

Université du Québec
Institut national de la recherche scientifique
Centre Énergie Matériaux Télécommunications

**Estimation des directions d'arrivée de sources turbo codées avec des
modulations QAM**

Par

Chaima Elguet

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
Maîtrise en Sciences, M.Sc. en télécommunications

Jury d'évaluation

Examineur externe	Prof. Paul Fortier Université Laval
Examineur interne	Prof. Serge Tatu INRS Énergie Matériaux Télécommunications
Directeur de recherche	Prof. Sofiène Affes INRS Énergie Matériaux Télécommunications
Co-Directeur de recherche	Dr. Faouzi Bellili INRS Énergie Matériaux Télécommunications

Remerciements

Je profite, par le biais de ce rapport, pour exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin au succès de cet humble travail.

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mon directeur de recherche Monsieur Sofiéne Affes qui m'a offert l'opportunité d'intégrer son équipe. Cette expérience a été des plus enrichissantes et m'a permis d'acquérir des compétences qui se prouvent sans doute d'une grande importance dans la réalisation de mes projets d'avenir. Sa confiance en moi m'a aussi permis de me surpasser et de mieux connaître ma valeur et mon potentiel.

Un merci particulier à mon codirecteur de recherche Monsieur Faouzi Bellili. Les moments passés ensemble et son expertise au quotidien sont les ingrédients secrets de ce succès.

Je remercie également Monsieur Abdelaziz Samet pour son écoute et le réconfort qu'il m'a apporté durant mes études.

Finalement, je présente ma reconnaissance à ma famille, mes amis et toute mon équipe. Que toute personne qui a contribué à ce travail trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Résumé

L'essor rapide des systèmes de communications radio-mobiles a donné lieu à une nécessité de plus en plus croissante pour des services de géolocalisations efficaces. Une estimation précise des directions d'arrivée (DDAs) est donc nécessaire pour améliorer les performances de ces systèmes. Le sujet de ce mémoire de maîtrise porte sur le développement d'un estimateur de direction d'arrivée pour des signaux turbo-codés. Nous proposons particulièrement une méthode novatrice permettant d'exploiter l'information extrinsèque provenant des décodeurs dans l'estimation des directions inconnues. En effet, le décodage est principalement basé sur un échange itératif d'une séquence d'information extrinsèque entre les deux décodeurs, sous forme de rapport de vraisemblance logarithmique (LLR). L'estimateur opère donc à chaque itération turbo en exploitant ces informations extrinsèques pour raffiner l'estimée de DDA. Cette dernière est utilisée pour diriger un beamforming dans la direction des signaux utiles tout en éliminant l'interférence. Dans ce travail, nous nous proposons de développer un estimateur de DDA à maximum de vraisemblance (MV) pour des signaux turbo-codés. Afin de caractériser théoriquement le gain de performances en termes d'estimation des DDAs qui est dû à l'assistance du décodeur, nous développons aussi, pour la première fois, l'expression analytique exacte de la borne de Cramér-Rao (BCR). L'analyse de performances montre que notre méthode surpasse la méthode d'estimation aveugle (aucune assistance du décodeur) et aboutit à des performances optimales par rapport à la BCR sur une large plage de rapport signal sur bruit (RSB). On montre également l'efficacité du nouvel estimateur par rapport aux deux techniques sous-espaces classiques MUSIC et ESPRIT.

Mots-clés Direction d'arrivée, turbo-codes, rapport de vraisemblance logarithmique, maximum de vraisemblance, beamforming, borne de Cramér-Rao, MUSIC, ESPRIT.

Abstract

In this report, we address the problem of direction of arrival (DOA) estimation from turbo-coded square-QAM-modulated transmissions. We devise a new code-aware direction finding concept, derived from maximum likelihood (ML) theory, wherein the soft information provided by the soft-input soft-output (SISO) decoder, in the form of log-likelihood ratios (LLRs), is used to assist the estimation process. At each turbo iteration, the decoder output is used to refine the ML DOA estimate. The latter is in turn used to perform a more focused receive beamforming thereby providing more reliable information-bearing sequences for the next turbo iteration. In order to benchmark the new estimator, we also derive for the very first time the closed-form expressions for the exact Cramer-Rao lower bounds (CRLBs) of code-aided (CA) DOA estimates. Simulation results will show that the new CA direction finding scheme lies between the two traditional schemes of completely non-data-aided (NDA) and data-aided (DA) estimations. Huge performance improvements are achieved by embedding the direction finding and receive beamforming tasks within the turbo iteration loop. Moreover, the new CA DOA estimator reaches the new CA CRLBs over a wide range of practical SNRs thereby confirming its statistical efficiency in practice. As expected intuitively, its performance further improves at higher coding rates and/or lower modulation orders.

