

Record Number: 1130
Author, Monographic: Bobée, B.//Boucher, P.
Author Role:
Title, Monographic: Comparaison des algorithmes de génération de la distribution gamma et de ses formes dérivées
Translated Title:
Reprint Status:
Edition:
Author, Subsidiary:
Author Role:
Place of Publication: Québec
Publisher Name: INRS-Eau
Date of Publication: 1979
Original Publication Date: Mai 1979
Volume Identification:
Extent of Work: ii, 78
Packaging Method: pages et 3 annexes
Series Editor:
Series Editor Role:
Series Title: INRS-Eau, Rapport de recherche
Series Volume ID: 112
Location/URL:
ISBN: 2-89146-109-6
Notes: Rapport annuel 1978-1979
Abstract: 15.00\$
Call Number: R000112
Keywords: rapport/ ok/ dl

COMPARAISON DES ALGORITHMES
DE GENERATION DE LA DISTRIBUTION
GAMMA ET DE SES FORMES DERIVEES

par

Bernard Bobée
Pierre Boucher

INSTITUT NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
INRS-Eau, C.P. 7500
Ste-Foy, Québec
G1V 4C7

Rapport scientifique No 112

Mai 1979



TABLE DES MATIERES

	PAGE
INTRODUCTION.....	1
1. Rappels statistiques sur la distribution Gamma et les lois qui en découlent.....	3
2. Aspects théoriques . Génération.....	5
2.1. Génération de variates normales.....	6
2.2. Génération de variates chi-carré (χ^2).....	6
2.3. Génération de variates Gamma.....	8
3. Algorithmes de génération.....	12
3.1. Technique de Naylor.....	13
3.2. Technique de Johnk.....	14
3.3. Algorithme de Phillips, (1971, 1972).....	15
3.4. Algorithme de Ramberg.....	18
4. Revue des études comparatives relatives aux algorithmes de génération de la loi Gamma.....	19
4.1. Technique de Naylor.....	19
4.2. Technique de Johnk.....	19
4.3. Algorithme de Phillips.....	20
4.4. Algorithme de Ramberg.....	20
4.5. Conclusion.....	20
5. Comparaison des algorithmes re Rambert et de Johnk.....	21
5.1. Planification des simulations effectuées.....	24
5.2. Initialisation des algorithmes.....	26

TABLE DES MATIERES (SUITE)

	<u>PAGE</u>
5.3. Examen des résultats.....	30
5.3.1. Application du test de Kolmogorov-Smirnov.....	31
5.3.2. Application du test de Student.....	44
5.3.3. Ecart relatifs entre valeurs théoriques et moyennes des valeurs simulées des paramètres..	64
5.3.4. Temps de génération.....	75
CONCLUSION.....	75
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	77

INTRODUCTION

On est souvent amené en hydrologie, à utiliser la distribution Gamma et les distributions qui s'en déduisent (Pearson type 3, Log-Pearson type 3 et Gamma généralisée) pour représenter les phénomènes hydrologiques et plus particulièrement les distributions extrêmes de débits de crue et d'étiage. En effet, les distributions Pearson type 3 et Log-Pearson type 3 sont maintenant assez systématiquement utilisées pour l'analyse des débits de crue en Amérique du Nord suite à une recommandation du Conseil des Ressources en Eau des Etats-Unis. En URSS par contre, c'est la loi Gamma généralisée qui a la faveur des hydrologues pour la représentation des débits de crue.

Au cours des 10 dernières années, de nombreuses études ont eu lieu concernant l'ajustement de cet ensemble de distributions et leurs propriétés d'échantillonnage. Parallèlement à ces études orientées vers la pratique courante, des études théoriques ont eu lieu pour rechercher des manières adéquates de simuler des variates Gamma les paramètres de la distribution étant connus à priori. Ce travail a pour but de faire le point sur les diverses méthodes de simulation actuellement utilisées et également, d'effectuer une comparaison de ces techniques basées sur un nombre important de simulations. L'identification et ensuite l'utilisation d'une technique adéquate de génération de variates Gamma sont en effet des préalables nécessaires à:

- la comparaison des méthodes d'ajustement (moments, maximum de

vraisemblance) pour une loi donnée;

- l'étude des propriétés des lois, par exemple l'analyse de la validité asymptotique des variances d'échantillonnage d'un événement de période de retour fixée.

1. RAPPELS STATISTIQUES SUR LA DISTRIBUTION GAMMA ET LES LOIS QUI EN DECOULENT.

La fonction densité de probabilité de la distribution Gamma à 2 paramètres est:

$$f(x) = \frac{|\alpha|}{\Gamma(\lambda)} (\alpha x)^{\lambda-1} e^{-\alpha x} \quad (1)$$

où:

α : est un paramètre d'échelle;

λ : est un paramètre de forme toujours positif.

L'intervalle de définition de la variate x est tel que $\alpha x > 0$ donc:

- si $\alpha > 0$ on a $0 \leq x < +\infty$ qui correspond à la forme à asymétrie positive;
- si $\alpha < 0$ on a $-\infty < x \leq 0$ qui correspond à la forme à asymétrie négative.

Les fonctions densité des formes à asymétrie positive et négative peuvent être déduites l'une de l'autre (BOBEE, 1975).

La distribution Pearson type 3 est telle que $(x-m)$ suit une loi Gamma à 2 paramètres, m étant un paramètre d'origine. La fonction densité de probabilité de la distribution Pearson type 3 peut donc s'en déduire et

l'on a:

$$f(x) = \frac{|\alpha|}{\Gamma(\lambda)} \left[\alpha (x-m) \right]^{\lambda-1} e^{-\alpha (x-m)} \quad (2)$$

L'intervalle de définition de la variate x est tel que $[\alpha (x-m)] > 0$ donc:

- si $\alpha > 0$ on a: $m \leq x < +\infty$ qui correspond à la forme à asymétrie positive;
- Si $\alpha < 0$ on a: $-\infty < x \leq m$ qui correspond à la forme à asymétrie négative.

La distribution Log-Pearson type 3 est telle que la variate $y = \log_a x$ suit une loi Pearson type 3. Les propriétés mathématiques et statistiques de cette distribution ont été étudiées par BOBEE (1975), sa fonction densité de probabilité s'écrit:

$$f(x) = \frac{|\alpha|}{\Gamma(\lambda)} e^{-\alpha(\log_a x - m)} \left[\alpha(\log_a x - m) \right]^{\lambda-1} \frac{k}{x}$$

avec $\lambda > 0$, $-\infty < m < +\infty$

et $k = \frac{1}{\text{Lna}}$

et l'intervalle de définition de x est tel que:

- si $\alpha > 0$ $a^m = e^{m/k} \leq x < +\infty$
- si $\alpha < 0$ $0 \leq x \leq a^m = e^{m/k}$

La distribution Gamma généralisée est telle que la variate x^S suit une distribution Gamma à 2 paramètres. En pratique, on ne considère que la distribution Gamma à asymétrie positive et l'on a pour fonction densité de probabilité de la loi Gamma généralisée:

$$f(x) = |s| \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{-\alpha x^S} x^{S\lambda-1} \quad (3)$$

2. ASPECTS THEORIQUES . GENERATION

En général, pour générer une variate x suivant une densité de probabilité donnée, on procède comme suit:

- soit $f(x)$ la fonction densité de x ;
- on en déduit par intégration la fonction de distribution $F(x)$;
- on trouve la fonction inverse de $F(x)$, $F^{-1}(x)$;
- on génère une variate suivant une loi uniforme dans l'intervalle $(0,1)$ qui correspond à une probabilité et on en déduit la variate x par application de la fonction inverse F^{-1} .

Pour les lois que l'on étudie, il est très difficile d'appliquer ce processus aux fonctions de densité définies en (1), (2) et (3). En effet, lorsque λ n'est pas un entier, la fonction de distribution F ne peut être représentée que par une série de puissance infinie.

Il est possible par contre de générer la loi Gamma et ses formes dérivées en partant de la loi normale.

2.1. Génération de variates suivant une loi normale

On considère deux variables aléatoires U_1, U_2 distribuées uniformément sur l'intervalle $(0,1)$, c'est-à-dire:

$$\left. \begin{array}{l} U_1 \\ U_2 \end{array} \right\} \longrightarrow U(0,1) \quad (\text{loi uniforme})$$

Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires définies comme suit:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{-2 \operatorname{Ln} U_1} \cdot \cos 2 \pi U_2 \\ X_2 &= \sqrt{-2 \operatorname{Ln} U_1} \cdot \sin 2 \pi U_2 \end{aligned}$$

Alors on montre que X_1 et X_2 forment une paire de variates normales centrées réduites indépendantes, c'est-à-dire:

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \end{array} \right\} \in N(0,1)$$

2.2. Génération de variates chi-carré (χ^2)

Le carré d'une variate normale $N(0,1)$ est une variate chi-deux à

un degré de liberté, soit χ^2_1 . Le théorème d'additivité des variates chi-carré montre qu'on peut, en ajoutant p variates chi-carré indépendantes, obtenir une nouvelle variate χ^2 dont le degré de liberté est la somme des degrés de liberté des χ^2 individuelles.

Donc par application de 2.1, on peut générer une variate chi-carré à 2 degrés de liberté en partant de variates uniformes, on a:

$$r^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 = -2 \ln U_1 \longrightarrow \chi_v^2$$

avec:

$$v = 2 \text{ degrés de liberté.}$$

En généralisant, à partir de p variates uniformes U_i ($i = 1 \dots p$) on peut générer une variate chi-carré à $2 p$ degrés de liberté.

$$r_i^2 = 2 \ln U_i \quad (i = 1, \dots, p)$$

alors:

$$\sum_{i=1}^p r_i^2 = \sum_{i=1}^p -2 \ln U_i \text{ est une variate } \chi_v^2 \text{ à } v = 2 p$$

degrés de liberté.

De même si l'on veut générer une variate chi-carré ayant un nombre de degrés de liberté impair, il suffit d'ajouter à la variate précédente (d'après le théorème d'additivité de chi-carré) le carré d'une variate normale centrée réduite V :

$$\sum_{i=1}^p -2 \ln U_i + V^2 = \chi_{2p+1}^2$$

Il est donc possible de générer des variates χ_{ν}^2 avec ν entier positif à partir de variates normales centrées réduites indépendantes.

2.3. Génération de variates Gamma

a) *Loi Gamma à 1 paramètre λ entier*

Il s'agit dans ce cas de la loi Gamma à asymétrie positive pour laquelle $\alpha = 1$, la loi chi-carré (χ^2) est par définition de sa fonction densité un cas particulier de la loi Gamma à deux paramètres. En effet, si la variate X suit une loi χ_{ν}^2 , alors sa fonction densité s'écrit:

$$f(X) = \frac{1}{2} \frac{e^{-X/2}}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{X}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} \quad (4)$$

La loi chi-carré à ν degrés de liberté est donc une loi Gamma telle que:

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\nu}{2}$$

C'est donc dire que si X suit une loi χ^2 à ν degrés de liberté, alors X est aussi distribuée suivant une loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \nu/2)$. Donc, si l'on veut générer une loi Gamma à 1 paramètre λ de valeur entière, il suffit de générer une variate $\frac{1}{2} \chi^2$ de $\nu = 2\lambda$ degrés de liberté. D'après 2.2, on peut donc en déduire que:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p -2 \ln U_i = \frac{1}{2} \chi_{2p}^2$$

suit une loi Gamma à 1 paramètre avec $\lambda=p$ (entier); c'est-à-dire:

$$X = \sum_{i=1}^p \ln U_i \sim \Gamma(\alpha=1; \lambda=p);$$

b) *Loi Gamma à 1 paramètre λ tel que $\lambda = p + \frac{1}{2}$*

La génération d'une telle variate découle directement de la partie 2.2. En effet, si

$$X \sim \frac{1}{2} \cdot \chi_{2p+1}^2 \quad (p \text{ entier})$$

alors X suit une loi Gamma de paramètre λ tel que:

$$\lambda = \frac{2p+1}{2} = p + \frac{1}{2}$$

c) Loi Gamma à 1 paramètre λ tel que $0 < \lambda < 1$

Soient les variates uniformes indépendantes:

$$\left. \begin{array}{l} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array} \right\} \in U(0,1)$$

On pose:

$$S_1 = U_1^{1/\lambda}$$

$$S_2 = U_2^{1/(1-\lambda)}$$

soient:

$$Y = \frac{S_1}{S_1 + S_2}$$

sous la condition $S_1 + S_2 \leq 1$ (a)

$$X_1 = -Y \ln U_3$$

$$X_2 = -(1-Y) \ln U_3$$

On montre (WHITTAKER 1973) que:

- X_1 suit une loi Gamma à 1 paramètre λ ;
- X_2 suit une loi Gamma à 1 paramètre $(1 - \lambda)$;
- Y suit une loi Beta de paramètres $(\lambda, 1-\lambda)$.

Donc pour $0 < \lambda < 1$, on peut générer une loi Gamma à 1 paramètre λ avec:

$$X_1 = -Y \text{ Ln } U_3$$

$$X_1 = - \frac{U_1^{1/\lambda}}{U_1^{1/\lambda} + U_2^{1/(1-\lambda)}} \text{ Ln } U_3 \quad (6)$$

avec U_1, U_2, U_3 des variates uniformes de l'intervalle $[0,1]$ indépendantes sous la condition (a).

d) *Loi Gamma à 1 paramètre λ quelconque*

Soient:

λ quelconque

$[\lambda]$ la partie entière de λ

On a:

$$\lambda = [\lambda] + s \quad (s \text{ la partie décimale de } \lambda)$$

On sait que si:

- . Z_1 suit une loi Gamma à 1 paramètre λ_1 ;
- . Z_2 suit une loi Gamma à 1 paramètre λ_2 ;
- . Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

alors:

$$Z = Z_1 + Z_2$$

est une variate Gamma à un paramètre λ tel que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Dans notre cas, pour $\lambda = [\lambda] + s$, il suffit de générer:

- une variate Gamma à 1 paramètre $\lambda_1 = [\lambda]$ (voir 2.3.a)
- une variate Gamma à 1 paramètre $\lambda_2 = s$ ($0 < s < 1$) voir 2.3.c).

On a:

$$Z = \sum_{i=1}^{[\lambda]} \text{Ln } U_i - Y \text{ Ln } V_3$$

avec:

$$Y = \frac{V_1^{1/s}}{V_1^{1/s} + V_2^{1/(1-s)}} \quad (\text{variate }) \quad (8)$$

$U_1, \dots, U_{[\lambda]}, V_1, V_2, V_3$ sont des variates uniformes $U(0,1)$ indépendantes.

3. ALGORITHMES DE GENERATION

Plusieurs algorithmes de génération de variates Gamma ont déjà été proposés;

On donne ici les caractéristiques de ceux qui sont principalement utilisés.

3.1 Technique de Naylor

Si le paramètre de forme λ est un entier non négatif et si α est positif, la variate x suit une fonction densité $f(x)$ telle que:

$$f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{(\lambda-1)!} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}$$

Une variate x suivant une telle fonction de distribution peut être obtenue en sommant λ variables exponentielles, chacune ayant une valeur moyenne α . Il est facile de générer une variate exponentielle en passant par la fonction cumulative inverse.

