

Université du Québec
Institut National de la Recherche Scientifique
Énergie, Matériaux et Télécommunications

Détection optimale de ACK/NACK dans HARQ avec voie de retour imparfaite

Par
Abdellatif BenYouss

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
Maître ès sciences (M.Sc.) en télécommunications

Jury d'évaluation

Président du jury	Long Le, INRS-EMT
Examineur externe	Daniel Massicotte, UQTR
Directeur de recherche	Leszek Szczeciński, INRS-EMT
Codirecteur de recherche	Aditya Mahajan, McGill University

Résumé

Le protocole Hybrid Automatic Repeat reQuest (HARQ) est une parmi plusieurs solutions efficaces pour combattre les erreurs de transmission dans les canaux radio. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'analyse des schémas HARQ, examinant l'impact des erreurs de signalisation sur la voie de retour. L'objectif de ce travail est de proposer un protocole basé sur HARQ qui permettra d'ajuster les seuils de détection des acquittements (positifs ACK ou négatifs NACK) pour optimiser le throughput en tenant compte de tout le passé et le futur des acquittements. On suppose que l'émetteur reçoit des versions bruitées des acquittements sorties d'un modèle général d'un canal de retour imparfait. Pour cela, on propose d'utiliser le modèle du Processus de Décision Markovien avec Observations Partielles (POMDP). Nous analysons également l'optimisation du throughput sous contrainte sur la probabilité de coupure à la réception. Nous proposons de comparer les résultats optimaux dérivés par notre modèle de POMDP avec des heuristiques comme ceux de la détection basé sur les estimateurs Maximum A Posteriori (MAP) et Maximum de vraisemblance (ML).

Étudiant

Directeur de recherche

Remerciements

Ce mémoire n'aurait certainement pas été possible sans le soutien, les conseils et les encouragements d'un grand nombre de personnes.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements à M. Daniel MASSI-COTTE et à M. Long LE d'avoir accepté de faire partie du jury d'évaluation.

Je tiens à exprimer ma grande gratitude à mon directeur de recherche, M. Leszek SZCZECIŃSKI. Je le remercie pour son suivi, son soutien, sa patience et sa disponibilité durant la réalisation de mon projet de recherche. J'ai énormément appris à ses côtés aussi bien sur le plan humain que professionnel.

Mes remerciements s'adressent spécialement à mon codirecteur de recherche, M. Aditya MAHAJAN pour son soutien qu'il n'a cessé de me prodiguer tout le long de cette période.

Mes remerciements s'adressent finalement à tous le corps professoral et administratif de l'INRS-EMT, ainsi qu'à tous mes camarades et aux personnes qui ont rendu les deux ans de ma maîtrise une période agréable d'apprentissage et d'épanouissement.

Liste des acronymes

- **ACK** Acknowledgement
- **ARQ** Automatic Repeat reQuest
- **BPSK** Binary Phase Shift Keying
- **CRC** Cyclique Redundancy Check
- **dB** décibel
- **DP** Dynamic Programming
- **FEC** Forward Error Correction
- **HARQ** Hybrid ARQ
- **IR** Incremental Redundancy
- **LTE** Long Term Evolution
- **MAP** Maximum A Posteriori
- **MDP** Markov Decision Process
- **ML** Maximum Likelihood
- **NACK** Negative Acknowledgement

- **PDF** Probability Density Function
- **PER** Packet Error Rate
- **POMDP** Partially Observed MDP
- **QAM** Quadrature Amplitude Modulation
- **SNR** Signal-to-Noise Ratio

Table des matières

1	Introduction	12
1.1	Contexte du travail	13
1.2	Objectifs	13
1.3	Contributions	14
2	Notions et modèle de base	15
2.1	Principes du protocole HARQ	15
2.2	Modèle du système	16
2.2.1	HARQ sans erreurs de feedback	17
2.2.2	HARQ avec erreurs de feedback	18
2.3	Mesure de performance et problème d'optimisation	19
2.4	Modèle de canaux	22
2.4.1	Modèle de canal forward	22
2.4.2	Modèle de canal feedback	23
2.5	La détection ML et MAP	23
2.5.1	L'estimateur ML	24
2.5.2	L'estimateur MAP	25
3	La détection optimale	27
3.1	Dynamique du système et structure de récompense	27
3.2	Transformation en belief-state MDP	29
3.3	Structure de la politique optimale	31
3.4	Dérivation des seuils optimaux et expression du throughput	34
3.5	Résultats numériques	39
4	Optimisation du throughput sous contrainte de perte	46
5	Conclusions	52

Annexe A	Preuve du Théoreme 1	54
Annexe B	Seuils de détection pour MAP	56

Table des figures

2.1	Modèle de système de la boucle fermée de HARQ considérée : le contrôleur P-HARQ contrôle les règles de détection des signaux ACK/NACK.	16
2.2	Modèle du canal de retour décrivant les probabilités d'erreur.	24
3.1	Le throughput optimal a) et le nombre moyen de transmissions b) de IR-HARQ, $K = 3$ et RR-HARQ, $K = 5$ pour deux taux de transmission : $R = 2$ et $R = 3.5$, et pour deux scénarios : $\overline{\text{snr}} = \overline{\text{snr}}^{\text{Dir}}$ et $\overline{\text{snr}} = \infty$	40
3.2	Les seuils optimaux dans chaque round k , $R = 2$ pour : a) IR-HARQ, $K = 3$ et b) RR-HARQ, $K = 5$ ($\gamma_0 = 1$), et pour deux scénarios. La zone remplie représente la différence dans les espaces de détection entre la politique optimale et le meilleur scénario.	41
3.3	Le throughput η_{ML} , η_{MAP} and $\hat{\eta}$ correspondant respectivement à ML, MAP et la politique optimale, dans le cas IR-HARQ pour deux scénarios et avec $K = 3$. Dans b) $R = 2$	44
3.4	La probabilité de perte de IR-HARQ ($\overline{\text{snr}} = \infty$) comparé avec celle de ML, MAP et la politique optimale quand $\overline{\text{snr}} = \overline{\text{snr}}^{\text{Dir}}$ pour deux taux $R = 2$ et $R = 3.5$, et pour $K = 3$	45
4.1	a) Le throughput de IR-HARQ, $K = 3$, b) RR-HARQ, $K = 5$. La contrainte de perte est fixée à $\epsilon = 1\%$	49
4.2	Le throughput correspondant aux politiques ML, MAP, la politique optimale et la politique dans le cas parfait, pour a) IR-HARQ, $K = 3$, b) RR-HARQ, $K = 5$. Le rate R est optimisé sur l'intervall $[0.001 : 0.05 : 3.5]$ avec une recherche exhaustive.	50

Chapitre 1

Introduction

Les systèmes de transmission radio avec voie de retour sont largement déployés actuellement. Dans ces systèmes, la transmission des données en mode paquet se fait généralement en combinant un protocole de retransmission ARQ avec un code correcteur d'erreur FEC, cette combinaison est appelée HARQ. Elle est implémentée dans de nombreuses normes de communication, en particulier pour les systèmes cellulaires de troisième et quatrième génération tel que LTE. Dans ces systèmes, la voie de retour est utilisée pour informer l'émetteur de la bonne (via ACK) ou mauvaise (via NACK) réception des données transmises. Elle peut également être exploitée pour informer l'émetteur de l'état du canal afin de s'adapter à l'évolution des conditions de propagation.

On distingue deux grandes familles de protocoles HARQ. Dans la première, appelée HARQ type-I (HARQ-I), les paquets erronés sont rejetés. Dans la seconde, appelée HARQ type-II (HARQ-II), les paquets erronés sont mémorisés à chaque round, puis réutilisés par le décodeur FEC pour augmenter les chances de succès de décodage aux rounds suivants. Le protocole HARQ-II rassemble deux catégories : HARQ avec redondance incrémental IR-HARQ et HARQ avec redondance répétitives (RR-HARQ).

1.1 Contexte du travail

Dans la plupart des cas d'évaluation de HARQ dans les systèmes de communication sans fils, un canal de retour (feedback) est supposé être parfait (c'est à dire, sans erreurs), par exemple dans, [1–5]. Cependant, en pratique, la détection des signaux ACK/NACK est sensible aux bruits et sujette aux variations sur le canal de retour. Les auteurs dans [6] montrent à travers des simulations que les deux types d'erreurs ACK \rightarrow NACK (qui produisent des transmissions inutiles) et NACK \rightarrow ACK (qui conduisent à une perte de paquets) peuvent affecter le throughput global d'un système HARQ, cependant, il n'est pas évident de conclure sur l'importance relative des erreurs NACK \rightarrow ACK et les erreurs ACK \rightarrow NACK ; (la flèche symbolise le lien de retour, donc une erreur ACK \rightarrow NACK veut dire qu'un ACK envoyé sur le lien feedback est détecté comme NACK).

Naturellement, on s'attend que la réduction des erreurs dans le canal de retour entraîne la minimisation de dégradation du système, ce qui peut être réalisé en effectuant une détection efficace du signal de retour. Il existe de nombreux travaux traitant le problème de détection des signaux ACK/NACK au-delà de tout contexte du schéma HARQ. Dans [7], les auteurs étudient la détection de messages ACK/NACK dans le canal de contrôle de liaison physique (PUCCH) de LTE, la détection est basée sur l'estimation ML, tandis que [8] a présenté des solutions basées sur l'estimation MAP au problème de détection pour le canal de signalisation de UMTS HSDPA, et a proposé un algorithme pour estimer les probabilités a priori. D'autre part, quelques autres travaux ont analysé l'impact des erreurs dans le canal de retour sur les performances des systèmes HARQ, par exemple dans, [9–12], mais le résultat établi ne considère aucune hypothèse sur la détection des ACK/NACK, et les auteurs se contentent de la dérivation des métriques de performance rejetant le problème d'optimisation au niveau de la détection.

1.2 Objectifs

Dans ce travail, nous allons pas s'intéresser à un type particulier de HARQ. Nous allons nous placer au niveau de la voie de retour, considérant à la fois la détection des acquittements et l'optimisation de throughput dans un seul problème. Nous chercherons à dériver l'expression de throughput

d'un système HARQ avec un modèle général du canal de retour, et analyser le niveau d'impact des erreurs des acquittements sur les performances du système.

1.3 Contributions

Les principales contributions de ce travail sont les suivantes :

1. Nous proposons un cadre général pour analyser la détection des acquittements (ACK/NACK) en vue de l'optimisation de throughput du protocole HARQ, la politique de détection optimale est dérivée à l'aide du modèle POMDP. Nous fournissons une expression analytique de throughput en considérant un modèle généralisé des erreurs dans la voie de retour.
2. Nous fournissons une discussion sur l'analyse de performance de d'autres politiques de détection, à savoir les estimateurs basés sur ML et MAP en les comparant à la politique optimale.
3. Nous fournissons un aperçu sur le niveau d'impact des erreurs NACK \rightarrow ACK et ACK \rightarrow NACK à travers une comparaison des métriques de performance (throughput, nombre moyen des transmissions et la probabilité de coupure) avec celles du meilleur scénario où la voie de retour est parfaite.
4. Nous analysons le système HARQ avec erreurs dans la voie de retour lorsque la probabilité de perte des paquets est soumise à une contrainte; dans ce cadre nous allons comparer les dégradations du throughput apportées par l'adoption des politiques ML et MAP avec celles de la politique optimale.

Chapitre 2

Notions et modèle de base

2.1 Principes du protocole HARQ

Le protocole HARQ consiste à combiner un code correcteur d'erreurs (code de la couche physique) avec un protocole ARQ. L'idée est d'utiliser le code pour corriger les patrons d'erreur les plus fréquents, et de laisser la correction des patrons les plus rares à la charge du protocole de retransmission. En pratique, les données sont tout d'abord protégées par un code détecteur d'erreurs, qui rajoute une somme de contrôle (CRC) à la trame d'information. Celle-ci est ensuite encodée par un deuxième code, le code correcteur d'erreurs (FEC). Le paquet doublement encodé est ensuite transmis sur le canal où les signaux sont entachés par le bruit. Le paquet reçu est tout d'abord décodé par le décodeur FEC. L'intégrité du message décodé est ensuite vérifiée par contrôle du CRC. En cas d'erreurs, le récepteur rejette ou conserve le paquet reçu, suivant la stratégie HARQ considérée, puis demande une retransmission en utilisant un signal NACK. Dans le cas contraire (message décodé valide), les données utiles sont délivrées à la couche supérieure et un signal ACK est envoyé à l'émetteur. Ce processus se poursuit jusqu'à ce qu'un signal ACK est observé ou que le nombre limité de transmission soit atteint.

2.2 Modèle du système

Nous considérons un système de communication point à point tel que montré sur la figure Fig. 2.1, entre un transmetteur (Tx) et un récepteur (Rx). Nous nous référons au lien Tx \rightarrow Rx comme le lien direct (Forward), et au lien Rx \rightarrow Tx comme le lien de retour (Feedback). Notre modèle est formulé en utilisant deux variables, l'état du décodeur s_n et l'action de contrôle u_n . Au début du n -ième intervalle de temps (défini comme l'intervalle $[nT, (n+1)T]$ et T est la durée de l'intervalle), selon l'observation reçue y_n^{Ret} , le contrôleur P-HARQ prend une action u_n , où $u_n = 0$ veut dire arrêter la transmission (ce qui signifie aussi d'envoyer un nouveau paquet), et $u_n = 1$ signifie continuer (continuer la transmission du même paquet ; nous commençons par $u_0 = 1$ car aucune observation n'est disponible au départ) et K est le nombre maximal de transmission toléré par le protocole HARQ pour un seul paquet.

