

**Record Number:** 270  
**Author, Monographic:** Bobée, B.  
**Author Role:**  
**Title, Monographic:** Ajustement de la distribution log-Pearson type III  
**Translated Title:**  
**Reprint Status:**  
**Edition:**  
**Author, Subsidiary:**  
**Author Role:**  
**Place of Publication:** Québec  
**Publisher Name:** INRS-Eau  
**Date of Publication:** 1974  
**Original Publication Date:**  
**Volume Identification:**  
**Extent of Work:** 34  
**Packaging Method:** pages  
**Series Editor:**  
**Series Editor Role:**  
**Series Title:** INRS-Eau, Rapport de recherche  
**Series Volume ID:** 27  
**Location/URL:**  
**ISBN:** 2-89146-017-0  
**Notes:** Rapport annuel 1973-1974  
**Abstract:** 10.00\$  
**Call Number:** R000027  
**Keywords:** rapport/ ok/ dl

Ajustement de la distribution  
log-Pearson type III

INRS-Eau  
UNIVERSITE DU QUEBEC  
C.P. 7500, Sainte-Foy  
Québec G1V 4C7

RAPPORT SCIENTIFIQUE No 27  
1974

Rapport rédigé pour  
INRS-Eau

par  
B. Bobée

## Résumé

Une méthode d'ajustement de la distribution Log-Pearson type III à une série de valeurs observées est proposée, elle consiste à égaliser les moments théoriques de la distribution Log-Pearson type III aux moments de l'échantillon.

Elle conduit à des résultats différents de ceux obtenus par la méthode du Water Resources Council (qui est un ajustement sur la série des logarithmes des valeurs observées).

La méthode proposée semble mieux tenir compte des valeurs extrêmes de l'échantillon et permettre une meilleure évaluation des débits de période de retour élevée.

## Mots-clés

Ajustement, Log-Pearson type III distribution, crues.

## Introduction

Le comité d'hydrologie du Water Resources Council a recommandé l'utilisation de la loi Log-Pearson type III pour représenter les débits de crue. La méthode préconisée pour ajuster cette loi est d'égaliser la moyenne, la variance non biaisée et le coefficient d'asymétrie non biaisé de la série des logarithmes aux moments théoriques de la distribution Pearson type III (méthode des moments). Une nouvelle méthode est proposée dans ce rapport, elle consiste à ajuster les moments de l'échantillon original aux moments théoriques de la distribution Log -Pearson type III, et ne conduit pas au même résultat que la méthode usuelle.

## 1. Rappels des propriétés de la loi Log-Pearson type III

Ces rappels sont tirés d'une étude plus complète de la loi Log Pearson type III (Bobee 1973).

### 1.1 Forme générale de la loi

Une variable suit la distribution Log Pearson type III si le logarithme de cette variable est distribué suivant la loi Pearson III.

La fonction densité de probabilité de la distribution Log Pearson type III (LPIII) peut s'écrire:

$$g(x) = \frac{|\alpha|}{\Gamma(\lambda)} e^{-\alpha(\log_a x - m)} \left[ \alpha(\log_a x - m) \right]^{\lambda-1} \frac{k}{x} \quad (1)$$

où:

$a$  est la base de la transformation logarithmique

$k = \log_a e = 1/\text{Ln } a$  (on considère les valeurs  $a$  telles que  $k > 0$ )

$\lambda > 0$

$-\infty < m < +\infty$

L'intervalle de variation de  $x$  est:

si  $\alpha > 0$   $a^m = e^{m/k} \leq x < +\infty$

si  $\alpha < 0$   $0 \leq x \leq a^m = e^{m/k}$

la fonction densité (1) peut encore s'écrire

$$g(x) = \frac{|\alpha| k}{\Gamma(\lambda)} e^{\alpha m} \frac{1}{x^{1+\alpha k}} \left[ \alpha (k \ln x - m) \right]^{\lambda-1} \quad (2)$$

### 1.2 Moments et coefficients caractéristiques de la loi

On pose  $\beta = \alpha k$  et l'on peut montrer que:

- . si  $\beta = \alpha k > 0$ , les moments non centrés de la distribution LPIII n'existent que jusqu'à l'ordre  $r < \beta$
- . si  $\beta = \alpha k < 0$ , les moments non centrés de la distribution LPIII sont toujours définis.

La valeur du moment non centré d'ordre  $r$ , lorsqu'il est défini est:

$$\left( \mu'_r \right)_L = \frac{e^{mr/k}}{\left( 1 - \frac{r}{\beta} \right)^\lambda} \quad (3)$$

Dans le cas particulier de la loi Log-Gamma (LG) on a  $m = 0$  donc:

$$\left( \mu'_r \right)_{LG} = \frac{1}{\left( 1 - \frac{r}{\beta} \right)^\lambda} \quad (5)$$

Le coefficient de variation  $\left( C_v \right)_L$  et le coefficient d'asymétrie

$\left( C_s \right)_L$  de la distribution LPIII sont indépendants de  $m$  et sont

donc les mêmes que ceux de la distribution LG. Ces coefficients ont été tabulés en fonction de  $\alpha$  et  $\lambda$  (Bobée 1973) et il est possible d'en déduire les courbes donnant  $\left( C_s \right)_L$  en fonction de  $\left( C_v \right)_L$  :

- pour  $\lambda$  fixé (c'est-à-dire pour une valeur donnée du coefficient d'asymétrie de la loi Pearson type III) on obtient une courbe sur laquelle on se déplace lorsque  $\alpha$  varie. En faisant varier  $\lambda$  on obtient un ensemble de courbes (fig. 1)
- pour  $\beta$  fixé (c'est-à-dire pour  $\alpha$  donné) on obtient une courbe, chaque point de cette courbe correspondant à une valeur  $\lambda$ . En faisant varier  $\beta$  on obtient un ensemble de courbes (fig 2).

Pour  $\left( C_s \right)_L$  et  $\left( C_v \right)_L$  il est donc possible à partir des figures 1 et 2 de déduire les valeurs  $C_s$  et  $\beta$  donc  $\lambda$  et  $\alpha$ .

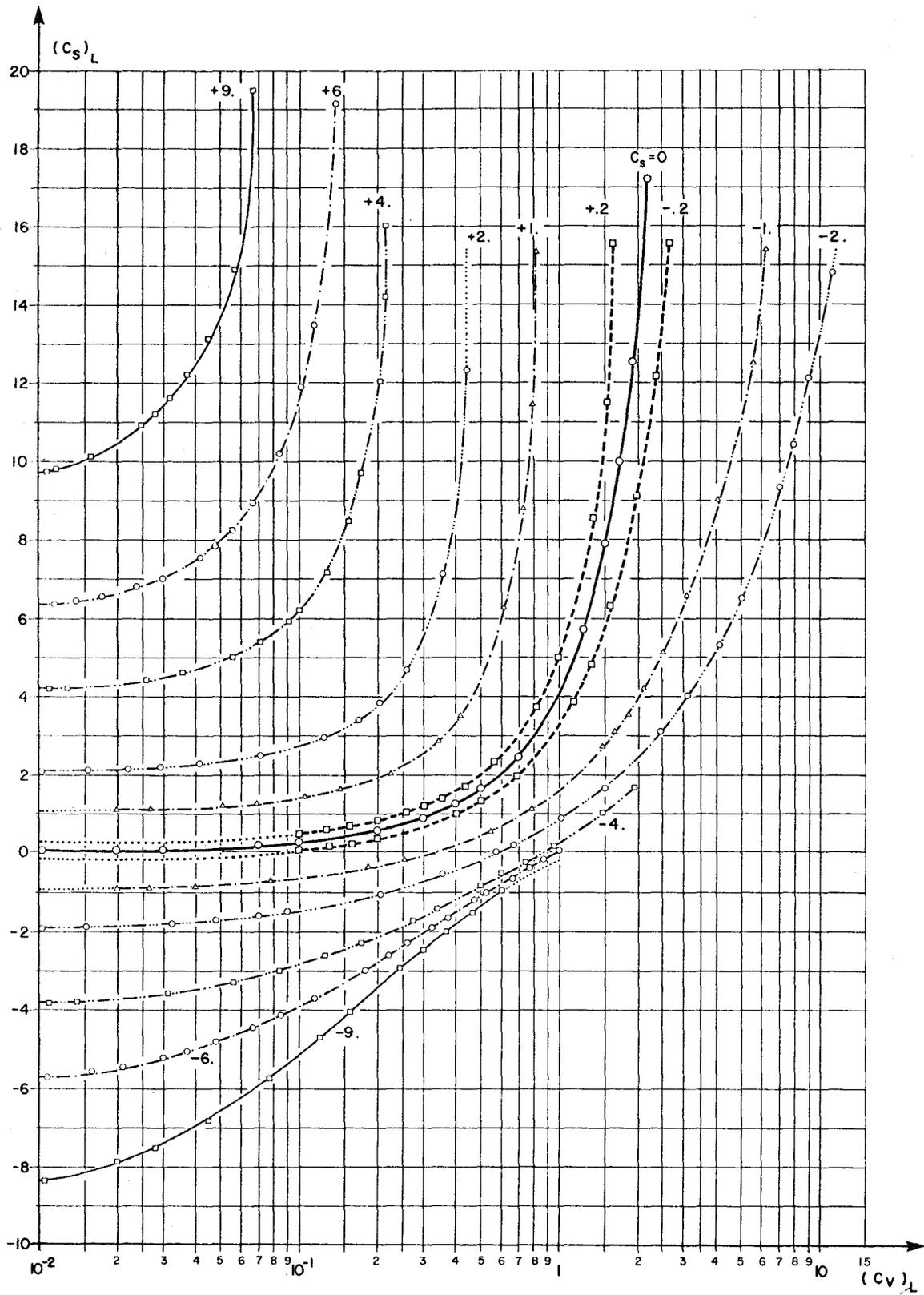


FIGURE 1 : Relation entre  $(C_s)_L$  et  $(C_v)_L$  pour  $\lambda$  fixé.