Si le paramètre λ n'est pas entier, on pose:

$$\lambda_1 = [\lambda] + s$$

$$\lambda_2 = [\lambda] + 1$$

avec:

$[\lambda]$ partie entière de λ

s partie décimale de λ

Puisque $\lambda_1 - \lambda_2 = 1-s$, l'échantillon de variates Gamma (α, λ) sera obtenu en générant des variates Gamma (α_1, λ_1) dans une proportion de $(1-s).100$ pourcent et des variates Gamma (α, λ_2) dans une proportion de $s.100$ pourcent.

3.2 Technique de Johnk

Cette méthode est basée sur trois théorèmes (PHILLIPS, 1972).

- a. L'additivité des variates Gamma.
- b. L'obtention d'une variate Bêta: soient U_1, U_2 des variates indépendantes normales $N(0,1)$ on considère:

$$x = U_1^{1/a}$$

$$y = U_2^{1/b}$$

Alors si:

$$x + y \leq 1$$

la variate
$$z = \frac{x}{x + y}$$

est distribuée selon une loi Bêta de paramètres, a, b , soit $\beta(a, b)$. (cf 2.3.c)

- c. Si x est une variate Gamma telle que: $\Gamma(\alpha, \beta) = \Gamma(n + k, 1)$
 et y est une variate Bêta telle que: $\beta(a, b) = \beta(n, k)$
 alors $z = x y$ est une variate Gamma de paramètres:

$$\alpha = n$$

$$\beta = 1$$

Cette méthode connue sous le titre de "réjection technique" tient son nom d'une étape de l'algorithme de génération de variates Bêta intégré à l'algorithme de génération de variates Gamma (Figure 5.2).

3.3. Algorithme de Phillips, (1971, 1972).

Soit X une variate suivant une distribution de Weibull à 3 paramètres.
 Sa fonction densité de probabilité est:

$$f(x) = \frac{c}{b} \left(\frac{x - a}{b} \right)^{c-1} \exp - \left[\left(\frac{x - a}{b} \right)^c \right]$$

et sa fonction de distribution cumulée est:

$$f(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - a}{b} \right)^c \right]$$

a , b et c sont les paramètres de la distribution ($b, c > 0$) et l'intervalle de définition de la variate x est tel que $x > a$

Phillips considère la distribution de Weibull à 2 paramètres, c'est-à-dire $a = 0$.

On peut montrer, Phillips (1971), que la distribution Gamma peut être approximée par la distribution de Weibull à 2 paramètres. En posant:

$$c = B$$

$$b = A^{-1/B}$$

$$a = 0$$

on obtient la forme simplifiée de la fonction densité de Weibull à 2 paramètres:

$$f(x) = BD e^{-Dx}$$

en posant:

$$D = Ax^{B-1}$$

La fonction de distribution cumulée devient:

$$F(x) = 1 - e^{-Dx}$$

La moyenne et la variance de x sont données par:

$$E(x) = \Gamma\left(\frac{B+1}{B}\right) \left(\frac{1}{A}\right)^{1/B}$$

$$\text{Var}(x) = \left\{ \Gamma\left(\frac{B+2}{B}\right) - \left[\Gamma\left(\frac{B+1}{B}\right) \right]^2 \right\} \left(\frac{1}{A}\right)^{2/B}$$

Il est facile de générer la variate x en prenant la fonction inverse de la fonction de distribution cumulée, on a :

$$x = \left[- \frac{\text{Ln} (1 - F)}{A} \right]^{1/B}$$

Donc en générant une variate uniforme F (ou $1-F$) dans l'intervalle $(0,1)$ on peut en déduire x .

La moyenne et la variance d'une variate x suivant une loi Gamma de paramètres α , λ sont :

$$E(x) = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$\text{Var} (x) = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

On dispose donc de 2 formes de la fonction densité de la distribution Gamma; l'une exprimée en fonction des paramètres α et λ (cf. 1) et l'autre déduite de la loi de Weibull à 2 paramètres qui s'exprime en fonction de A et B . Il est alors possible de déterminer les relations empiriques entre ces 4 constantes, A , B , α , β à l'aide des régressions polynomiales (PHILLIPS, 1971).

Donc si on veut générer une variate x suivant une loi Gamma de paramètre α et λ , on en déduit les valeurs A et B correspondantes à l'aide des régressions établies par Phillips et connaissant A et B on peut en générant une variate uniforme F en déduire x .

3.4 Algorithme de Ramberg

RAMBERG (1974) propose une méthode similaire à celle de Phillips. Comme approximation de la loi Gamma, il considère la loi de Weibull à 3 paramètres définie précédemment. En plus de la moyenne et de la variance, il utilise le coefficient d'asymétrie.

Pour la loi de Weibull, on a:

$$E(X) = a + b \Gamma(1 + 1/c)$$

$$\text{Var}(X) = b^2 \left[\Gamma(1 + 2/c) - \Gamma(1 + 1/c)^2 \right]$$

$$\gamma = \frac{\Gamma(1 + 3/c) - 3 \Gamma(1 + 2/c) \Gamma(1 + 1/c) + 2 \Gamma(1 + 1/c)^3}{\left[\Gamma(1 + 2/c) - \Gamma(1 + 1/c)^2 \right]^{3/2}}$$

Pour la loi Gamma:

$$E(X) = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$\text{var}(X) = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}$$

Par la suite, il utilise un processus similaire à celui de PHILLIPS, en établissant une correspondance entre d'une part (α et λ) et d'autre part a , b et c .

4. REVUE DES ETUDES COMPARATIVES RELATIVES AUX ALGORITHMES DE GENERATION DE LA LOI GAMMA

Les algorithmes de génération de la variate Gamma présentés dans la section précédente ont déjà fait l'objet d'études critiques et de comparaisons. Le but de ces études était de déterminer de manière précise quel algorithme il était préférable d'utiliser suivant les valeurs des paramètres α et λ . Ici nous résumons les principales caractéristiques des comparaisons effectuées.

4.1 Technique de Naylor

BERMAN ,(1971) qui a étudié cet algorithme, remarque que la méthode donne une très bonne approximation de la distribution Gamma pour les fortes valeurs du paramètre d'échelle ($\lambda > 5$); par contre, ces approximations sont assez mauvaises pour les valeurs de λ comprises entre 1 et 5 et très mauvaises lorsque λ est plus petit que 1.

4.2 Technique de Johnk

BERMAN,(1971) conclue que cet algorithme est "exact" cependant, cette méthode requiert de 2.5 à 3 fois plus de temps que la technique de Naylor. L'algorithme de Johnk est donc recommandé si les coûts de génération ont une faible importance et que l'on désire une bonne précision.

4.3 Algorithme de Phillips

Se basant sur un test de Kolmogorov-Smirnov, PHILLIPS et BEIGHTLER (1972) concluent que l'algorithme qu'ils proposent est supérieur à ceux de Johnk et de Naylor pour les valeurs de λ comprises entre 0.1 et 1; pour $\lambda > 1$, les 3 méthodes sont équivalentes. De son côté, WHEELER (1974) note que l'algorithme de Phillips perd de la précision lorsque le nombre de variates générées augmente.

4.4 Algorithme de Ramberg

Une étude comparative de RAMBERG *et al.* (1974) entre l'algorithme qu'ils proposent et celui de Phillips montre que le premier est plus précis.

Les deux méthodes sont basées sur la distribution de Weibull, le gain de précision vient du fait que RAMBERG *et al.* utilisent une distribution Weibull à 3 paramètres tandis que Phillips utilise seulement une distribution de Weibull à 2 paramètres. L'algorithme est valable pour des valeurs de λ supérieures ou égales à 1, sous ce seuil, la précision est beaucoup moins bonne et l'algorithme peu intéressant.

4.5 Conclusion

Il résulte des études comparatives déjà effectuées que les algorithmes proposés par JOHNK (1964) et RAMBERG *et al.* (1974) sont globalement meilleurs que les autres pour générer des variates Gamma. De plus une comparaison de ces 2 algorithmes n'a pas été déjà effectuée; c'est pourquoi

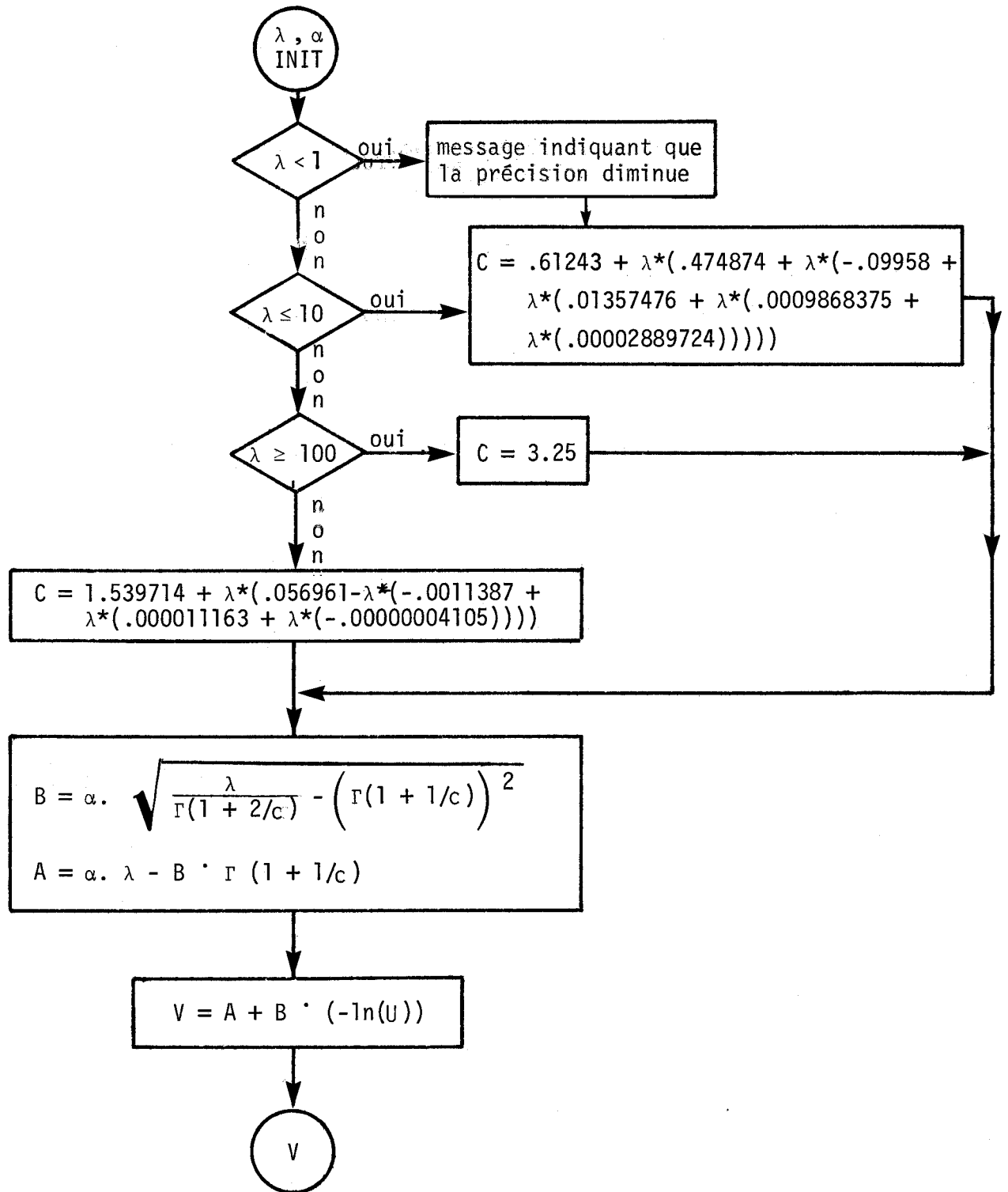
dans ce qui suit, en nous basant sur un nombre important de simulations et en utilisant un test d'adéquation (Kolmogorov-Smirnov) nous comparerons les performances de ces 2 algorithmes afin de dégager leurs particularités et d'effectuer des recommandations quant à leur utilisation.

5. COMPARAISON DES ALGORITHMES DE RAMBERG ET DE JOHNK.

D'après ce qui précède et si l'on tient compte des études déjà effectuées, il reste, pour en arriver à une conclusion concernant la génération des variates Gamma, à comparer les algorithmes de Rambert et de Johnk. Les organigrammes de ces algorithmes se trouvent respectivement aux figures 5.1 et 5.2.

Pour effectuer cette comparaison on générera, pour des valeurs α et λ connues de la distribution Gamma, un nombre important d'échantillons de taille N (et l'on fera varier N). On vérifiera la qualité de la génération en effectuant pour chaque échantillon généré un test de Kolmogorov-Smirnov afin d'examiner si l'échantillon provient de la loi Gamma de paramètre α et λ ; il s'agit donc d'étudier l'adéquation de l'échantillon généré à la loi dont cet échantillon est censé provenir. On mesurera la qualité de la génération par le taux d'acceptation du test de Kolmogorov-Smirnov.

Un autre indice de comparaison des 2 algorithmes sera également obtenu en ajustant à chaque échantillon la loi Gamma par la méthode du maximum de vraisemblance et par la méthode des moments et en comparant les valeurs



Γ : fonction Gamma complète

U : variate uniforme (0,1)

V : variate Gamma

Figure 5.1: Diagramme logique de l'algorithme de Ramberg

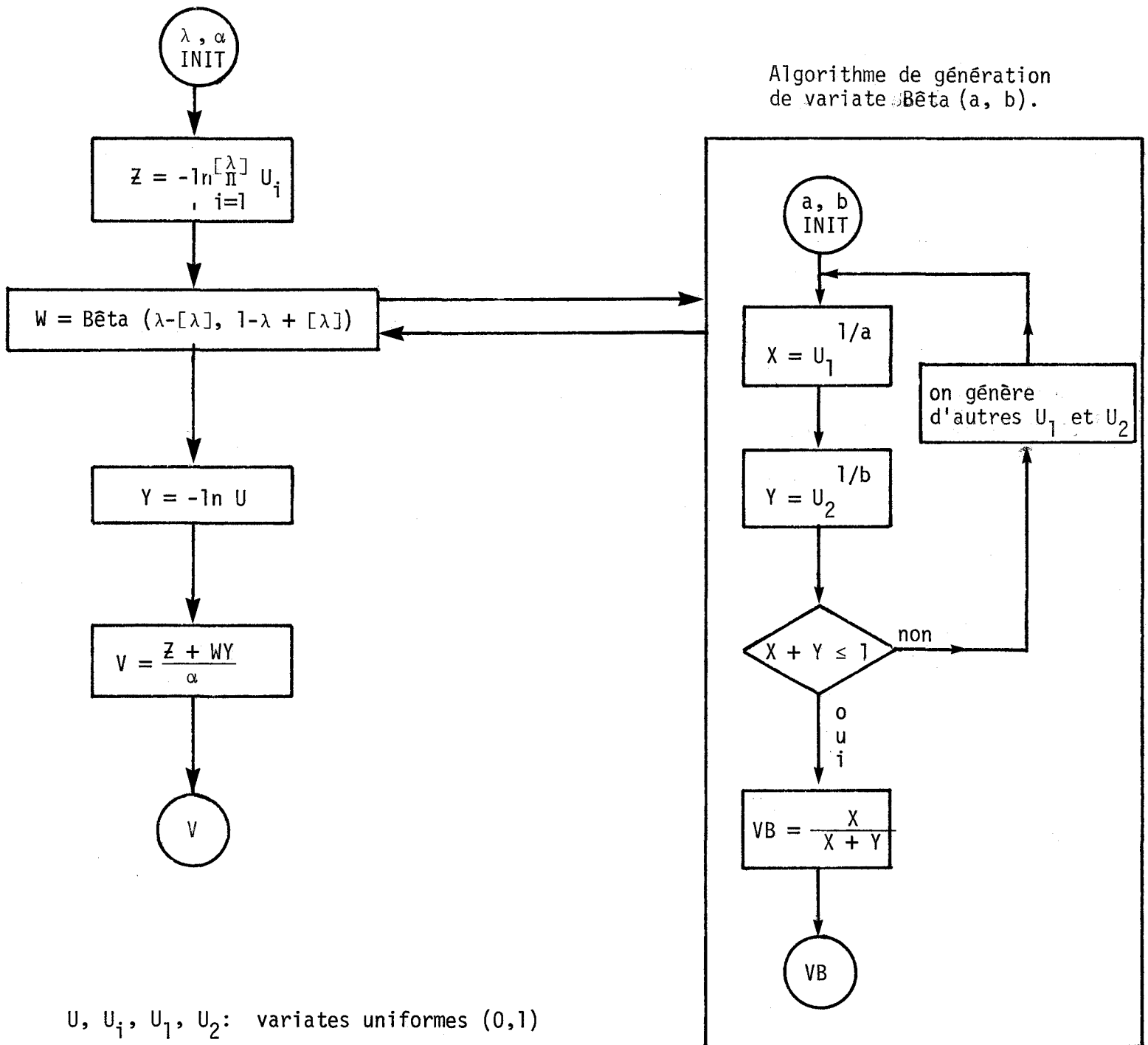


Figure 5.2: Diagramme logique de l'algorithme de Johnk

des paramètres estimés aux valeurs initiales. Cette partie de l'étude mettra également en évidence les particularités des 2 méthodes d'ajustement considérées.