Si une action de continuation a été prise par Tx ($u_n = 1$) au début du bloc de transmission n , Rx décode le message envoyé et selon le résultat de vérification de CRC, l'état suivante du décodeur $s_{n+1} \in \{0, 1\}$ est identifiée et le contrôleur HARQ pourra générer le signal feedback y_{n+1}^{Ret} associé à cet état. Systématiquement, un signal NACK est associée à l'état $s_{n+1} = 0$ signifiant qu'il y avait une erreur de décodage que nous décrivons par l'événement err_{n+1} , et un signal ACK est associé à l'état $s_{n+1} = 1$ dans le cas où il n'y a pas d'erreurs de décodage, l'événement que nous décrivons par \overline{err}_{n+1} , (nous supposons que l'état initial du décodeur est $s_0 = 0$).

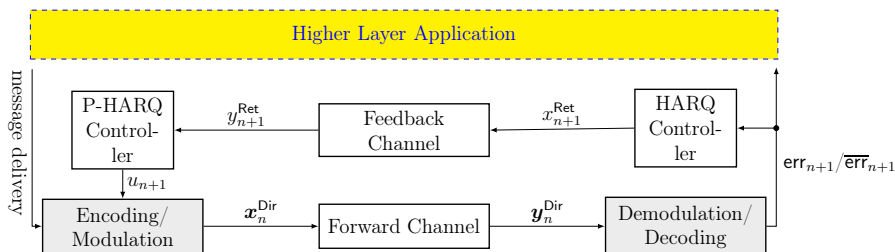


FIGURE 2.1 – Modèle de système de la boucle fermée de HARQ considérée : le contrôleur P-HARQ contrôle les règles de détection des signaux ACK/NACK.

Dans un HARQ tronqué (truncated HARQ), un nouveau cycle commence

lorsque le nombre maximal de transmission K est atteint ; les retransmissions dans chaque cycle sont associées au même paquet. La modélisation de la machine à état de notre système basée sur la notion du temps (ou du bloc), nécessite la distinction entre les différents paquets (ou cycles) dans le temps. Pour cela on définit $k_n \in \{0, 1, \dots, K - 1\}$ et s_n respectivement comme le nombre de rounds effectué au début de bloc de transmission n (c'est-à-dire le nombre de rounds effectué jusqu'à la fin du bloc $n - 1$) et l'état de décodeur au début du bloc de transmission n (qui est le résultat de décodage à la fin du bloc $n - 1$). Ensuite on peut définir l'état global de notre système au début du bloc n comme la combinaison $S_n = (k_n, s_n)$. Par exemple, si $k_n = k$ et $s_n = 0$, Tx a effectué $k + 1$ transmission et un signal NACK a été envoyé par Rx à la fin du bloc $n - 1$ (au début de bloc n).

Au début de chaque bloc de transmission n , le contrôleur prend l'action u_n en se basant sur y_n^{Ret} et en observant le nombre de rounds déjà effectué k_n . Selon sa compréhension du signal feedback, le contrôleur pourra choisir évidemment entre continuer la transmission du même paquet ou la transmission d'un nouveau.

2.2.1 HARQ sans erreurs de feedback

Dans le cas de voie de retour sans erreur, le contrôleur a la connaissance parfaite de l'état du décodeur s_n . Cela équivaut à dire que la détection de ACK/NACK est parfaite, qui peut être vu comme une transmission avec une très bonne qualité de canal feedback. Donc une fois que Rx décode le paquet correctement, Tx reçoit un ACK et commence la transmission d'un nouveau paquet, cela est traduit par la machine à état suivante

$$S_{n+1} = \begin{cases} (0, \mathbb{I}[\overline{\text{err}}_{n+1}]), & \text{si } k_n = K - 1 \vee \overline{\text{err}}_n \\ (k_n + 1, \mathbb{I}[\overline{\text{err}}_{n+1}]), & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.1)$$

où err_n est l'événement d'erreur de décodage à la fin du bloc n , $\overline{\text{err}}_n$ décrit le cas inverse et $\mathbb{I}[X]$ est la fonction indicatrice de l'événement X défini par

$$\mathbb{I}[X] = \begin{cases} 1, & \text{si } X \text{ est vrai} \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.2)$$

La fonction de récompense est reliée à la transition et peut être définie comme

$$\mathcal{R}[S_{n+1}] = R\mathbb{I}[s_{n+1} = 1]. \quad (2.3)$$

où R est le taux de transmission.

2.2.2 HARQ avec erreurs de feedback

En raison de présence du bruit dans le lien de retour, le contrôleur observe des versions bruitées de l'état du décodeur, et la détection imparfaite entraîne un changement dans le mécanisme normal d'un système HARQ, ce qui résulte en apparition des nouveaux cas qu'il faut prendre en considération. Notamment Tx peut détecter un ACK comme NACK et par principe continuer à envoyer le même paquet. En conséquence les erreurs de feedback ACK \rightarrow NACK sont associées à la machine à état suivante relative à l'action continuer ($u_n = 1$)

$$S_{n+1} = \begin{cases} (k_n + 1, \mathbb{I}[\overline{\text{err}}_{n+1}]), & \text{si } s_n = 0 \wedge k_n < K - 1 \\ (k_n + 1, 1), & \text{si } s_n = 1 \wedge k_n < K - 1 \\ (0, \mathbb{I}[\overline{\text{err}}_{n+1}]), & \text{si } k_n = K - 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

En contrepartie Tx peut détecter un NACK comme ACK et par principe arrêter (commencer un nouveau ou envoyer un nouveau paquet). En conséquence les erreurs de feedback NACK \rightarrow ACK sont associées à la machine à état suivante relative à l'action stop ($u_n = 0$)

$$S_{n+1} = (0, \mathbb{I}[\overline{\text{err}}_{n+1}]), \quad (2.5)$$

Le reward est relative aussi à la transition et va dépendre ici de l'action prise u_n

pour $u_n = 1$:

$$\mathcal{R}[S_n, S_{n+1}, u_n] = R\mathbb{I}[s_n = 0 \wedge s_{n+1} = 1], \quad (2.6)$$

pour $u_n = 0$:

$$\mathcal{R}[S_n, S_{n+1}, u_n] = R\mathbb{I}[s_{n+1} = 1]. \quad (2.7)$$

Il faut noter que dans le cas de HARQ sans erreurs la séparation des deux actions continuer et arrêter n'est pas nécessaire puisque le contrôleur a la connaissance parfaite de feedback, donc la continuation et l'arrêt sont faites parfaitement. Cependant lorsque le feedback n'est pas parfait, le contrôleur aura toujours le doute entre commencer un nouveau cycle et continuer la transmission du même paquet, c'est là où l'idée de formuler le problème dans le cadre d'un arrêt optimal avec observations imparfaite apparaît idéalement, ce que nous allons voir plus loin dans ce rapport.

2.3 Mesure de performance et problème d'optimisation

Le throughput est la métrique de performance principale adoptée dans de nombreux travaux analysant le protocole HARQ, par ex. [1–5]. Il mesure le nombre de bits d'information que l'on peut transmettre par unité de temps. La formule général du throughput est donnée par

$$\eta \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \mathbb{E} \left[\mathcal{R}[S_n, S_{n+1}, \pi(S_n)] \right], \quad (2.8)$$

où $\mathcal{R}[S_n, S_{n+1}, \pi(S_n)]$ est la fonction de récompense dans le bloc n qui est fonction des états S_n, S_{n+1} et d'une politique $\pi(S_n)$. Il faut noter qu'une politique π est définie comme un mapping $\pi : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{A}$ entre l'espace d'état \mathcal{S} et l'espace d'action \mathcal{A} . Le problème d'optimisation peut s'écrire dans ce cas sous la forme

$$\hat{\eta} = \max_{\pi(\cdot)} \eta(\pi), \quad (2.9)$$

et la politique optimale est

$$\hat{\pi} = \operatorname{argmax}_{\pi(\cdot)} \eta(\pi), \quad (2.10)$$

peut être trouvée par les equations de Bellman [13, Prop. 4.2.1]

$$\lambda + h(s) = \max_{u \in \mathcal{A}} \left\{ \mathcal{R}(s, u) + \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s'|s, u)h(s') \right\}, \quad (2.11)$$

où $\lambda = \hat{\eta}$ est le throughput optimale, $h(s)$ est une interpretation de la récompense différentielle (ou value function) dans l'état s et $p(s'|s, u)$ désigne la probabilité de transition de l'état s à l'état s' en prenant l'action u . Les méthodes numériques standard pour résoudre l'équation d'optimalité (2.11) sont les suivantes

1. Itération de la policie (Policy iteration).
2. Itération de la fonction de récompense différentielle (Value iteration).
3. Autres méthodes basées sur la programmation linéaire comme la méthode de simplex.

Notre processus d'état d'horizon infini forme une chaîne de Markov homogène à temps discret où les états $(0, 0)$ et $(0, 1)$ sont récurrentes. La durée entre deux passages successives par un état récurrente est une variable aléatoire, sa moyenne est la durée moyenne d'un cycle qui a une valeur maximale K . Du fait bien connu dans la théorie des processus à renouvellement de la récompense (renewal reward process), il s'ensuit qu'on pourra toujours formuler le problème dans le cadre d'horizon fini relative à la transmission d'un seul paquet sans perte d'optimalité. Le throughput dans ce cas est le rapport entre le reward moyen dans un cycle et la durée moyenne d'un cycle, selon le théorème de Renewal-Reward [14]

$$\eta = \frac{\mathbb{E}[\mathcal{R}]}{\mathbb{E}[\mathcal{K}]}, \quad (2.12)$$

avec \mathcal{R} est la récompense (reward) par cycle, \mathcal{K} est le nombre de blocs de canaux utilisés pour transmettre le message.

La transition de l'horizon infini à l'horizon fini permet d'éliminer la notion de temps et limiter l'analyse à la transmission d'un seul paquet à travers des rounds k . Cela va nous permettre de réduire l'état globale de système juste à l'état de décodeur s_k .

Dans la suite toutes les définitions vont être relatives à la transmission d'un seul paquet. Nous définissons un événement NACK_k , $k = 0, \dots, K$ comme une suite d'erreurs de décodage relatives au même paquet

$$\text{NACK}_k \triangleq \{\text{ERR}_k \wedge \text{ERR}_{k-1} \wedge \dots \wedge \text{ERR}_0\}, \quad (2.13)$$

$$\text{ACK}_k \triangleq \{\overline{\text{ERR}}_k \vee \overline{\text{ERR}}_{k-1} \vee \dots \vee \overline{\text{ERR}}_0\}, \quad (2.14)$$

avec ERR_k est l'événement de voir une erreur de décodage dans le round k , $\overline{\text{ERR}}_k$ et l'événement inverse. Le throughput sera défini comme

$$\eta = \frac{\mathbb{E}\left[R \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{I}[\text{NACK}_k \wedge \text{ACK}_{k+1}]\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{K-1} u_k\right]}. \quad (2.15)$$

Notre objectif principal est de trouver la politique de détection optimale des signaux de retour ACK/NACK qui maximise le throughput. Cela peut être obtenu en optimisant le throughput par rapport au vecteur d'action de contrôle $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{K-1}]$, car la décision u_k peut être reliée à la détection du signal y_k . Le problème d'optimisation est formulé comme suit

$$\Upsilon : \hat{\eta} = \max_{\mathbf{u}} \eta. \quad (2.16)$$

Le problème d'optimisation dans le cas de la représentation fractionnelle (2.15) du throughput η , ne peut pas être résolu directement. Pour cela on introduit une famille de problèmes $\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda, \lambda)$ avec le paramètre λ , qui est connu dans la théorie de la programmation fractionnelle [15] sous le nom de Lagrangien avec

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda, \lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{K-1} \lambda u_k - R \mathbb{I}[\text{NACK}_k \wedge \text{ACK}_{k+1}]\right], \quad (2.17)$$

nous formulons le problème d'optimisation secondaire comme suit

$$\Psi : \mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) = \min_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda, \lambda), \quad (2.18)$$

avec les conditions d'optimalité suivantes

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda > \hat{\eta}, \quad (2.19)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \hat{\eta}, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda < \hat{\eta}. \quad (2.21)$$

Dans le problème secondaire Ψ , pour chaque λ , il existe une politique optimale \mathbf{u}_λ^* qui minimise l'expression $\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda, \lambda)$, la politique optimale globale qui maximise le throughput dans le problème principal Υ , est reliée au valeur de λ qui satisfait la condition d'optimalité dans (2.20). La recherche de λ qui satisfait (2.20) est faite en utilisant la méthode de bisection, l'unicité de la solution est assurée par (2.19) et (2.21).

2.4 Modèle de canaux

2.4.1 Modèle de canal forward

Nous modélisons le canal forward comme un canal à évanouissements par blocs avec un rapport signal sur bruit $\text{snr}_k^{\text{Dir}}$. Nous supposons que la probabilité d'erreur de paquet moyenne (PER) f_k après chaque transmission est connue, et que la vérification de CRC est sans erreurs. f_k peut être exprimé par définition comme

$$f_k \triangleq \Pr\{\text{NACK}_k\}, \quad k = 0, \dots, K \quad (2.22)$$

où $f_0 = 1$, $\text{NACK}_k \equiv (s_k = 0)$ et $\text{ACK}_k \equiv (s_k = 1)$. En pratique, le calcul de f_k dépend de $\text{snr}_k^{\text{Dir}}$ et le type de protocole HARQ utilisé. Dans le cas de IR-HARQ, f_k est égale à la probabilité que l'information mutuelle accumulée I est inférieure au taux de transmission R . Dans le cas de CC-HARQ, f_k est égale à la probabilité que le SNR accumulé est inférieur à un SNR cible $\text{snr}_{th} = I^{-1}(R) - 1$. Autrement dit, f_k est donnée par

$$f_k = \begin{cases} \Pr \left\{ \sum_{l=1}^{l=k} I(1 + \text{snr}_l^{\text{Dir}}) < R \right\}, & \text{pour IR-HARQ} \\ \Pr \left\{ I(1 + \sum_{l=1}^{l=k} \text{snr}_l^{\text{Dir}}) < R \right\}, & \text{pour CC-HARQ} \end{cases} \quad (2.23)$$

2.4.2 Modèle de canal feedback

Nous adoptons un modèle de canal de retour à évanouissements par blocs, et par souci de simplicité, nous supposons que $x_k^{\text{Ret}} = x_k$ et $y_k^{\text{Ret}} = y_k$

$$y_k = \sqrt{\text{snr}_k} x_k + z_k, \quad k = 1, \dots, K - 1, \quad (2.24)$$

où x_k est le signal feedback associé à l'état du décodeur s_k , transmis par Rx et reçu par Tx au début du round k . z_k est un bruit Gaussien complexe, les z_k sont i.i.d. (indépendante et identiquement distribué) avec une moyenne nulle et une variance unitaire. snr_k est le rapport signal sur bruit instantané qui caractérise le canal feedback. On suppose que la valeur de snr_k est parfaitement connue à TX, et varie d'une façon i.i.d. d'un bloc à un autre, et que snr_k suit une distribution $p_{\text{snr}}(\text{snr})$, $\text{snr} \geq 0$.