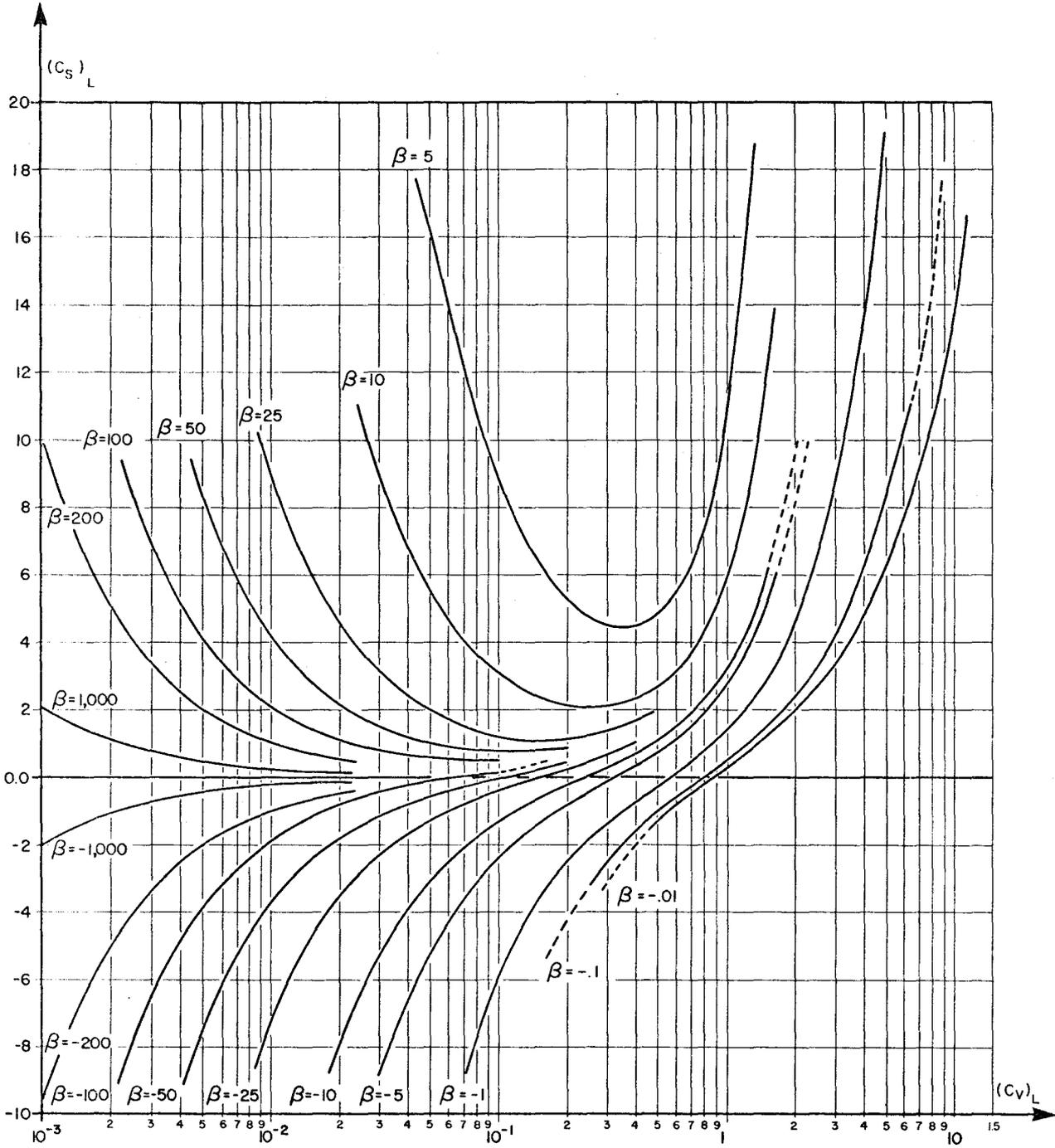


FIGURE 2 . Relation entre  $(C_S)_L$  et  $(C_V)_L$  pour  $\beta$  fixé.

## 2. Ajustement de la Loi Log-Pearson III aux séries observées.

### 2.1 Méthode du Water Resources Council

Le comité d'hydrologie du W.R.C. (1967) a préconisé l'emploi de la loi Log-Pearson type III pour l'étude des débits de crue.

Dans la méthode d'ajustement proposée:

- on considère la série des logarithmes des valeurs de débits;
- on détermine la moyenne, la variance non biaisée et le coefficient d'asymétrie non biaisé de la série transformée;
- on applique la méthode des moments en égalant les valeurs théoriques de moyenne, variance, coefficient d'asymétrie aux valeurs correspondantes de l'échantillon (ce qui permet la détermination des paramètres de la loi);
- connaissant les caractéristiques de l'échantillon, il est donc possible de déterminer le logarithme d'un débit de période de retour donné  $Q_T$ , donc ce débit par la relation

$$\text{Log } Q_T = M + KS$$

avec:

M moyenne de la série des logarithmes

S écart type non biaisé de la série des logarithmes

K variable réduite de la loi Pearson III dépendant de  $C_s$  et T

T période de retour.

La technique du W.R.C. consiste en un ajustement de la loi Pearson type III sur la série des logarithmes des valeurs observées par la méthode des moments, ce qui n'est pas équivalent à l'ajustement de la loi Log-Pearson type III sur la série des valeurs brutes par la méthode des moments.

Dans le premier cas la moyenne théorique de la distribution Pearson type III est ajustée sur la moyenne arithmétique des logarithmes des valeurs brutes, c'est-à-dire sur le logarithme de la moyenne géométrique

des valeurs brutes; dans le deuxième cas, la moyenne théorique de la distribution Log-Pearson type III est ajustée sur la moyenne arithmétique des valeurs brutes.

## 2.2 Ajustement de la distribution Log-Pearson type III

Les moments théoriques non centrés de la distribution LP III s'expriment facilement en fonction des paramètres  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $m$  de la distribution Pearson type III, d'après la relation (3).

Par contre, l'expression des moments centrés par rapport à la moyenne, du coefficient de variation, du coefficient d'asymétrie ont une forme plus complexe, c'est pourquoi du point de vue pratique il est préférable d'ajuster les moments non centrés de l'échantillon des valeurs brutes aux valeurs correspondantes de la distribution théorique.

Soient  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  les moments non centrés de l'échantillon des valeurs brutes  $x_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) on a:

$$\ell_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^r \quad (7)$$

En appliquant la méthode des moments il vient:

$$\text{Ln } \ell_1 = \frac{m}{k} - \lambda \text{Ln} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \quad (8)$$

$$\text{Ln } \ell_2 = \frac{2m}{k} - \lambda \text{Ln} \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \quad (9)$$

$$\text{Ln } \ell_3 = \frac{3m}{k} - \lambda \text{Ln} \left(1 - \frac{3}{\beta}\right) \quad (10)$$

La résolution des équations (8), (9), (10) permet la détermination des valeurs  $\beta_0, \lambda_0, m_0$ .

L'application de la méthode des moments en considérant la moyenne, la variance, le coefficient d'asymétrie et en les égalant aux valeurs

théoriques correspondantes conduiraient également à  $\alpha_0, \lambda_0, m_0$ . Si par contre, on utilise la variance et le coefficient non biaisés on arrive à des valeurs légèrement différentes (l'écart étant fonction de la taille de l'échantillon).

### 2.3 Méthode pratique de résolution

Il est possible de montrer que le système des équations (8), (9), (10) est équivalent au système des équations (11), (12), (13):

$$\frac{\text{Ln} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right)^3 / \left( 1 - \frac{3}{\beta} \right) \right]}{\text{Ln} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right)^2 / \left( 1 - \frac{2}{\beta} \right) \right]} = \frac{\text{Ln } \ell_3 - 3 \text{ Ln } \ell_1}{\text{Ln } \ell_2 - 2 \text{ Ln } \ell_1} \quad (11)$$

$$\lambda = \frac{\text{Ln } \ell_2 - 2 \text{ Ln } \ell_1}{\text{Ln} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right)^2 / \left( 1 - \frac{2}{\beta} \right) \right]} \quad (12)$$

$$m = k \left[ \text{Ln } \ell_1 + \lambda \text{ Ln} \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right) \right] \quad (13)$$

Lorsque  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  sont déterminés à partir de l'échantillon, l'équation (11) permet de déterminer  $\beta_0$ , il est ensuite possible de déterminer  $\lambda_0$  par (12), puis  $m_0$  par (13).