La comparaison effectuée prendra en compte l'influence

- des valeurs des paramètres α et λ ;
- de la taille des échantillons générés.

5.1 Planification des simulations effectuées

Les paramètres α et λ sont déterminés en imposant les valeurs du coefficient d'asymétrie et de la variance. En choisissant des valeurs du coefficient d'asymétrie variant de 0.25 à 5.0, on couvre à peu près la gamme de variation d'asymétrie rencontrée en pratique en hydrologie. On fixe la variance à 1, de façon à obtenir une seconde relation entre α et λ .

Lorsque l'asymétrie et la variance sont fixées, on obtient λ et α par les relations suivantes, valables pour la loi Gamma:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_s = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \\ \mu_2 = 1 = \frac{\lambda}{\alpha^2} \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{4}{(C_s)^2} \\ \alpha = \sqrt{\lambda} \end{array} \right.$$

Le tableau 5.1 donne les valeurs ainsi obtenues.

C_S	.25	.5	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	3	4	5
λ	64	16	8	4	2	1	$4/9$	$1/4$	$4/25$
α	8	4	$\sqrt{8}$	2	$\sqrt{2}$	1	$2/3$	$1/2$	$2/5$

Tableau 5.1: Valeurs de C_S , λ et α .

Douze valeurs de N (taille de chaque échantillon généré) sont choisies: 20, 40, 60, 80, 100, 150, 200, 300, 400, 500, 750, 1000.

Pour chaque valeur de N et pour chaque couple (λ, α) on génère $p = 100$ échantillons auxquels on applique le test de Kolmogorov-Smirnov. De plus on ajuste par la méthode des moments et par la méthode du maximum de vraisemblance la distribution Gamma à l'ensemble des échantillons générés (ces méthodes d'ajustement sont décrites par BOBEE, 1975). Pour une taille d'échantillon N et pour un couple $(\alpha_0$ et $\lambda_0)$ de valeurs des paramètres, on dispose de $p = 100$ estimations des paramètres α et λ pour chaque méthode d'ajustement, on peut donc déduire les moyennes $\bar{\alpha}$, $\bar{\lambda}$ et l'écart-type s_α , s_λ de chaque série de 100 valeurs.

On peut admettre que les variables

$$u = \frac{\alpha_0 - \bar{\alpha}}{s_\alpha / \sqrt{100}} \quad \text{et} \quad v = \frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}}{s_\lambda / \sqrt{100}}$$

souvent des distributions de Student à 99 degrés de liberté (d'après le théorème central limite) et l'on peut ainsi examiner les hypothèses:

$$\alpha = \alpha_0 \quad \text{et} \quad \lambda = \lambda_0$$

Une description détaillée du test de Student est effectuée en Annexe A (A-2). L'application de ces tests donnent des indications importantes tant sur la capacité globale des algorithmes utilisés pour générer des variates Gamma que sur la validité des 2 méthodes d'ajustement employées.

5.2 Initialisation des algorithmes

Les algorithmes de Ramberg et de Johnk nécessitent la génération préalable de variates uniformes. Un nombre de départ (INIT) est utilisé dans l'algorithme de génération des variates uniformes $U(0,1)$. Après chaque génération d'une variate uniforme, INIT est modifié et peut être utilisé ensuite pour générer une autre variate uniforme.

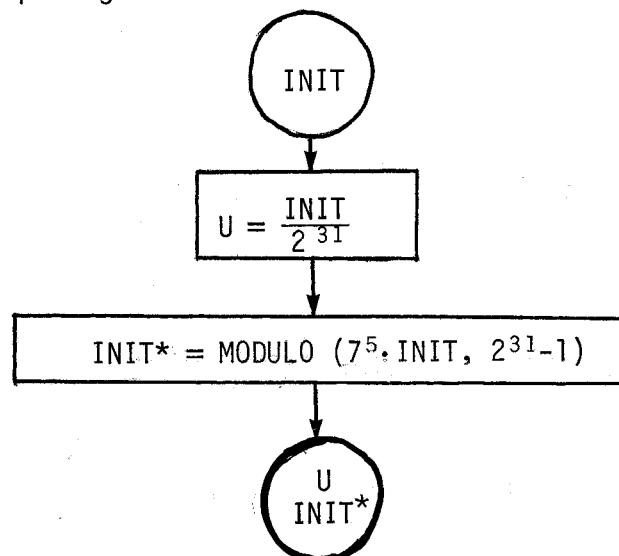


Figure 5.3: Diagramme logique de l'algorithme de génération d'une variate uniforme (Sous-routine GGUB de la librairie IMSL (1975)).

INIT doit être compris entre 1 et 2147483647 (IMSL (1975)) et est choisi aléatoirement, il peut donc avoir une influence sur l'échantillon généré surtout si ce dernier est de petite taille. Pour déterminer l'influence du choix du nombre de départ, on génère 100 échantillons pour 10 valeurs INIT différentes.

Les paramètres de la loi Gamma retenus dans cette étude particulière sont $\lambda = 4$ et $\alpha = 2$ et l'on génère des échantillons de taille 100 à l'aide de l'algorithme de Johnk. On examine ensuite à l'aide du test de Kolmogorov-Smirnov (cf. Annexe A) si les échantillons générés proviennent de la loi Gamma initiale ($\lambda = 4$, $\alpha = 2$).

Les résultats obtenus apparaissant dans les tableaux 5.2 et 5.3 démontrent le peu d'influence de la valeur initiale INIT. Le taux d'acceptation du test de Kolmogorov-Smirnov à 5%, varie peu et n'est pas relié à la taille de la valeur initiale (Tableau 5.2).

Pour chacune des 10 valeurs INIT, on génère $p = 100$ échantillons de taille $N = 100$ et l'on ajuste à chaque échantillon la loi Gamma par la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance. On dispose donc pour chaque méthode d'ajustement dans le cas de chaque valeur INIT, de 100 estimations du couple de paramètres α et λ , et il est possible d'en déduire les valeurs moyennes α_m et λ_m et les écart-types s_α et s_λ . On peut montrer (théorème central limite) que les quantités u et v telles que:

INIT	Rej. 01	Rej. 05 Acc. 01	Rej. 05
128	1	5	94
4947	0	2	98
21735	2	3	95
87409	1	6	93
348261	1	3	96
781097	0	4	96
911567	0	2	98
5143742	0	5	95
6209584	2	0	98
20437509	1	4	95

Tableau 5.2. Influence de la valeur initiale de l'algorithme de génération sur le taux d'acceptation par le test de Kolmogorov-Smirnov.

INIT	Méthodes des moments						Méthode du maximum de vraisemblance					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
128	2.065	.343	1.895	4.140	.661	2.118*	2.066	.300	2.200*	4.140	.567	2.469*
4947	2.015	.332	.452	4.016	.642	.249	2.030	.300	1.000	4.046	.576	.799
21735	2.009	.340	.265	3.983	.592	.287	2.028	.325	.862	4.021	.557	.377
87409	2.060	.336	1.786	4.136	.635	2.142*	2.046	.315	1.460	4.107	.573	1.867
348261	2.041	.294	1.395	4.076	.552	1.377	2.047	.269	1.747	4.090	.512	1.758
781097	2.065	.319	2.038*	4.127	.636	1.997*	2.058	.281	2.064*	4.110	.536	2.052*
911567	2.054	.295	1.831	4.121	.561	2.157*	2.053	.281	1.886	4.119	.529	2.250*
5143742	2.022	.321	.685	4.041	.615	.667	2.019	.333	.571	4.033	.632	.522
6209584	2.054	.335	1.612	4.101	.629	1.606	2.023	.294	.782	4.039	.554	.704
20437509	2.099	.362	2.735**	4.176	.715	2.462*	2.067	.305	2.197*	4.112	.597	1.876

Tableau 5.3: Adéquation des échantillons générés avec la loi Gamma d'origine ($\lambda = 4$ et $\alpha = 2$) et influence de la valeur initiale INIT de l'algorithme de Johnk sur cette adéquation.

(* rejet des tests de Student du niveau de signification 5%,

** rejet des tests de Student du niveau de signification 1%).

$$u = \frac{\alpha_m - \alpha_0}{s_\alpha / 10} \quad \text{et} \quad v = \frac{\lambda_m - \lambda_0}{s_\lambda / 10}$$

suivent une loi de Student à $v = 99$ degrés de liberté. Il est alors possible d'examiner séparément par le test de Student (Annexe A) les hypothèses:

$$\alpha_0 = 2 \quad \text{et} \quad \lambda_0 = 4$$

Cet examen (Tableau 5.3) permet d'examiner globalement dans quelle mesure les échantillons générés proviennent bien de la loi Gamma initiale ($\lambda = 4$ et $\alpha = 2$). Les résultats du tableau 5.3 montrent qu'il y a rejet de l'hypothèse $\alpha_0 = 2$ au niveau de signification de 1% que dans un seul cas; on observe plusieurs rejets au niveau de 5%; lorsqu'il y a rejet à 5%, les valeurs calculées de t sont cependant assez voisines de la valeur critique $t_{99} (5\%) = 1.98$. On peut de plus, observer que les valeurs moyennes α_m et λ_m sont peu éloignées des valeurs théoriques $\alpha_0 = 2$ et $\lambda_0 = 4$ et ce, indépendamment de la valeur initiale choisie INIT et de la méthode d'ajustement utilisée. Il ne semble pas en particulier y avoir de biais avec les diverses valeurs de INIT considérées, on peut donc en conclure que le choix de INIT n'a aucune influence sensible sur l'algorithme de génération des variates uniformes qui est à la base de l'utilisation des algorithmes de JOHNK et de RAMBERG.

5.3 Examen des résultats

Les résultats sont obtenus suivant la procédure de simulation décrite en 5.1.

L'ensemble des valeurs INIT utilisées pour les simulations des lois Gamma par les algorithmes de Johnk et de Ramberg, se trouve en Annexe B. Pour examiner ces résultats, dans le but de comparer les algorithmes de Johnk et de Ramberg, on utilisera divers critères:

- test de Kolmogorov-Smirnov pour examiner si les échantillons proviennent effectivement de loi Gamma;
- test de Student pour examiner si les moyennes des valeurs des paramètres estimés s'éloignent des valeurs théoriques;
- calcul des écarts entre valeurs théoriques et moyennes des valeurs simulées;
- temps de génération des 2 algorithmes.

Dans cet ensemble de comparaisons, on étudiera en particulier l'influence:

- des valeurs des paramètres α et λ des lois Gamma théoriques;
- de la taille des échantillons générés.

On sera également amené, comme élément secondaire de cette étude, à examiner le comportement des 2 méthodes d'ajustement de loi Gamma, que l'on considère.

5.3.1 Application du test de Kolmogorov-Smirnov (K.S.)

Les aspects théoriques du test (K.S.) sont décrits dans l'annexe A (A-1). Il faut cependant noter que l'on est ici dans le cas idéal de l'application du test K.S., puisque les paramètres α et λ sont connus a priori; en pratique, lorsque l'on effectue des ajustements de lois Gamma à des séries hydrologiques, on estime les paramètres α et λ qui ne sont donc pas connus a priori, de sorte que l'emploi du test K.S. n'est pas justifié. L'ensemble

des résultats obtenus, en appliquant le test K.S. à chacun des 100 échantillons générés pour chaque valeur de couple α et λ et pour chaque taille N (cf. 5.1), est regroupé dans les tableaux 5.4.a à 5.4.i.

Chaque tableau correspond à une valeur de couple (α, λ) et chaque ligne d'un tableau donne le taux d'acceptation du test K.S. pour les niveaux 5% et 1% lorsque l'on considère les algorithmes de Ramberg et de Johnk.

Lorsque l'on effectue le test K.S. au niveau de 5% (1%), on peut s'attendre que pour 100 échantillons considérés, il y ait 5 (1) rejets, puisque le niveau de signification correspond à la probabilité de rejeter l'hypothèse que l'échantillon provient d'une loi Gamma donnée alors que cette hypothèse est vraie; donc, même si les 100 échantillons proviennent vraiment de la loi Gamma fixée initialement, il est tout à fait normal que le test K.S. conduise à un certain nombre de rejets.

Pour faciliter l'examen des tableaux 5.4.a à 5.4.i on a calculé au tableau 5.5, le taux moyen de rejets du test K.S., en effectuant pour des valeurs fixées des paramètres α et λ de la loi Gamma, la moyenne des nombres de rejets obtenus pour les différentes tailles d'échantillon N . Le tableau 5.5 indique que dans tous les cas où l'on peut l'appliquer, l'algorithme de Ramberg conduit à de moins bons résultats que l'algorithme de Johnk puisque le test K.S. conduit à un plus grand nombre moyen de rejets pour l'algorithme de Ramberg. On peut noter également que:

- le taux moyen de rejets pour l'algorithme de Johnk pour les niveaux 1% et 5%, est toujours inférieur aux nombres attendus (respectivement 1 et 5);

N	RAMBERG			JOHNK		
	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%
20	0	4	96	0	2	98
40	2	4	94	0	3	97
60	1	6	93	1	2	97
80	8	10	82	1	7	92
100	3	13	84	2	2	96
150	6	13	81	1	4	95
200	17	22	61	0	3	97
300	26	20	54	0	4	96
400	25	25	50	1	3	96
500	39	26	35	0	3	97
750	59	19	22	0	2	98
1000	71	18	11	1	1	98

Tableau 5.4.a: Test de Kolmogorov-Smirnov appliqué aux échantillons tirés d'une loi Gamma ($\alpha = 8$, $\lambda = 64$).

N	RAMBERG			JOHNK		
	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%
20	0	2	98	1	3	96
40	0	3	97	1	2	97
60	0	3	97	0	5	95
80	2	3	95	1	4	95
100	1	3	96	0	2	98
150	2	8	90	0	1	99
200	1	5	94	1	1	98
300	3	7	90	1	3	96
400	2	6	92	0	3	97
500	3	7	90	0	2	98
750	6	7	87	0	3	97
1000	4	16	80	1	3	96

Tableau 5.4.b: Test de Kolmogorov-Smirnov appliqué aux échantillons tirés d'une loi Gamma ($\alpha = 4$, $\lambda = 16$).

