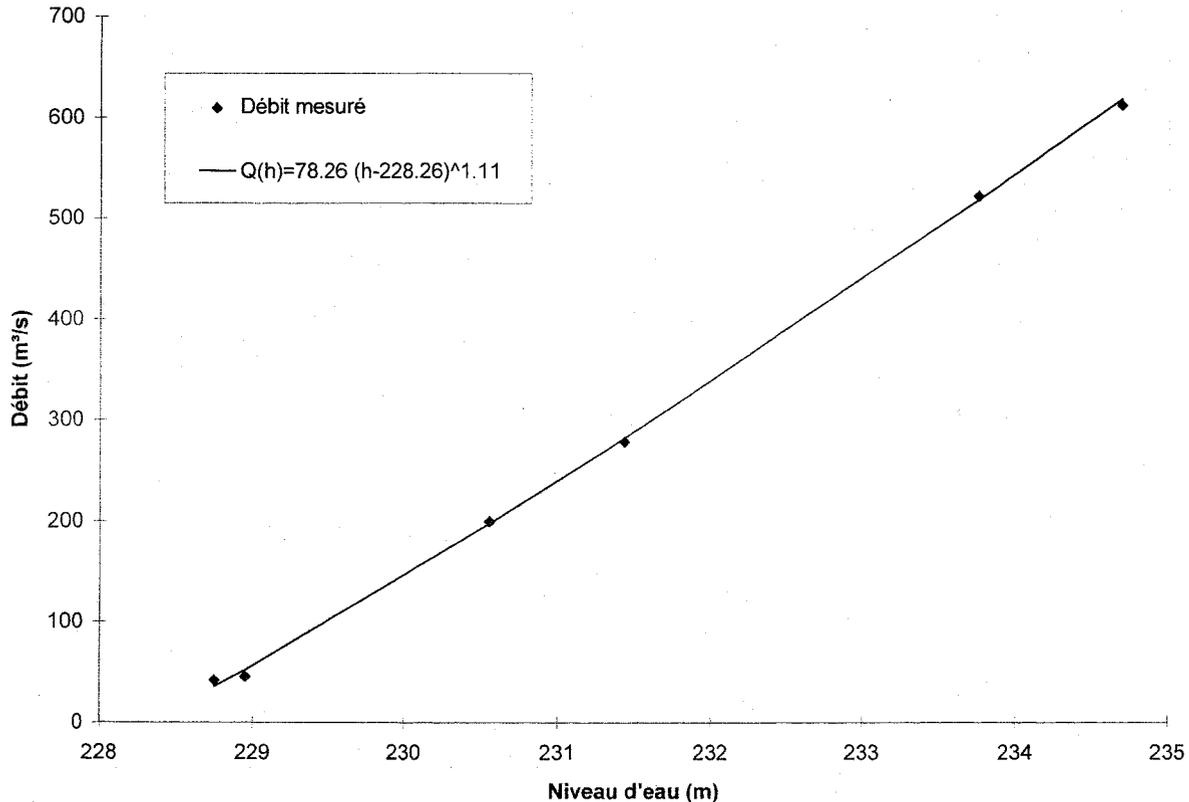
**7.2.2 Incertitude sur les débits estimés à l'aide de l'AFFRA**

Ce qui est véritablement intéressant, ce n'est pas de déterminer la précision de l'estimation  $\hat{K}(h)$  de la fonction  $K(h)$  mais plutôt celle des débits estimés. Si l'aire  $A(h)$  de la section d'écoulement est connue avec précision et que l'erreur sur la mesure  $\hat{v}_a$  de la vitesse est négligeable, alors on peut conclure que l'estimateur  $\hat{Q}$  du débit, qui est le produit de ces trois quantités, aura la même précision relative que la fonction  $\hat{K}(h)$ . On peut donc multiplier la taille de l'intervalle de confiance sur  $K(h)$  par  $\hat{Q}(h)/\hat{K}(h)$  pour obtenir l'incertitude sur le débit. Ceci nécessite d'établir avec précision la fonction  $A(h)$ , ce qui peut être fait en déterminant la bathymétrie de la section. Comme nous ne disposons pas de cette information, nous avons utilisé simplement les valeurs de  $A$  estimées pour chaque jaugeage et ajusté une droite aux points de mesure, comme le montre la Figure 14.