On suppose une modulation BPSK au niveau du signal feedback avec une énergie par bit unitaire suivant le mapping

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{si } s_k = 1 \\ -1, & \text{si } s_k = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Dans les résultats numériques, nous utilisons la modulation 16-QAM dans le lien forward, et nous supposons que le décodage canal est parfait, et les gains dans les canaux forward et feedback suivent une distribution Rayleigh, donc

$$p_{\text{snr}}(\text{snr}) = \frac{1}{\overline{\text{snr}}} e^{-\frac{\text{snr}}{\overline{\text{snr}}}} \quad (2.26)$$

où $\overline{\text{snr}}$ est la valeur moyenne de snr .

2.5 La détection ML et MAP

Au début de chaque round k , le contrôleur prend la décision u_k à partir du signal reçu y_k , sa décision reflète son estimation du signal feedback si c'était un ACK ou NACK. Le fait que le canal feedback est bruité expose le

contrôleur aux erreurs de détection. On peut imaginer que le canal feedback est un canal binaire avec comme paramètres les probabilités d'erreurs comme montré sur la figure 2.2 où \tilde{s}_k est l'estimation de s_k , et ϵ_k^A et ϵ_k^N sont les probabilités d'erreurs de feedback définis comme suit

$$\epsilon_k^A = \Pr \{ \tilde{s}_k = \text{NACK} | s_k = \text{ACK} \}, \quad (2.27)$$

$$\epsilon_k^N = \Pr \{ \tilde{s}_k = \text{ACK} | s_k = \text{NACK} \}. \quad (2.28)$$

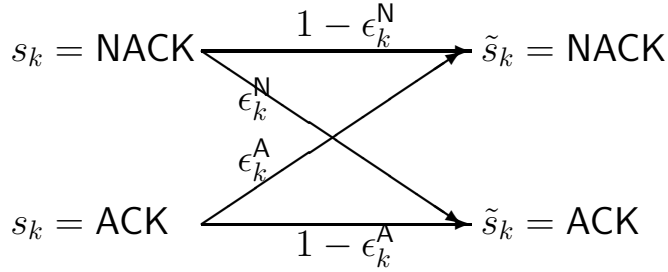


FIGURE 2.2 – Modèle du canal de retour décrivant les probabilités d'erreur.

Dans un système HARQ sans erreurs de feedback $\epsilon_k^A = \epsilon_k^N = 0$. L'estimation peut être faite par différentes approches. Les approches conventionnelles sont maximum de vraisemblance (ML) et maximum à posteriori (MAP), qui sont basées sur des seuils comme des critères de détection.

2.5.1 L'estimateur ML

Par définition, la règle d'estimation ML de l'état du décodeur s_k à base du signal de retour reçu y_k au début du round k est donnée par

$$\tilde{s}_k = \underset{s_k}{\operatorname{argmax}} \Pr\{y_k | s_k\} \quad (2.29)$$

$$= \operatorname{argmax} \left\{ \Pr\{y_k = -\sqrt{\operatorname{snr}_k} + z_k\}, \Pr\{y_k = \sqrt{\operatorname{snr}_k} + z_k\} \right\} \quad (2.30)$$

$$= \operatorname{argmax} \left\{ (y_k + \sqrt{\operatorname{snr}_k})^2, (y_k - \sqrt{\operatorname{snr}_k})^2 \right\} \quad (2.31)$$

pour tout k , le seuil de détection est donné par $\tilde{y}_k^{\text{ML}} = 0$, solution de l'équation (2.32)

$$(x + \sqrt{\text{snr}_k})^2 = (x - \sqrt{\text{snr}_k})^2 \quad (2.32)$$

donc, les expressions des probabilités d'erreur sont données dans (2.33), dépend uniquement de la qualité du canal de retour snr_k à chaque instant k

$$\epsilon_{\text{ML}}^{\text{A}} = \epsilon_{\text{ML}}^{\text{N}} = \mathbb{E}_{\text{snr}_k} [Q(\sqrt{\text{snr}_k})], \quad (2.33)$$

où $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-\frac{u^2}{2}) du$ est la fonction d'erreur (q-fonction) en x .

2.5.2 L'estimateur MAP

La règle d'estimation MAP considère les probabilités a priori, elle est donnée pour $k = 1$ par

$$\tilde{s}_1 = \underset{s_k}{\operatorname{argmax}} \Pr\{y_1|s_1\} \Pr\{s_1\} \quad (2.34)$$

$$= \operatorname{argmax} \left\{ \Pr\{y_1 = -\sqrt{\text{snr}_1} + z_1\} f_1, \Pr\{y_1 = \sqrt{\text{snr}_1} + z_1\} (1 - f_1) \right\} \quad (2.35)$$

$$= \operatorname{argmax} \left\{ 2 \ln(f_1) - (y_1 + \sqrt{\text{snr}_1})^2, 2 \ln(1 - f_1) - (y_1 - \sqrt{\text{snr}_1})^2 \right\} \quad (2.36)$$

le seuil \tilde{y}_1^{MAP} est la solution de l'équation (2.37)

$$2 \ln(f_1) - (x + \sqrt{\text{snr}_1})^2 = 2 \ln(1 - f_1) - (x - \sqrt{\text{snr}_1})^2, \quad (2.37)$$

donné par

$$\tilde{y}_1^{\text{MAP}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{snr}_k}} \ln \left(\frac{f_1}{1 - f_1} \right). \quad (2.38)$$

Pour $k \geq 2$, la règle d'estimation MAP est donnée par

$$\tilde{s}_k = \underset{s_k}{\operatorname{argmax}} \left\{ \sum_{s_{1:k-1}} \Pr\{s_k = 0, s_{1:k-1}|y_{1:k}\}, \sum_{s_{1:k-1}} \Pr\{s_k = 1, s_{1:k-1}|y_{1:k}\} \right\}, \quad (2.39)$$

où $x_{1:n} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On montre dans l'annexe B que le seuil de détection pour $k \geq 2$ est solution de l'équation (2.40)

$$\sum_{s_{1:k-1}} \Pr \{s_k = 0, s_{1:k-1} | x, y_{1:k-1}\} = \sum_{s_{1:k-1}} \Pr \{s_k = 1, s_{1:k-1} | x, y_{1:k-1}\}, \quad (2.40)$$

où $y_{1:k-1} = \tilde{y}_{1:k-1}^{\text{MAP}}$. L'expression de \tilde{y}_k^{MAP} est donné par

$$\tilde{y}_k^{\text{MAP}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{snr}_k}} \ln \left(\frac{f_k}{2f_{k-1} - f_k} \right). \quad (2.41)$$

Chapitre 3

La détection optimale

Dans ce chapitre nous allons chercher la détection optimale dans le cadre d'optimisation du throughput. Nous avons choisi de se placer dans un cadre d'horizon fini qui correspond à la transmission d'un seul paquet, le problème devient un MDP avec arrêt optimal. Cependant, les états exacts s_k du système sont cachés à Tx au moment de la transmission, donc l'idée principale est de formuler le problème à un MDP avec observation imparfaite (POMDP).

3.1 Dynamique du système et structure de récompense

Il faut noter que lorsque le contrôleur prend une action d'arrêt, les paramètres du système, y compris le throughput, ne sont plus définis, par conséquent, nous sommes intéressés à analyser le système avant d'arrêter le processus. Le POMDP considéré est spécifié par le tuple $(\mathcal{K}, \mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathcal{T}, \mathcal{Y}, \mathcal{R})$

1. L'ensemble \mathcal{K} désigne les intervalles de temps sur lesquels les décisions doivent être prises, $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, K - 1\}$, nous définissons $\mathcal{K}^+ = \mathcal{K} \cup \{0\}$.
2. L'ensemble \mathcal{S} désigne les états du système, $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ ou autrement $\mathcal{S} = \{\text{NACK}, \text{ACK}\}$.
3. L'ensemble \mathcal{A} désigne les actions possibles, $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ ou bien $\mathcal{A} = \{\text{stop}, \text{continue}\}$.

4. L'ensemble \mathcal{O} désigne les observations, $\mathcal{O} = \{(y_k, \text{snr}_k) : k \in \mathcal{K}, y_k \in \mathbb{R}, \text{snr}_k \in \mathbb{R}^+\}$.
5. L'ensemble \mathcal{T} désigne l'ensemble de la structure des probabilités de transition, puisque les dérivations vont être faite par rapport à l'action continue, donc les transitions vont être définies par rapport cet action (il n'y'a pas de transition relative à l'action stop), donc $\mathcal{T} = \{\Pr\{s_{k+1}|s_k\} : k \in \mathcal{K}^+, s_{k+1}, s_k \in \mathcal{S}, u_k = 1\}$.
Nous définissons $p_k \in \mathcal{T}$ comme la probabilité d'un décodage réussi conditionné par les précédents échoues

$$p_k = \Pr\{s_{k+1} = 1 | s_k = 0\}, \quad (3.1)$$

$$q_k = 1 - p_k, \quad (3.2)$$

et on peut le calculer comme suit

$$p_k = \Pr\{\text{ACK}_{k+1} | \text{NACK}_k\} \quad (3.3)$$

$$= 1 - \Pr\{\text{NACK}_{k+1} | \text{NACK}_k\} \quad (3.4)$$

$$= 1 - \Pr\{\text{NACK}_{k+1}, \text{NACK}_k\} / \Pr\{\text{NACK}_k\} \quad (3.5)$$

$$= 1 - f_{k+1}/f_k \quad (3.6)$$

La matrice de transition est donnée par

$$[\mathbf{P}]_{s_k \rightarrow s_{k+1}} = \begin{bmatrix} p_k & q_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

6. L'ensemble \mathcal{Y} est l'ensemble des probabilités d'observation conditionnelle $\mathcal{Y} = \{\Pr\{y_k, \text{snr}_k | s_k\} : k \in \mathcal{K}, (y_k, \text{snr}_k) \in \mathcal{O}, s_k \in \mathcal{S}, u_{k-1} = 1\}$, qui est l'espace de possibles PDFs conditionnels d'observations $(y_k, \text{snr}_k) \in \mathcal{O}$.
7. L'ensemble \mathcal{R} modélise la structure de la récompense, mais vue que le problème secondaire Ψ est une minimisation, la nomination coût est plus significative que la nomination récompense. La fonction de coût partiel peut être extraite de la fonction du coût totale défini dans l'equation (2.17), elle est donnée par

$$c_k^\lambda(s, u) = \mathbb{E} \left[\lambda u_k - R \mathbb{I}[\text{NACK}_k \wedge \text{ACK}_{k+1}] | u_k = u, s_k = s \right] \quad (3.8)$$

$$= u(\lambda - R p_k(1 - s)) \quad (3.9)$$

Il faut noter que :

- Vue la structure de l'espace d'action, le présent POMDP est typiquement un problème POMDP avec arrêt optimal (Optimal Stopping POMDP). Ce type de problème a été considéré dans de nombreux travaux, par exemple [16].
- Si nous continuons en étant dans un état ACK, nous n'obtenons aucune récompense alors que nous sommes certains de rester dans la même état, il vient du fait que nous supposons $\overline{\text{ERR}}_k \Rightarrow \overline{\text{ERR}}_{k+1}$.
- Il est évident de voir que la fonction p_k est croissante par rapport à $k \in \mathcal{K}^+$ pour tous les types de HARQ (HARQ-I et HARQ-II)

$$p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_{K-1}. \quad (3.10)$$

Désignons par $f_k^0, f_k^1 \in \mathcal{Y}$, les probabilité d'observer (y, snr) sachant qu'on a transmis un ACK et un NACK respectivement

$$f_k^0(y, \text{snr}) = \Pr\{y_k = y, \text{snr}_k = \text{snr} | s_k = 0\} \quad (3.11)$$

$$f_k^1(y, \text{snr}) = \Pr\{y_k = y, \text{snr}_k = \text{snr} | s_k = 1\} \quad (3.12)$$

nous pouvons montrer que l'observation conditionnée

$$f_k^i(y, \text{snr}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+(-1)^i\sqrt{\text{snr}})^2}{2}} p_{\text{snr}}(\text{snr}), \quad i \in \{0, 1\}. \quad (3.13)$$

Finalement, notre problème d'arrêt optimal avec horizon fini sous observation partielle est de la forme suivante

$$\Psi : \mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) = \min_{\substack{s_0=0 \\ \tau \in \mathcal{K}}} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\tau} c_k^\lambda(s_k, u_k) \right]. \quad (3.14)$$