N	RAMBERG			JOHNK		
	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%
20	1	5	94	3	5	92
40	1	3	96	0	6	94
60	0	5	95	1	4	95
80	1	3	96	1	5	94
100	3	3	94	0	3	97
150	1	4	95	0	3	97
200	1	7	92	1	4	95
300	4	5	91	1	2	97
400	3	3	94	1	1	98
500	3	4	93	0	4	96
750	2	6	92	1	3	96
1000	2	4	94	0	2	98

Tableau 5.4.c: Test de Kolmogorov-Smirnov appliqué aux échantillons tirés d'une loi Gamma ($\alpha = \sqrt{8}$, $\lambda = 8$).

N	RAMBERG			JOHNK		
	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%
20	0	4	96	0	3	97
40	0	5	95	0	8	92
60	2	5	93	2	0	98
80	4	3	93	0	5	95
100	1	4	95	0	3	97
150	2	7	91	0	4	96
200	3	7	90	0	7	93
300	2	2	96	1	3	96
400	1	5	94	0	3	97
500	1	7	92	1	4	95
750	2	5	93	2	2	96
1000	2	4	94	1	5	94

Tableau 5.4.d: Test de Kolmogorov-Smirnov appliqué aux échantillons tirés d'une loi Gamma ($\alpha = 2, \lambda = 4$).

N	RAMBERG			JOHNK		
	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%
20	2	3	95	0	6	94
40	0	0	100	0	4	96
60	1	3	96	4	4	92
80	0	3	97	1	3	96
100	1	5	94	2	1	97
150	1	6	93	1	1	98
200	5	3	92	1	3	96
300	0	3	97	0	2	98
400	3	4	93	0	7	93
500	1	8	91	3	3	94
750	1	6	93	1	5	94
1000	3	5	92	0	5	95

Tableau 5.4.e: Test de Kolmogorov-Smirnov appliqué aux échantillons tirés d'une loi Gamma ($\alpha = \sqrt{2}$, $\lambda = 2$).

N	RAMBERG			JOHNK		
	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%
20	2	2	96	1	3	96
40	1	2	97	2	2	96
60	3	3	94	1	7	92
80	1	3	96	0	5	95
100	1	4	95	0	3	97
150	0	5	95	2	5	93
200	2	3	95	0	4	96
300	1	4	95	0	4	96
400	0	7	93	0	4	96
500	1	5	94	1	2	97
750	1	5	94	1	5	94
1000	1	3	96	1	4	95

Tableau 5.4.f: Test de Kolmogorov-Smirnov appliqué aux échantillons tirés d'une loi Gamma ($\alpha = 1, \lambda = 1$).

N	JOHNC		
	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%
20	0	3	97
40	0	1	99
60	1	6	93
80	1	3	96
100	1	3	96
150	1	3	96
200	1	2	97
300	1	8	91
400	0	6	94
500	0	4	96
750	0	3	97
1000	0	7	93

Tableau 5.4.g: Test de Kolmogorov-Smirnov appliqué aux échantillons tirés d'une loi Gamma ($\alpha = 2/3$, $\lambda = 4/9$).

N	JOHNC		
	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%
20	1	3	96
40	0	3	97
60	1	2	97
80	1	2	97
100	0	3	97
150	0	1	99
200	0	3	97
300	1	9	90
400	0	2	98
500	1	6	93
750	0	3	97
1000	0	3	97

Tableau 5.4.h: Test de Kolmogorov-Smirnov appliqué aux échantillons tirés d'une loi Gamma ($\alpha = 1/2$, $\lambda = 1/4$).

N	JOHNC		
	rej. 1%	rej. 5%	acc. 5%
20	3	1	96
40	0	3	97
60	2	5	93
80	1	4	95
100	0	5	95
150	1	5	94
200	1	4	95
300	1	6	93
400	1	5	94
500	0	3	97
750	0	4	96
1000	0	5	95

Tableau 5.4.i: Test de Kolmogorov-Smirnov appliqué aux échantillons tirés d'une loi Gamma ($\alpha = 2/5$, $\lambda = 4/25$).

α	λ	RAMBERG			JOHNK		
		Rej. 1%	Rej. 5%	Acc. 5%	Rej. 1%	Rej. 5%	Acc. 5%
8	64	21.4	15.0	85	.6	3	97
4	16	2.0	5.8	84.2	.5	2.7	97.3
$\sqrt{8}$	8	1.8	4.3	85.7	.8	3.5	96.5
2	4	1.7	4.8	85.2	.6	3.9	96.1
$\sqrt{2}$	2	1.5	4.1	85.9	1.1	3.7	96.3
1	1	1.2	3.8	86.2	.8	4.0	96.0
2/3	4/9	----	----	----	.5	3.8	96.2
1/2	1/4	----	----	----	.4	3.3	96.7
2/5	4/25	----	----	----	.8	4.2	95.8

Tableau 5.5: Taux moyen d'acceptation et de rejet du test de KOLMOGOROV-SMIRNOV.

- que le taux moyen de rejets pour l'algorithme de Ramberg pour les niveaux 1% et 5%, décroît avec λ (et α); ce taux est en général supérieur à la valeur attendue 1 pour le niveau 1% et supérieur à la valeur attendue 5 pour le niveau 5% pour $\lambda \geq 16$.

On peut donc conclure de cette comparaison globale, que l'algorithme de Johnk conduit à de bonnes simulations pour toute la gamme considérée de valeurs des paramètres; l'algorithme de Ramberg donne des résultats voisins de ceux obtenus par l'algorithme de Johnk seulement pour une petite gamme de valeurs de λ ($1 < \lambda < 8$).

L'examen détaillé des tableaux 5.4.a à 5.4.i confirme ces résultats généraux, on peut voir en particulier aux tableaux 5.4.a et 5.4.b, que pour les valeurs élevées de λ ($\lambda = 16$ et $\lambda = 8$) l'algorithme de Ramberg conduit à un taux anormalement élevé de rejets et que de plus, ce taux augmente rapidement avec la taille N des échantillons générés. Pour les faibles valeurs de N ($N \leq 100$) l'algorithme de Ramberg donne cependant de meilleurs résultats que pour les valeurs élevées de N . On peut également noter que le taux de rejets par le test K.S. dans le cas de l'algorithme de Johnk semble être indépendant tant des valeurs des paramètres α et λ , que de la taille N de l'échantillon généré.

Sur la base du test K.S., l'algorithme de Johnk semble donc nettement préférable à celui de Ramberg.

5.3.2 Application du test de Student

En 5.1, on a vu qu'il était possible d'utiliser le test de Student pour comparer la valeur moyenne α_m et λ_m des estimations des paramètres α et λ obtenus à partir de l'ajustement aux 100 échantillons de la loi Gamma avec les valeurs théoriques α_o et λ_o .

Deux méthodes d'ajustement sont considérées:

Ajustement par la méthode des moments

Dans le cas où les paramètres α et λ de la loi Gamma sont estimés par la méthode des moments, les résultats des tests de Student sont regroupés dans les tableaux 5.6.a à 5.6.h.

Ajustement par la méthode du maximum de vraisemblance (M.V.)

Lorsque les paramètres sont estimés par la méthode du M.V., les résultats concernant les tests de Student se trouvent dans les tableaux 5.7.a à 5.7.h. La méthode du M.V. pour pouvoir être appliquée, nécessite que le coefficient d'asymétrie théorique (qui est estimé par le coefficient d'asymétrie de l'échantillon) soit positif. Dans de nombreux cas, surtout pour les valeurs élevées de λ , le coefficient d'asymétrie de l'échantillon faible en valeur absolue est négatif; lorsque $\lambda = 64$, on trouve très peu ou pas (si $N > 100$) d'échantillons sur les 100 qui sont générés qui ont des coefficients d'asymétrie positifs. et les résultats du test de Student ne

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	9.192	3.424	3.481**	73.673	28.321	3.415**	9.712	4.148	4.127**	77.572	33.188	4.089**
40	8.240	2.158	1.112	66.115	17.913	1.181	8.171	2.183	.783	65.533	17.521	.875
60	8.190	1.410	1.348	65.489	11.696	1.273	8.443	1.851	2.393*	67.371	14.523	2.321*
80	8.162	1.626	.996	65.427	13.670	1.044	8.198	1.351	1.466	65.540	10.797	1.426
100	8.052	1.248	.417	64.330	10.283	.321	8.201	1.128	1.782	65.638	8.937	1.833
150	7.952	1.031	-.466	63.558	8.473	-.522	8.232	.809	2.868**	65.825	6.449	2.830**
200	8.145	.881	1.646	65.292	7.299	1.770	8.092	.891	1.033	64.816	7.121	1.146
300	8.162	.765	2.118*	65.345	6.378	2.109*	8.095	.699	1.359	64.752	5.581	1.347
400	8.071	.585	1.214	64.553	4.853	1.140	8.006	.612	.098	63.952	4.824	-.010
500	8.073	.571	1.278	64.605	4.725	1.280	8.016	.499	.321	64.138	4.037	.342
750	8.084	.521	1.612	64.665	4.345	1.530	7.979	.396	-.530	63.806	3.137	-.618
1000	8.039	.383	1.018	64.313	3.183	.983	8.031	.340	.912	64.255	2.722	.937

Tableau 5.6.a: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la distribution Gamma estimé par la méthode des moments ($\alpha = 8$, $\lambda = 64$) (* test significatif au niveau de 5%, ** test significatif au niveau de 1%).

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	4.428	1.414	3.027**	17.708	5.695	2.999**	4.355	1.474	2.408*	17.384	5.741	2.411*
40	4.046	.979	.470	16.151	3.919	.385	4.327	1.130	2.893**	17.227	4.459	2.752**
60	4.115	.637	1.805	16.464	2.580	1.798	4.027	.850	.318	16.084	3.358	.250
80	4.251	.620	4.048**	17.038	2.528	.150	4.126	.848	1.486	16.479	3.367	1.423
100	4.150	.558	2.688**	16.573	2.146	2.670**	4.067	.579	1.157	16.233	2.226	1.047
150	4.070	.479	1.461	16.275	1.951	1.410	4.013	.422	.308	16.107	1.672	.640
200	4.035	.385	.909	16.149	1.571	.984	4.116	.472	2.458*	16.409	1.823	2.244*
300	4.008	.303	.264	16.062	1.235	.502	4.059	.370	1.595	16.221	1.466	1.508
400	3.996	.258	-.155	15.999	1.018	-.010	4.013	.256	.508	16.037	.979	.378
500	3.980	.243	-.823	15.934	.980	-.673	4.010	.276	.362	16.039	1.080	.361
750	4.011	.211	.521	16.065	.862	.754	3.984	.169	-.947	15.908	.667	-1.379
1000	4.003	.176	.170	16.020	.720	.278	4.018	.222	.811	16.071	.887	.800

Tableau 5.6.b: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la distribution Gamma estimé par la méthode des moments ($\alpha = 4, \lambda = 16$) (* Test significatif au niveau de 5%, ** test significatif au niveau de 1%).

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	3.172	1.029	3.343**	8.834	2.847	2.929**	2.931	.994	1.036	8.256	2.662	.962
40	2.944	.659	1.760	8.339	1.723	1.967	3.065	.693	3.420**	8.653	1.971	3.313**
60	2.938	.684	1.608	8.250	1.810	1.381	2.966	.658	2.097*	8.405	1.850	2.189*
80	2.928	.441	2.268*	8.250	1.196	.209	2.965	.562	2.438*	8.393	1.564	2.513*
100	2.930	.369	2.764**	8.267	.991	2.694**	3.025	.508	3.878**	8.502	1.310	3.832**
150	2.882	.348	1.552	8.135	.919	1.469	2.914	.362	2.376*	8.253	1.023	2.473*
200	2.844	.290	.552	8.055	.804	.684	2.818	-.317	.315	7.984	.865	-.185
300	2.858	.255	1.176	8.109	.711	1.533	2.863	.237	1.477	8.086	.656	1.131
400	2.890	.198	3.131**	8.142	.565	2.513*	2.859	.254	1.220	8.089	.708	1.257
500	2.846	.196	.918	8.046	.533	.863	2.831	.173	.173	8.025	.463	.540
750	2.847	.140	1.357	8.038	.387	.982	2.867	.171	2.281*	8.104	.471	2.208*
1000	2.833	.122	.410	8.014	.336	.417	2.831	.144	.208	8.017	.398	.427

Tableau 5.6.c: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la distribution Gamma estimé par la méthode des moments ($\alpha = \sqrt{8}$, $\lambda = 8$) (* test significatif au niveau de 5%, ** test significatif au niveau de 1%).

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	2.246	.839	2.932**	4.429	1.567	2.738**	2.256	.899	2.848**	4.501	1.779	2.816**
40	2.104	.552	1.884	4.147	.976	1.506	2.109	.526	2.072*	4.163	1.004	1.624
60	2.140	.362	3.867**	4.246	.693	3.550**	2.156	.463	3.369**	4.304	.839	3.623**
80	2.079	.326	2.423*	4.175	.682	2.566*	2.059	.374	1.578	4.091	.674	1.350
100	2.015	.309	.485	4.034	.579	.587	2.060	.322	1.863	4.097	.579	1.675
150	2.016	.269	.595	4.021	.493	.426	2.068	.291	2.337*	4.116	.556	2.086*
200	2.043	.206	2.087*	4.093	.414	2.246*	2.048	.246	1.951	4.100	.497	2.012*
300	2.024	.189	1.270	4.051	.358	1.425	1.999	.215	-.047	4.003	.405	.074
400	2.022	.157	1.401	4.053	.305	1.738	2.011	.170	.647	4.017	.313	.543
500	1.980	.129	-1.550	3.964	-.248	1.452	2.015	.159	.943	4.032	.303	1.056
750	1.999	.107	-.093	4.006	.209	.287	1.986	.121	-1.157	3.975	.226	-1.106
1000	1.995	.102	-.490	3.984	-.190	.842	2.005	.103	.485	4.009	.205	.439

Tableau 5.6.d: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la Gamma estimé par la méthode des moments.
 (*test significatif au niveau de 5%, ** test significatif au niveau de 1%)
 ($\alpha = 2, \lambda = 4$)

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	1.574	.619	2.585*	2.191	.819	2.332*	1.881	.734	6.362**	2.607	.992	6.119**
40	1.569	.430	3.605**	2.176	.560	3.143**	1.495	.451	1.796	2.099	.561	1.765
60	1.520	.341	3.109**	2.110	.438	2.511*	1.491	.357	2.157*	2.115	.441	2.608*
80	1.497	.321	2.586*	2.116	.379	3.061**	1.495	.251	3.227**	2.093	.347	2.680**
100	1.506	.240	3.833**	2.126	.304	4.145**	1.437	.257	.895	2.028	.342	.819
150	1.454	.213	1.878	2.045	.280	1.607	1.486	.245	2.940**	2.078	.318	2.453*
200	1.428	.177	.791	2.011	.229	.480	1.423	.196	.459	2.013	.257	.506
300	1.446	.144	2.222*	2.045	.185	2.432*	1.442	.164	1.707	2.030	.207	1.449
400	1.424	.138	.725	2.005	.171	.292	1.435	.142	1.479	2.030	.187	1.604
500	1.406	.130	-.615	1.995	.167	-.299	1.426	.112	1.071	2.029	.152	1.908
750	1.410	.089	-.449	1.984	.108	-1.481	1.413	.090	-.111	1.997	.119	-.252
1000	1.426	.083	1.446	2.013	.108	1.204	1.439	.079	3.165**	2.024	.100	2.400

Tableau 5.6.e: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la distribution Gamma estimé par la méthode des moments ($\alpha = \sqrt{2}$, $\lambda = 2$) (* test significatif au niveau de 5%, ** test significatif au niveau de 1%).