Dans les applications, deux cas sont à considérer suivant la base a des logarithmes.

a) Transformation logarithme népérien (base e)

on a alors  $k = 1$ , donc  $\alpha_{\text{Ln}} = \beta$

b) Transformation logarithme décimal (base 10)

on a alors  $k = \log_{10} e = \frac{1}{\text{Ln}10} \approx .434$ , et  $\alpha_{\log} \approx 2.303 \beta$

La relation (11) est implicite en  $\beta$  et l'on a tabulé

$$B = \frac{\text{Ln} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right)^3 / \left( 1 - \frac{3}{\beta} \right) \right]}{\text{Ln} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right)^2 / \left( 1 - \frac{2}{\beta} \right) \right]} \quad \text{en fonction de } \beta \text{ de manière à pouvoir}$$

déduire  $\alpha$  connaissant  $B = \frac{\text{Ln } \ell_2 - 3 \text{ Ln } \ell_1}{\text{Ln } \ell_2 - 2 \text{ Ln } \ell_1}$

La table 1, donne  $B$  en fonction de  $\alpha_{\text{LN}}$   
(transformation logarithme népérien).

La table 2, donne  $B$  en fonction de  $\alpha_{\log}$   
(transformation logarithme décimal).

Donc connaissant  $B$  et suivant la transformation utilisée, il est possible de déduire  $\alpha_0$ , puis  $\lambda_0$  et  $m_0$  à l'aide des relations (12) et (13).

Lorsque les paramètres  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $m$  sont déterminés, il est possible de déterminer un débit de période de retour donnée  $T$  (ou de probabilité au dépassement connue) en effet

$$\log_a Q_T = \mu'_1 (1 + K C_V) \quad (14)$$

$\mu'_1$ ,  $K$ ,  $C_V$  étant les valeurs théoriques déduites lorsque l'on connaît

$\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $m$  par:

$$\mu'_1 = m + \frac{\lambda}{\alpha} \quad (15)$$

$$C_V = \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + m \alpha} \cdot \frac{\alpha}{|\alpha|} \quad (16)$$

$\alpha_{Ln}$	B	$\alpha_{Ln}$	B	$\alpha_{Ln}$	B	$\alpha_{Ln}$	B
3.001	23.6326	5.5	3.68151	31	3.0720	72	3.02878
3.002	21.2479	6.0	3.58097	32	3.06782	74	3.02797
3.003	19.8610	6.5	3.50651	33	3.06559	76	3.02721
3.004	18.8823	7.0	3.44908	34	3.06351	78	3.02649
3.005	18.1268	7.5	3.40343	35	3.06155	80	3.02581
3.006	17.5125	8.0	3.36624	36	3.05971	82	3.02516
3.007	16.9954	8.5	3.33536	37	3.05798	84	3.02454
3.008	16.5495	9.0	3.30930	38	3.05635	86	3.02395
3.009	16.1578	9.5	3.28701	39	3.05480	88	3.02339
3.010	15.8088	10	3.26773	40	3.05334	90	3.02286
3.02	13.5550	11	3.23603	41	3.05196	92	3.02235
3.03	12.2811	12	3.21106	42	3.05064	94	3.02186
3.04	11.4038	13	3.19087	43	3.04939	96	3.02139
3.05	10.7415	14	3.17422	44	3.04820	98	3.02094
3.06	10.2137	15	3.16024	45	3.04707	100	3.02051
3.07	9.77777	16	3.14834	46	3.04598	125	3.01633
3.08	9.40848	17	3.13809	47	3.04495	150	3.01356
3.09	9.08955	18	3.12916	48	3.04396	175	3.01159
3.1	8.80997	19	3.12132	49	3.04302	200	3.01013
3.2	7.12276	20	3.11437	50	3.04211	250	3.00808
3.3	6.27521	21	3.10818	52	3.04041	300	3.00672
3.4	5.74308	22	3.10263	54	3.03884	350	3.00576
3.5	5.37124	23	3.09762	56	3.03739	400	3.00503
3.6	5.09411	24	3.09307	58	3.03604	450	3.00447
3.7	4.87836	25	3.08893	60	3.03479	500	3.00402
3.8	4.70498	26	3.08514	62	3.03362	600	3.00335
3.9	4.56225	27	3.08167	64	3.03252	700	3.00287
4.0	4.44247	28	3.07846	66	3.03150	800	3.00251
4.5	4.04742	29	3.07550	68	3.03054	900	3.00223
5.0	3.82500	30	3.07275	70	3.02963	1000	3.00201

TABLE I : Relation entre  $\alpha_{Ln}$  et B (Logarithme népérien)

$\alpha_{Ln}$	B	$\alpha_{Ln}$	B	$\alpha_{Ln}$	B	$\alpha_{Ln}$	B
-0.001	2.04623	-2.5	2.59470	-31	2.94028	-72	2.97315
-0.002	2.05195	-3.0	2.63252	-32	2.94202	-74	2.97386
-0.003	2.05599	-3.5	2.66379	-33	2.94365	-76	2.97452
-0.004	2.05923	-4	2.69009	-34	2.94519	-78	2.97515
-0.005	2.06201	-5	2.73194	-35	2.94666	-80	2.97576
-0.006	2.06446	-6	2.76377	-36	2.94804	-82	2.97633
-0.007	2.06669	-7	2.78881	-37	2.94936	-84	2.97688
-0.008	2.06873	-8	2.80904	-38	2.95061	-86	2.97740
-0.009	2.07063	-9	2.82572	-39	2.95180	-88	2.97790
-0.01	2.07242	-10	2.83972	-40	2.95293	-90	2.97838
-0.02	2.08654	-11	2.85163	-41	2.95402	-92	2.97884
-0.03	2.09727	-12	2.86189	-42	2.95505	-94	2.97927
-0.04	2.10634	-13	2.87082	-43	2.95604	-96	2.97969
-0.05	2.11440	-14	2.87867	-44	2.95698	-98	2.98010
-0.06	2.12175	-15	2.88562	-45	2.95789	-100	2.98049
-0.07	2.12857	-16	2.89181	-46	2.95876	-125	2.98431
-0.08	2.13498	-17	2.89736	-47	2.95959	-150	2.98689
-0.09	2.14105	-18	2.90238	-48	2.96039	-175	2.98873
-0.1	2.14684	-19	2.90692	-49	2.96116	-200	2.99012
-0.2	2.19521	-20	2.91107	-50	2.96190	-250	2.99208
-0.3	2.23391	-21	2.91485	-52	2.96330	-300	2.99339
-0.4	2.26716	-22	2.91833	-54	2.96460	-350	2.99433
-0.5	2.29663	-23	2.92154	-56	2.96581	-400	2.99503
-0.6	2.32320	-24	2.92450	-58	2.96694	-450	2.99558
-0.7	2.34742	-25	2.92725	-60	2.96800	-500	2.99602
-0.8	2.36969	-26	2.92980	-62	2.96899	-600	2.99668
-0.9	2.39028	-27	2.93218	-64	2.96992	-700	2.99715
-1	2.40942	-28	2.93441	-66	2.97080	-800	2.99751
-1.5	2.48842	-29	2.93649	-68	2.97163	-900	2.99778
-2	2.54794	-30	2.93845	-70	2.97241	-1000	2.99800

TABLE I (suite): Relation entre  $\alpha_{Ln}$  et B (logarithme népérien).

$\alpha_{\log}$	B	$\alpha_{\log}$	B	$\alpha_{\log}$	B	$\alpha_{\log}$	B
6.910	23.7204	7.13	8.90335	28	3.20754	68	3.07401
6.912	21.5275	7.14	8.78742	29	3.19857	70	3.07171
6.914	20.2055	7.15	8.67731	30	3.19035	72	3.06954
6.916	19.2585	7.2	8.19863	31	3.18278	74	3.06750
6.918	18.5215	7.3	7.48802	32	3.17579	76	3.06558
6.920	17.9189	7.4	6.97594	33	3.16932	78	3.06376
6.922	17.4097	7.5	6.58378	34	3.16330	80	3.06204
6.924	16.9693	7.6	6.27107	35	3.15770	82	3.06041
6.926	16.5815	7.7	6.01435	36	3.15248	84	3.05887
6.928	16.2353	7.8	5.79891	37	3.14758	86	3.05740
6.93	15.9230	8	5.45573	38	3.14300	88	3.05600
6.94	14.7039	9	4.55107	39	3.13868	90	3.05467
6.95	13.8309	10	4.14523	40	3.13463	92	3.05341
6.96	13.1544	11	3.91092	41	3.13080	94	3.05220
6.97	12.6045	12	3.75741	42	3.12718	96	3.05104
6.98	12.1428	13	3.64872	43	3.12376	98	3.04993
6.99	11.7461	14	3.56759	44	3.12052	100	3.04887
7.00	11.3992	15	3.50465	45	3.11744	125	3.03862
7.01	11.0916	16	3.45436	46	3.11452	150	3.03193
7.02	10.8159	17	3.41325	47	3.11174	175	3.02721
7.03	10.5665	18	3.37900	48	3.10909	200	3.02371
7.04	10.3391	19	3.35002	50	3.10415	250	3.01886
7.05	10.1304	20	3.32517	52	3.09964	300	3.01565
7.06	9.9379	21	3.30363	54	3.09551	400	3.01168
7.07	9.7594	22	3.28477	56	3.09170	500	3.00932
7.08	9.59317	23	3.26813	58	3.08819	600	3.00775
7.09	9.43780	24	3.25333	60	3.08493	700	3.00663
7.10	9.29207	25	3.24008	62	3.08191	800	3.00580
7.11	9.15498	26	3.22816	64	3.07910	900	3.00515
7.12	9.02565	27	3.21736	66	3.07647	1000	3.00463

TABLE 2 : Relation entre  $\alpha_{\log}$  et B (logarithme décimaux).