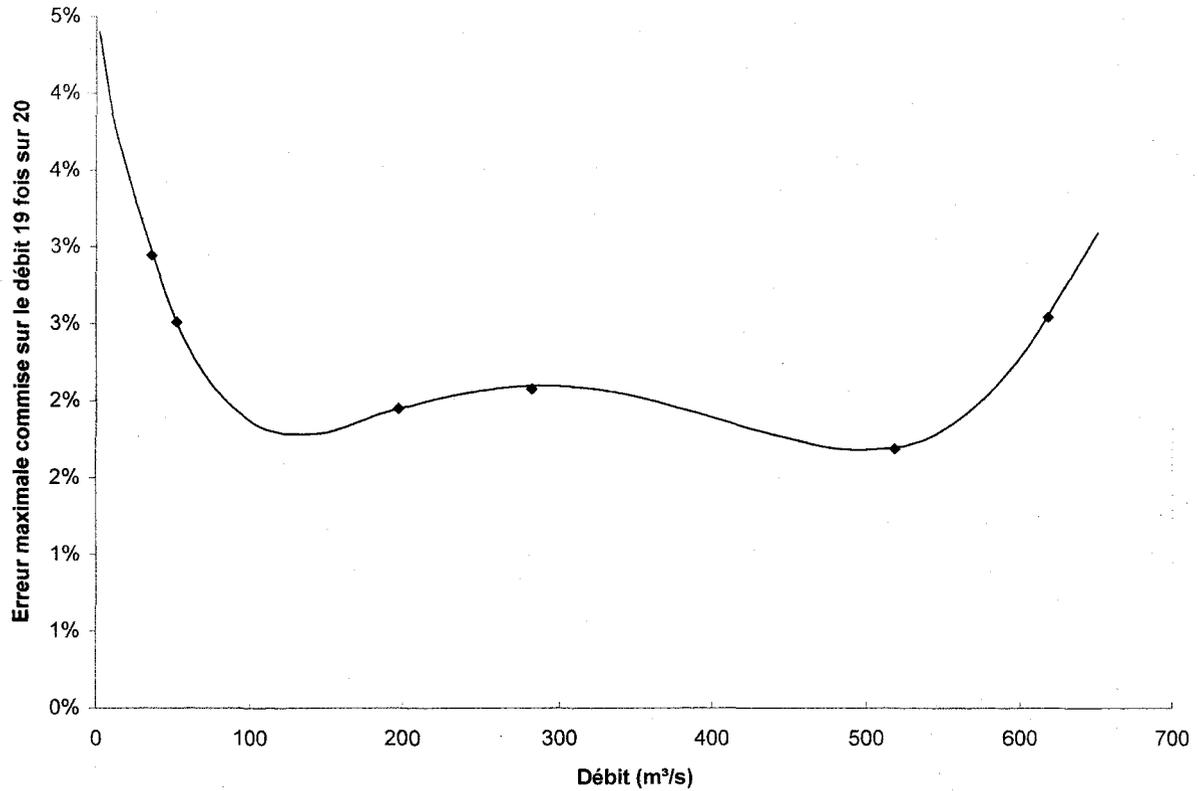
**Figure 14: Aire de la section d'écoulement en fonction de la hauteur d'eau à Emerson (Red River)**

Évidemment, il reste de l'incertitude sur la fonction  $A(h)$ . Mais celle-ci pourrait être virtuellement éliminée par une étude plus approfondie de la section d'écoulement. Nous n'en tiendrons pas compte ici, de façon à déterminer l'erreur minimale engendrée par l'utilisation de l'AFFRA. À partir de cette relation et des valeurs connues de la vitesse moyenne pour les 6 jaugeages, on peut ajuster une courbe de tarage de la forme  $Q(h)=a(h-h_0)^b$ , comme le montre la Figure 15.



**Figure 15: Relation niveau-débit établie à partir de 6 jaugeages à Emerson (Red River)**

L'incertitude totale sur le débit, que l'on peut par exemple mesurer par la largeur de l'intervalle de confiance à 95% relative à la valeur du débit, est alors donnée par la Figure 16. On observe que pour les débits d'hiver (les deux plus faibles), l'erreur n'excède pas 3% 19 fois sur 20, et n'est que légèrement supérieure à l'erreur sur les débits moyens (qui est de l'ordre de 2% 19 fois sur 20). Ce n'est pas trop mal si l'on considère que la calibration est basée sur des jaugeages que l'on affirme précis à 5% 19 fois sur 20, et moins précis l'hiver. On peut en déduire que l'utilisation de l'AFFRA pour estimer les débits l'hiver permet d'obtenir une meilleure précision que celle de jaugeages manuels.



**Figure 16: Erreur maximale commise sur le débit 19 fois sur 20**

L'AFFRA permet de plus d'obtenir des mesures en temps réel même lorsque la relation niveau-débit ne tient pas, et permet d'estimer les débits correspondant à de très faibles vitesses, ne pouvant pas être adéquatement mesurées au moulinet, ceci à condition d'accepter d'extrapoler la fonction  $K(h)$ . Si cette fonction semble donner un excellent ajustement, il ne faut pas perdre de vue que le comportement hydraulique en présence de glace pourrait être significativement différent, même si cela n'a pas été perçu avec seulement deux jaugeages d'hiver.



## 8. VALEUR DE L'INFORMATION FOURNIE PAR L'AFFRA

---

Après avoir présenté les développements théoriques permettant de calculer l'incertitude sur les débits mesurés par l'AFFRA, nous avons étudié deux cas d'application, qui ont confirmé l'utilité de l'AFFRA pour mesurer le débit d'une rivière dans des conditions hydrauliques difficiles. En particulier, nous avons montré qu'au versoir 3, l'utilisation de l'AFFRA à ce site très particulier permet de mettre en lumière l'inadéquation du modèle paramétrique usuel  $Q=a(h-h_0)^b$ . Il s'agit d'une information qualitative importante. Sur la Red River à Emerson, non seulement l'AFFRA risque de donner des résultats plus précis que des jaugeages d'hiver, mais de plus l'appareil fournit des données en continu, ce qui est impossible autrement lorsque la relation niveau-débit est faussée par la présence de glace.

Quantifier l'avantage apporté par l'utilisation de l'AFFRA est relativement difficile, mais tout de même important. En effet pour motiver l'utilisation de cet appareil assez coûteux à mettre en place, il faut idéalement pouvoir montrer que le gain en précision justifie les coûts. On pourrait cependant se retrouver dans la situation inverse, où l'utilisation de l'AFFRA n'entraîne aucun gain en précision ou même augmente l'incertitude sur les mesures. Dans ce cas, il faudrait montrer que la perte de précision est compensée par un coût plus faible; cette situation pourrait se produire en région éloignée.