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	1.183	.504	3.631**	1.131	.413	3.172**	1.381	.802	4.751**	1.265	.499	5.311**
40	1.166	.372	4.462**	1.118	.298	3.960**	1.179	.372	4.812**	1.114	.299	3.813**
60	1.117	.331	3.535**	1.101	.294	3.435**	1.139	.285	4.877**	1.102	.246	4.146**
80	1.100	.262	3.817**	1.078	.222	3.514**	1.103	.256	4.023**	1.088	.223	3.946**
100	1.060	.217	2.765**	1.065	.187	3.476**	1.059	.232	2.543*	1.046	.186	2.473*
150	1.014	.177	.791	1.000	.148	.000	1.016	.179	.894	1.002	.156	.128
200	1.044	.157	2.803**	1.034	.133	2.556*	1.033	.156	2.115*	1.029	.120	2.417*
300	.995	.125	-.400	.983	.108	-1.574	1.016	.139	1.151	1.014	.116	1.207
400	1.023	.118	1.949	1.029	.106	2.736**	1.020	.114	1.754	1.015	.096	1.563
500	1.027	.099	2.727**	1.019	.085	2.235*	1.025	.100	2.500*	1.022	.089	2.472*
750	1.003	.084	.357	1.003	.074	.405	.980	.076	-2.632**	.992	.069	-1.159
1000	1.000	.060	.000	1.001	.055	.182	1.013	.068	1.912	1.010	.060	1.667

Tableau 5.6.f: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la distribution Gamma estimé par la méthode des moments ($\alpha = 1, \lambda = 1$) (* test significatif au niveau de 5%, ** test significatif au niveau de 1%).

	Johnk ($\alpha = 2/3, \lambda = 4/9$)						Johnk ($\alpha = 1/2, \lambda = 1/4$)					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	.950	.553	5.118**	.567	.232	5.302**	.788	.511	5.636**	.369	.163	10.368**
40	.829	.411	3.942**	.506	.144	4.306**	.697	.396	4.975**	.306	.124	4.516**
60	.789	.239	5.105**	.504	.141	4.255**	.657	.282	5.567**	.298	.079	6.076**
80	.739	.272	2.647**	.466	.132	1.667	.596	.207	4.638**	.283	.073	4.521**
100	.751	.231	3.636**	.492	.118	4.068**	.568	.210	3.238**	.274	.078	3.077**
150	.716	.163	3.006**	.474	.091	3.297**	.561	.156	3.910**	.276	.061	4.262**
200	.722	.134	4.104**	.467	.068	3.382**	.554	.130	4.154**	.273	.051	4.510**
300	.689	.110	2.000*	.460	.070	2.286*	.525	.110	2.273*	.258	.043	1.860
400	.685	.097	1.856	.454	.052	1.923	.505	.083	.602	.254	.035	1.143
500	.671	.080	.500	.452	.045	1.778	.518	.084	2.143*	.258	.037	2.162*
750	.671	.073	.548	.447	.041	.732	.517	.067	2.537*	.257	.027	2.593*
1000	.672	.063	.794	.449	.038	1.316	.506	.059	1.017	.254	.024	1.667

Tableau 5.6.g: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la distribution Gamma estimé par la méthode des moments ($\alpha = 1/2, \lambda = 1/4$) et ($\alpha = 2/3, \lambda = 4/9$)
 (* test significatif au niveau de 5%, ** test significatif au niveau de 1%).

JOHNK						
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	1.664	6.237	1.995*	.244	.111	7.568**
40	.663	.350	7.514**	.228	.076	8.947**
60	.555	.274	5.657**	.189	.066	4.394**
80	.536	.244	5.574**	.195	.058	6.034**
100	.471	.205	3.463**	.178	.049	3.673**
150	.453	.156	3.397**	.178	.050	3.600**
200	.452	.126	4.127**	.175	.038	3.947**
300	.444	.108	4.074**	.169	.031	2.903**
400	.425	.093	2.688**	.165	.029	1.724
500	.426	.082	3.171**	.168	.026	3.077**
750	.407	.057	1.228	.162	.016	1.250
1000	.420	.055	3.636*	.167	.019	3.684**

Tableau 5.6.h: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la Gamma estimé par la méthode des moments ($\alpha = 2/5$, $\lambda = 4/25$)
 (* test significatif au niveau de 5%,
 ** test significatif au niveau de 1%).

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	10.799	4.273	3.002**	86.838	36.780	2.845**	9.904	3.874	3.807**	79.364	31.113	3.825**
40	9.257	1.717	2.428*	74.108	14.219	2.358*	8.317	1.959	1.420	66.672	15.765	1.487
60	9.001	.989	2.479	71.957	7.649	2.548	8.657	1.970	3.002**	69.088	15.391	.636
80	10.759	.346	13.811**	85.916	3.406	11.145**	8.313	1.344	2.030*	66.411	10.818	1.943
100	10.924	2.060	2.007	88.466	16.063	2.154	8.243	1.069	2.033*	65.993	8.539	2.088*
150	----	----	----	----	----	----	8.245	.813	2.843**	65.897	6.453	2.773**
200	----	----	----	----	----	----	8.143	.905	1.548	65.222	7.235	1.655
300	----	----	----	----	----	----	8.108	.686	1.526	64.853	5.465	1.513
400	----	----	----	----	----	----	8.013	.614	.210	64.013	4.840	.026
500	----	----	----	----	----	----	8.020	.502	.396	64.173	4.071	.422
750	----	----	----	----	----	----	7.996	.391	-.102	63.944	3.098	-.181
1000	----	----	----	----	----	----	8.032	.338	.947	64.260	2.714	.958

Tableau 5.7.a: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la loi Gamma estimés par la méthode du maximum de vraisemblance ($\alpha = 8, \lambda = 64$). (* test significatif au niveau de 5% ** test significatif au niveau de 1%)

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	4.595	1.382	3.753**	18.258	5.590	3.521*	4.568	1.488	3.478**	18.220	5.796	3.490**
40	3.931	.918	.668	15.694	3.735	.728	4.405	1.189	3.231**	17.552	4.718	3.121**
60	4.076	.668	1.049	16.288	2.701	.983	4.094	.851	1.071	16.362	3.376	1.040
80	4.191	.661	2.633**	16.796	2.676	2.710**	4.142	.811	1.698	16.562	3.246	1.679
100	4.090	.579	1.491	16.315	2.199	1.374	4.074	.561	1.299	16.271	2.173	1.228
150	3.981	.458	-.406	15.914	1.850	-.455	4.024	.411	.581	16.154	1.634	.938
200	3.941	.364	-1.596	15.771	1.484	-1.520	4.134	.460	2.913**	16.480	1.778	2.670**
300	3.908	.290	-3.157*	15.660	1.172	-2.886**	4.072	.346	2.081*	16.272	1.369	1.987
400	3.900	.200	-5.000**	15.619	.809	-4.710**	4.022	.240	.917	16.073	.909	.803
500	3.869	.236	-5.523**	15.488	.942	-5.408**	4.021	.251	.837	16.082	.978	.838
750	3.893	.259	-4.517**	15.586	1.014	-4.083**	3.994	.174	-.345	15.947	.674	-.786
1000	3.900	.173	-5.780**	15.608	.704	-5.568**	4.028	.215	1.302	16.112	.856	1.308

Tableau 5.7.b: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la loi Gamma estimés par la méthode du maximum de vraisemblance ($\alpha = 4, \lambda = 16$). (* test significatif au niveau de 5%, ** test significatif au niveau de 1%)

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	3.338	1.075	4.624**	9.228	2.878	4.159**	3.080	1.038	2.329*	8.637	2.755	2.218*
40	3.034	.647	3.168**	8.589	1.649	3.554**	3.132	.714	4.193**	8.859	2.045	4.137**
60	3.045	.651	3.317**	8.539	1.683	3.187**	3.023	.637	3.046**	8.563	1.775	3.156**
80	3.014	.421	4.418**	8.491	1.119	4.389**	2.962	.534	2.459*	8.396	1.504	2.580*
100	2.996	.359	4.680**	8.451	.925	4.876**	3.027	.481	4.116**	8.510	1.242	4.086**
150	2.958	.339	3.835**	8.348	.871	3.995**	2.919	.354	2.571*	8.265	.989	2.679**
200	2.911	.280	2.964**	8.243	.758	3.206**	2.841	.303	.429	8.049	.826	.593
300	2.912	.242	3.471**	8.263	.659	3.991**	2.868	.212	1.887	8.102	.586	1.741
400	2.958	.179	7.263**	8.332	.498	6.667**	2.872	.240	1.833	3.126	.667	1.889
500	2.911	.177	4.689**	8.229	.470	4.872**	2.839	.163	.675	8.047	.427	1.101
750	2.915	.133	6.541**	8.230	.355	6.479**	2.866	.162	2.346*	8.103	.440	2.341*
1000	2.903	.112	6.696**	8.211	.300	7.033**	2.833	.136	.368	8.024	.375	.640

Tableau 5.7.c: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la loi Gamma estimés par la méthode du maximum de vraisemblance ($\alpha = \sqrt{8}$, $\lambda = 8$) (*test significatif au niveau de 5%, **test significatif au niveau de 1%).

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	2.313	.782	3.881**	4.514	1.298	3.839**	2.264	.834	3.069**	4.512	1.604	3.095**
40	2.176	.487	3.596**	4.281	.822	3.401**	2.120	.504	2.369*	4.178	.940	1.884
60	2.237	.367	6.458**	4.430	.623	6.902**	2.134	.408	3.268**	4.258	.738	3.478**
80	2.154	.293	5.256**	4.319	.568	5.616**	2.055	.335	1.642	4.085	.595	1.429
100	2.114	.279	4.086**	4.229	.481	4.761**	2.042	.275	1.527	4.061	.475	1.284
150	2.115	.249	4.618**	4.218	.430	5.070**	2.067	.246	2.723**	4.115	.460	2.500*
200	2.114	.188	6.064**	4.234	.365	6.411**	2.027	.210	1.286	4.055	.409	1.345
300	2.109	.174	6.264**	4.222	.310	7.161**	1.992	.193	-.415	3.990	.360	-.278
400	2.116	.141	8.227**	4.240	.252	9.524**	2.021	.166	1.265	4.036	.306	1.176
500	2.071	.113	6.283**	4.146	.206	7.087**	2.005	.134	.373	4.012	.253	.474
750	2.091	.098	9.286**	4.190	.182	10.440**	1.985	.109	-1.376	3.974	.202	-1.287
1000	2.094	.083	11.325**	4.183	.145	12.621**	2.014	.094	1.489	4.027	.186	1.452

Tableau 5.7.d: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la loi Gamma estimés par la méthode du maximum de vraisemblance ($\alpha = 2, \lambda = 4$) (*test significatif au niveau de 5%, **test significatif au niveau de 1%).

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	1.680	.580	4.586**	2.327	.704	4.645**	1.840	.741	5.749**	2.550	.988	5.567**
40	1.655	.362	6.657**	2.288	.417	6.906**	1.492	.365	2.137*	2.100	.445	2.247*
60	1.616	.319	6.332**	2.240	.380	6.316**	1.494	.327	2.446*	2.117	.376	3.112**
80	1.566	.271	5.609**	2.212	.270	7.852**	1.500	.239	3.598**	2.097	.304	3.191**
100	1.587	.206	8.398**	2.239	.229	10.437**	1.430	.202	.792	2.017	.257	.661
150	1.551	.179	7.654**	2.181	.212	8.538**	1.473	.170	3.471**	2.062	.225	2.756**
200	1.533	.156	7.628**	2.156	.168	9.286**	1.431	.171	.994	2.024	.213	1.127
300	1.543	.122	10.574**	2.182	.138	13.188**	1.441	.132	2.045*	2.029	.159	1.824
400	1.542	.122	10.492**	2.171	.131	13.053**	1.417	.121	.248	2.005	.154	.325
500	1.511	.102	9.510**	2.143	.115	12.435**	1.426	.091	1.318	2.029	.118	2.458*
750	1.523	.078	13.974**	2.143	.087	12.989**	1.413	.076	-.132	1.997	.092	-.326
1000	1.527	.075	15.067**	2.155	.088	17.614**	1.438	.069	3.478**	2.021	.083	2.530*

Tableau 5.7.e: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la loi Gamma estimés par la méthode du maximum de vraisemblance ($\alpha = \sqrt{2}$, $\lambda = 2$) (*test significatif au niveau de 5%, **test significatif au niveau de 1%).

	Ramberg						Johnk					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	1.169	.443	3.815**	1.117	.353	3.314**	1.249	.602	4.136**	1.155	.378	4.101**
40	1.094	.288	3.264**	1.048	.198	2.424*	1.140	.290	4.828**	1.074	.204	3.627**
60	1.064	.261	2.452*	1.049	.215	2.279*	1.079	.230	3.435**	1.041	.175	2.343*
80	1.057	.179	3.184**	1.038	.146	2.603*	1.060	.212	2.830**	1.044	.164	2.683**
100	1.040	.180	2.222*	1.045	.134	3.358**	1.040	.169	2.367*	1.029	.117	2.479*
150	1.018	.133	1.353	1.005	.093	.538	1.013	.131	.992	.999	.101	-.099
200	1.027	.138	1.957	1.016	.111	1.441	1.020	.132	1.515	1.017	.097	1.753
300	1.002	.090	.222*	.990	.068	-1.471	1.014	.107	1.308	1.013	.078	1.667
400	1.012	.088	1.364	1.017	.075	2.267*	1.014	.080	1.750	1.010	.060	1.667
500	1.013	.070	1.857	1.005	.056	.893	1.021	.072	2.917**	1.017	.055	3.091**
750	1.005	.061	.820	1.005	.048	1.042	.986	.057	-2.456*	.998	.043	-.465
1000	1.003	.050	.600	1.004	.036	1.111	1.007	.046	1.522	1.004	.036	1.111

Tableau 5.7.f: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la loi Gamma estimés par la méthode du maximum de vraisemblance ($\alpha = 1, \lambda = 1$) (*test singificatif au niveau de 5%, **test significatif au niveau de 1%).

	Johnk ($\alpha = 2/3, \lambda = 4/9$)						Johnk ($\alpha = 1/2, \lambda = 1/4$)					
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	.813	.388	3.763**	.483	.139	2.806**	.607	.322	3.323**	.286	.089	4.045**
40	.776	.276	3.949**	.483	.091	4.286**	.599	.249	3.976**	.263	.045	2.889**
60	.717	.175	2.857**	.454	.080	1.250	.558	.178	3.258**	.254	.034	1.176
80	.718	.178	2.865**	.456	.060	2.000*	.532	.126	2.540*	.253	.028	1.071
100	.698	.144	2.153*	.460	.064	2.500*	.525	.121	2.066*	.255	.027	1.852
150	.677	.109	.917	.448	.048	.833	.516	.093	1.720	.254	.021	1.905
200	.694	.090	3.000**	.449	.032	1.563	.513	.085	1.529	.252	.020	1.000
300	.676	.071	1.268	.451	.029	2.414*	.510	.069	1.449	.251	.016	.625
400	.673	.066	.909	.446	.024	.833	.499	.056	-.179	.251	.014	.714
500	.667	.053	.000	.449	.022	2.273*	.505	.051	.980	.252	.013	1.538
750	.665	.047	-.426	.443	.020	-.385	.505	.042	1.190	.252	.010	2.000
1000	.662	.041	-1.220	.443	.019	-.526	.498	.032	-.625	.250	.008	.000

Tableau 5.7.g: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la loi Gamma estimés par la méthode du maximum de vraisemblance ($\alpha = 2/3, \lambda = 4/9$) et ($\alpha = 1/2, \lambda = 1/4$)
 (*test significatif au niveau de 5%, **test significatif au niveau de 1%).