$\alpha_{\log}$	B	$\alpha_{\log}$	B	$\alpha_{\log}$	B	$\alpha_{\log}$	B
-0.001	2.04079	-2.5	2.42480	-29	2.86735	-70	2.93920
-0.002	2.04521	-3.0	2.46013	-30	2.87106	-72	2.94076
-0.003	2.04826	-3.5	2.49112	-31	2.87458	-74	2.94225
-0.004	2.05068	-4.0	2.51858	-32	2.87791	-76	2.94366
-0.005	2.05273	-4.5	2.54311	-33	2.88106	-78	2.94501
-0.006	2.05452	-5.0	2.56519	-34	2.88406	-80	2.94629
-0.007	2.05613	-5.5	2.58517	-35	2.88691	-82	2.94751
-0.008	2.05760	-6.0	2.60335	-36	2.88962	-84	2.94868
-0.009	2.05896	-7.0	2.63524	-37	2.89221	-86	2.94980
-0.01	2.06023	-8.0	2.66231	-38	2.89468	-88	2.95087
-0.02	2.07005	-9	2.68560	-39	2.89703	-90	2.95190
-0.03	2.07728	-10	2.70585	-40	2.89929	-92	2.95288
-0.04	2.08329	-11	2.72363	-41	2.90144	-94	2.95383
-0.05	2.08855	-12	2.73937	-42	2.90351	-96	2.95474
-0.06	2.09329	-13	2.75340	-43	2.90549	-98	2.95561
-0.07	2.09765	-14	2.76599	-44	2.90739	-100	2.95645
-0.08	2.10173	-15	2.77735	-45	2.90922	-125	2.96478
-0.09	2.10556	-16	2.78766	-46	2.91098	-150	2.97043
-0.1	2.10920	-17	2.79705	-47	2.91267	-175	2.97452
-0.2	2.13918	-18	2.80564	-48	2.91429	-200	2.97762
-0.3	2.16304	-19	2.81353	-50	2.91737	-250	2.98199
-0.4	2.18374	-20	2.82081	-52	2.92023	-300	2.98494
-0.5	2.20235	-21	2.82753	-54	2.92290	-350	2.98706
-0.6	2.21944	-22	2.83377	-56	2.92540	-400	2.98865
-0.7	2.23533	-23	2.83958	-58	2.92774	-500	2.99089
-0.8	2.25023	-24	2.84499	-60	2.92994	-600	2.99240
-0.9	2.26430	-25	2.85004	-62	2.93201	-700	2.99347
-1	2.27764	-26	2.85478	-64	2.93396	-800	2.99428
-1.5	2.33592	-27	2.85922	-66	2.93581	-900	2.99492
-2.	2.38398	-28	2.86341	-68	2.93755	-1000	2.99542

TABLE 2 ( suite ): Relation entre  $\alpha_{\log}$  et B (logarithmes décimaux)

K est donné par les tables de la variable Pearson type III standardisée.  
K dépend de T et de  $C_S$  tel que:

$$C_S = \frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \quad (17)$$

#### Remarques

Les figures 3, 4, 5, 6 déduites des tables 1 et 2 permettent aussi la détermination de  $\beta$  connaissant B, il est ensuite possible d'en déduire  $\alpha$  suivant la transformation utilisée, cette détermination est moins précise que celle que l'on peut effectuer à l'aide des tables.

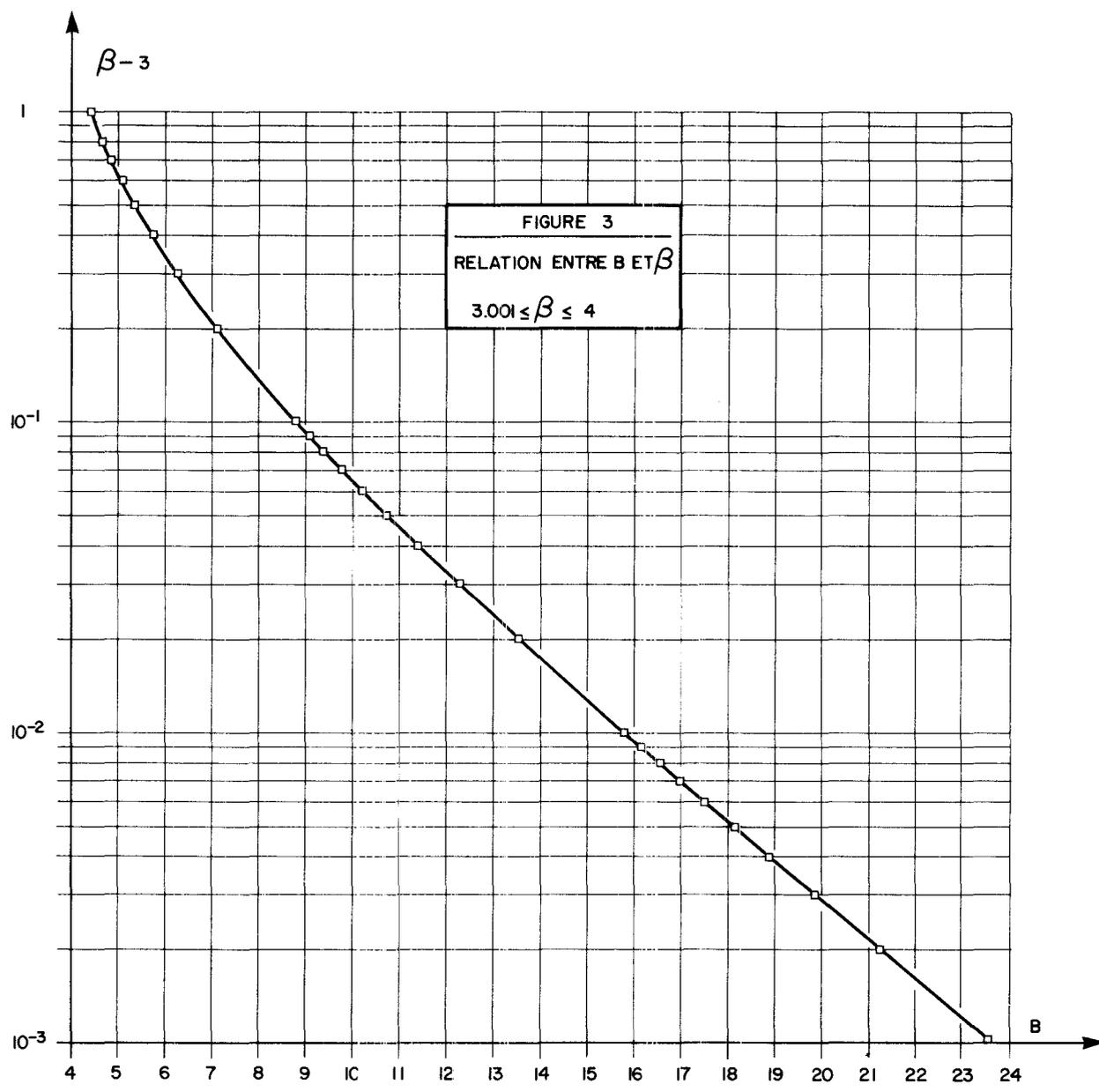
La détermination des paramètres  $\alpha$  et  $\lambda$  peut également s'effectuer à l'aide des figures (1) et (2), en effet à partir de la série observée il est possible de calculer  $[C_S]_I$  et  $[C_V]_I$  et d'estimer  $\lambda$  et  $\beta$  et ensuite  $\alpha$  (connaissant la transformation logarithmique utilisée); cette méthode est peu précise mais pourrait être améliorée en traçant de plus nombreuses courbes sur les figures 1 et 2 pour diminuer l'erreur d'interpolation.