Nous discutons dans cette section des facteurs dont il faut tenir compte pour établir la valeur économique de l'information fournie par l'AFFRA, de façon à pouvoir la comparer à la valeur de d'autres méthodes plus classiques d'estimation du débit. Nous présentons aussi une méthodologie rationnelle permettant de quantifier la valeur de l'information, détaillée par Berger (1985) et présentée dans le domaine de l'hydrologie par Davis et al. (1972). Cette approche peut être utilisée soit avant l'installation de l'appareil (on obtient alors la valeur espérée de l'information), soit après. Dans le premier cas, on parlera d'une analyse prévisionnelle de la valeur de l'information, et dans le second cas d'une analyse postérieure. Pour donner un exemple d'application de la méthodologie proposée, nous examinerons d'une façon particulière le gain économique relié à l'utilisation de l'AFFRA pour établir une relation niveau-débit. Finalement, nous présenterons les développements nécessaires à l'extension du raisonnement à un réseau hydrométrique. Tout d'abord cependant nous discuterons de l'interprétation bayésienne des probabilités, qui est la base de l'analyse de la valeur de l'information présentée dans cette section.

## 8.1 Interprétation bayésienne des probabilités

L'interprétation la plus courante des probabilités est fréquentiste: on définit la probabilité d'un événement comme la limite de la fréquence d'observation de cet événement dans une série infinie de tirages indépendants. Selon cette interprétation, les paramètres du monde réel (comme par exemple le débit d'une rivière) ont une valeur précise mais inconnue; ce sont les estimateurs de ces quantités (comme par exemple une mesure du débit) qui sont aléatoires. L'interprétation bayésienne des probabilités est radicalement différente: la probabilité d'un événement représente la confiance qu'un individu a que l'événement se produira au prochain tirage. Trois différences majeures peuvent être soulignées entre les approches. D'abord, (1) l'interprétation bayésienne est subjective: chacun a droit à son opinion, alors que l'interprétation fréquentiste est objective: les probabilités sont inconnues mais indépendantes de l'observateur. Ensuite, (2) l'interprétation bayésienne ne requiert pas d'imaginer une séquence infinie de tirages indépendants (un concept bien abstrait) pour définir une probabilité; un seul tirage est nécessaire. Finalement, (3) ce ne sont plus les estimateurs qui sont des variables aléatoires, mais les paramètres du monde réel. Un bayésien définit en effet des probabilités subjectives sur les différents états possibles de la nature, non sur leurs estimateurs. Le lecteur intéressé par le débat opposant les deux principales interprétations des probabilités peut se référer à Berger (1985). Cela déborde évidemment du cadre de ce rapport. Ce qu'il faut retenir, c'est que dans ce chapitre les probabilités seront définies sur les états de la nature, non sur les estimateurs.

## 8.2 Facteurs à considérer pour l'estimation de la valeur de l'information

Pour pouvoir estimer la valeur économique d'une information, il faut connaître relativement précisément plusieurs facettes du problème. En particulier, on doit chercher à préciser:

- l'incertitude résultant de la méthode d'échantillonnage;
- l'utilisation qui sera faite de l'information;
- le coût de la procédure d'échantillonnage;
- le coût relié à une erreur d'estimation.

Pour comparer la valeur de plusieurs méthodes d'échantillonnage, cette analyse doit être complétée pour chacune. Dans le cas de l'estimation du débit, nous avons vu comment

mesurer l'incertitude pour différentes méthodes: par jaugeage au moulinet, à l'aide d'un profileur ADCP à effet Doppler et à l'aide d'un courantomètre acoustique AFFRA.

En ce qui concerne l'utilisation qui sera faite de l'information, il s'agit d'un renseignement beaucoup plus difficile à déterminer, surtout pour une agence gouvernementale ayant pour objectif de recueillir de l'information qui pourra être consultée et utilisée ultérieurement par une variété d'intervenants. Cependant étant donné le contexte économique, Environnement Canada recueille de moins en moins de l'information hydrologique uniquement pour construire des bases de données; les nouvelles installations hydrométriques sont généralement conçues pour un ou plusieurs objectifs particuliers.

Établir le coût de la procédure d'échantillonnage est relativement facile: on peut estimer ce que coûte le matériel et son installation assez aisément. Cependant, il faut parfois tenir compte dans ce calcul du temps nécessaire pour obtenir l'information. En effet, lorsqu'une campagne d'échantillonnage est conçue pour répondre à un besoin pressant dans le cadre d'un projet particulier, le temps nécessaire pour obtenir l'information voulue peut influencer le coût total du projet.

Le coût relié à une erreur d'estimation a souvent une influence importante dans le résultat de l'analyse de la valeur de l'information. Dans le cas de l'évaluation du débit  $Q$  à l'aide d'un estimateur  $\hat{Q}$ , il s'agit de déterminer pour chaque couple  $(\hat{Q}_0, Q_0)$  les conséquences  $l(\hat{Q}_0, Q_0)$  financières de l'estimation d'un débit particulier  $Q_0$  par une valeur particulière  $\hat{Q}_0$ . La plupart du temps cette fonction peut s'écrire  $l(\hat{Q}_0, Q_0) = C + g(\hat{Q}_0, Q_0)$ , où  $C$  est un coût de base indépendant de  $Q$  et  $\hat{Q}$ , alors que  $g$  est une fonction positive telle que  $g(Q, Q) = 0$ , c'est à dire qu'elle est nulle lorsque aucune erreur d'estimation n'est commise, de sorte que  $l(Q, Q) = C$ .