3.2 Transformation en belief-state MDP

L'espace de *belief state* (distribution de probabilité sur les états) représente une statistique suffisante pour les observations précédentes. Le problème d'optimisation Ψ ne peut pas être résolu dans un cadre MDP sans

former l'espace de *belief state*, car l'état réel est caché à Tx en temps de décision. Désignons par $\mathcal{I}_k = \{\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \dots, \mathbf{o}_k, u_0, u_1, \dots, u_{k-1}\}$ le vecteur d'information disponible au niveau du contrôleur à l'instant k où $\mathbf{o}_k = (y_k, \text{snr}_k) \in \mathcal{O}$, le belief state ξ est défini comme la distribution de probabilité sur tous les états possibles compte tenu de l'historique des observations et des actions, il peut être exprimé au round k par

$$\xi_k(s) = \Pr\{s_k = s | \mathcal{I}_k\}. \quad (3.15)$$

Supposons que $\alpha_k = \xi_k(0)$ puis $1 - \alpha_k = \xi_k(1)$. Le belief peut être calculé récursivement à l'aide de la règle de Bayes en maintenant les distributions antérieures; sa dynamique est donnée par la fonction Φ ; $\alpha_{k+1} = \Phi(\alpha_k, \mathbf{o}_{k+1}, u_k)$. Le prochain belief state est complètement déterminé en connaissant le belief state actuel et l'action actuelle et la prochaine observation. L'expression de α_{k+1} est donné par

$$\alpha_{k+1} = \frac{\Pr\{\mathbf{o}_{k+1} | \text{NACK}_{k+1}, u_k\} \sum_{s_k} \Pr\{\text{NACK}_{k+1} | s_k, u_k\} \xi(s_k)}{\sum_{s'_{k+1}} \Pr\{\mathbf{o}_{k+1} | s'_{k+1}, u_k\} \sum_{s_k} \Pr\{s'_{k+1} | s_k, u_k\} \xi(s_k)} \quad (3.16)$$

qui peut être exprimée pour $u_k = 1$ après la simplification comme suit

$$\alpha_{k+1} = \frac{f_{k+1}^0(y, \text{snr}) q_k \alpha_k}{(f_{k+1}^0(y, \text{snr}) - f_{k+1}^1(y, \text{snr})) q_k \alpha_k + f_{k+1}^1(y, \text{snr})}, \quad (3.17)$$

où $\alpha_0 = 1$. L'expression de coût en fonction du belief state est l'espérance de $c_k^\lambda(s, u)$ par rapport à \mathbf{o}_k étant donné que $\alpha_k = \alpha$ et $u_k = u$ sont connus

$$c_k^\lambda(\alpha, u) = c_k^\lambda(0, u) \alpha + c_k^\lambda(1, u) (1 - \alpha) \quad (3.18)$$

$$= u(\lambda - R \alpha p_k) \quad (3.19)$$

Nous considérons l'espace des politiques admissibles $\mathbf{u}_\lambda = \{u_1, u_2, \dots, u_{K-1}\}$ où chaque fonction u_k assigne à chaque vecteur d'information \mathcal{I}_k une action dans l'espace de contrôle \mathcal{A}

$$u_k(\mathcal{I}_k) \in \mathcal{A}, \quad \forall \mathcal{I}_k, \quad k \in \mathcal{K}. \quad (3.20)$$

Enfin, le problème Ψ est complètement transformé en belief state MDP où l'objectif est de trouver une politique admissible optimale \mathbf{u}_λ^* qui satisfait

$$\Psi : \mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) = \min_{\substack{\alpha_0=1 \\ \tau \in \mathcal{K}}} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\tau} c_k^\lambda(\alpha_k, u_k(\mathcal{I}_k)) \right], \quad (3.21)$$

sujet à l'équation du système et de mesure pour $k \leq \tau-1$, $\alpha_{k+1} = \Phi(\alpha_k, \mathbf{o}_{k+1}, u_k)$, et les espérances sont prises par rapport à $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \dots, \mathbf{o}_\tau$.

3.3 Structure de la politique optimale

Dans cette section, nous allons résoudre le problème Ψ en essayant de trouver la structure de la politique optimale \mathbf{u}_λ^* . Étant donné que l'optimisation ne concerne pas la première action u_0 (déjà fixée $u_0 = 1$), nous l'extrayons de notre problème d'optimisation donc

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) = \lambda - Rp_0 + J_\lambda^*, \quad (3.22)$$

avec

$$J_\lambda^* = \min_{\substack{\alpha_0=1 \\ u_1, u_2, \dots, u_{K-1}}} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{K-1} c_k^\lambda(\alpha_k, u_k(\alpha_k)) \right]. \quad (3.23)$$

Les espérances sont prises par rapport à $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \dots, \mathbf{o}_{K-1}$. La programmation dynamique (DP) simplifie un problème d'optimisation en la divisant en sous-problèmes, elle fournit une approche de transformation directe des problèmes multidimensionnels en sous-problèmes unidimensionnels, ce qui entraîne des calculs faciles à effectuer. La décomposition de la programmation dynamique de J_λ commence par le dernier interval de temps $k = K - 1$ avec la minimisation

$$J_{K-1}(\alpha) = \min \{0, \lambda - p_{K-1}\alpha R\}, \quad (3.24)$$

et à chaque étape $k \in \mathcal{K}$, la fonction (value function) $J_k(\alpha_k)$ est donnée par l'équation de Bellman comme suit

$$J_k(\alpha) = \min \left\{ 0, \lambda - p_k \alpha R + \mathbb{E}_{\mathbf{o}_{k+1}} [J_{k+1}(\alpha_{k+1}) | u_k = 1, \alpha] \right\}. \quad (3.25)$$

où la valeur 0 du premier argument de la fonction min correspond à une action d'arrêt et, le deuxième argument correspond à une action de continuation, donc à la dernière étape, le coût partiel optimal est donné par

$$J_\lambda^* = \mathbb{E}_{\mathbf{o}_1} [J_1(\alpha_1) | \alpha_0 = 1, u_0 = 1]. \quad (3.26)$$

Théorème 1. (*Concavité et monotonie*)

L'espérance $\mathbb{E}_{\mathbf{o}_{k+1}} [J_{k+1}(\alpha_{k+1}) | \alpha, u_k]$ et la fonction $J_k(\alpha)$ sont concaves, linéaires par morceaux et décroissantes en $\alpha \in [0, 1]$ pour tous $k \in \mathcal{K}$.

La preuve du théorème 1 est fournie à l'annexe A. On peut voir que dans chaque étape k , la politique optimale est spécifiée par un seuil γ_k , la solution de l'équation du point fixe suivante

$$\mathcal{E}_k : R\gamma_k p_k = \lambda + \mathbb{E}_{\mathbf{o}_{k+1}} [J_{k+1}(\alpha_{k+1}) | \gamma_k, u_k = 1]. \quad (3.27)$$

En conséquence, la politique optimale sera

$$u_k^*(\alpha_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha_k \leq \gamma_k \\ 1, & \text{si } \alpha_k \geq \gamma_k \end{cases} \quad (3.28)$$

Cela peut être interprété comme suit : le contrôleur arrête la transmission chaque fois que sa croyance (belief) d'être dans un état **NACK** (qui est ici la valeur de α) est inférieure à un seuil γ (c-à-d que sa croyance d'être dans un état **ACK** est élevée). Cependant, nous devons discuter l'existence des seuils γ_k , et lorsque l'équation (3.27) peut ne pas avoir de solution dans $[0, 1]$.

Lemma 1. (*Existence des seuils*)

Pour tous $k \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$:

1. $J_k(1) \neq 0 \Leftrightarrow \gamma_k$ existe et unique dans $]0, 1[$
2. $J_k(1) = 0 \Leftrightarrow \gamma_k = 1$

Démonstration. La preuve est basée sur les résultats du théorème 1, définissons la fonction $c(\alpha)$ comme

$$c(\alpha) = \lambda - p_k \alpha R + \mathbb{E}_{\mathbf{o}_{k+1}} [J_{k+1}(\alpha_{k+1}) | \alpha, u_k = 1], \quad (3.29)$$

à partir du théorème 1 et parce que la fonction $\alpha \mapsto \lambda - \alpha R p_k$ décroît strictement en α , la fonction $c(\alpha)$ est également strictement décroissante en α , il s'ensuit que

$$J_k(1) \neq 1 \Leftrightarrow c(1) < 0 \quad (3.30)$$

$$\Leftrightarrow \exists! \gamma_k \in]0, 1[\text{ s.t } c(\gamma_k) = 0 \text{ (} c(0) > 0 \text{)} \quad (3.31)$$

$J_k(1) = 0$ signifie que $J_k(\alpha) = 0 \forall \alpha \in [0, 1]$ car $J_k(\alpha)$ est monotone, donc $\gamma_k = 1$. □

Proposition 1. (*Interval de continuation*)

Définissons l'espace de continuation Ω_k pour $k \in \mathcal{K}$ et pour $\text{snr}_k = \text{snr}$, λ fixés comme suit

$$\Omega_k = \{y : \Phi(\gamma_{k-1}, (y, \text{snr}), 1) \geq \gamma_k\} \quad (3.32)$$

$$= \left\{y : \frac{l_y q_{k-1} \gamma_{k-1}}{(l_y - 1) q_{k-1} \gamma_{k-1} + 1} \geq \gamma_k\right\} \quad (3.33)$$

où l_y est le rapport de vraisemblance défini comme

$$l_y = \frac{f_k^0(y, \text{snr})}{f_k^1(y, \text{snr})} \in [0, +\infty] \quad (3.34)$$

Alors $\exists! \tilde{y}_k$ s.t $\Omega_k = [-\infty, \tilde{y}_k]$.

Démonstration. À partir de Lemma 1, les seuils γ_k existent et appartiennent à $[0, 1]$, d'autre part, nous pouvons montrer facilement, en calculant la dirivée $\frac{d\Phi(\gamma_{k-1}, (y, \text{snr}), 1)}{dl_y}$ pour un y fixe, que $\Phi(\gamma_{k-1}, (y, \text{snr}), 1)$ est croissante en l_y dans $[0, +\infty]$, donc $\exists! \tilde{l}_y$ s.t $\Phi(\gamma_{k-1}, (y, \text{snr}), 1) = \gamma_k$. Vue que $l_y = e^{-2y\sqrt{\text{snr}}}$ est décroissante en y , $\exists! \tilde{y}_k$ s.t $l_y = \tilde{l}_y$ donné par

$$\tilde{y}_k = -\frac{1}{2\sqrt{\text{snr}}} \ln \left(\frac{\gamma_k (1 - (1 - p_{k-1})\gamma_{k-1})}{(1 - p_{k-1})(1 - \gamma_k)\gamma_{k-1}} \right), \quad (3.35)$$

par conséqunce $y \leq \tilde{y}_k \Leftrightarrow l_y \geq l_{\tilde{y}_k} \Leftrightarrow \Phi(\gamma_{k-1}, (y, \text{snr}), 1) \geq \Phi(\gamma_{k-1}, (\tilde{y}_k, \text{snr}), 1) = \gamma_k$. Finalement $y \in \Omega_k$. \square

En fait, pour une valeur donnée de λ , il existe un espace de continuation pour chaque valeur de α_k , mais la politique optimale \mathbf{u}_λ^* est complètement spécifiée par les seuils $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{K-1}$. C'est pourquoi nous limitons notre attention au calcul des expressions en termes de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{K-1}$. Notez que la modification du mapping BPSK ne changera pas les résultats principaux, le seul changement sera dans la forme de l'espace de continuation. La proposition 1 est intéressante dans le sens de transformer les seuils de la forme de belief en seuils de forme signal $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{K-1}$, qui forme les seuils de détection optimaux des signaux ACK/NACK. L'ensemble $\Omega_k = [-\infty, \tilde{y}_k]$ représente l'espace de détection du signal NACK et par conséquent $[\tilde{y}_k, +\infty]$ représentera l'espace de détection de ACK. En conséquence, la structure de la politique de détection optimale dans l'espace des signaux est

$$\tilde{s}_k = \begin{cases} \widetilde{\text{ACK}}, & \text{si } y_k \geq \tilde{y}_k \\ \widetilde{\text{NACK}}, & \text{si } y_k \leq \tilde{y}_k \end{cases} \quad (3.36)$$

où \tilde{s}_k est l'estimation optimale de s_k au niveau de l'émetteur à l'instant k (ne pas confondre la notation 'tilde' sur y avec la signification d'estimation).

3.4 Dérivation des seuils optimaux et expression du throughput

Nous profitons des avantages de la programmation dynamique pour dériver notre expression de throughput et des seuils optimaux. Pour cela nous devons calculer les espérances $\mathbb{E}_{\mathbf{o}_{k+1}} [J_{k+1}(\Phi(\gamma_k, \mathbf{o}_{k+1}, u_k)) | \gamma_k, u_k = 1]$ en utilisant le résultat de la proposition 1 comme suit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{o}_{k+1}} [J_{k+1}(\Phi(\alpha_k, \mathbf{o}_{k+1})) | \alpha_k = \gamma_k] = \\ \int_{\text{snr}=0}^{+\infty} \int_{y \in \Omega_{k+1}} \Pr\{\mathbf{o}_{k+1} = (y, \text{snr}) | \alpha_k = \gamma_k\} J_{k+1}(\Phi(\gamma_k, (y, \text{snr}))) dy d\text{snr}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

La distribution des observations étant donné α_k est donnée par

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbf{o}_{k+1} = (y, \text{snr}) | \alpha_k\} = \sum_{s_{k+1}} \Pr\{y_{k+1} = y, \text{snr}_{k+1} = \text{snr} | s_{k+1}\} \\ \sum_{s_k} \Pr\{s_{k+1} | s_k\} \xi(s_k), \end{aligned} \quad (3.38)$$

alors

$$\Pr\{\mathbf{o}_{k+1} = (y, \text{snr}) | \gamma_k\} = (f_{k+1}^0(y, \text{snr}) - f_{k+1}^1(y, \text{snr})) q_k \gamma_k + f_{k+1}^1(y, \text{snr}). \quad (3.39)$$

Par conséquent l'expression de $J_k(\gamma_k)$ est donnée par

$$\begin{aligned} J_k(\gamma_k) = \min \left\{ 0, \lambda - Rp_k \gamma_k + \int_{\text{snr}=0}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{\tilde{y}_{k+1}} f_{k+1}^1(y, \text{snr}) ((l_y - 1) q_k \gamma_k + 1) \right. \\ \left. J_{k+1} \left(\frac{l_y q_k \gamma_k}{(l_y - 1) q_k \gamma_k + 1} \right) dy d\text{snr} \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Grâce à la forme de linéarité par morceaux de la fonction $J_k(\alpha_k)$, nous sommes en mesure de calculer l'intégration des PDF f_k^0 et f_k^1 sur $[0, +\infty] \times [-\infty, \tilde{y}_k]$ indépendamment d'une étape à l'autre. En conséquence, les seuils $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{K-1}$ sont calculés étape par étape à partir de $k = K - 1$: étant à un stade k donné, tout $\gamma_{i>k}$ est censé être connu, donc en substituant l'expression de \tilde{y}_{k+1} (qui est une fonction de γ_k et γ_{k+1}) dans \mathcal{E}_k , le seul inconnu sera γ_k , enfin, $\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda)$ est calculé dans la dernière étape en terme de λ et d'autres paramètres.