JOHNSON						
	α_m	s_α	t	λ_m	s_λ	t
20	1.810	11.012	1.280	.171	.043	2.558*
40	.476	.210	3.619**	.164	.028	1.429
60	.472	.177	4.068**	.160	.024	.000
80	.450	.140	3.571**	.165	.017	2.941**
100	.421	.121	1.736	.161	.016	.625
150	.422	.099	2.222*	.165	.014	3.571**
200	.417	.078	2.179*	.162	.012	1.667
300	.421	.066	3.182**	.161	.010	1.000
400	.421	.057	3.684**	.163	.008	3.750**
500	.415	.051	2.941**	.164	.007	5.714**
750	.406	.039	1.538	.161	.006	1.667
1000	.407	.032	2.186*	.161	.006	1.667

Tableau 5.7.h: Test de Student sur les valeurs moyennes des paramètres de la loi Gamma par la méthode du maximum de vraisemblance ($\alpha = 2/5$, $\lambda = 4/25$)
 (*test significatif au niveau de 5%,
 **test significatif au niveau de 1%).

sont pas probants dans ce cas, car basés sur un petit nombre de valeurs. Pour $\lambda \leq 8$, il y a très peu ou pas d'échantillons générés avec un coefficient d'asymétrie négatif; quelques cas sont observés pour les faibles valeurs de la taille de l'échantillon N (en raison des grandes erreurs d'échantillonnage du coefficient d'asymétrie, si N est petit).

Le tableau 5.8 indique le nombre effectif P' parmi les 100 échantillons générés qui ont un coefficient d'asymétrie positif lorsque p' est différent de 100. Dans chaque cas, on ajuste le nombre de degrés de liberté ν du test de Student au nombre effectif p' d'échantillons à asymétrie positive, on a $\nu = p' - 1$.

Plusieurs conclusions ressortent de l'examen des tableaux 5.6 et 5.7, valables quelle que soit la méthode d'ajustement utilisée.

- Les valeurs α_m et λ_m sont en général des surestimations des valeurs théoriques α_0 et λ_0 correspondantes, il y a toujours en effet un biais positif. On peut observer que la taille de ce biais décroît avec la taille des échantillons générés; il est normal que l'estimation de α et λ soit meilleure pour un grand échantillon. Compte tenu du nombre relativement petit ($p = 100$) d'échantillons générés pour α et λ donnés, on ne peut cependant envisager de modéliser ce biais en fonction de N ;

N	$\lambda = 64$		$\lambda = 16$		$\lambda = 8$		$\lambda = 4$	
	R	J	R	J	R	J	R	J
20	21	60	76	83	95	92	94	94
40	11	77	79	90	99	97	99	99
60	6	81	85	94	99	99		99
80	3	76	83	94		96		
100	2	80	92	97		99		
150	0	89	96	99				
200	0	96	97					
300	0	94	99					
400	0	98						
500	0	99	99					
750	0							
1000	0							

Tableau 5.8: Nombre effectif P' d'échantillons générés ayant un coefficient d'asymétrie positif.

R: Ramberg
J: Johnk

une telle étude nécessiterait un nombre élevé d'échantillons générés de manière à obtenir des variances d'échantillonnage s_α/\sqrt{p} et s_λ/\sqrt{p} faibles.

- De manière générale pour un algorithme donné, lorsqu'il y a rejet de l'hypothèse $\alpha = \alpha_0$, il y a aussi souvent rejet de l'hypothèse $\lambda = \lambda_0$ (ceci est surtout vrai lorsqu'il y a rejet au niveau de signification 1% pour l'un ou l'autre test). Ceci peut s'expliquer par la relation qui existe entre les 2 paramètres α et λ dans les méthodes d'ajustement, une erreur sur α entraînant ipso facto une erreur sur λ .
- Les rejets aux niveaux 5% et 1% sont surtout observés (quelle que soit la méthode d'ajustement et quel que soit l'algorithme) pour les faibles valeurs de N , ceci est logique car l'estimation à partir d'un petit échantillon implique une plus grande variance d'échantillonnage des paramètres estimés.

En ce qui concerne l'algorithme de Ramberg dans le cas de l'ajustement par la méthode du maximum de vraisemblance, il y a rejet systématique au niveau de 1% pour $\lambda \leq 8$, alors que ceci n'est pas observé dans le cas de l'algorithme de Johnk (sauf pour $\lambda = 4/25$ où il y a de nombreux rejets). Cet effet qui peut être dû aux valeurs faibles des écart-type s_α et s_λ , sera approfondi dans ce qui suit en 5.3.3.

Dans le cas où l'on ajuste les paramètres par la méthode des

moments, on obtient des résultats comparables pour les 2 algorithmes.

Il est donc très difficile de favoriser un algorithme par rapport à l'autre sur la base du test de Student, il n'en reste pas moins que l'algorithme de Ramberg présente des difficultés de génération pour $\lambda < 1$.

5.3.3 Écarts relatifs entre valeurs théoriques et moyennes des valeurs simulées des paramètres.

Les tableaux 5.9.a à 5.9.i indiquent les écarts entre la moyenne des valeurs estimées des paramètres (α_m ou λ_m) et la valeur théorique (α_o ou λ_o) correspondante de la loi Gamma. Les valeurs moyennes sont en général calculées sur 100 valeurs sauf dans le cas de la méthode du maximum de vraisemblance pour λ élevé (cf. tableau 5.8) les écarts sont donnés en pourcentage et l'on a:

$$d_1 = \frac{\alpha_m - \alpha_o}{\alpha_o} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{\lambda_m - \lambda_o}{\lambda_o}$$

On peut remarquer que les écarts sont généralement positifs (90% des cas) ce qui confirme la surestimation des valeurs α_m et λ_m déjà observée en 5.3.2; c'est d'ailleurs surtout lorsque $N \geq 150$ que l'on observe les rares cas où les écarts sont négatifs. De manière générale les écarts d_1 et d_2 ont tendance à décroître lorsque N augmente.

N	RAMBERG				JOHNK			
	moments		maximum de vraisemblance		moments		maximum de vraisemblance	
	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ
20	14.90	15.11	34.99	35.68	21.40	21.21	23.80	24.01
40	3.00	3.30	15.71	15.79	2.14	2.40	3.96	4.18
60	2.38	2.33	12.51	12.43	5.54	5.27	8.21	7.95
80	2.03	2.23	34.49	34.24	2.48	2.41	3.91	3.77
100	0.65	0.52	36.55	38.23	2.51	2.56	3.04	3.11
150	-0.60	-0.69	----	----	2.90	2.85	3.06	2.96
200	1.81	2.02	----	----	1.15	1.28	1.79	1.91
300	2.03	2.10	----	----	1.19	1.18	1.35	1.33
400	0.89	0.86	----	----	0.08	-0.08	0.16	0.02
500	0.91	0.95	----	----	0.20	0.22	0.25	0.27
750	1.05	1.04	----	----	-0.26	-0.30	-0.05	-0.09
1000	0.49	0.49	----	----	0.39	0.40	0.40	0.41

Tableau 5.9.a: Pourcentage de déviation des valeurs moyennes des paramètres par rapport aux valeurs théoriques. $\lambda = 64$ $\alpha = 8$

N	RAMBERG				JOHNS			
	moments		maximum de vraisemblance		moments		maximum de vraisemblance	
	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ
20	10.70	10.68	14.88	14.11	8.88	8.65	14.20	13.88
40	1.15	0.94	1.73	1.91	8.18	7.67	10.13	9.70
60	2.88	2.90	1.90	1.80	0.68	0.53	2.35	2.26
80	6.28	6.49	4.78	4.98	3.15	2.99	3.55	3.51
100	3.75	3.58	2.25	1.97	1.68	1.46	1.85	1.69
150	1.75	1.72	-0.48	-0.54	0.33	0.69	0.60	0.96
200	0.88	0.93	-1.48	-1.43	2.90	2.56	3.35	3.00
300	0.20	0.39	-2.30	-2.13	1.48	1.38	1.80	1.70
400	-0.10	-0.01	-0.43	-2.59	0.33	0.23	0.55	0.46
500	-0.50	-0.41	-3.28	-3.20	0.25	0.24	0.53	0.51
750	0.28	0.41	-2.50	-2.38	-0.40	-0.58	-0.15	-0.33
1000	0.08	0.13	-2.50	2.45	0.45	0.44	0.70	0.70

Tableau 5.9.b: Pourcentage de déviation des valeurs moyennes des paramètres par rapport aux valeurs théoriques. $\lambda = 16$ $\alpha = 4$

N	RAMBERG				JOHNK			
	moments		maximum de vraisemblance		moments		maximum de vraisemblance	
	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ
20	12.16	10.43	18.03	15.35	3.64	3.20	8.91	7.96
40	4.10	4.24	7.28	7.36	8.38	8.16	10.75	10.74
60	3.89	3.13	7.67	6.74	4.88	5.06	6.89	7.04
80	3.54	3.13	6.58	6.14	4.84	4.91	4.74	4.95
100	3.61	3.34	5.94	5.64	6.96	6.28	7.03	6.38
150	1.91	1.69	4.60	4.35	3.04	3.16	3.22	3.31
200	0.57	0.69	2.93	3.04	-0.35	-0.20	0.46	0.61
300	1.06	1.36	2.97	3.29	1.24	1.08	1.41	1.28
400	2.19	1.18	4.60	4.15	1.10	1.11	1.56	1.58
500	0.64	0.58	2.93	2.86	0.11	0.31	0.39	0.59
750	0.67	0.48	3.08	2.88	1.38	1.30	1.34	1.29
1000	0.18	0.18	2.65	2.64	0.11	0.21	0.18	0.30

Tableau 5.9.c: Pourcentage de déviation des valeurs moyennes des paramètres par rapport aux valeurs théoriques. $\lambda = 8$ $\alpha = \sqrt{8}$

N	RAMBERG				JOHNS			
	moments		maximum de vraisemblance		moments		maximum de vraisemblance	
	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ
20	12.30	10.73	15.65	12.85	12.80	12.53	13.20	12.80
40	5.20	3.68	8.80	7.03	5.45	4.08	6.00	4.45
60	7.00	6.15	11.85	10.75	7.80	7.60	6.70	6.45
80	3.95	4.38	7.70	7.98	2.95	2.28	2.75	2.13
100	0.75	0.85	5.70	5.73	3.00	2.43	2.10	1.53
150	0.80	0.53	5.75	5.45	3.40	2.90	3.35	2.88
200	2.15	2.33	5.70	5.85	2.40	2.50	1.35	1.38
300	1.20	1.28	5.45	5.55	-0.05	0.08	-0.40	-0.25
400	1.10	1.33	5.80	6.00	0.55	0.43	1.05	0.90
500	-1.00	-0.90	3.55	3.65	0.75	0.80	0.25	0.30
750	-0.05	0.15	4.55	4.75	-0.70	-0.63	-0.75	-0.65
1000	-0.25	-0.40	4.70	4.58	0.25	0.23	0.70	0.68

Tableau 5.9.d: Pourcentage de déviation des valeurs moyennes des paramètres par rapport aux valeurs théoriques. $\lambda = 4$ $\alpha = 2$

N	RAMBERG				JOHNK			
	moments		maximum de vraisemblance		moments		maximum de vraisemblance	
	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ
20	11.31	9.55	18.81	16.35	33.02	30.35	30.12	27.50
40	10.96	8.80	17.04	14.40	5.73	4.95	5.51	5.00
60	7.49	5.50	14.28	12.00	5.44	5.75	5.66	5.85
80	5.87	5.80	10.75	10.60	5.73	4.65	6.08	4.85
100	6.50	6.30	12.23	11.95	1.63	1.40	1.13	0.85
150	2.83	2.25	9.69	9.05	5.09	3.90	4.17	3.10
200	0.99	0.55	8.41	7.80	0.64	0.65	1.20	1.20
300	2.26	2.25	9.12	9.10	1.98	1.50	1.91	1.45
400	0.71	0.25	9.05	8.55	1.48	1.50	0.21	0.25
500	-0.57	-0.25	6.86	7.15	0.85	1.45	0.85	1.45
750	-0.28	-0.80	7.71	7.15	-0.07	-0.15	-0.07	-0.15
1000	0.85	0.65	7.99	7.75	1.77	1.20	1.70	1.05

Tableau 5.9.e: Pourcentage de déviation des valeurs moyennes des paramètres par rapport aux valeurs théoriques. $\lambda = 2$ $\alpha = \sqrt{2}$

N	RAMBERG				JOHNK			
	moments		maximum de vraisemblance		moments		maximum de vraisemblance	
	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ
20	18.30	13.10	16.90	11.70	38.10	26.50	24.90	15.50
40	16.60	11.80	9.40	4.80	17.90	11.40	14.00	7.40
60	11.70	10.10	6.40	4.90	13.90	10.20	7.90	4.10
80	10.00	7.80	5.70	3.80	10.30	8.80	6.00	4.40
100	6.00	6.50	4.00	4.50	5.90	4.60	4.00	2.90
150	1.40	0.50	1.80	0.50	1.60	0.20	1.30	-0.10
200	4.40	3.40	2.70	1.60	3.30	2.90	2.00	1.70
300	-0.50	-1.70	0.20	-1.00	1.60	1.40	1.40	1.30
400	2.30	2.90	1.20	1.70	2.00	1.50	1.40	1.00
500	2.70	1.90	1.30	0.50	2.50	2.20	2.10	1.70
750	0.30	0.30	0.50	0.50	-2.00	-0.80	-1.40	-0.20
1000	0.00	0.10	0.30	0.40	1.30	1.00	0.70	0.40

Tableau 5.9.f: Pourcentage de déviation des valeurs moyennes des paramètres par rapport aux valeurs théoriques. $\lambda = 1$ $\alpha = 1$

N	JOHNK			
	moments		maximum de vraisemblance	
	α	λ	α	λ
20	42.45	27.68	21.90	8.78
40	24.30	13.95	16.35	8.78
60	18.30	13.50	7.50	2.25
80	10.80	4.95	7.65	2.70
100	12.60	10.80	4.65	3.60
150	7.35	6.75	1.50	0.90
200	8.25	5.18	4.05	1.13
300	3.30	3.60	1.35	1.58
400	2.70	2.25	0.90	0.45
500	0.60	1.80	0.00	1.13
750	0.60	0.68	-0.30	-0.23
1000	0.75	1.13	-0.75	-0.23

Tableau 5.9.g: Pourcentage de déviation des valeurs moyennes des paramètres par rapport aux valeurs théoriques. $\lambda = 4/9$ $\alpha = 2/3$