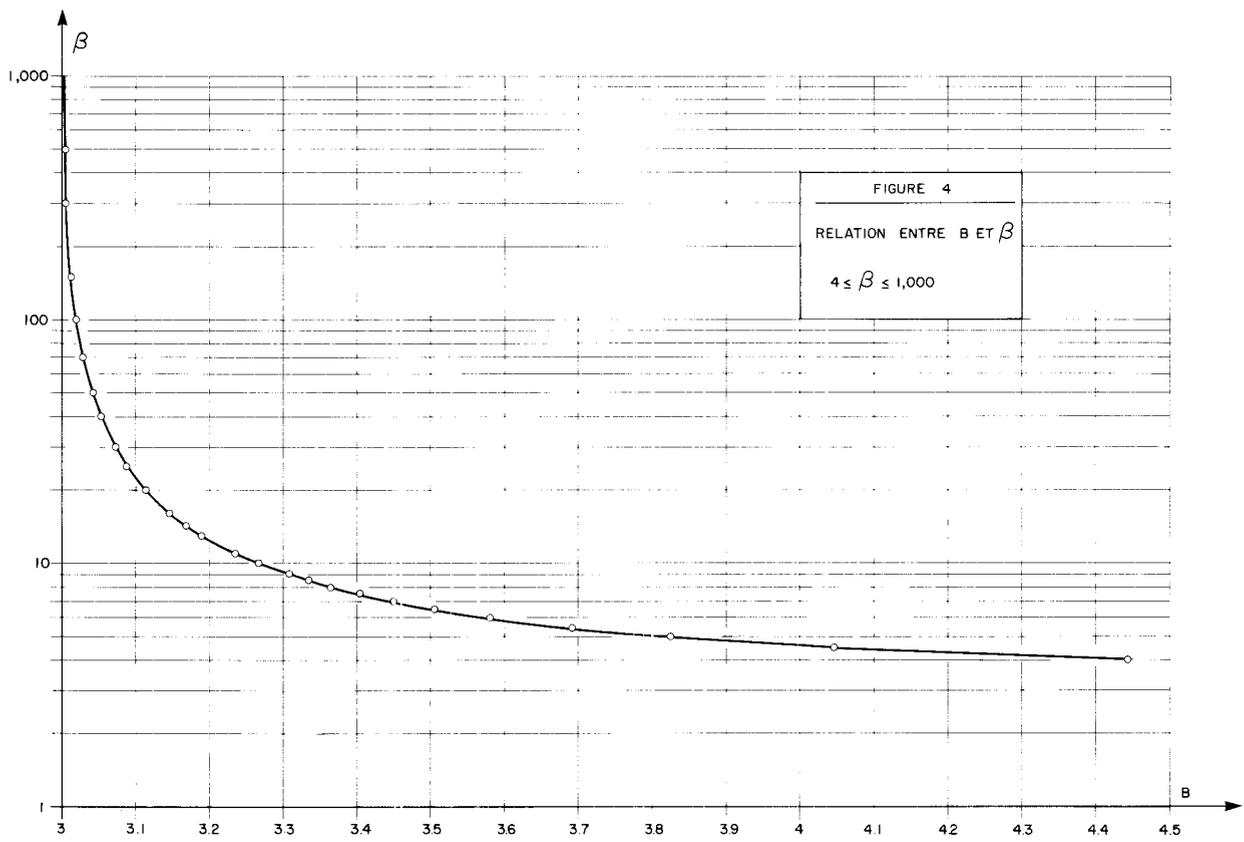
#### 2.4 Valeurs approchées de $\beta$

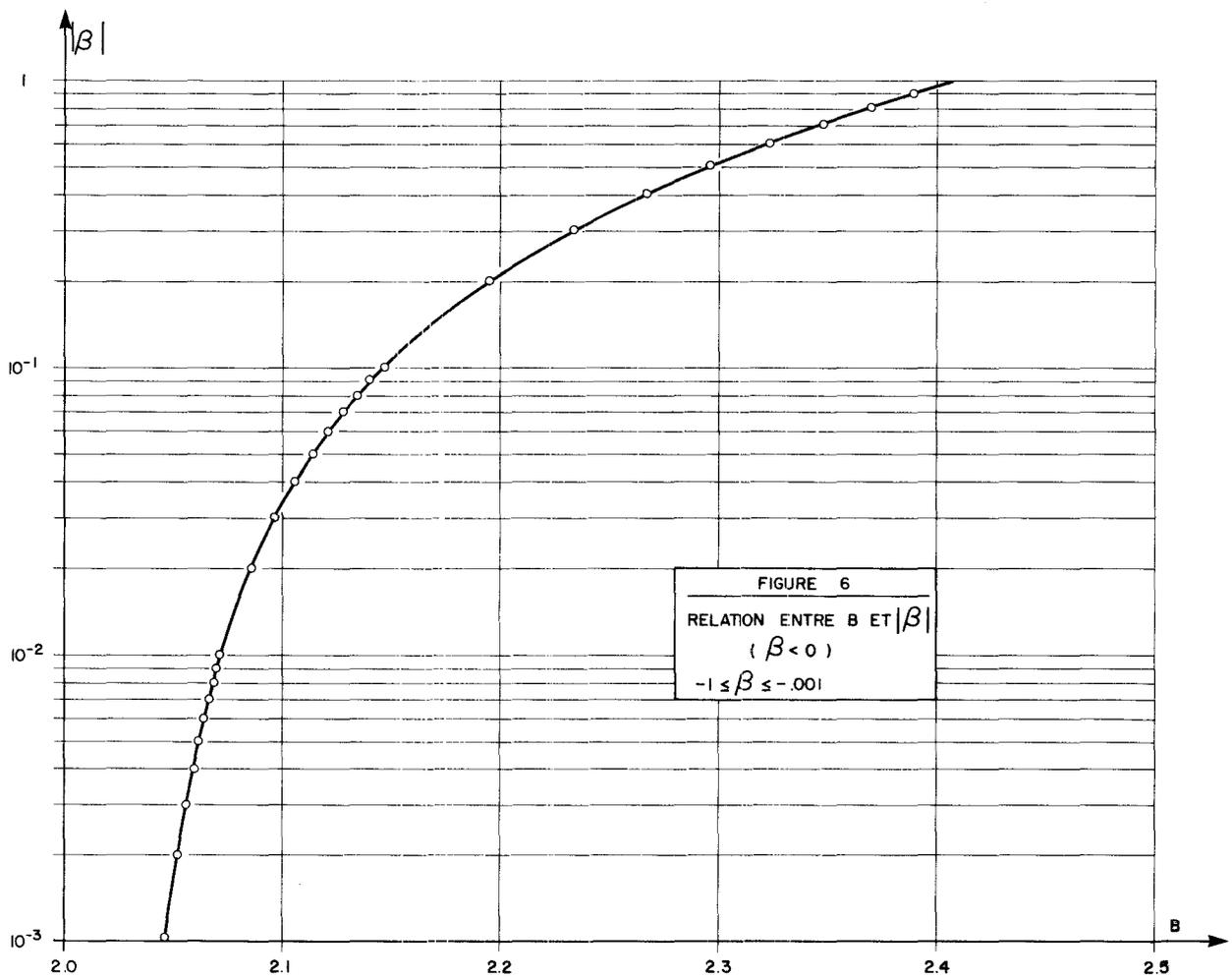
Lorsque  $\beta$  est élevé, il est possible d'effectuer un développement limité de B et d'en déduire une valeur approchée de  $\beta$

On peut montrer que lorsque  $\beta$  est élevé:

$$\frac{(1 - 1/\beta)^3}{1 - 3/\beta} \approx 1 + \frac{3}{\beta^2} + \frac{8}{\beta^3} + \frac{24}{\beta^4} \quad \frac{(1 - 1/\beta)^2}{(1 - 2/\beta)} \approx 1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{4}{\beta^4}$$







On peut en déduire le développement de B pour  $|\beta|$  élevé

$$B = \frac{\text{Ln} \left[ \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^3 / \left(1 - \frac{3}{\beta}\right) \right]}{\text{Ln} \left[ \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^2 / \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \right]}$$

$$B \approx 3 + \frac{2}{\beta} + \frac{5}{\beta^2} \quad (18)$$

En pratique connaissant B on veut en déduire  $\beta$ , la relation (14) peut se mettre sous la forme d'une équation du 2ème degré en  $\beta$ :

$$\beta^2 (B-3) - 2\beta - 5 = 0 \quad (19)$$

La plus grande racine de (15) donne la valeur approchée de  $\beta$  pour B donné, on a donc:

$$\beta_{\text{ap.}} = \frac{1 + \sqrt{5B - 14}}{B - 3} \quad (20)$$

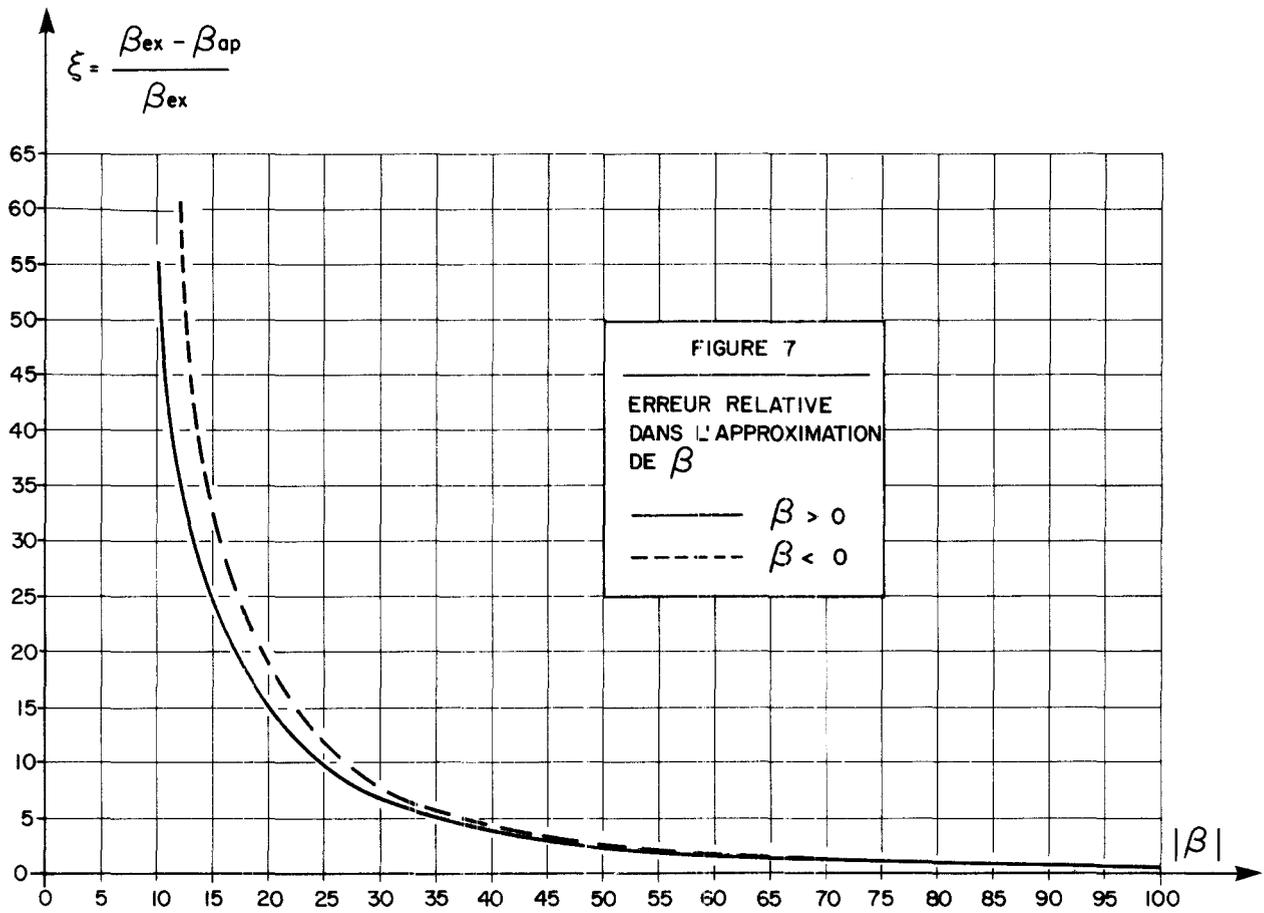
Cette approximation n'est valable que si  $|\beta|$  est élevé.