Les probabilités d'erreur sur la voie de retour par définition sont

$$\epsilon_k^A = \Pr \{ \widetilde{\text{NACK}}_k | \text{ACK}_k \} = \Pr \{ y_k \leq \tilde{y}_k | s_k = 1 \}, \quad (3.41)$$

$$\epsilon_k^N = \Pr \{ \widetilde{\text{ACK}}_k | \text{NACK}_k \} = \Pr \{ y_k \geq \tilde{y}_k | s_k = 0 \}. \quad (3.42)$$

Dans la dernière étape de la programmation dynamique, nous trouvons la valeur de λ qui atteint le throughput optimal $\hat{\eta}$ dans notre problème principal Υ en résolvant l'équation $\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) = 0$ par rapport à λ , son expression est donnée par

$$\lambda = \frac{R \sum_{k=0}^{K-1} (f_k - f_{k+1}) n_k}{a_0 + \sum_{k=1}^{K-1} m_k f_k}, \quad (3.43)$$

avec

$$a_k = 1 + \sum_{i=k+1}^{K-1} \prod_{j=k+1}^i \epsilon_i^A, \quad (3.44)$$

$$n_k = \prod_{i=1}^k (1 - \epsilon_i^N), \quad (3.45)$$

$$m_k = a_k n_{k-1} (1 - \epsilon_k^N - \epsilon_k^A). \quad (3.46)$$

On peut considérer (3.43) comme un problème de point fixe puisque l'expression du côté droit est une fonction de λ , qui peut être résolu numériquement. Le calcul est simplifié en utilisant le lemme suivant.

Lemma 2. (*Limitation d'intervall de λ optimal*)

λ satisfait l'implication suivante

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{R} \in [p_0, p_{K-1}] \quad (3.47)$$

Démonstration. Nous allons prouver l'inverse de l'implication en se basant sur deux résultats principaux : p_k croit avec k , et $J_k(\alpha)$ est toujours négatif.

$$\lambda > R p_{K-1} \Rightarrow \forall k, \alpha, \lambda > R p_k \geq R \alpha p_k \quad (3.48)$$

$$\Rightarrow \forall k, \alpha, J_k(\alpha) = 0 \quad (3.49)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) = \lambda - R p_0 \neq 0 \quad (3.50)$$

$$\lambda < Rp_0 \text{ et } \forall k, J_k(\alpha) \leq 0 \Rightarrow \lambda - Rp_0 + J_\lambda^* < 0 \quad (3.51)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) \neq 0 \quad (3.52)$$

par conséquent

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{R} \in [p_0, p_{K-1}]. \quad (3.53)$$

□

Le lemme 2 sert à limiter l'espace de recherche du λ optimal lors de l'utilisation de la bisection ou d'une recherche exhaustive pour résoudre le problème $\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) = 0$. Il montre aussi que $\gamma_{K-1} = \frac{\lambda}{Rp_{K-1}}$ existe toujours en $[0, 1]$, et en plus, lorsque le canal de communication est bon $p_1 \approx p_{K-1} \approx 1$. Cela montre que dans les bonnes qualités de canal de communication (forward), quelle que soit la qualité du canal de retour (feedback) $\hat{\eta} \approx Rp_0 = R(1 - f_1)$.

Toutes les étapes de la programmation dynamique et de la dérivation de la politique optimales peuvent être résumées par la moyenne de l'algorithme suivant. Son sortie donne les paramètres optimaux $\hat{\gamma}_k, \hat{\epsilon}_k^N, \hat{\epsilon}_k^A, k \in \mathcal{K}$ et $\hat{\eta}$ qui, en conséquence, peut être exprimé comme suit

$$\hat{\eta} = \frac{R \sum_{k=0}^{K-1} (f_k - f_{k+1}) \hat{n}_k}{\hat{a}_0 + \sum_{k=1}^{K-1} \hat{m}_k f_k}, \quad (3.54)$$

avec

$$\hat{a}_k = 1 + \sum_{i=k+1}^{K-1} \prod_{j=k+1}^i \hat{\epsilon}_j^A, \quad (3.55)$$

$$\hat{n}_k = \prod_{i=1}^k (1 - \hat{\epsilon}_i^N), \quad (3.56)$$

$$\hat{m}_k = \hat{a}_k \hat{n}_{k-1} (1 - \hat{\epsilon}_k^N - \hat{\epsilon}_k^A). \quad (3.57)$$

Algorithm 1 Algorithme pour le calcul de $\hat{\eta}$

Input : $\lambda_0 \in [Rp_0, Rp_{K-1}]$

Output : $\hat{\eta}, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_{K-1}$

Initialisation : $\lambda = \lambda_0$

```

1: while (1) do
2:    $\gamma_{K-1} = \frac{\lambda}{Rp_{K-1}}$ 
3:   for  $k = K - 2$  to 1 do
4:     calculer  $\gamma_k$  de  $\mathcal{E}_k$ 
5:     calculer  $\tilde{y}_{k+1} = f(\gamma_k, \gamma_{k+1})$  de (3.35)
6:     calculer  $\epsilon_{k+1}^N, \epsilon_{k+1}^A$ 
7:   end for
8:   calculer  $\tilde{y}_1 = f(\gamma_0, \gamma_1)$ , ( $\gamma_0 = 1$ ) et  $\epsilon_1^N, \epsilon_1^A$ 
9:   calculer  $\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda)$ 
10:  if ( $|\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda)| < \delta$ ) then
11:    return  $\lambda, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{K-1}$ 
12:  else
13:    if ( $\mathcal{L}(\mathbf{u}_\lambda^*, \lambda) < 0$ ) then
14:       $\lambda = \lambda + s$ 
15:    else
16:       $\lambda = \lambda - s$ 
17:    end if
18:  end if
19: end while

```

$\hat{\eta}$ est l'expression de throughput optimal d'un système HARQ avec voie de retour imparfaite, elle est générale par le fait que le modèle de canal de retour est général ainsi qu'elle prend en compte le fait que les probabilités d'erreur ϵ_k^N et ϵ_k^A indexées par k peuvent être différentes d'un round à un autre dans le même cycle HARQ, en plus, elle prend en compte la détection des ACK/NACK de telle sorte que les métriques soient optimisées.

Les expressions analytiques des probabilités d'erreur dépendent du signe du terme $\hat{A}_k = -\ln \left(\frac{\hat{\gamma}_k (1 - (1 - p_{k-1}) \hat{\gamma}_{k-1})}{(1 - p_{k-1}) (1 - \hat{\gamma}_k) \hat{\gamma}_{k-1}} \right)$, $k \in \mathcal{K}$. Elles sont données par
Si $\hat{A}_k \leq 0$

$$\hat{\epsilon}_k^N = 1 - \left(1 + \sqrt{\frac{\overline{\text{snr}}}{2 + \overline{\text{snr}}}}\right) e^{\frac{\hat{A}_k}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\overline{\text{snr}}}}\right)}, \quad (3.58)$$

$$\hat{\epsilon}_k^A = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\overline{\text{snr}}}{2 + \overline{\text{snr}}}}\right) e^{\frac{\hat{A}_k}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\overline{\text{snr}}}}\right)}. \quad (3.59)$$

Si $\hat{A}_k \geq 0$

$$\hat{\epsilon}_k^N = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\overline{\text{snr}}}{2 + \overline{\text{snr}}}}\right) e^{-\frac{\hat{A}_k}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\overline{\text{snr}}}}\right)}, \quad (3.60)$$

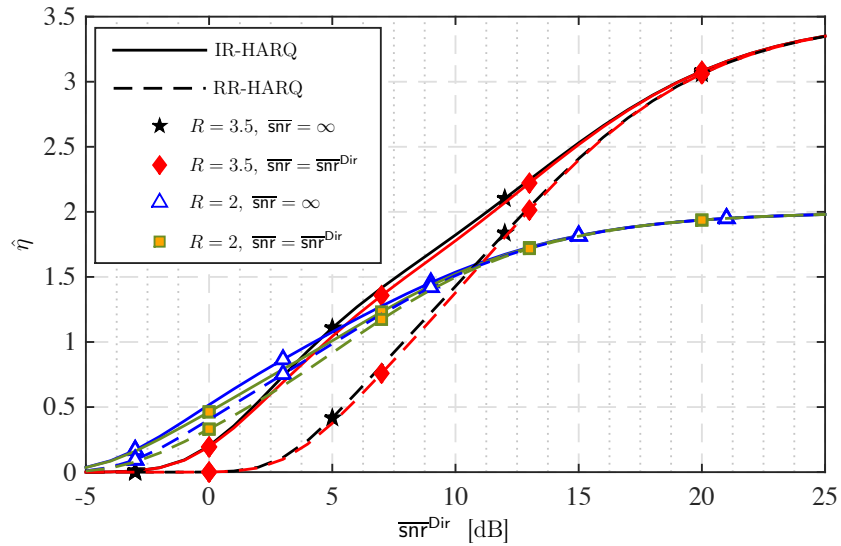
$$\hat{\epsilon}_k^A = 1 - \left(1 + \sqrt{\frac{\overline{\text{snr}}}{2 + \overline{\text{snr}}}}\right) e^{-\frac{\hat{A}_k}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\overline{\text{snr}}}}\right)}. \quad (3.61)$$

3.5 Résultats numériques

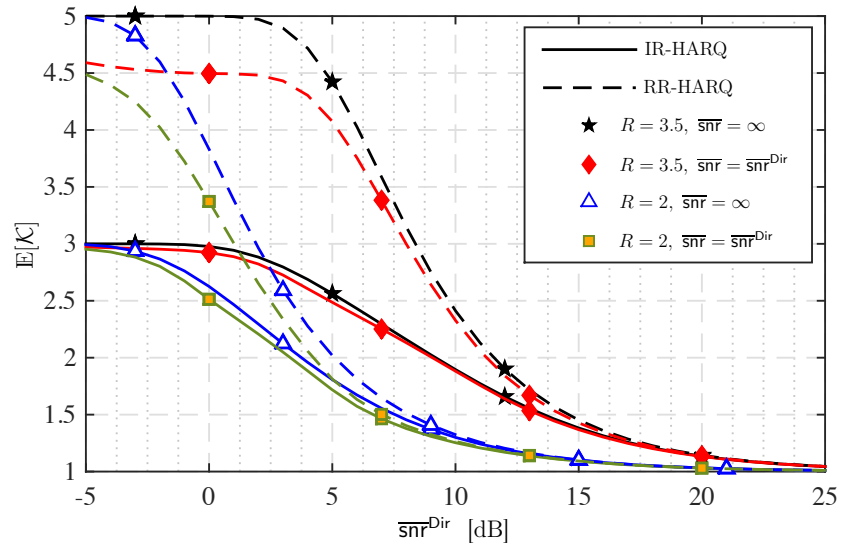
Nous montrons également le throughput dans les conditions fiables de voie de retour (sans bruit), qui est le throughput de la politique POMDP optimale, calculé pour $\overline{\text{snr}} = \infty$, son expression peut être dérivée de l'équation (3.54) en mettant $\hat{\epsilon}_k^N = \hat{\epsilon}_k^A = 0$ pour tous k , il est donné par

$$\lim_{\overline{\text{snr}} \rightarrow \infty} \hat{\eta} = \frac{R(1 - f_K)}{\sum_{k=0}^{K-1} f_k}. \quad (3.62)$$

Exemple 1 (16-QAM, Rayleigh). *Tous les résultats sont présentés en fonction de SNR moyen du canal de communication $\overline{\text{snr}}^{\text{Dir}}$. Fig. 3.1 a) montre le throughput optimal $\hat{\eta}$ et b) le nombre moyen de transmissions, donnés par la politique POMDP proposée en présence d'erreurs de feedback, pour deux scénarios ; $\overline{\text{snr}} = \overline{\text{snr}}^{\text{Dir}}$ et $\overline{\text{snr}} = \infty$. IR signifie IR-HARQ et RR signifie RR-HARQ. Le nombre maximum de transmissions autorisées pour le cas IR est $K = 3$ et $K = 5$ pour le cas RR. Dans les conditions d'opération considérées, la dégradation produite par les erreurs sur la voie de retour n'est presque pas remarquable pour le throughput, alors qu'elle est notable pour le nombre*

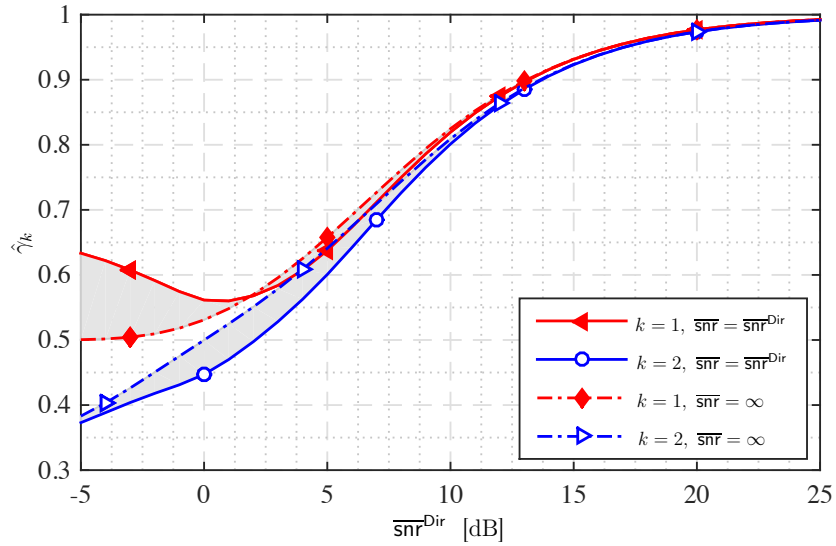


a) Throughput.