Il faut enfin noter que l'analyse de la valeur de l'information peut être effectuée sur une base autre que financière. On peut considérer par exemple les conséquences socio-économiques d'une erreur d'estimation, en mesurant ces coûts en unités d'utilité (Berger 1985). La théorie de l'utilité permet aussi de tenir compte d'un penchant ou d'une aversion pour le risque de la part du décideur. Dans le cas où les intérêts sont principalement financiers et que la sécurité financière du décideur n'est pas mise en péril par le projet (i.e. les montants d'argent en question sont relativement faibles par rapport au budget du décideur) il est suffisant de considérer uniquement les coûts monétaires des actions. C'est l'hypothèse que nous ferons par la suite. Notons cependant qu'une prise en compte de facteurs sociaux ou de l'attitude du décideur face au risque n'entraîne que des modifications mineures; il s'agit principalement de changer l'unité de mesure.

### 8.3 Analyse postérieure de la valeur de l'information

En effectuant une analyse postérieure de la valeur de l'information, il est possible de déterminer *a posteriori* parmi un ensemble de méthodes d'estimation du débit laquelle a été la plus profitable, une fois que celles-ci ont été appliquées. Évidemment, ceci a peu d'intérêt: ce qu'il faut c'est pouvoir déterminer *a priori* quelle méthode d'estimation appliquer. De plus en pratique on n'appliquera pas plusieurs méthodes d'estimation au même site, donc une comparaison *a posteriori* est presque inutile. Cependant, les développements théoriques présentés dans cette section seront utilisés pour l'analyse prévisionnelle, aussi appelée analyse prépostérieure. L'analyse postérieure est en fait de la base de cette analyse plus poussée.

Le problème qui nous intéresse dans cette section est la comparaison *a posteriori* de plusieurs méthodes d'estimations du débit, par exemple (1) en utilisant un courantomètre AFFRA calibré par jaugeages, (2) en utilisant un AFFRA calibré de façon théorique à partir du profil de vitesse, (3) directement à partir de jaugeages manuels, (4) à partir d'une mesure du niveau d'eau.

Supposons que  $r$  méthodes  $\{M_i, i=1,2,\dots,r\}$  sont envisagées pour estimer le débit  $Q$ . L'application de chacune de ces méthodes engendre un coût d'échantillonnage différent noté  $\{c_i, i=1,2,\dots,r\}$ , et fournit une information  $\{\mathbf{x}_i, i=1,2,\dots,r\}$ , à partir de laquelle on peut calculer une estimation  $\hat{Q}$  du débit  $Q$ , ainsi qu'une distribution  $\{\pi_i(Q|\mathbf{x}_i), i=1,2,\dots,r\}$ , qui représente la confiance que la méthode d'échantillonnage permet d'avoir dans chaque valeur de  $Q$ . Supposons encore qu'une estimation de  $Q$  par  $\hat{Q}$  engendre un coût  $l(\hat{Q},Q)=C+g(\hat{Q},Q)\geq C$ , où  $C$  est un coût de base indépendant de  $Q$  et  $\hat{Q}$ , alors que  $g$  est une fonction positive que l'on nomme le regret. Elle correspond au coût supplémentaire engendré par l'erreur d'estimation, et est évidemment nulle pour  $\hat{Q}=Q$ . La valeur espérée du regret après observation de  $\mathbf{x}_i$  est dénotée  $XOL[\pi_i(Q|\mathbf{x}_i)]$  (pour *eXpected Opportunity Loss*) et est obtenue ainsi:

$$XOL[M_i, \mathbf{x}_i] = \int g(\hat{Q}, Q) \cdot \pi_i(Q|\mathbf{x}_i) \cdot dQ \quad (53)$$

Il s'agit du coût espéré de l'erreur d'estimation de  $Q$  pour la méthode  $M_i$ , étant donné l'observation de l'information  $\mathbf{x}_i$ . La meilleure méthode d'estimation du débit est évidemment celle qui minimise  $XOL$ , mais d'un point de vue économique ce qui nous intéresse c'est de minimiser l'espérance du coût total, obtenu en ajoutant au regret espéré le coût d'échantillonnage  $c_i$ . La méthode d'estimation du débit  $M_i$  qui risque de rapporter le plus est celle qui minimise  $XOL[\pi_i(Q|\mathbf{x}_i)]+c_i$ . En pratique cependant, on est intéressé à choisir la

méthode  $M_i$  avant son application, c'est à dire avant l'observation de  $\mathbf{x}_i$ . C'est ici qu'intervient l'analyse prévisionnelle.