La figure 7 donne l'erreur relative  $\epsilon = \frac{\beta_{\text{ex}} - \beta_{\text{ap}}}{\beta_{\text{ex}}}$  en fonction de  $\beta$ ,

$\beta_{\text{ex}}$  représente la valeur exacte de  $\beta$  et  $\beta_{\text{ap}}$  représente la valeur appro-

chée de  $\beta$ . Pour  $|\beta| > 30$  la relation (16) conduit à une erreur relative inférieure à 1%. La figure (7) permet également de déterminer la valeur  $\beta_{\text{ex}}$ , puisque l'on a:

$$\beta_{\text{ex}} = \beta_{\text{ap}} / (1 - \epsilon) \quad (21)$$



### 3. Comparaison des deux méthodes

#### 3.1 Commentaires généraux

La technique du W.R.C. qui consiste à appliquer la méthode des moments à la série des logarithmes est un ajustement de la loi Pearson type III à une série transformée. La technique proposée qui revient à l'application des moments à la série originale est un ajustement de la distribution Log-Pearson type III. Théoriquement ces deux méthodes devraient conduire au même résultat puisque la loi Log-Pearson type III est telle que le logarithme de la variable aléatoire suit une distribution Pearson type III. Mais en pratique on dispose d'une série observée de taille limitée, dont on suppose que les éléments sont tirés de la distribution Log-Pearson type III ce qui conduit à des écarts entre les deux méthodes.

L'ajustement direct de la loi LPIII donne le même poids à tous les éléments de l'échantillon, tandis que la méthode du W.R.C. donne le même poids aux logarithmes des observations ce qui a pour effet de diminuer l'influence des valeurs extrêmes. \*

Pour la détermination d'un débit de période de retour donnée  $T$  on utilise dans les deux méthodes la relation 14, mais dans un cas (méthode WRC) on détermine  $\mu'_1$ ,  $K$ ,  $C_V$  directement à partir de la série des logarithmes des valeurs observées, dans l'autre cas (méthode proposée) on détermine  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $m$  à partir de la série observée et on en déduit  $\mu'_1$ ,  $K$ ,  $C_V$  à l'aide des relations (15), (16), (17).

#### Influence de la méthode sur la valeur maximum possible

Il arrive fréquemment que la détermination de  $\alpha$  conduise à des valeurs négatives, on doit alors ajuster une distribution Log Pearson type III correspondant à la forme à asymétrie négative de la loi Pearson type III. Dans ce cas le domaine de variation de la variable Log-Pearson est  $(0, e^{m/k})$ , ce qui signifie qu'il existe une limite supérieure  $X_m = e^{m/k}$ . La justification d'une telle limite est souvent difficile à établir et parfois même n'a aucune signification physique réelle.

Le fait d'avoir une borne supérieure  $X_m$  est une limitation dans l'emploi de la loi Log-Pearson type III, lorsque les observations de l'échantillon sont telles que  $C_S \approx 2 C_V$  il est préférable d'utiliser la loi Gamma dont le domaine de définition est  $(0, \infty)$  plutôt que la distribution LPIII.

Puisque les deux méthodes conduisent à des valeurs différentes de  $m$ , les bornes supérieures seront différentes, ce qui peut avoir une grande importance (lors de la détermination de débit de période de retour élevée par exemple). Il arrive parfois que l'ajustement par la méthode WRC conduise à des valeurs  $X_m$  inférieures à certaines valeurs observées (Reich, 1973), ce qui montre l'importance de la détermination de  $X_m$ , donc de  $m$ .

#### Influence de la correction de biais

Le coefficient de variation et le coefficient d'asymétrie de l'échantillon sont des valeurs biaisées, la méthode WRC considère des estimations non biaisées de ces coefficients en introduisant des coefficients correctifs. Dans la méthode proposée l'ajustement est effectué à l'aide des moments non centrés et il n'y a pas de correction de biais.

La correction de biais dans la méthode WRC ne conduit pas à des variations importantes cependant si  $\alpha < 0$  on peut montrer que:

$$\hat{X}_m < X_m$$

où

$\hat{X}_m$  valeur maximum obtenue à partir des valeurs non biaisées

$X_m$  valeur maximum obtenue à partir des valeurs biaisées.

La correction de biais a tendance à diminuer la valeur maximum possible (limite supérieure de l'intervalle de définition).

Il n'est pas possible de situer à priori la valeur maximum calculée par la méthode proposée dans le cas  $\alpha < 0$  par rapport à  $X_m$  et  $\hat{X}_m$ , mais il est logique de penser que la valeur maximum donnée par cette méthode est réaliste puisqu'elle est déterminée par une méthode qui tient mieux compte des valeurs extrêmes.

### 3.2 Autres méthodes

La méthode du maximum de vraisemblance ne peut s'appliquer pour la loi Pearson type III à trois paramètres et la loi Log-Pearson type III (le critère de suffisance n'étant pas respecté), puisque l'intervalle de définition de la variable est fonction du paramètre  $m$  à déterminer.

Dans le cas de la loi Gamma et de la loi Log-Gamma ( $m = 0$ ) la méthode du maximum de vraisemblance est applicable; il est possible de montrer que dans la détermination des paramètres  $\alpha, \lambda, m$  d'une part à partir de la série des logarithmes des valeurs observées en faisant l'hypothèse d'une loi Gamma, d'autre part à partir de la série des valeurs observées en faisant l'hypothèse d'une loi Log-Gamma, on arrive aux mêmes équations donc aux mêmes valeurs des paramètres, ce qui n'est pas vrai dans l'application de la méthode des moments.

D'autres méthodes, telle que la méthode des quantiles suggérée par Glos (1966), peuvent être considérées soit pour l'application de la loi Pearson type III à la série des logarithmes, soit pour l'application de la distribution Log-Pearson type III à la série des valeurs observées et comparées aux méthodes décrites dans ce rapport.

### 3.3 Applications

Ces applications à des séries hydrologiques ont pour but de comparer la méthode du WRC et l'approche suggérée et de mettre en évidence leurs divergences.

Les deux méthodes ont été utilisées pour trois séries:

- une série de débit maximum annuel (série 1)
- une série de débit minimum annuel (série 2)
- une série de débit maximum de dix jours consécutifs en période d'été (série 3)

Pour chaque série, on a considéré

- A. La méthode du WRC en utilisant les moments non biaisés, de la série des logarithmes décimaux des valeurs observées.
- B. La méthode du WRC en utilisant les moments biaisés de la série des logarithmes décimaux des valeurs observées.
- C. La méthode suggérée dans ce rapport, qui utilise les moments biaisés de la série des valeurs brutes.

Les résultats de ces applications figurent dans le tableau 3.

- Pour A et B on calcule  $M$ ,  $C_V$ ,  $C_S$  à partir de la série des logarithmes décimaux et on en déduit les  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $m$  à l'aide des relations liant ces paramètres aux moments théoriques de la distribution Pearson type III.

Puisqu'on considère la transformation log. décimal, la détermination d'un débit  $Q_T$  de période de retour  $T$  sera donnée par:

$$Q_T = 10^{M(1 + K C_V)}$$

$K$  est fonction de  $C_S$  et  $T$

Dans les trois cas considérés  $\alpha$  est négatif, la borne supérieure du domaine de variation du débit sera

$$X_m = 10^m$$

- En ce qui concerne  $C$ , on détermine  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $m$  selon les étapes décrites en 2.2.