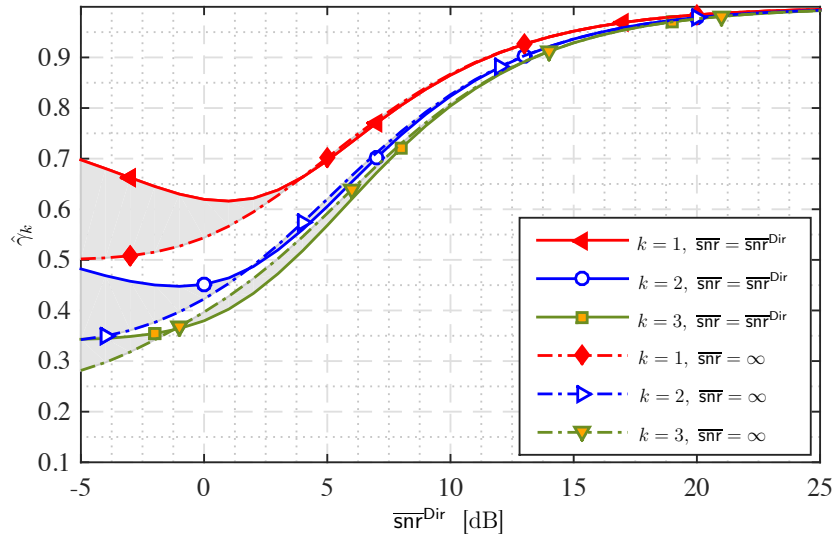


b) Nombre moyen de transmissions.

FIGURE 3.1 – Le throughput optimal a) et le nombre moyen de transmissions b) de IR-HARQ, $K = 3$ et RR-HARQ, $K = 5$ pour deux taux de transmission : $R = 2$ et $R = 3.5$, et pour deux scénarios : $\overline{\text{snr}} = \overline{\text{snr}}^{\text{Dir}}$ et $\overline{\text{snr}} = \infty$.



a) incremental redundancy HARQ (IR-HARQ), $K = 3$.



b) repetition redundancy HARQ (RR-HARQ), $K = 5$.

FIGURE 3.2 – Les seuils optimaux dans chaque round k , $R = 2$ pour : a) IR-HARQ, $K = 3$ et b) RR-HARQ, $K = 5$ ($\gamma_0 = 1$), et pour deux scénarios. La zone remplie représente la différence dans les espaces de détection entre la politique optimale et le meilleur scénario.

moyen de transmissions. En fait la dégradation apparait dans le cas des mauvaises qualité de canal. Dans le game des faibles valeurs de SNR, le système HARQ a besoin de plus de transmissions pour livrer les données avec succès puisque le décodeur (coté récepteur) est plus susceptible d'être dans un état NACK. Ce fait conduit à avoir des erreurs NACK \rightarrow ACK plus que ACK \rightarrow NACK. Par conséquent, les erreurs réduisent le nombre moyen de transmissions, donc une probabilité de perte de paquet plus élevée que celle de voie de retour fiable.

Fig. 3.2 montre les seuils (belief threshlds) optimaux $\hat{\gamma}_k$ indexés par l'indice du rond k pour un taux fixe $R = 2$. Nous considérons les mêmes scénarios que dans Fig. 3.1. Nous n'avons pas montré $\hat{\gamma}_4$ dans le cas RR pour rendre la figure plus claire. Chaque courbe est la bordure entre l'espace de détection optimal de ACK (zone inférieure) et l'espace de détection optimal de NACK (zone supérieure). La zone remplie exprime l'écart entre le premier scénario et le second; qui est le meilleur scénario; en termes de seuils de détection. L'écart semble plus dans les mauvaises conditions de canal, il explique clairement la dégradation dans le nombre moyen de transmissions puisqu'il montre que les espaces de détection de NACKs se sont plus petits que ceux du meilleur scénario.

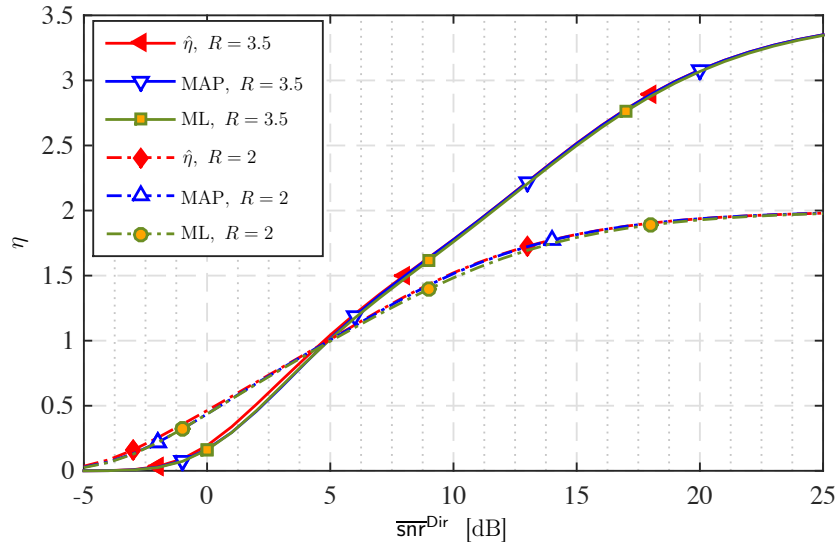
Nous pouvons calculer les probabilités d'erreur pour MAP et ML par un changement adéquat du terme \hat{A}_k dans les expressions (3.58), (3.59), (3.60) et (3.61). Notez que les politiques de détection ML et MAP sont des cas particuliers de notre modèle POMDP.

Pour comparer avec les résultats de [17], nous considérons le troisième scénario où nous ciblons une certaine probabilité d'erreur $\epsilon_{ML}^A = \epsilon_{ML}^N = \epsilon_{ML}^{Tar}$, cela équivaut à fixer SNR moyen $\overline{snr} = \overline{snr}^{Tar}$.

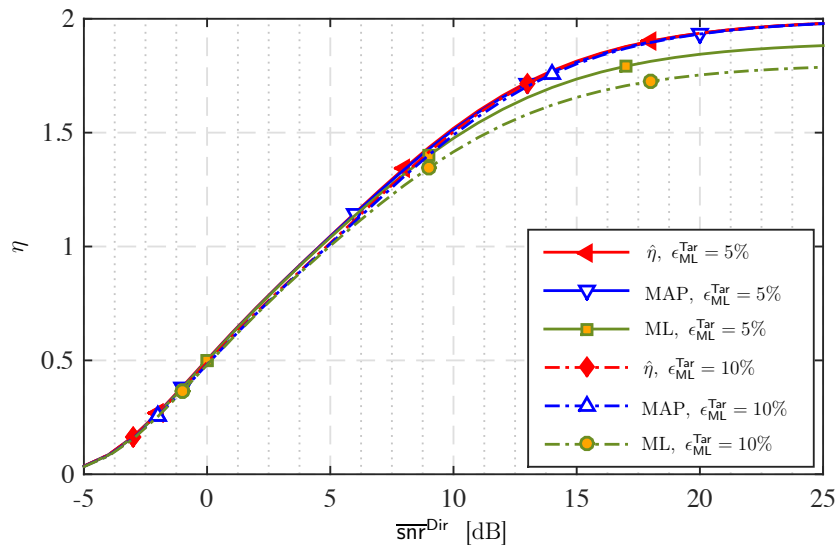
Exemple 2 (16-QAM, Rayleigh – suite). Fig. 3.3 montre les throughput pour IR-HARQ η_{ML} , η_{MAP} , et $\hat{\eta}$ qui correspondent respectivement aux ML, MAP et la politique optimale, pour $K = 2$, a) montre les résultats du scénario $\overline{snr} = \overline{snr}^{Dir}$ pour deux taux différents $R = 2$ et $R = 3.5$. b) montre les résultats du scénario de probabilité d'erreur ciblée pour $\epsilon_{ML}^{Tar} = 5\%$ et $\epsilon_{ML}^{Tar} = 10\%$ et pour le taux fixe $R = 2$. Les règles ML et MAP peuvent atteindre le throughput optimale, et il n'y a pratiquement pas de gap pour le scénario $\overline{snr} = \overline{snr}^{Dir}$. L'optimisation des seuils de détection en terme de throughput n'a aucune

contribution dans ce cas. La détection ML montre une dégradation notable dans le cas de deuxième scénario, essentiellement dans les grands SNR forward. Cela peut être expliqué par le fait que les seuils de détection de ML ne contiennent aucune information relative au qualité de canal forward ; c-a-d, même si le canal forward est bon, la politique ML ne peut pas adapter ses seuils, tandis que la politique MAP peut effectuer une telle adaptation de seuils via les probabilités a priori f_k , qui modélisent la qualité du canal.

Fig. 3.4 compare pour deux taux différents, les probabilités de coupure de IR-HARQ, $K = 3$ liées aux politiques ML, MAP et la politique optimale, lorsque $\overline{\text{snr}} = \overline{\text{snr}}^{\text{Dir}}$, avec celle du meilleur scénario ($\overline{\text{snr}} = \infty$). Bien que toutes ces politiques puissent atteindre le throughput de la politique parfaite ($\overline{\text{snr}} = \infty$), elles ont toutes de mauvaises probabilités de perte, et le gap est grand même dans de bonnes conditions de canal forward. Les erreurs sur la voie de retour peuvent dégrader le système même si la qualité du canal est bonne, le niveau de dégradation change avec la politique de détection adoptée. Nous concluons que le problème de détection des signaux ACK/NACK mérite une investigation dans la conception des système HARQ.



a) Le scénario $\overline{\text{snr}} = \overline{\text{snr}}^{\text{Dir}}$.



b) Le scénario de ciblage de probabilité d'erreur $\epsilon_{\text{ML}}^{\text{Tar}}$.

FIGURE 3.3 – Le throughput η_{ML} , η_{MAP} and $\hat{\eta}$ correspondant respectivement à ML, MAP et la politique optimale, dans le cas IR-HARQ pour deux scénarios et avec $K = 3$. Dans b) $R = 2$.

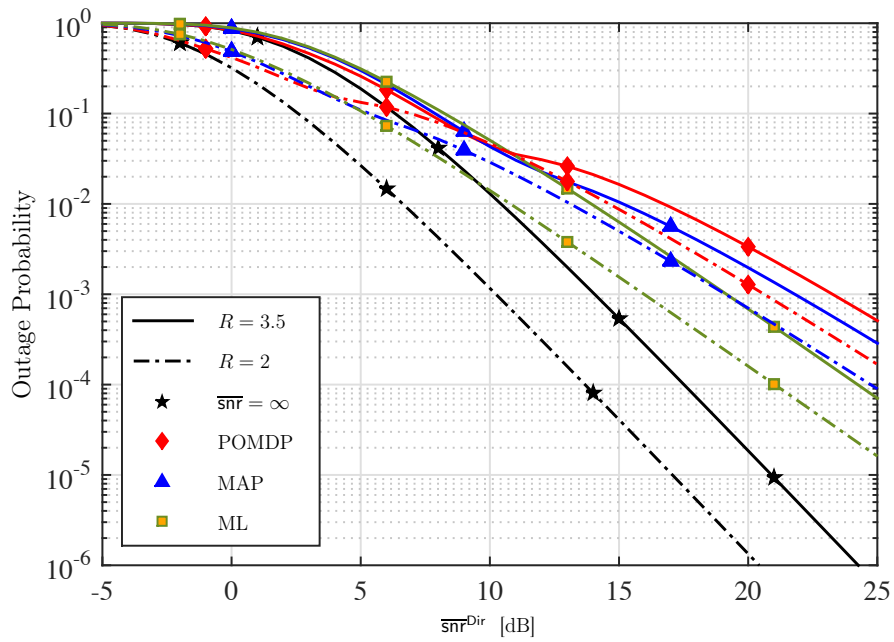


FIGURE 3.4 – La probabilité de perte de IR-HARQ ($\overline{\text{snr}} = \infty$) comparé avec celle de ML, MAP et la politique optimale quand $\overline{\text{snr}} = \overline{\text{snr}}^{\text{Dir}}$ pour deux taux $R = 2$ et $R = 3.5$, et pour $K = 3$.

Chapitre 4

Optimisation du throughput sous contrainte de perte

Les erreurs de feedback et plus précisément les erreurs NACK \rightarrow ACK entraînent une probabilité de perte élevée. Dans ce chapitre, nous exploitons d'autre degré de liberté offert par notre modèle, par ailleurs, nous essayons d'optimiser le throughput d'un système HARQ avec un canal de retour non fiable et avec une probabilité de perte de paquet minimale tolérable en utilisant le même modèle que dans les chapitres précédents.