#### 8.4 Analyse prévisionnelle de la valeur de l'information

L'analyse prévisionnelle de la valeur de l'information permet de comparer des méthodes d'estimations du débit  $\{M_i, i=1,2,\dots,r\}$  avant leur application, en déterminant la valeur espérée de l'espérance du regret ( $XXOL$ ):

$$XXOL[M_i] = \int XOL[M_i, \mathbf{x}] \cdot m_i(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \iint g(\hat{Q}, Q) \cdot \pi_i(Q|\mathbf{x}) \cdot dQ \cdot m_i(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (54)$$

où  $m_i(\mathbf{x})$  représente la distribution des valeurs possibles de l'information que la méthode d'échantillonnage  $M_i$  permet d'obtenir, que l'on nomme distribution prévisionnelle. En général il est difficile de déterminer  $m_i(\mathbf{x})$  directement. Il est plus facile de trouver la distribution  $f_i(\mathbf{x}|Q)$  de l'information  $\mathbf{x}$  pour  $Q$  fixé, et de spécifier une idée *a priori* pour la distribution de  $Q$ , représentée par une distribution *a priori*  $\pi_i(Q)$ . L'analyse bayésienne suggère alors de calculer  $m_i(\mathbf{x})$  ainsi:

$$m_i(\mathbf{x}) = \int \pi_i(Q) \cdot f_i(\mathbf{x}|Q) \cdot dQ \quad (55)$$

On prend souvent une distribution non informative uniforme pour  $\pi_i(Q)$  lorsque aucune information *a priori* n'est disponible sur la valeur de  $Q$ . Notons par ailleurs que pour  $\pi_i(Q)$  et  $f_i(\mathbf{x}|Q)$  connus, l'analyse bayésienne suggère que la seule façon cohérente de définir  $\pi_i(Q|\mathbf{x})$  (la distribution du débit pour  $\mathbf{x}$  connu) est par l'application du théorème de Bayes (Berger 1985):

$$\pi_i(Q|\mathbf{x}) = \pi_i(Q) \cdot f_i(\mathbf{x}|Q) / m_i(\mathbf{x}) \quad (56)$$

La méthode d'estimation la plus économique, selon l'analyse prévisionnelle, est alors celle qui minimise le coût net espéré de l'échantillonnage, défini par  $XXOL[M_i] - c_i$ . Un exemple servira à fixer les idées.

#### 8.5 Valeur de l'AFFRA pour établir une relation niveau-débit

On peut comparer à l'aide de l'analyse prévisionnelle les coûts reliés à l'estimation d'une relation niveau-débit par jaugeages avec ceux engendrés par l'utilisation de l'AFFRA. Nous ferons les suppositions suivantes:

1. les deux méthodes sont appliquées pendant une période longue (au moins un an);
2.  $N_J$  jaugeages  $\mathbf{x} = \{(\hat{Q}_i, h_i), i=1, 2, \dots, N_J\}$  sont effectués pour calibrer la relation niveau-débit;
3. l'appareil de mesure utilisé pour les jaugeages permet de représenter l'incertitude sur le débit par une distribution normale  $\pi_J(Q|\mathbf{x})$  de moyenne  $\hat{Q}$  et de variance  $\sigma^2$ ;
4. un AFFRA à deux faisceaux (2 paires de transducteurs) est utilisé, de façon à pouvoir modéliser le profil vertical de vitesse et auto-calibrer l'AFFRA;
5. le modèle paramétrique utilisé pour la relation niveau-débit est exact (il pourrait par exemple être de la forme  $Q(h) = ah^b$ );
6. le modèle du profil vertical de vitesse est exact;
7. le regret est fonction croissante de la valeur absolue de la différence  $\Delta Q = Q - \hat{Q}$  entre le débit réel  $Q$  et le débit estimé  $\hat{Q}$ , i.e.  $g(\hat{Q}, Q) = g'(\Delta Q)$  croît avec  $|\Delta Q|$ , ce qui signifie qu'une plus grande erreur engendre un coût au moins aussi grand qu'une petite erreur. C'est tout à fait raisonnable. Par exemple, on pourrait avoir un regret quadratique  $g(\hat{Q}, Q) = W \cdot (\hat{Q} - Q)^2$ , où  $W$  est une constante positive quelconque, mais ce n'est qu'une possibilité.

Sous ces hypothèses simplificatrices mais réalistes, on peut comparer l'approche traditionnelle  $M_J$  d'estimation par jaugeages d'une relation niveau-débit avec l'utilisation  $M_A$  de l'AFFRA à cet effet. D'abord, le coût d'échantillonnage est différent pour les deux procédures. Celui de  $M_J$  est à peu près proportionnel au nombre de jaugeages effectués. Si  $C_J$  dénote le coût d'un jaugeage, alors le coût d'application de  $M_J$  est  $c_J = N_J \cdot C_J$ . Le coût de  $M_A$  est quant à lui fixe à  $c_A$ .

Comme expliqué lors de l'analyse théorique de la précision de l'AFFRA, l'utilisation de deux faisceaux pour auto-calibrer l'AFFRA permet de rendre négligeable l'erreur sur la relation niveau-débit, dans la mesure où les modèles paramétriques utilisés pour  $Q(h)$  et pour le profil vertical de vitesse sont exacts. En effet, l'erreur sur la calibration et sur les mesures de vitesses ont un effet négligeable sur la précision de la relation niveau-débit établie, puisqu'un très grand nombre de points de mesures peuvent être utilisés pour la calibrer. Même si chacun de ces points est erroné, leur moyenne a une variabilité beaucoup plus faible. Le coût net espéré de l'utilisation de l'AFFRA est donc simplement  $c_A$ .