$\left\{ C_V \right\}_L$  et  $\left\{ C_S \right\}_L$  sont déduits de la série des valeurs observées

$M$  (ou  $\mu'_1$ ),  $C_V$ ,  $C_S$ ,  $X_m$ , sont déterminés à partir de  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $m$  (cf 2.3)

Données	SERIE 1 Débit maximum annuel ( 1 jour ) Station 22301 N = 44			SERIE 2 Débit minimum annuel ( 1 jour ) Station 22301 N = 44			SERIE 3 Débit max., été 10 jours consécutifs Station 23402 N = 33		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
$\alpha$	-68.3	-71.5	-23.3	-41.33	-43.29	-66.69	-18.11	-19.28	-8.75
$\lambda$	112.0	120.1	13.7	45.96	49.3	116.07	20.41	22.43	5.76
m	5.475	5.515	4.421	2.701	2.728	3.329	5.211	5.247	4.735
M	3.836	3,836	3.834	1.589	1.589	1.589	4.084	4.084	4.077
$C_V$	.040	.040	.041	.103	.102	.102	.061	.060	.067
$C_S$	-.189	-.170	-.541	-.295	-.285	-.186	-.140	-.134	-.833
$(C_V)_L$	-	-	.342	-	-	.372	-	-	.540
$(C_S)_L$	-	-	.462	-	-	.931	-	-	.700
$X_m$ ( $\text{pi}^3/\text{sec}$ )	29861	327340	26368	502	534	2134	162555	176604	54330

TABLEAU 3 Comparaison des méthodes d'ajustement

Sur les figures (8), (9), (10), on a tracé les courbes déduites des ajustements par A et C.

Ces exemples d'application montrent que les deux méthodes conduisent à des valeurs différentes des paramètres  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $m$ , cependant  $M$  et  $C_V$  ont des valeurs très voisines quelle que soit la méthode tandis que  $C_S$  est très variable.

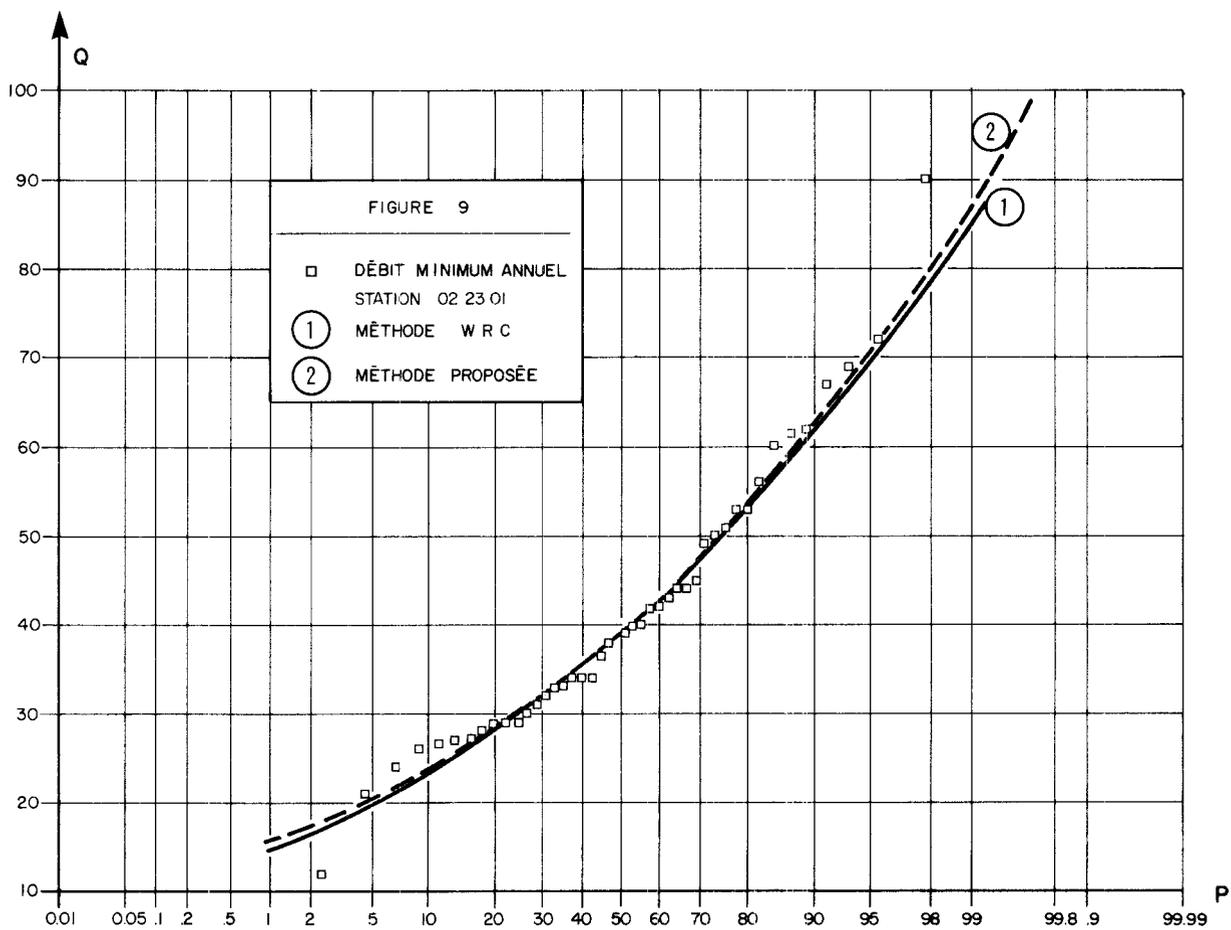
Graphiquement cela se traduit par des ajustements qui diffèrent surtout dans les extrêmes (faible et forte probabilité) tandis que dans la zone centrale il y a peu de différence. Le tableau 4 donne les débits pour certaines probabilités au dépassement. La correction de biais (B) a une influence minime et les écarts pour  $X_m$  obtenus entre (A) et (B) n'ont rien de commun à ceux que l'on observe entre (A) et (C).

Les différents exemples montrent donc que l'ajustement de la loi Log. Pearson type III doit se faire directement à partir des valeurs observées et non à partir du logarithme des événements.

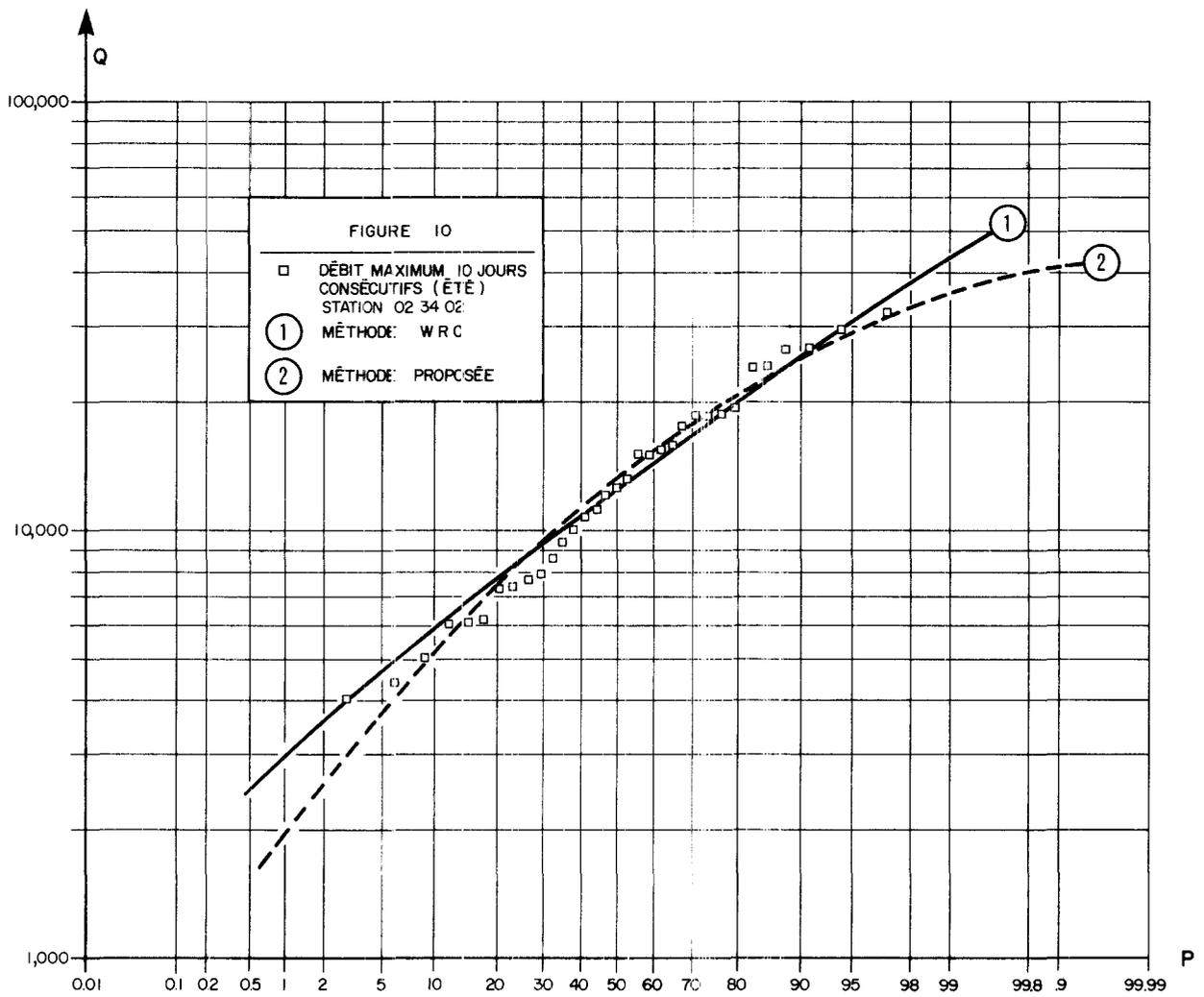
#### CONCLUSION

La loi Log. Pearson type III qui d'un point de vue théorique est obtenue lorsque le logarithme d'une variable suit une distribution Pearson type III, ne peut en pratique être ajustée sur la série des logarithmes des valeurs observées. La loi Log. Pearson type III doit être ajustée à partir de la série des valeurs observées. La méthode suggérée dans ce rapport conduit à des écarts importants pour les probabilités extrêmes par rapport à la méthode du WRC.