N	JOHNK			
	moments		maximum de vraisemblance	
	α	λ	α	λ
20	57.60	47.60	21.40	14.40
40	39.40	22.40	19.80	5.20
60	31.40	19.20	11.60	1.60
80	19.20	13.20	6.40	1.20
100	13.60	9.60	5.00	2.00
150	12.20	10.40	3.20	1.60
200	10.80	9.20	2.60	0.80
300	5.00	3.20	2.00	0.40
400	1.00	1.60	-0.20	0.40
500	3.60	3.20	1.00	0.80
750	3.40	2.80	1.00	0.80
1000	1.20	1.60	-0.40	0.00

Tableau 5.9.h: Pourcentage de déviation des valeurs moyennes des paramètres par rapport aux valeurs théoriques. $\lambda = 1/4$ $\alpha = 1/2$

N	JOHNK			
	moments		maximum de vraisemblance	
	α	λ	α	λ
20	311.00	52.50	352.50	6.88
40	65.75	42.50	19.00	2.50
60	38.75	18.13	18.00	0.00
80	34.00	21.88	12.50	3.13
100	17.75	11.25	5.25	0.63
150	13.25	11.25	5.50	3.13
200	13.00	9.38	4.25	1.25
300	11.00	5.63	5.25	0.63
400	6.25	3.13	5.25	1.88
500	6.50	5.00	3.75	2.50
750	1.75	1.25	1.50	0.63
1000	5.00	4.38	1.75	0.63

Tableau 5.9. j: Pourcentage de déviation des valeurs moyennes des paramètres par rapport aux valeurs théoriques. $\lambda = 4/25$ $\alpha = 2/5$

Pour λ plus petit que 1 seul l'algorithme de Johnk est utilisé. Plus λ est petit, plus les pourcentages de déviation augmentent, on note donc une légère baisse de précision de l'algorithme lorsque λ diminue. Cette baisse de précision est plus remarquable si la méthode des moments est choisie pour l'ajustement, cette méthode conduit à des pourcentages de déviation nettement plus élevés que ceux obtenus par l'utilisation de la méthode du maximum de vraisemblance; pour cette dernière méthode, les pourcentages de déviation sont presque tous inférieurs à 5% pour $N \geq 100$ pour les 3 valeurs de λ étudiées, tandis que pour atteindre les mêmes écarts, on doit avoir $N \geq 300$ et même $N = 750$ pour $\lambda = .16$ lorsque l'on utilise la méthode des moments. L'écart relatif est plus élevé sur α qu'il ne l'est sur λ et ce pour les deux méthodes d'ajustement et toutes les valeurs de N à part quelques exceptions.

Lorsque $\lambda \geq 1$ et que l'on utilise la méthode des moments pour l'ajustement il n'existe pas de différence marquée entre les deux algorithmes de génération. Les deux algorithmes conduisent à des écarts relatifs comparables. Les écarts sont presque tous inférieurs à 5% pour $N \geq 100$ (40 pour $\lambda = 64$) et inférieurs à 2% pour $N > 400$ (150 pour $\lambda = 64$).

L'emploi de la méthode du maximum de vraisemblance pour l'ajustement avantage nettement l'algorithme de Johnk sauf pour $\lambda = 1$ où les résultats deviennent comparables pour les deux algorithmes. Pour toutes les valeurs de λ , l'algorithme de Johnk conduit à des écarts relatifs généralement inférieurs à 5% pour $N \geq 100$ et inférieurs à 2% pour $N \geq 300$. Les résultats pour l'algorithme de Ramberg sont les mêmes sensiblement

pour $\lambda = 16$ et $\lambda = 1$ mais pour $\lambda = 8, 4$ et 2 , on obtient des écarts plus élevés pour l'algorithme de Ramberg que ceux obtenus pour l'algorithme de Johnk, particulièrement à $\lambda = 2$.

Pour les valeurs de $\lambda \geq 1$ on ne note pas d'écarts plus élevés sur l'un ou l'autre paramètre.

L'algorithme de Johnk semble donc supérieur à celui de Ramberg en prenant les écarts relatifs comme base de comparaison. C'est seulement dans le cas $\lambda = 1$ que les 2 algorithmes donnent des résultats comparables (ceci avait d'ailleurs déjà été observé en 5.3.1).

5.3.4 Temps de génération

De manière générale, les calculs sont plus longs lorsque l'on utilise l'algorithme de Johnk plutôt que celui de Ramberg. Cette différence entre les 2 algorithmes est accentuée lorsque λ ou N augmente pour atteindre un temps double lorsque $\lambda = 64$ et $N = 1000$. Lorsque $\lambda = 1$ le temps de calcul par les 2 algorithmes est très voisin quel que soit N . Ces résultats confirment ceux déjà observés par les différents auteurs (RAMBERG *et al.*, 1974; JOHNK, 1964).

CONCLUSION

Il résulte de l'ensemble des comparaisons effectuées que l'algorithme de Ramberg bien que plus rapide que l'algorithme de Johnk donne des

résultats en général inférieurs à ce dernier.

Le seul cas où l'on obtient des résultats comparables est atteint pour $\lambda = 1$, mais alors les 2 algorithmes ont des temps de calcul voisins.

Il semble donc nettement préférable d'utiliser l'algorithme de JOHNSON (qui est valable quelles que soient les valeurs des paramètres) si l'on désire effectuer des simulations précises de la loi Gamma. Si cependant, l'on ne désire pas une génération de très bonne qualité, et si les coûts de génération constituent un facteur important, alors l'algorithme de Ramberg pourrait être considéré pour $1 \leq \lambda \leq 8$. (pour $\lambda < 1$ cet algorithme n'est pas opérationnel).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BOBEE, B. (1975). Etude des propriétés mathématiques et statistiques des lois Pearson type III et Log-Pearson type III. U.Q., INRS-Eau, rapport scientifique No 55, 167 pages.

BERMAN, M.B. (1971). Generating Gamma distributed variates for computer simulation models. U.S.A.F. Project RAND, R-641-PR, 43 pages.

IMSL (1975). Computer subroutine libraries in mathematics and statistics [library contents], 5e édition. International Mathematical and Statistical Libraries INC., Houston, Texas.

JOHNK, M.D. (1964). Erzeugung von β -Betaverteilten und γ -Gammaverteilten zufallszahlen. *Metrika*. 8(1), pp. 5-15.

PHILLIPS, D.T. (1971). Generation of random Gamma variates from the two-parameter Gamma. *AIIE Trans.*, Vol. 3, No 3, pp. 191-198.

PHILLIPS, D.T.; BEIGHTLER, C.S. (1972). Procedures for generating Gamma variates with non-integer parameter sets. *J. Statis. Comput. Simul.*, Vol. 1, pp. 197-208.

RAMBERG, J.S.; TADIKAMALLA, P.R. (1974). An algorithm for generating Gamma variates based on the Weibull distribution. *AIIE Trans.*, Vol. 6, No 3, pp. 257-260.

WHEELER, D.J. (1974). Simulation of arbitrary Gamma distributions. AIIE Trans., Vol. 6, No 2, pp. 167-169.

WHITTAKER, J. (1973). A note on the generation of Gamma random variates with non-integral shape parameter. Proceedings of the second international symposium in hydrology. "Floods and droughts", sept. 11-13, 1972, Fort Collins, Colorado, U.S.A. (Edit.: E.F. Schulz, V.A. Koelzer and Khalid Mahmood).

ANNEXE A

DESCRIPTION DU TEST DE
KOLMOGOROV-SMIRNOV ET
DU TEST DE STUDENT

A-1. TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

Soit un échantillon de taille N classé par ordre croissant $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_N$. La statistique D_N de KOLMOGOROV-SMIRNOV (K.S.) est définie par:

$$D_N = \max_x | F(x) - F_N(x) |$$

où

$F(x)$ est la fonction de distribution théorique;

$F_N(x)$ est la fonction de distribution expérimentale

(en escalier) telle que:

$$F_N(x) = \frac{j}{N} \quad \text{si } x_j \leq x < x_{j+1} \quad (j = 1, \dots, N-1)$$

$$F_N(x) = 0 \quad \text{si } x < x_1$$

$$F_N(x) = 1 \quad \text{si } x_N \leq x$$

On peut définir pour $1 \leq j \leq N$ δ_j tel que:

$$\delta_j = \max \left[|F(x_j) - (j-1)/N|, |F(x_j) - j/N| \right]$$

on a alors:

$$D_N = \max_j (\delta_j)$$

BIRNBAUM (1952) a tabulé la distribution de D_N , il est donc possible de tester à un niveau de signification α la validité de la distribution choisie pour représenter l'échantillon:

Si $D_N < \Delta_N(5\%)$ la distribution est satisfaisante;

Si $D_N > \Delta_N(1\%)$ la distribution est incorrecte.

$\Delta_N(\alpha)$ représente la valeur de probabilité au dépassement.

N	$\Delta_N(5\%)$	$\Delta_N(1\%)$
20	.304	.364
40	.215	.258
60	.176	.210
80	.152	.182
100	.136	.163
150	.111	.133
200	.096	.115
300	.079	.094
400	.068	.082
500	.061	.073
750	.050	.060
1000	.043	.050

Table A1: Valeurs critiques pour le test KOLMOGOROV-SMIRNOV.

A-2. TEST DE STUDENT

Soit un échantillon de N observations $Y_1 \dots Y_N$ tiré d'une population normale de moyenne μ et d'écart-type σ . La moyenne et l'écart-type de l'échantillon sont:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N}$$

$$s = \left[\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}{N-1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

et l'écart-type de \bar{Y} est:

$$s(\bar{Y}) = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

On a alors que $\frac{\bar{Y} - \mu}{s(\bar{Y})}$ est distribué selon une loi de Student avec $N-1$ degrés de liberté.

Les hypothèses du test sont:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

et soit

$$t^* = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{s(\bar{Y})}$$

si $t^* \leq t(1-\alpha/2, N-1)$ on accepte H_0 au niveau de signification α sinon on rejette H_0 et on accepte H_1 .

Les valeurs critiques utilisées principalement dans cette étude sont:

$$\text{pour } \alpha = .01: \quad t(.995,99) = 2.631$$

$$\text{pour } \alpha = .05: \quad t(.975,99) = 1.987$$

Dans certains cas le nombre d'échantillons sur lesquels on ajuste une loi Gamma par la méthode du maximum de vraisemblance est différent de 100, le nombre de degrés de liberté de la variate t se trouve donc changé.

ANNEXE B

VALEURS INITIALES (INIT) UTILISEES
DANS LES ALGORITHMES DE JOHNK ET DE RAMBERG

	$\lambda = 64, \alpha = 8$		$\lambda = 16, \alpha = 4$		$\lambda = 8, \alpha = \sqrt{8}$	
	Ramberg	Johnk	Ramberg	Johnk	Ramberg	Johnk
20	70929	358012	74125896	9870215	74121593	5632398
40	99202	940281	521098	9011445368	77774122	22233
60	2257565	60124537	123621478	55522	41298790	3030975
80	8128775	78186825	85201349	51002347	2143698	11209852
100	55161593	940125378	500012975	3212304	22355641	88523301
150	6107208	4203579	933396524	1472583	44330	30002103
200	963258741	8100034966	5412	23104795	20032179	986532014
300	3574120	310590321	1327985	9420139	8683569	9696985
400	99852014	8523014087	52523146	45310876	2089123	99022274
500	12345678	98520123	9632100	85230	82823047	63640
750	18521439	210398560	447213	8000089301	55633321	5633987
1000	35762186	66632147	98885687	6393214	56329852	14563987

Tableau B.1: Nombre de départ (INIT) pour les algorithmes de génération (Ramberg et Johnk).

	$\lambda = 4, \alpha = 2$		$\lambda = 2, \alpha = \sqrt{2}$		$\lambda = 1, \alpha = 1$	
	Ramberg	Johnk	Ramberg	Johnk	Ramberg	Johnk
20	88442301	25860147	996369	21212307	99852026	21013658
40	31075109	89012457	22130465	77876420	8402	54210369
60	47310895	74120896	46462853	2017	20136874	96321012
80	8501	753901248	56015	142014	414125320	874236
100	298704	63149532	3001985	44463089	741474128	8520012
150	91203486	75302149	114709	296074	555663	3210
200	42031098	4021	369528	8630124	89865320	9963690
300	442310	9963691	534698	640423	7410001	755521113
400	8774502	41230128	1212089	1930541	9885220	663295841
500	12345	6663210	7676283	46428	888551493	775321
750	5123079	499987	20916	504	4411112	489012203
1000	852003197	522314	3089154	90431873	5552	4198602

Tableau B.2: Nombre de départ (INIT) pour les algorithmes de génération (Ramberg et Johnk).

N	$\lambda = 4/9, \alpha = 2/3$	$\lambda = 1/4, \alpha = 1/2$	$\lambda = 4/25, \alpha = 2/5$
20	3019732	446628	930781
40	44509815	33201208	31985204
60	131086	900127	6309
80	3195132	29930001	39725
100	32898901	8044	880123
150	830912	110986	229035714
200	394012	39960147	905
300	19283	40878	53097
400	65407	9021354	390210
500	80239	802216473	300917
750	71100952	6033798	6364
	8003199	988863014	2182593

Tableau B.3: Nombre de départ (INIT) pour l'algorithme de Johnk

ANNEXE C

PROGRAMMES DE GENERATION PAR
LES ALGORITHMES DE JOHNK ET DE RAMBERG



Le programme SIMUL génère des variates Gamma, Pearson type 3, log-Gamma, log-Pearson type 3 et Gamma généralisée. Les deux algorithmes utilisés (Johnk et Ramberg) génèrent des variates Gamma (VG) que l'on peut transformer par de simples opérations pour obtenir des variates suivant une autre distribution:

- Pearson type 3

$$VP = VG + M$$

où M est le paramètre d'origine de la distribution Pearson type 3;

- log-Gamma

$$LG = 10^{VG}$$

- log-Pearson type 3

$$LP = 10^{(VG-M)}$$

- Gamma généralisée

$$GG = VG^{1/S}$$

où S est un paramètre de la distribution Gamma généralisée.

Les données sont fournies au programme par une carte sur laquelle doivent figurer:

- α : paramètre de forme de la distribution Gamma (> 0)
- λ : paramètre d'échelle de la distribution Gamma (> 0)
- m: paramètre d'origine de la distribution Pearson

type 3 (= 0 si on veut une Gamma, \log_{10} -Gamma ou Gamma généralisée)

- s: paramètre de la distribution Gamma généralisée (=1 si on veut une Gamma, Pearson type 3, \log_{10} -Gamma ou \log_{10} -Pearson type 3)
- NECH: nombres d'échantillons (tirés de la même loi) que l'on veut générer
- N: taille de chacun des NECH échantillons
- IMET: Algorithme de génération
 = 0 Ramberg
 = 1 Johnk
- IKOL: Test de Kolmogorov-Smirnov
 = 0 non calculé
 = 1 calculé
- ILOG: = 0 si on désire une distribution Gamma, Pearson type 3 ou Gamma généralisée
 = 1 si on désire une distribution \log_{10} -Gamma ou \log_{10} -Pearson type 3
- INIT: un entier compris entre 1 et 2147483647, sert à initialiser l'algorithme de génération de variates uniformes.

Le format d'écriture doit être (4F10.2, 5I5, I10).

On répète cette carte autant de fois que l'on a de distributions différentes à générer.