Par contre, la calibration par jaugeages laisse une incertitude sur la relation niveau-débit. Celle-ci est fonction du nombre de jaugeages  $N_J$  et de la variance individuelle de chaque jaugeage  $\sigma^2$ . On peut déterminer, à l'aide du théorème central limite, une borne inférieure pour la variance de la relation niveau-débit par  $\sigma^2/N_J$ . Tout modèle de régression plus complexe qu'une simple constante donnera une variance plus grande. On obtient donc:

$$XXOL[M_J] = \iint g(\hat{Q}, Q) \cdot \pi_J(Q|\mathbf{x}) \cdot dQ \cdot m_J(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (57)$$

où  $\pi_J(Q|\mathbf{x})$  est la fonction de densité de probabilité d'une distribution normale de moyenne  $\hat{Q}$  et de variance supérieure ou égale à  $\sigma^2/N_J$ , dont la valeur exacte dépend du modèle  $Q(h)$  et de l'échantillon  $\mathbf{x}$ . En substituant  $\Delta Q = Q - \hat{Q}$  pour  $Q$  on peut simplifier cette équation:

$$XXOL[M_J] = \int g'(\Delta Q) \cdot \pi'_J(\Delta Q|\mathbf{x}) \cdot d\Delta Q \cdot m_J(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (58)$$

où  $\pi'_J(\Delta Q|\mathbf{x})$  est la fonction de densité de probabilité d'une distribution normale de moyenne nulle et de variance supérieure ou égale à  $\sigma^2/N_J$ . En utilisant le fait que  $g'(\Delta Q)$  est une fonction croissante de  $|\Delta Q|$ , on peut trouver une borne inférieure pour  $XXOL[M_J]$ . En effet, c'est dans le cas où la variance de  $\pi'_J(\Delta Q|\mathbf{x})$  est égale à  $\sigma^2/N_J$  que cette fonction est minimale, puisque l'on donne alors plus de poids aux petites valeurs de  $|\Delta Q|$ . De plus dans ce cas  $\pi'_J(\Delta Q|\mathbf{x})$  est indépendant de  $\mathbf{x}$ , ce qui permet de faire disparaître l'intégrale extérieure:

$$XXOL[M_J] \geq \int g'(\Delta Q) \cdot f_N(\Delta Q|0, \sigma^2 / N_J) \cdot d\Delta Q \quad (59)$$

où  $f_N(\Delta Q|0, \sigma^2 / N_J)$  est la fonction de densité de probabilité de la distribution normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2/N_J$ . Cette dernière équation peut être évaluée connaissant le regret  $g$ , la variabilité  $\sigma^2$  des jaugeages individuels et le nombre de jaugeages. L'analyse prévisionnelle, basée sur l'inéquation (59), pourra permettre de recommander l'utilisation de l'AFFRA si le coût  $c_A$  d'installation de cet appareil est inférieur à  $XXOL[M_J] + N_J \cdot C_J$ . Autrement cependant, la résolution de l'équation (58) sera nécessaire pour recommander l'estimation de la courbe niveau-débit par jaugeages.

Pour illustrer davantage la procédure, supposons un regret quadratique  $g(\hat{Q}, Q) = W \cdot (\hat{Q} - Q)^2$ . L'intégrale de l'équation (59) donne alors simplement  $W$  fois la variance de la distribution  $f_N(\Delta Q|0, \sigma^2 / N_J)$ , soit  $XXOL[M_J] \geq W \cdot \sigma^2 / N_J$ . On pourra alors recommander l'utilisation de l'AFFRA si:

$$c_A < W \cdot \sigma^2 / N_J + N_J \cdot C_J \quad (60)$$

Il est intéressant de voir alors s'il est possible de choisir  $N_j$  tel que l'utilisation de l'AFFRA ne puisse être recommandée sur la base de (60) On montre facilement que l'AFFRA sera toujours recommandé si l'équation suivante est vérifiée:

$$c_A < 2 \cdot \sigma \sqrt{C_j \cdot W} \quad (61)$$

Si cette équation n'est pas vérifiée, alors on ne pourra choisir entre l'AFFRA et une calibration par jaugeages sur la base de (60).

## 8.6 Extension de l'analyse à l'ensemble d'un réseau hydrométrique

Sur le plan théorique, il n'y a pas beaucoup de difficulté à étendre à l'ensemble d'un réseau hydrométrique la méthodologie d'analyse de la valeur de l'information. Il s'agit simplement d'appliquer la méthode à chaque site du réseau. Cependant, un exercice pareil demande une somme d'énergie considérable. En effet, il faut déterminer pour chaque site l'utilisation qui est faite des données et préciser le regret  $g$ . Cette fonction a en effet une importance considérable sur les conclusions. Il faut d'ailleurs songer, après avoir complété l'analyse prévisionnelle de la valeur de l'information, à effectuer une analyse de sensibilité pour s'assurer qu'elle a été déterminée assez précisément. Il serait dangereux de bâcler l'analyse économique en déterminant le regret de façon approximative, de façon à gagner du temps et à permettre l'analyse de l'ensemble du réseau. Il est beaucoup plus adéquat d'effectuer à la place un tirage aléatoire de quelques stations du réseau, et d'effectuer sur celles-ci une analyse économique complète. Par la suite, l'incertitude reliée à l'échantillonnage partiel du réseau pourra être prise en compte dans l'analyse des résultats.