Notre problème d'optimisation peut être écrit comme

$$\hat{\eta} = \max_{\mathbf{u}} \frac{Ra(\mathbf{u})}{b(\mathbf{u})} \quad s.t \quad 1 - a(\mathbf{u}) \leq \epsilon, \quad (4.1)$$

où ϵ est la contrainte de probabilité de perte et $a(\mathbf{u})$ est la probabilité de décodage réussi donné par

$$a(\mathbf{u}) = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{I}[\text{NACK}_k \wedge \text{ACK}_{k+1}] \right], \quad (4.2)$$

et $b(\mathbf{u})$, l'expression dans le dénominateur de (2.15) donné par

$$b(\mathbf{u}) = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{K-1} u_k \right]. \quad (4.3)$$

Nous formulons un problème dual comme suit

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_{\lambda}^*, \lambda) = \min_{\mathbf{u}} \lambda b(\mathbf{u}) - Ra(\mathbf{u}) \quad s.t \quad 1 - a(\mathbf{u}) \leq \epsilon \quad (4.4)$$

Nous résolvons ce problème en utilisant un autre multiplicateur de Lagrange μ qui inclut la contrainte sur la perte

$$D(\mathbf{u}_{\lambda, \mu}^*, \lambda, \mu) = \min_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{u}_{\lambda}, \lambda) + \mu(1 - a(\mathbf{u}) - \epsilon). \quad (4.5)$$

Pour toutes les valeurs de λ , μ , il existe une politique optimale $\mathbf{u}_{\lambda, \mu}^*$ qui satisfait

$$D(\mathbf{u}_{\lambda, \mu}^*, \lambda, \mu^*) = \max_{\mu \geq 0} D(\mathbf{u}_{\lambda, \mu}^*, \lambda, \mu), \quad (4.6)$$

où $\mathbf{u}_{\lambda, \mu}^*$ est la politique optimale qui minimise $\lambda b(\mathbf{u}) - Ra(\mathbf{u})$ et satisfait la contrainte. Cependant, il n'y a pas de garantie que notre problème ait une solution car la contrainte peut être violée pour certaines valeurs de $\lambda \in [Rp_1, Rp_{K-1}]$. Utiliser une recherche exhaustive pour la maximisation dans (4.5) sur $\mu \geq 0$ peut être compliqué numériquement. Pour simplifier le problème, nous faisons le changement de variable $\nu = \frac{R}{R+\mu}$. Ainsi, au lieu de faire la recherche sur $\mu \in [0, +\infty]$, on effectue la recherche sur $\nu \in [0, 1]$. En utilisant ce changement de variable, nous obtenons le résultat suivant

$$D(\mathbf{u}_{\lambda\nu}^*, \lambda, \nu) = \min_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{u}_{\lambda}, \lambda) + \mu(1 - a(\mathbf{u}) - \epsilon) \quad (4.7)$$

$$= \min_{\mathbf{u}} \lambda b(\mathbf{u}) - Ra(\mathbf{u}) + R \frac{1-\nu}{\nu} (1 - a(\mathbf{u}) - \epsilon) \quad (4.8)$$

$$= \min_{\mathbf{u}} \lambda b(\mathbf{u}) - R(1 + \frac{1-\nu}{\nu})a(\mathbf{u}) + R(1-\epsilon) \frac{1-\nu}{\nu} \quad (4.9)$$

$$= \frac{\min_{\mathbf{u}} \lambda \nu b(\mathbf{u}) - Ra(\mathbf{u})}{\nu} + R(1-\epsilon) \frac{1-\nu}{\nu} \quad (4.10)$$

$$= \frac{\min_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{u}_{\lambda\nu}, \lambda\nu)}{\nu} + R(1-\epsilon) \frac{1-\nu}{\nu}. \quad (4.11)$$

Un autre avantage du changement de variable est que la politique optimale est calculée maintenant en fonction du produit $\lambda\nu$, ainsi la minimisation par

rapport au vecteur \mathbf{u} concerne juste le Lagrangien $\mathcal{L}(\mathbf{u}_{\lambda\nu}, \lambda\nu)$. Par conséquent, la minimisation peut être effectuée en utilisant la même approche de programmation dynamique vue dans le cas où il n'y a pas de contrainte de perte (par injecter le produit $\lambda\nu$ dans notre algorithme d'optimisation au lieu de λ). Le problème d'optimisation par rapport à ν sera

$$D(\mathbf{u}_{\lambda\nu}^*, \lambda, \nu^*) = \max_{0 \leq \nu \leq 1} D(\mathbf{u}_{\lambda\nu}^*, \lambda, \nu), \quad (4.12)$$

avec

$$\nu^* = \operatorname{argmax}_{0 \leq \nu \leq 1} D(\mathbf{u}_{\lambda\nu}^*, \lambda, \nu). \quad (4.13)$$

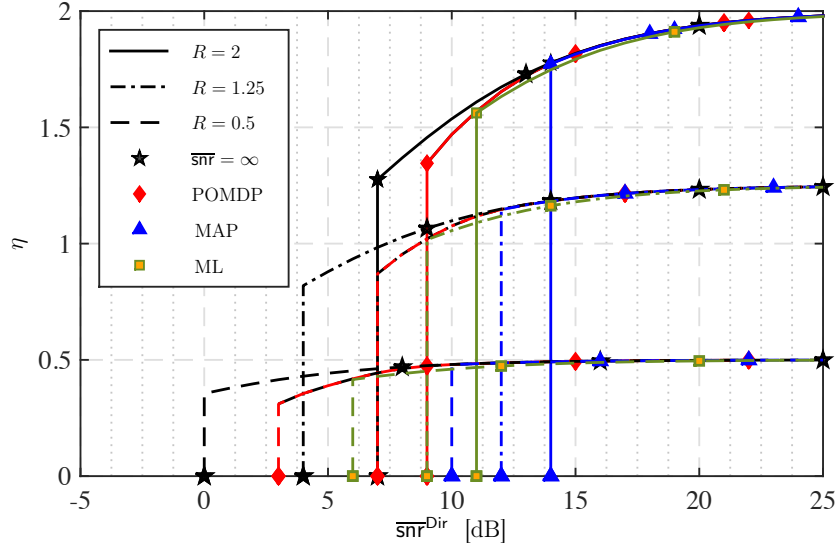
Dans le cas d'absence de la contrainte sur la probabilité de perte, la valeur du throughput optimal est décrite par le paramètre λ , alors que, dans le cas de la présence du contrainte, λ est multiplié par le paramètre $\nu \in [0, 1]$ (cette multiplication peut être vue comme l'ajout d'une pénalité sur le throughput). Cela entraîne une diminution du throughput (car $\lambda\nu \leq \lambda$) en faveur de satisfaction de contrainte. Quand $\nu^* = 1$ pour toutes les valeurs de λ , la contrainte est toujours satisfaite et la politique optimale devient identique à la politique optimale dans l'absence du contrainte.

Pour trouver la politique optimale, nous procédons comme suit :

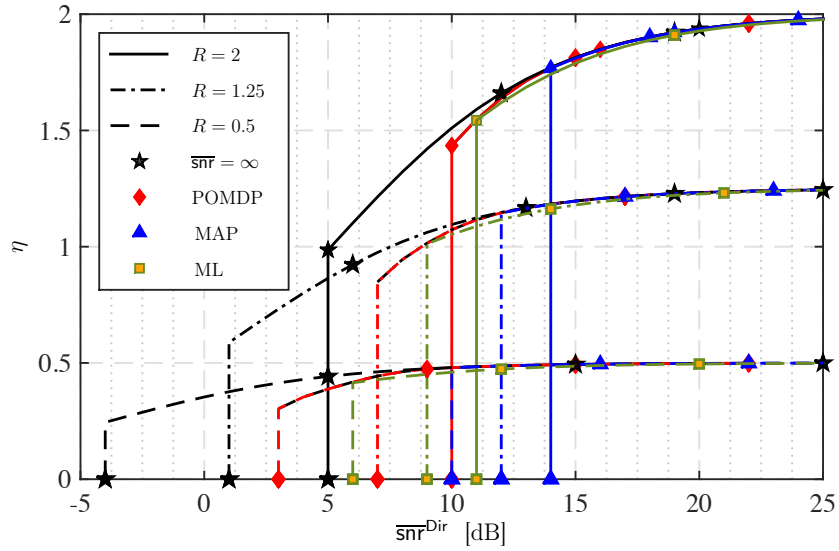
1. Pour chaque valeur de $\lambda \in [Rp_1, Rp_{K-1}]$, si le problème (4.12) a une solution, nous trouvons la politique optimale $\mathbf{u}_{\lambda\nu^*}^*$ qui est complètement spécifiée par les seuils de croyance γ_k , $k \in \mathcal{K}$.
2. Nous calculons le throughput η et la probabilité de perte pour chaque politique $\mathbf{u}_{\lambda\nu^*}^*$.
3. Nous choisissons la politique qui maximise le throughput.

Des exemples de résultats numériques sont présentés sur les figures Fig. 4.1 et Fig. 4.2.

Exemple 3 (16-QAM, Rayleigh). *Nous comparons le throughput de ML, MAP et la politique optimale lorsque $\overline{\text{snr}} = \overline{\text{snr}}^{\text{Dir}}$ avec celui du scénario de feedback parfait (le cas $\overline{\text{snr}} = \infty$). La figure Fig. 4.1 présente le throughput de a) IR-HARQ, $K = 3$ b) RR-HARQ, $K = 5$, pour trois rates $R = 0.5$,*

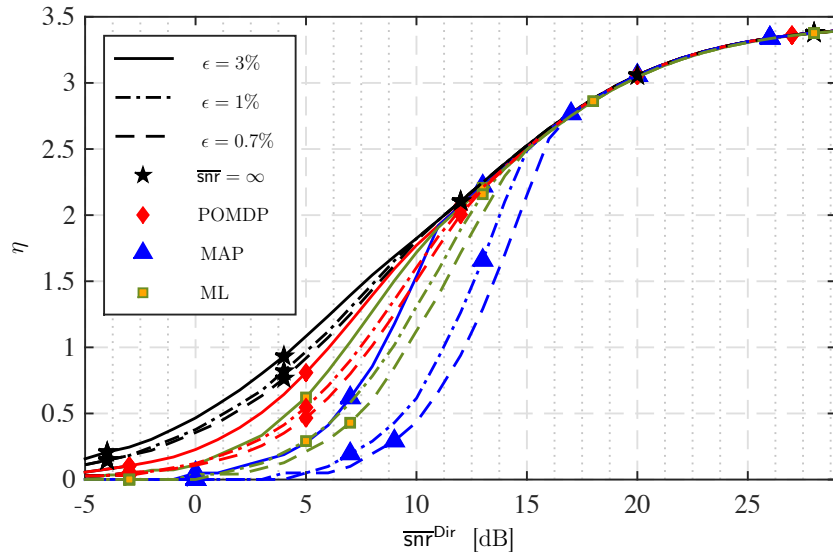


a) IR-HARQ, $K = 3$.

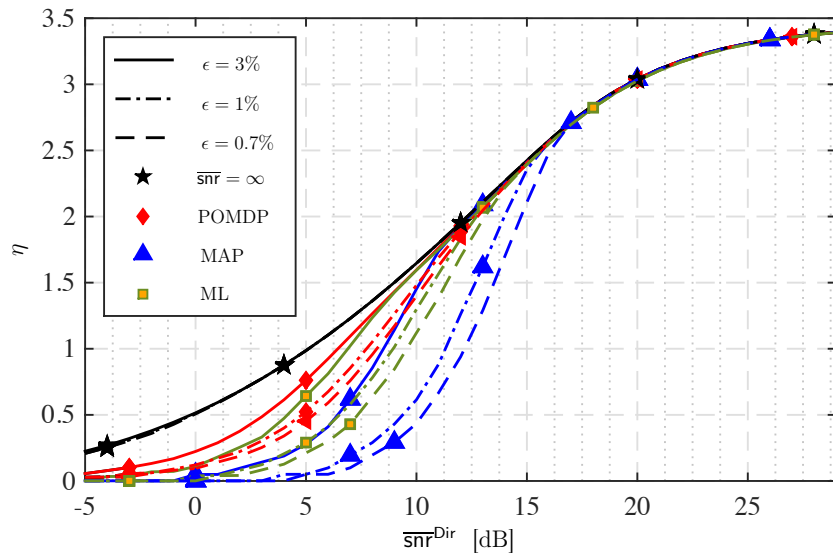


b) RR-HARQ, $K = 5$.

FIGURE 4.1 – a) Le throughput de IR-HARQ, $K = 3$, b) RR-HARQ, $K = 5$. La contrainte de perte est fixée à $\epsilon = 1\%$.



a) IR-HARQ, $K = 3$.



b) RR-HARQ, $K = 5$.

FIGURE 4.2 – Le throughput correspondant aux politiques ML, MAP, la politique optimale et la politique dans le cas parfait, pour a) IR-HARQ, $K = 3$, b) RR-HARQ, $K = 5$. Le rate R est optimisé sur l'intervalle $[0.001 : 0.05 : 3.5]$ avec une recherche exhaustive.

$R = 1.25$ et $R = 2$. La contrainte de perte est fixée à $\epsilon = 1\%$. Chaque courbe de throughput commence à partir de SNR où la contrainte sur la probabilité de perte commence à être satisfaite. Ainsi, la contrainte est satisfaite dans un game de SNR pour la politique optimale en avance par rapport au ML et MAP. Par exemple, dans le cas IR-HARQ, le gain est de 2 dBs et 5 dBs respectivement par rapport aux politiques ML et MAP pour $R = 1.25$, alors que le gain est 3 dBs et 7 dB pour $R = 0.5$. Il s'en suit que la politique optimale peut utiliser des rate plus élevés que les politiques ML et MAP avec la même qualité du canal forward et feedback, ce qui entraîne un throughput plus élevé. Ce fait peut être vu clairement dans la figure Fig. 4.2 qui montre le throughput lors de l'optimisation sur l'intervalle $[0.001 : 0.05 : 3.5]$ en effectuant une recherche exhaustive pour différentes valeur de contrainte de perte. Le gain augmente lorsque on devient plus stricte sur la probabilité de perte (des petites valeurs de ϵ), la politique optimale a un gain de plusieurs dB par rapport à la politique ML et un gain supérieur à 5 dB par rapport à la politique MAP. Cependant, la dégradation apparaît toujours en comparaison avec le throughput du scénario parfait.