Les échantillons générés se trouvent sur le fichier TAPE 1 que l'on peut conserver à titre de fichier permanent au moyen d'une carte contrôle:

SAVE (TAPE 1 = XXXXXXX)

ou

REPLACE (TAPE 1 = XXXXXXX)

PROGRAM SIMUL(INPUT,OUTPUT,TAPE1)

CE PROGRAMME GENERE DES VARIATES GAMMA,
LOG-GAMMA, PEARSON 3, LOG-PEARSON 3 ET
GAMMA GENERALISEE. SIMUL UTILISE DEUX
ALGORITHMES DE GENERATION, CELUI DE JOHNK
DANS JOGAM ET CELUI DE RAMBERG DANS RAGAM.
ON CALCULE AUSSI LA STATISTIQUE DE KOLMOGOROV-
SMIRNOV ASSOCIEE A L'ECHANTILLON GENERE.

VARIABLES LUES

ALPHA, PARAMETRE GAMMA (FORME), POSITIF
LAMBDA, PARAMETRE GAMMA (ECHELLE), POSITIF
M, PARAMETRE PEARSON (POSITION), POSITIF
S, PARAMETRE GAMMA GENERALISE (EXPOSANT)
NECH, NOMBRE D'ECHANTILLONS A GENERER
N, NOMBRE DE VARIATES PAR ECHANTILLON
IMET, METHODE DE GENERATION
 =0 RAMBERG
 =1 JOHNK
IKOL, TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV
 =0 NON-CALCULE
 =1 CALCULE
ILOG, DISTRIBUTION LOGARITHMIQUE
 =0 GAMMA, PEARSON 3, GAMMA GENERALISEE
 =1 LOG-GAMMA, LOG-PEARSON 3
INIT, UN ENTIER COMPRIS ENTRE 1 ET 2147483647

PIERRE ROUCHER
INRS-EAU
JUIN 1979

DIMENSION R(100), G(5000)
REAL LAMBDA, M
1 READ 900, ALPHA, LAMBDA, M, S, NECH, N, IMET, IKOL, ILOG, INIT
IF(N.EQ.0) STOP
ALPNEW=1.0
S1=1./S
PRINT 901, ALPHA, LAMBDA, M, S, N, INIT
IF(IMET-1) 2, 6, 6

ALGORITHME DE RAMBERG

2 PRINT 903
DO 5 J=1, NECH
CALL RAGAM(LAMBDA, ALPHA, ALPNEW, INIT, R, G, N)
ALPNEW=-1.
DO 3 K=1, N
G(K)=(G(K)+M)**S1
IF(ILOG.EQ.0) GO TO 3
G(K)=10**G(K)
3 CONTINUE
WRITE(1) (G(K), K=1, N)
IF(IKOL-1) 5, 4, 4
4 CALL KOLMO(G, N, ALPHA, LAMBDA, M, S, DN)

```

PRINT 902, DN
5 CONTINUE
GO TO 1

```

C
C
C

ALGORITHME DE JOHNK

```

6 PRINT 904
DO 9 J=1, NECH
CALL JOGAM(INIT, LAMBDA, ALPHA, N, R, G)
DO 7 K=1, N
G(K)=(G(K)+M)**S1
IF(ILOG.EQ.0) GO TO 7
G(K)=10**G(K)
7 CONTINUE
WRITE(1) (G(K), K=1, N)
IF(IKOL-1) 9, 8, 8
8 CALL KOLMO(G, N, ALPHA, LAMBDA, M, S, DN)
PRINT 902, DN
9 CONTINUE
GO TO 1

```

C

```

900 FORMAT(4F10.2, 5I5, I10)
901 FORMAT(1H1, 5X, *ALPHA=*, F7.2, 8X, *LAMBDA=*, F7.2, 8X, *M=*, F7.2, 8X, *S=*
., F7.2, 8X, *N=*, I5, 8X, *INIT=*, I12)
902 FORMAT(/, 25X, *RESULTAT DU TEST K-S: DN=*, F7.3)
903 FORMAT(/, 10X, *ALGORITHME DE RAMBERG*)
904 FORMAT(/, 10X, *ALGORITHME DE JOHNK*)
END

```

SUBROUTINE RAGAN(A,B,AP,ISEED,R,G,N)

CETTE SOUS-ROUTINE GENERE DES VARIATES GAMMA
PAR L'ALGORITHME DE RAMBERG

PARAMETRES A, PARAMETRE GAMMA (FORME), POSITIF
 B, PARAMETRE GAMMA (ECHELLE), POSITIF
 AP, PARAMETRE DE CONTROLE, SI AP EST
 POSITIF ON CALCULE C
 TSEED, UN ENTIER COMPRIS ENTRE
 1 ET 2147483647
 R, VECTEUR CONTENANT LES VARIATES UNIFORMES
 G, VECTEUR CONTENANT LES VARIATES GAMMA
 N, NOMBRE DE VARIATES A GENERER

DIMENSION R(1),G(1)
IF (AP.LT.0.0) GO TO 5
B=1./B
IF (A.LT.1.0) GO TO 1
IF (A.LE.10.0) GO TO 2
IF (A.GE.100.0) GO TO 3
C=1.539714+A*(0.056961-A*(-0.0011387+A*(0.000011163+
. A*(-0.00000004105))))
GO TO 4
1 PRINT 900
2 C=0.61243+A*(0.474874+A*(-0.09958+A*(0.01357476+
. A*(-0.0009868375+A*(0.00002889724))))
GO TO 4
3 C=3.25
4 CONTINUE
X1=1.+1./C
X2=1.+2./C
Y1=GAMMA(X1)
Y2=GAMMA(X2)
B1=SQRT(A/(Y2-Y1**2))*B
A1=A*B-B1*Y1
R=1./B
AP=-10.0
5 DO 7 J=1,N
6 CALL UNIF(ISEED,1,R)
G(J)=A1+B1*(-ALOG(R(1)))**(1./C)
IF (G(J).LT.0.0) GO TO 6
7 CONTINUE
900 FORMAT(/,25X,*LA PRECISION DIMINUE LORSQUE LAMBDA PLUS PETIT QUE 1
.*)
RETURN
END

SUBROUTINE JOGAM(ISEED,A,B,N,W,R)

CETTE SOUS-ROUTINE GENERE DES VARIATES GAMMA PAR
L ALGORITHME DE JOHNNK

PARAMETRES ISEED, UN ENTIER COMPRIS ENTRE
1 ET 2147483647, UTILISE DANS
UNIF, REMPLACE PAR UN NOUVEAU ISEED
A, PARAMETRE GAMMA (FORME), PLUS GRAND QUE .1
B, PARAMETRE GAMMA (ECHELLE), POSITIF
N, NOMBRE DE VARIATES A GENERER
W, VECTEUR DE TRAVAIL DE DIMENSION
A+1, AU RETOUR, CONTIENT LE NEGATIF
DES LOGARITHMES DES VARIATES UNIFORMES
R, VECTEUR CONTENANT LES VARIATES GAMMA

DIMENSION R(N),W(1)

DATA REPS/00014000000000000001R/

B=1./B

IA=A

A1=A-IA

IF(A1.LE.REPSP) GO TO 5

B1=1.0-A1

IF(B1.LE.REPSP) GO TO 7

VARIATES BETA

CALL BETA(ISEED,A1,B1,N,R)

1 N1=1+IA

DO 4 I=1,N

VARIATES UNIFORMES

CALL UNIF(ISEED,N1,W)

DO 2 J=1,N1

W(J)=-ALOG(W(J))

2 CONTINUE

A1=0.0

IF(IA.EQ.0) GO TO 4

DO 3 J=1,IA

A1=A1+W(J)

3 CONTINUE

VARIATES GAMMA

4 R(I)=(A1+R(I)*W(N1))*B

B=1./B

RETURN

CAS SPECIAUX, LORSQUE A EST ENTIER

5 DO 6 I=1,N

6 R(I)=0.0

GO TO 1

7 DO 8 I=1,N

8 R(I)=1.0

GO TO 1

END

SUBROUTINE BETA(ISEED,P,Q,N,R)

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

CETTE SOUS-ROUTINE GENERE DES VARIATES
BETA UTILISEES DANS JUGAM

PARAMETRES ISEED, UN ENTIER COMPRIS ENTRE
1 ET 2147483647, UTILISE DANS
UNIF, REMPLACE PAR UN NOUVEAU ISEED
P, PREMIER PARAMETRE BETA, POSITIF
Q, SECOND PARAMETRE BETA, POSITIF
N, NOMBRE DE VARIATES A GENERER
R, VECTEUR CONTENANT LES VARIATES BETA

DIMENSION R(N),U(2)

I=0

P1=1.0/P

Q1=1.0/Q

1 I=I+1

VARIATES UNIFORMES

2 CALL UNIF(ISEED,2,U)

X=U(1)**P1

Y=U(2)**Q1

Y=X+Y

REJETTE OU ACCEPTE

IF(Y.GT.1.0) GO TO 2

R(I)=X/Y

IF(I.LT.N) GO TO 1

RETURN

END

C
C
C
C

SUBROUTINE UNIF(ISEED,N,R)

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

CETTE SOUS-ROUTINE GENERE DES VARIATES PSEUDO-
ALEATOIRES DANS L'INTERVALLE (0,1) SELON UNE
LOI UNIFORME

PARAMETRES ISEED, UN ENTIER DE L'INTERVALLE
 (1,2147483647), REMPLACE A LA SORTIE
 N, NOMBRE DE VARIATES A GENERER
 R, VECTEUR CONTENANT LES VARIATES UNIFORMES

DIMENSION R(1)

I2P31M=(2**31)-1
S2PN31=1/(2**31)

DATA I2P31M/2147483647/,

• S2PN31/16614000000000000000B/

DO 1 I=1,N

ISEED=MOD(16807*ISEED,I2P31M)

1 R(I)=FLOAT(ISEED)*S2PN31

RETURN

END

SUBROUTINE KOLMO(G,N,A,B,C,D,DE)

CETTE SOUS-ROUTINE CALCULE LA STATISTIQUE
DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

PARAMETRES G, VARIATES, AU RETOUR CONTIENT LES
VALEURS DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION
N, NOMBRE DE VARIATES
A, PARAMETRE GAMMA (FORME)
B, PARAMETRE GAMMA (ECHELLE)
C, PARAMETRE PEARSON (POSITION)
DN, VALEUR DE LA STATISTIQUE K-S

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

DIMENSION G(1)
CALL TRI(G,N)
DO 1 I=1,N
X=A*((G(I)**D)-C)
CALL GAMIN(X,B,PROB)
IF(S.LT.0.) PROB=1.-PROB
G(I)=PROB
1 CONTINUE
DN=0.0
AN=N
DO 2 I=1,N
Y1=ABS(G(I)-(I-1)/AN)
Y2=ABS(G(I)-I/AN)
DEL=AMAX1(Y1,Y2)
DN=AMAX1(DN,DEL)
2 CONTINUE
RETURN
END
```

SUBROUTINE GAMIN(X,P,PROB)

```

C
C           CETTE SOUS-ROUTINE EVALUE LA FONCTION DE
C           DISTRIBUTION GAMMA INCOMPLETE
C
C           PARAMETRES      X,VALEUR JUSQU A LAQUELLE ON
C                           INTEGRE LA FONCTION GAMMA
C           P,PARAMETRE GAMMA (ECHELLE)
C           PROB,PROBABILITE
C
C           DIMENSION V(6),V1(6)
C           EQUIVALENCE (V(3),V1(1))
C                           TEST SUR X ET P
C
C           PROB=0.0
C           IF(X.GE.0.0) GO TO 5
C           PRINT 100
C           GO TO 9005
5  IF(P.GT.0.0.AND.P.LE.1000.) GO TO 10
C           PRINT 200
C           GO TO 9005
10 CONTINUE
C           IF(X.EQ.0.0) GO TO 9005
C                           LOG-GAMMA ET INITIALISE
C           PNLG=ALOG(ABS(GAMMA(P)))
C           CNT=P*ALOG(X)
C           YCNT=X+PNLG
C           IF((CNT-YCNT).GT.-674.657431956) GO TO 15
C           AX=0.0
C           GO TO 20
15 AX=EXP(CNT-YCNT)
20 BIG=1.E35
C           CUT=1.E-8
C                           CHOIX DE L ALGORITHME
C           IF((X.LE.1.0).OR.(X.LT.P)) GO TO 40
C                           EXPANSION EN FRACTIONS
C
C           Y=1.0-P
C           Z=X+Y+1.0
C           CNT=0.0
C           V(1)=1.0
C           V(2)=X
C           V(3)=X+1.0
C           V(4)=7*X
C           PROB=V(3)/V(4)
25 CNT=CNT+1.0
C           Y=Y+1.0
C           Z=Z+2.0
C           YCNT=Y*CNT
C           V(5)=V1(1)*Z-V(1)*YCNT
C           V(6)=V1(2)*Z-V(2)*YCNT
C           IF(V(6).EQ.0.0) GO TO 50
C           RATIO=V(5)/V(6)
C           REDUC=ABS(PROB-RATIO)
C           IF(REDUC.GT.CUT) GO TO 30
C           IF(REDUC.LE.RATIO*CUT) GO TO 35
30 PROB=RATIO

```

```

      GO TO 50
35  PROB=1.0-PROB*AX
      GO TO 9005
C
      EXPANSTION EN SERIES
40  RATIO=P
      CNT=1.0
      PROR=1.0
45  RATIO=RATIO+1.0
      CNT=CNT*X/RATIO
      PROB=PROB+CNT
      IF (CNT.GT.CUT) GO TO 45
      PROR=PROB*AX/P
      GO TO 9005
50  DO 55 I=1,4
      V(I)=V1(I)
55  CONTINUE
      IF (ABS(V(5)).LT.BIG) GO TO 25
C
      DO 60 I=1,4
      V(I)=V(I)/BIG
60  CONTINUE
      GO TO 25
100 FORMAT(/,15X,*X EST NEGATIF*)
200 FORMAT(/,15X,*P EST NEGATIF*)
9005 RETURN
      END

```

SUBROUTINE TRI(X,N)

CETTE SOUS-ROUTINE EFFECTUE UN TRI ASCENDANT
SUR LES VALEURS DE V

PARAMETRES V, VECTEUR CONTENANT LES VALEURS A TRIER
ET AU RETOUR, LES VALEURS TRIÉES
N, NOMBRE DE VALEURS A TRIER

C
C
C
C
C
C
C
C

```

DIMENSION X(1)
INT=N
1 IF(INT.EQ.1) RETURN
  INT=INT/2
  IFIN=N-INT
2 MARK=0
  DO 4 I=1,IFIN
    J=I+INT
    XDEI=X(I)
    IF(XDEI-X(J))4,4,3
3 X(I)=X(J)
  X(J)=XDEI
  MARK=1
4 CONTINUE
  IF(MARK)2,1,2
END

```

FUNCTION GAMMA(Y)

C
C
C

APPROXIMATION DE LA FONCTION GAMMA COMPLETE DE Y

DIMENSION B(8)

DATA B/-.577191652,.988205891,-.897056937,.918206857,
-.756704078,.482199394,-.193527818,.035868343/

YYY=1.0

IF(Y-1) 1,2,2

1 X=Y

GO TO 4

2 N=Y

X=Y-N

NN=N-1

IF(NN.EQ.0) GO TO 4

DO 3 I=1,NN

YYY=YYY*(I+X)

3 CONTINUE

4 GAMMA=YYY*(1+B(1)*X+B(2)*X**2+B(3)*X**3+B(4)*X**4
+B(5)*X**5+B(6)*X**6+B(7)*X**7+B(8)*X**8)

IF(Y.LT.1.) GAMMA=GAMMA/Y

RETURN

END