## 9. CONCLUSION

---

Le courantomètre acoustique AFFRA est un appareil permettant de mesurer le débit d'une rivière dans des conditions difficiles avec une bonne précision. Comme cet appareil doit être calibré après son installation sur le terrain, il importe que celle-ci soit effectuée de façon optimale. Lorsque l'appareil est calibré à partir de jaugeages, nous suggérons:

- l'utilisation d'un profileur acoustique à effet Doppler (ADCP) pour les jaugeages; non seulement l'appareil est plus précis qu'un moulinet, mais permet d'obtenir des mesures sur des périodes plus courtes; de plus, il est possible d'estimer la précision de chaque jaugeage à partir de la variabilité des multiples passes réalisées pour effectuer un même jaugeage.
- l'ajustement du coefficient de calibration à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés pour tenir compte de l'erreur variable sur les observations de ce coefficient;
- l'utilisation du critère d'Akaike pour sélectionner un modèle paramétrique pour ce coefficient de calibration, permettant ainsi de choisir un modèle ayant un ajustement suffisant mais un nombre de paramètres limité;
- l'application de la méthode du Jackknife pour estimer la variabilité de l'estimation de la fonction de calibration lorsque celle-ci n'est pas polynomiale ou lorsque l'erreur des observations est très dépendante du niveau d'eau.

Parce que la fonction de calibration estimée est en général imprécise, les mesures du débit calculées à l'aide de l'AFFRA peuvent être biaisées. Conséquemment, il est très dangereux de fournir ces données sans y attacher une mesure de précision. En effet, un utilisateur pourrait estimer l'incertitude des mesures à partir de leur variabilité, ignorant ainsi l'erreur systématique qui peut être commise par l'AFFRA. Nous avons vu que dans le cas de l'estimation du débit en présence de glace la variabilité des mesures est négligeable par rapport à leur biais. Un utilisateur non informé de cela pourrait avoir une confiance injustifiée dans ces données en ignorant ce biais.

En ce qui concerne l'utilisation de l'AFFRA pour établir une relation niveau-débit, l'analyse théorique suggère que l'appareil ne permettra qu'un gain marginal lorsque la forme paramétrique de la relation niveau-débit est connue si ce dernier est calibré par jaugeages. L'installation de deux paires de transducteurs pourrait permettre d'éviter ces jaugeages, et

d'améliorer la précision. L'AFFRA à un seul niveau peut cependant s'avérer utile lorsque la forme paramétrique de la relation niveau-débit est complexe ou inconnue.

Pour l'estimation du débit sous couvert de glace, la calibration par modélisation du profil de vitesse semble impossible avec seulement deux faisceaux; la calibration par jaugeages s'impose. Il est recommandé d'effectuer des jaugeages d'hiver pour au moins vérifier si la fonction de calibration s'applique l'hiver, et éventuellement pour dériver une nouvelle fonction de calibration pour l'hiver.

Deux exemples d'application ont permis d'illustrer les développements théoriques. L'utilisation de l'AFFRA au réservoir 3 (delta de Sorel, Fleuve Saint-Laurent) a permis de mettre en évidence une relation niveau-débit complexe, alors que l'utilisation de l'AFFRA à Emerson (Red River) a permis d'estimer avec une précision de 3% 19 fois sur 20 les débits d'hiver.

Une méthodologie permettant d'évaluer la valeur de l'information fournie par l'AFFRA a été présentée. Cette méthode permet de prendre en compte l'utilisation qui sera faite des données et de comparer la valeur économique du gain en précision obtenu par l'utilisation de l'AFFRA au coût supplémentaire de cette technologie. Un exemple académique est présenté pour illustrer la méthodologie, mais un cas pratique serait nécessaire pour vérifier l'applicabilité de la méthode proposée. Seule une étude économique plus poussée pourrait permettre d'évaluer le potentiel de l'AFFRA pour réduire les coûts d'un réseau hydrométrique.

## 10. RÉFÉRENCES

---

- Akaike, H. (1973). Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. *Proc. 2nd International Symposium on Information Theory*, pp. 267-281.
- Berger, J.O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- Cantin, J.-F. (1994). *Étude sur la répartition du débit du fleuve Saint-Laurent dans le delta de Sorel*. contrat DV-4224, rédigé pour Transports Canada (Garde-Côtière canadienne, région des Laurentides) et pour Environnement Canada (Centre Saint-Laurent).
- Carlier, M. (1980). *Hydraulique générale et appliquée*. 2ème édition, Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, Eyrolles, Paris, France.
- Davis, D.R., C.K. Chester et L. Duckstein (1972). Bayesian Decision Theory Applied to Design in Hydrology. *Water Resources Research*, 8(1): 33-41.
- Drenthen, J.G. (1986). *Flow-2000 An Acoustic Flowmeter System*. Stork Servex B.V., Dordrecht, Pays-Bas.
- Efron, B. (1979). Computers and the theory of statistics: thinking the unthinkable. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 21(4): 460-480.
- Engel, P. et E. Fast (1988). *Evaluation of the AFFRA Acoustic Flow Meter, Phase II*. Contract Report, Research and Applications Branch, National Water Research Institute, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario.
- Environnement Canada (1988). *Operational Specifications for Acoustic Flow Meters*. Water Resources Branch, Inland Waters Directorate, Environment Canada, Ottawa, Ontario.
- Godin, F. (1995). *Calibration d'un courantomètre acoustique AFFRA et ajustement d'une loi de débit aux reversoires du delta de Sorel pour une période d'écoulement à surface libre*. contrat KM351-5-3501 et contrat TO578-95-0084, rédigé pour Environnement Canada (Monitoring et Technologies) et pour Garde Côtière canadienne (Hydraulique et Relevés).
- Laenen, A et W. Smith (1983). *Acoustic Systems for the Measurement of Streamflow*, U.S. Geological Survey, Water-Supply Paper 2213, United States Government Printing Office, Washington D.C.
- Larsen, P.A. (1969). Head losses caused by an ice cover on open channels. *Boston Society of Civil Engineers Journal*, No. 1.
- RD Instruments (1993). *Acoustic Doppler Current Profiler DR-BBADCPC Technical Manual*. San Diego, California.