Chapitre 5

Conclusions

Dans ce travail, nous avons analysé le protocole hybride ARQ avec un canal de retour imparfait. Nous avons proposé une solution basée sur POMDP pour dériver l'analyse de performance d'un tel système. Notre objectif principal a été de trouver la politique de détection des acquittements ACK/NACK effectuée du côté de l'émetteur afin d'augmenter le throughput sur un canal d'évanouissement par bloc. Nous avons fourni des expressions analytiques des probabilités d'erreur dans la voie de retour et de throughput aussi. Nous avons comparé la performance de la politique optimale avec des heuristiques comme les politiques de détection MAP et ML.

Si l'on considère le scénario où le canal de retour et celui de communication direct ont une qualité de canal égale, les résultats montrent une dégradation non significative du throughput par rapport au meilleur scénario où le canal de retour est sans erreur. En effet, les stratégies MAP et ML peuvent atteindre pratiquement le même throughput dans les scénarios considérés, alors que la politique ML présente une dégradation remarquable lors du ciblage de certaines probabilités d'erreur dans le canal de retour. Nous avons affirmé que dans les grands SNR du canal direct, quelque soit la qualité du canal de retour, nous pouvons toujours obtenir le même throughput que dans le meilleur scénario (canal de retour sans erreurs). Cette affirmation est intéressante dans la mesure où elle donne un aperçu de deux faits. Premièrement, dans ce game de SNR, nous devons nous préoccuper davantage de notre probabilité de perte de paquet et ignorer la dégradation du throughput. Deuxièmement, nous pouvons argumenter que l'impact des erreurs ACK \rightarrow NACK est négligeables car le récepteur a plus de chances d'avoir une requête

ACK que NACK dans les grands SNR. Nous pouvons donc prétendre que les erreurs de retour NACK \rightarrow ACK sont plus dommageables et nous pouvons nous contenter de ne prendre en compte que ces erreurs pour concevoir un système HARQ efficace qui tient en compte les erreurs de feedback.

Bien que la dégradation du système due aux erreurs de feedback n'apparaisse pas dans le throughput, elle est plus remarquable au niveau de probabilité de perte des paquets. Les résultats montrent que toutes les politiques ont une probabilité de perte plus grande que dans le cas de canal de retour sans erreurs. L'ajout d'une contrainte produit une dégradation du throughput essentiellement dans les faibles valeurs de SNR. Dans ce contexte, nous avons montré que la politique optimale, profitant de plus de degrés de liberté dans l'espace d'optimisation des seuils de détection, surpasse ML et MAP. Pour conclure, le fait de supposer un canal de retour parfait dans l'optimisation du throughput de HARQ avec une contrainte sur la probabilité de perte, n'est pratiquement pas valide au moins dans ces conditions simples où nous n'avons pas envisagé une protection du signal de retour par un encodage canal.

Enfin notre modèle simple ne suppose pas d'encodage canal du signal de retour et le travail effectué ne présente pas les performances du système en considérant les ressources disponibles (e.g. la puissance de communication et la bande passante), ce qui n'est pas le cas dans la pratique. Cela ouvre une voie d'extension de notre étude sur les systèmes HARQ dans les travaux potentiels que pourraient suivre dans le future. En effet, le contrôle optimal pour HARQ devrait être conçu conjointement avec une allocation de ressources pour obtenir la meilleure performance du système, et en tenant compte de deux faits. En premier, le canal de retour doit échanger très peu d'informations (ACK/NACK) par rapport au canal direct (données d'information), donc moins de consommation au niveau des ressources. Deuxièmement, la probabilité d'erreur dans la voie de retour peut être manipulé en utilisant une stratégie de communication très fiable (par exemple un code de correction d'erreur suffisamment fort).

Annexe A

Preuve du Théoreme 1

Pour $K - 1$, la fonction $J_{K-1}(\alpha)$ donnée par (A.1) est concave, linéaire par morceaux et décroissante dans $\alpha \in [0, 1]$.

$$J_{K-1}(\alpha) = \min\{0, \lambda - \alpha p_{K-1} R\}, \quad (\text{A.1})$$

supposons que la fonction

$$J_{k+1}(\alpha) = \inf_{0 \leq a \leq \alpha b} \{a - \alpha b\}, \quad (\text{A.2})$$

est concave, linéaire par morceaux et décroissante en α . Nous avons

$$E = \mathbb{E}[J_{k+1}(\alpha_{k+1})|\alpha_k] = \int_{\mathbf{o}_{k+1}} \Pr\{\mathbf{o}_{k+1}|\alpha_k\} J_{k+1}(\alpha_{k+1}), \quad (\text{A.3})$$

et par définition nous avons

$$\alpha_{k+1} = \Phi(\alpha_k, \mathbf{o}_{k+1}) = \frac{X}{X + Y}, \quad (\text{A.4})$$

$$\Pr\{\mathbf{o}_{k+1}|\alpha_k\} = X + Y, \quad (\text{A.5})$$

où

$$X = f_{k+1}^0(\mathbf{o}_{k+1}) q_k \alpha_k, \quad (\text{A.6})$$

$$Y = f_{k+1}^1(\mathbf{o}_{k+1}) (1 - q_k \alpha_k). \quad (\text{A.7})$$

En conséquence

$$E = \int_{\mathbf{o}_{k+1}} (X + Y) J_{k+1} \left(\frac{X}{X + Y} \right), \quad (\text{A.8})$$

et comme

$$J_{k+1} \left(\frac{X}{X + Y} \right) = \inf_{(a-b)X + aY \leq 0} \left\{ a - \frac{Xb}{X + Y} \right\}, \quad (\text{A.9})$$

alors

$$E = \int_{\mathbf{o}_{k+1}} \inf_{(a-b)X + aY \leq 0} \left\{ (a - b)X + aY \right\}. \quad (\text{A.10})$$

Nous avons aussi dans (A.6) et (A.7)

$$(a - b)X + aY = a' - \alpha b', \quad (\text{A.11})$$

où

$$a' = a f_{k+1}^1(\mathbf{o}_{k+1}), \quad (\text{A.12})$$

$$b' = q_k(a' - (a - b) f_{k+1}^0(\mathbf{o}_{k+1})). \quad (\text{A.13})$$

On peut voir que $a' \geq 0$; en plus, vue que $a \leq \alpha b \leq b$, alors $b' \geq 0$, donc $a' - \alpha b'$ est décroissante en α . On peut réécrire l'expression de $\mathbb{E}[J_{k+1}(\alpha_{k+1})|\alpha_k]$

$$\mathbb{E}[J_{k+1}(\alpha_{k+1})|\alpha_k] = \int_{\mathbf{o}_{k+1}} \inf_{0 \leq a' \leq \alpha b'} \{a' - \alpha b'\}. \quad (\text{A.14})$$

Alors $\mathbb{E}[J_{k+1}(\alpha_{k+1})|\alpha_k]$ est une somme des fonctions concaves, linéaire par morceaux, négatives et décroissantes en α .

Vue que la fonction $\alpha \mapsto \lambda - \alpha p_k R$ est concave, linéaire et décroissante en α , alors la fonction

$$J_k(\alpha) = \min\{0, \lambda - \alpha p_k R + \mathbb{E}[J_{k+1}(\alpha_{k+1})|\alpha]\}, \quad (\text{A.15})$$

est concave, linéaire par morceaux, négative et décroissante en α , ceci termine la preuve.

Annexe B

Seuils de détection pour MAP

Nous allons montrer pour $k \geq 2$ que

$$\tilde{y}_k^{\text{MAP}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{snr}_k}} \ln \left(\frac{f_k}{2f_{k-1} - f_k} \right). \quad (\text{B.1})$$

Pour raison de simplification d'écriture, nous allons supposé que $\tilde{y}_k^{\text{MAP}} = y_k$. Le seuil de détection pour $k \geq 2$ est une solution d'équation suivante

$$\sum_{s_{1:k-1}} \Pr \{s_k = 0, s_{1:k-1} | x, y_{1:k-1}\} = \sum_{s_{1:k-1}} \Pr \{s_k = 1, s_{1:k-1} | x, y_{1:k-1}\}. \quad (\text{B.2})$$

Pour $s_k = 0$, la seul combinaison possible pour $s_{1:k-1}$ est $\{0, 0, \dots, 0\}$, donc on aura

$$\sum_{s_{1:k-1}} \Pr \{s_k = 0, s_{1:k-1} | x, y_{1:k-1}\} = \Pr\{\text{NACK}_k\} \Pr\{x | \text{NACK}_k\} \prod_{i=1}^{k-1} \Pr\{y_i | \text{NACK}_i\}. \quad (\text{B.3})$$

Pour $s_k = 1$, les combinaisons possibles pour $s_{1:k-1}$ sont

$$\{1, 0, \dots, 0\} \rightarrow \Pr\{\text{ACK}_k, \text{NACK}_{k-1}\} \Pr\{x|\text{ACK}_k\} \prod_{i=1}^{k-1} \Pr\{y_i|\text{NACK}_i\},$$

$$\{1, 1, 0, \dots, 0\} \rightarrow \Pr\{\text{ACK}_{k-1}, \text{NACK}_{k-2}\} \Pr\{x|\text{ACK}_k\} \Pr\{y_{k-1}|\text{ACK}_{k-1}\} \prod_{i=1}^{k-2} \Pr\{y_i|\text{NACK}_i\},$$

⋮

$$\{1, 1, \dots, 1\} \rightarrow \Pr\{\text{ACK}_1\} \Pr\{x|\text{ACK}_k\} \prod_{i=1}^{k-1} \Pr\{y_i|\text{ACK}_i\}.$$

On pose

$$l_i = \frac{\Pr\{y_i|\text{ACK}_i\}}{\Pr\{y_i|\text{NACK}_i\}} = e^{2y_i\sqrt{\text{snr}_i}}, \quad (\text{B.4})$$

$$l_k = \frac{\Pr\{x|\text{ACK}_k\}}{\Pr\{x|\text{NACK}_k\}} = e^{2x\sqrt{\text{snr}_k}}. \quad (\text{B.5})$$

En remplaçant l'expression de y_i dans l_i , nous obtenons

$$l_1 = \frac{f_1}{1 - f_1}, \quad (\text{B.6})$$

$$l_{i>1} = \frac{f_i}{2f_{i-1} - f_i}. \quad (\text{B.7})$$

Donc on remplaçant tous les termes dans l'équation (B.2), nous obtenons

$$l_k^{-1} f_k = (f_{k-1} - f_k) + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{i-1} - f_i) \prod_{j=i}^{k-1} l_j. \quad (\text{B.8})$$

Après simplification du terme $\sum_{i=1}^{k-1} (f_{i-1} - f_i) \prod_{j=i}^{k-1} l_j$, nous obtenons

$$l_k^{-1} f_k = 2f_{k-1} - f_k. \quad (\text{B.9})$$

Finalement, nous avons

$$\tilde{y}_k^{\text{MAP}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{snr}_k}} \ln \left(\frac{f_k}{2f_{k-1} - f_k} \right). \quad (\text{B.10})$$

Bibliographie

- [1] L. Szczecinski, S. R. Khosravirad, P. Duhamel, and M. Rahman, "Rate allocation and adaptation for incremental redundancy truncated HARQ," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 61, no. 6, pp. 2580–2590, June 2013.
- [2] M. Jabi, M. Benjillali, L. Szczecinski, and F. Labeau, "Energy efficiency of adaptive HARQ," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 64, no. 2, pp. 818–831, Feb. 2016.
- [3] M. Jabi, A. ElHamss, L. Szczecinski, and P. Piantanida, "Multi-packet hybrid ARQ : Closing gap to the ergodic capacity," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 63, no. 12, pp. 5191–5205, Dec. 2015.
- [4] M. Jabi, L. Szczecinski, M. Benjillali, and F. Labeau, "Outage minimization via power adaptation and allocation in truncated hybrid ARQ," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 63, no. 3, pp. 711–723, Mar. 2015.
- [5] A. Benyouss, M. Jabi, M. Le Treust, and L. Szczecinski, "Joint coding/decoding for multi-message HARQ," in *Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, Apr. 2016.
- [6] X. Zhaoji and B. S ebire, "Impact of ACK/NACK signalling errors on high speed uplink packet access (HSUPA)," in *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, May 2005.
- [7] Y. Wu, D. Danev, and E. G. Larsson, "On ack/nack messages detection in the lte pucch with multiple receive antennas," in *20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2012)*, August 2012.
- [8] S. Nagaraj and S. Gollamudi, "A novel bayesian detection approach for ack/nack signalling in third generation high speed packet data systems," in *Vehicular Technology Conference, 2004. VTC2004-Fall. 2004 IEEE 60th*, April 2004.

- [9] H. Boujemaa, "Performance of truncated hybrid arq schemes with noisy feedback for DS-CDMA systems," *Eur. Trans. Telecomms*, pp. 375–385, May 2010.
- [10] M. Wissam Elbahri, H. Boujemaa, and M. Siala, "Effects of noisy feedback on the performance of HARQ schemes over multipath block fading channels for DS-SSS," in *IEEE 16th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, 2005, pp. 2552–2556.
- [11] L. Badia, "On the effect of feedback errors in markov models for SR ARQ packet delays," in *IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM 2009)*, Nov. 30 - Dec. 4 2009.
- [12] R. Cam and C. Leung, "Throughput analysis of some ARQ protocols in the presence of feedback errors," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 45, no. 1, pp. 35–44, January 1997.
- [13] D. Bertsekas, *Dynamic Programming and Optimal Control*, 3rd ed. Athena Scientific, 2007, vol. 2.
- [14] G. Caire and D. Tuninetti, "The throughput of hybrid-ARQ protocols for the Gaussian collision channel," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, no. 5, pp. 1971–1988, Jul. 2001.
- [15] J. Crouzeix and J. Ferland, "Algorithms for generalized fractional programming," *Mathematical Programming*, vol. 52, no. 1-3, pp. 191–207, 1991.
- [16] E. Zhou, "Optimal stopping under partial observation : Near-value iteration," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 2, pp. 500–506, February 2013.
- [17] T. Berddermann, B. Eschbach, and P. Vary, "On the design of hybrid automatic repeat request schemes with unreliable feedback," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 62, no. 02, February 2014.