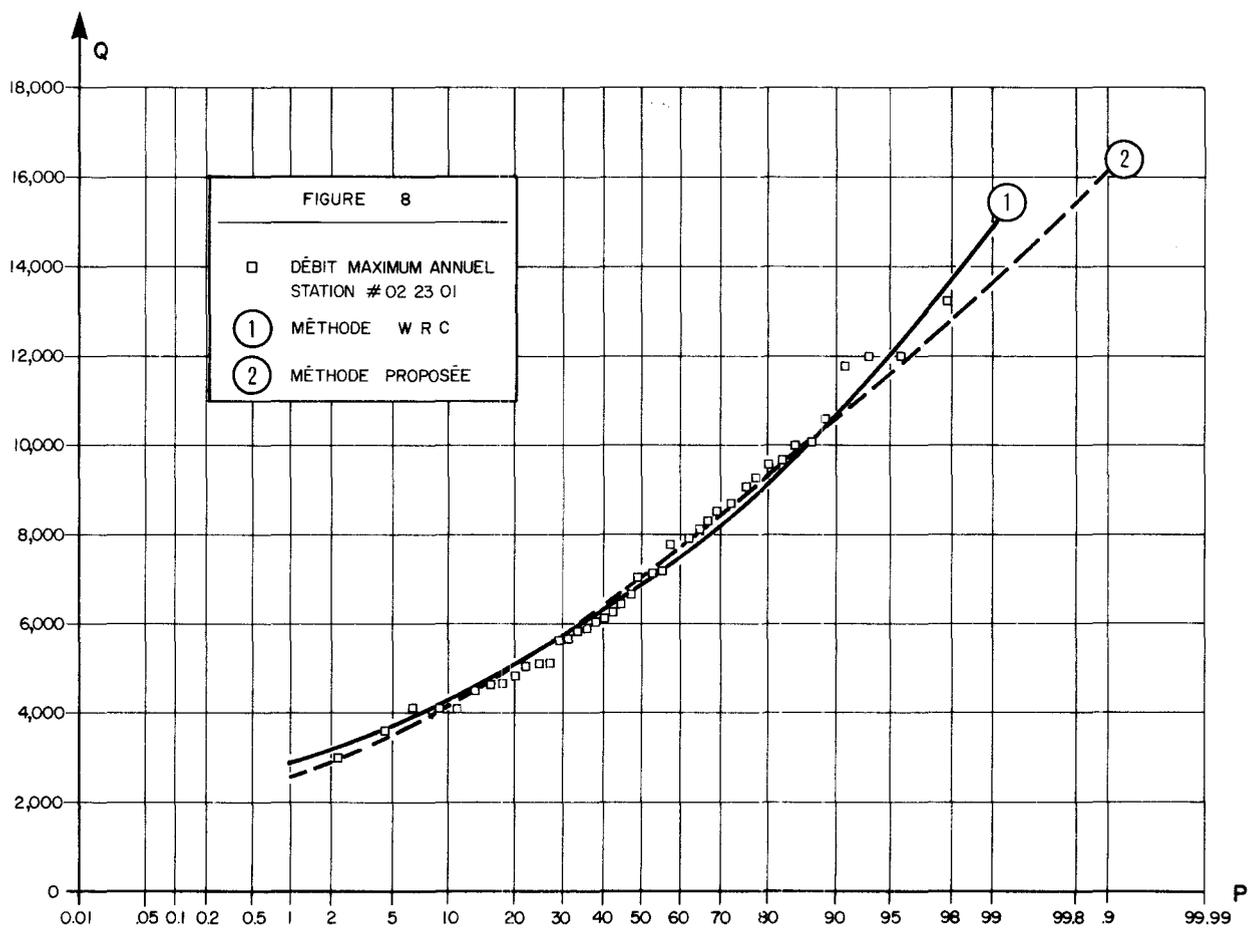
La méthode proposée est certainement susceptible d'améliorations, mais dans l'état actuel elle semble mieux tenir compte des valeurs extrêmes et se prête mieux à la détermination des débits extrêmes que la méthode du WRC en ce qui concerne l'ajustement de la loi Log. Pearson type III à une série observée. Dans le cas de la loi Log. Gamma l'application de la méthode du maximum de vraisemblance est la plus sûre.



COMPARAISON DES MÉTHODES D'AJUSTEMENT DE LA DISTRIBUTION  
LOG PEARSON TYPE III (SÉRIE 2)



COMPARAISON DES MÉTHODES D'AJUSTEMENT DE LA DISTRIBUTION  
LOG PEARSON TYPE III (SÉRIE 3)



COMPARAISON DES MÉTHODES D'AJUSTEMENT DE LA DISTRIBUTION  
LOG PEARSON TYPE III (SÉRIE I)

SERIE I $Q_T \pi^3/\text{sec}$					SERIE 3 $Q_T \pi^3/\text{sec}$				
Proba. au dépassement	T (Années)	A	B	C	Proba. au dépassement	T	A	B	C
.01	100	14842	14917	13692	.01	100	43429	42638	34975
.001	1000	18587	18763	15945	.001	1000	63753	62339	41437
.0001	10000	22169	22480	17698	.0001	10000	86492	84343	45676

SERIE 2  $Q \pi^3/\text{sec}$

Probabilité au dépassement	A	B	C	Probabilité au dépassement	A	B	C
.01	85.9	85.5	87.9	.99	14.9	15.1	15.5
.001	106.4	105.9	111.5	.999	10.3	10.5	11.1
.0001	125.1	124.7	134.4	.9999	7.5	7.7	8.3

TABLEAU 4 : Comparaison des débits de probabilité donnée obtenus par les différentes méthodes

Références bibliographiques

- BOBEE, B. (1973) Etude de la loi Log-Pearson type III et ses applications. Rapport INRS-Eau No. 22.
- GLOSS, E. (1966) Eine verbesserte methode der Parameterschätzung für die Pearson Verteilung type III Wasserwitsch-Wassertech. 16
- REICH, B.M. (1972) Log Pearson type III and Gumbel Analysis of floods. Second International Symposium in Hydrology, sept. 1972. Fort-Collins Colorado.
- Water Resources Council, Hydrology Committee 1967. A uniform technique for determining flood flow frequency. Bulletin No. 15.

Notations

a	base de la transformation logarithmique
B	fonction des moments de la loi Log-Pearson type III
$C_V$	coefficient de variation de la loi Pearson type III
$C_S$	coefficient d'asymétrie de la loi Pearson type III
$\{C_V\}_L$	coefficient de variation de la loi Log-Pearson type III
$\{C_S\}_L$	coefficient d'asymétrie de la loi Log-Pearson type III
g	fonction densité de probabilité de la loi Log-Pearson type III
$k = 1/\text{Ln } 10$	coefficient
K	variable Pearson type III standardisée
$\ell_r$	moment non centré d'ordre r de l'échantillon des valeurs observées
m	paramètre de la loi Pearson type III
M	moyenne de la série des logarithmes
N	taille de l'échantillon
$Q_T$	débit de période de retour donnée
r	ordre des moments
S	écart-type de la série des logarithmes
T	période de retour
x	variable
$X_m$	borne supérieure de l'intervalle de définition de la loi Log-Pearson III

$\alpha$	paramètre de la distribution Pearson type III
$\beta = \alpha k$	
$\beta_{ap}$	valeur approchée de $\beta$
$\Gamma$	fonction gamma
$\varepsilon$	erreur relative sur $\beta$
$\lambda$	paramètre de la distribution Pearson type III
$(\mu'_r)_L$	moment non centré d'ordre $r$ de la distribution Log-Pearson III
$(\mu'_r)_{LG}$	moment non centré d'ordre $r$ de la distribution Log-Gamma

**SELECTED WATER  
RESOURCES ABSTRACTS  
INPUT TRANSACTION FORM**

1. Report No.

3. Accession No.

**W**

4. Title **FITTING OF THE LOG-PEARSON TYPE III DISTRIBUTION  
(Ajustement de la distribution log-Pearson type III),**

5. Report Date

6.

8. Performing Organization  
Report No.

7. Author(s)

**Bobée, B.**

10. Project No.

9. Organization

**Québec Université. Institut National de la REcherche  
Scientifique-Eau.**

11. Contract/Grant No.

13. Type of Report and  
Period Covered

12. Sponsoring Organization

15. Supplementary Notes

**INRS-Eau, Technical Report No 27, 34 p.**

16. Abstract

A technique for fitting the log-Pearson type III distribution to observed values is proposed. The method consists of equalizing the theoretical moments of the log-Pearson type III distribution to sample moments. Results different from those calculated by the "Water Resources Council's Method" were obtained and further seem to give a better evaluation of extreme flow values.

17a. Descriptors

**\*Statistical Models, \*Hydrologic Data, \*Distribution Patterns.**

17b. Identifiers

**Pearson type III Distribution.**

17c. COWRR Field & Group **7A**

18. Availability

19. Security Class.  
(Report)

21. No. of  
Pages

**Send To:**

20. Security Class.  
(Page)

22. Price

**WATER RESOURCES SCIENTIFIC INFORMATION CENTER  
U.S. DEPARTMENT OF THE INTERIOR  
WASHINGTON, D. C. 20240**

Abstract by

**M. Cantin**

Institution

**INRS-Eau**