- Rouvé, G., H.D. Olbrisch et V. Stottmeister. (1974). Variation of discharge in cross-sections with ice covers. *IAHS/PIANC International Symposium on River and Ice*, Budapest, Hongrie.
- Terzi, R.A. (1981). *Hydrometric Field Manual - Measurement of Streamflow*. Inland Waters Directorate, Water Resources Branch, Environment Canada, Ottawa, Canada.
- Walpole, R.E. and R.H. Myers (1985). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 3rd ed., Macmillan, New York.
- Wiebe, K., E.J. Fast et P. Engel (1993). *Laboratory and Field Evaluation of the "AFFRA" Acoustic Flow Meter*, Surveys and Information Systems Branch, Ecosystem Sciences and Evaluation Directorate, Environment Canada, Ottawa, Ontario.
- Zhidkikh, V.M., V.L. Sinotin et Z.A. Guenkin (1974). Kinematics of flow under the ice cover. *IAHS/PIANC International Symposium on River and Ice*, Budapest, Hongrie.

## ANNEXE A: RÉGRESSION PAR MOINDRES CARRÉS PONDÉRÉS

L'ajustement d'un modèle paramétrique  $y(x|\theta)$  à un ensemble de  $N$  observations  $\{(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, N\}$ , c'est à dire l'estimation des paramètres  $\theta$  de ce modèle par  $\hat{\theta}$ , est généralement effectuée en minimisant la somme des écarts au carré entre les valeurs observées  $y_i$  et les valeurs calculées  $y(x_i|\hat{\theta})$ , que l'on note *SSE* pour *Sum of Squares of Errors*:

$$SSE(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^N (y_i - y(x_i|\hat{\theta}))^2 \quad (62)$$

Cette méthode n'est justifiée que si un ensemble d'hypothèses sont vérifiées:

1. les écarts  $e_i = y_i - y(x_i|\theta)$  entre le modèle et les observations doivent être causés par un bruit aléatoire ayant une distribution normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ ;
2. l'erreur aléatoire commise sur une observation doit être indépendante de l'erreur commise sur toutes les autres observations;
3. la variance  $\sigma^2$  de l'erreur commise doit être la même pour toutes les observations.

Il arrive souvent que les deux premières hypothèses soient vérifiées mais non la dernière, c'est à dire que la variance dépend souvent de  $x$ . Si l'on connaît *a priori* la valeur de cette fonction  $\sigma^2(x)$ , on peut alors développer une méthode d'estimation adaptée des paramètres  $\theta$ .

Lorsque l'on ajuste un modèle  $y(x|\theta)$ , on cherche les valeurs des paramètres les plus vraisemblables; c'est ce qu'on nomme la méthode du maximum de vraisemblance. Elle consiste à maximiser la fonction de densité de probabilité  $f(e_1, e_2, \dots, e_N)$  jointe des résidus. Puisque la distribution marginale  $f_{\mathcal{N}}(e_i|0, \sigma^2)$  de chaque résidu  $e_i$  est normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  et que tous les résidus sont indépendants, on a alors:

$$f(e_1, e_2, \dots, e_N) = f_{\mathcal{N}}(e_1|0, \sigma^2) \cdot f_{\mathcal{N}}(e_2|0, \sigma^2) \cdot \dots \cdot f_{\mathcal{N}}(e_N|0, \sigma^2) \quad (63)$$

$$\text{avec } f_{\mathcal{N}}(e_i|0, \sigma^2) = \exp\left[-\frac{(y_i - y(x_i|\theta))^2}{2\sigma^2(x_i)}\right] / \sqrt{2\pi\sigma^2(x_i)} \quad (64)$$

Il s'agit donc de trouver la valeur  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  maximisant l'équation suivante:

$$f(e_1, e_2, \dots, e_N) = \prod_{i=1}^N \exp \left[ -\frac{(y_i - y(x_i|\theta))^2}{2\sigma^2(x_i)} \right] / \prod_{i=1}^N \sqrt{2\pi\sigma^2(x_i)} \quad (65)$$

Il est suffisant de maximiser le numérateur de cette dernière équation, puisque le dénominateur ne dépend pas de  $\theta$ . De plus, on peut de façon équivalente maximiser le logarithme du numérateur, qui correspond à l'expression suivante:

$$\log \left( \prod_{i=1}^N \exp \left[ -\frac{(y_i - y(x_i|\theta))^2}{2\sigma^2(x_i)} \right] \right) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{(y_i - y(x_i|\theta))^2}{\sigma^2(x_i)} \right] \quad (66)$$

Maximiser la vraisemblance des paramètres consiste donc à minimiser la fonction suivante:

$$\sum_{i=1}^N \left[ \frac{(y_i - y(x_i|\theta))^2}{\sigma^2(x_i)} \right] \quad (67)$$

On voit que cette fonction est proportionnelle à la somme des écarts au carrés si  $\sigma^2$  est constant, mais qu'en général on obtiendra une solution différente en minimisant cette fonction. On nomme la méthode consistant à minimiser cette dernière équation *méthode des moindres carrés pondérés* parce que chaque écart au carré est pondéré en le divisant par la variance correspondant à l'observation. Ainsi, les points de mesure les plus précis, ayant une variance plus faible, ont un poids plus important dans la fonction à minimiser; le modèle passera donc plus près de ces points, et plus loin des points de mesures plus incertains.