Keywords: Turbo-codes, direction of arrival estimation, beamforming, log-likelihood ratio, maximum likelihood, Cramér-Rao lower bound, code-aided, QAM signals, non-data-aided, data-aided.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Abstract	vii
Table des matières	ix
Liste des figures	xi
Introduction	1
1 Notions préliminaires	5
1.1 Introduction	5
1.2 Estimation des DDAs	5
1.2.1 Applications de l'estimation des directions d'arrivée	5
1.2.2 Configuration des antennes réceptrices	6
1.2.3 Classification des estimateurs de DDA	8
1.3 Les turbo-codes	8
1.3.1 Qu'est-ce que les turbo-codes?	8
1.3.2 Turbo encodeur	9
1.3.3 Turbo décodeur	9
1.3.4 Généralités sur la borne Cramér-Rao	10
1.4 Conclusion	12
2 Développement de l'estimateur à maximum de vraisemblance de la direction d'arrivée	13
2.1 Introduction	13

2.2	Modèle du système	13
2.3	Dérivation de l'expression analytique de la LLF	14
2.4	Dérivation de l'estimateur MV CA [20]	24
2.5	Conclusion	29
3	Développement de l'expression analytique de la borne de Cramér-Rao	31
3.1	Introduction	31
3.2	Développement de l'expression analytique de la BCR [21]	31
3.3	Conclusion	39
4	Évaluation de performances	41
4.1	Introduction	41
4.2	Paramètres de simulations	41
4.3	Validation de l'expression analytique de la BCR	42
4.4	Etude de performances de l'estimateur MV CA	44
	Conclusion	49
A	Preuve de (3.15) et (3.16)	51
A.1	Preuve de (3.15)	51
A.2	Preuve de (3.16)	52
B	Expression de $\ddot{u}_k(\theta)$	55
	Références	59

Liste des figures

1.1	Réseau d'antennes linéaire uniforme	6
1.2	Réseau d'antennes circulaire uniforme	7
1.3	Turbo encodeur	10
1.4	Turbo décodeur	11
2.1	Illustration de la construction récursive d'une constellation 16-QAM de type Gray à partir d'une constellation 4-QAM de type Gray	18
2.2	Architecture de l'estimateur MV CA incorporé dans le turbo décodeur.	28
4.1	BCR NDA, DA, et CA (analytique et empirique) avec $R = 1/3$ et $K = 206$ pour: (a) 16-QAM, et (b) 64-QAM.	44
4.2	EMV CA vs BCR pour 16-QAM, $K = 206$ avec: (a) $R = 1/2$, et (b) $R = 1/3$	45
4.3	EMV CA vs BCR pour 64-QAM, $K = 206$ avec: (a) $R = 1/2$, et (b) $R = 1/3$	46
4.4	MSE de différents estimateurs de DDA pour 16-QAM, $K = 206$ avec: (a) $R = 1/2$, et (b) $R = 1/3$	47
4.5	MMSE de différents estimateurs de DDA pour 64-QAM, $K = 206$ avec: (a) $R = 1/2$, et (b) $R = 1/3$	47
4.6	Complexité de EMV CA, SP-EM MLE, Esprit et MUSIC.	48

Introduction

Les communications mobiles figurent sans doute aux premiers rangs du palmarès des triomphes de l'industrie des télécommunications. La première génération, parue dans les années 90, rassemble les systèmes de communications numériques connus sous le nom GSM (Global System for Mobile communication). Ces systèmes ont permis la transmission de messages alphanumériques et de la voix à bas débits. Les systèmes de troisième génération, UMTS (Universal Mobile Telecommunication System), ont été introduits en 2003 et ont permis une transmission à des débits supérieurs à ceux fournis précédemment. Cependant, le boom actuel d'utilisation des différents services mobiles (voix, vidéos, photos, accès internet) dépasse quasiment toutes les prédictions de naguère. L'offre de la mobilité dans les communications est devenue un indicateur de développement social et économique. L'adaptation des systèmes de communications sans fil aux utilisateurs, de plus en plus nombreux et avides de mobilité, est devenue donc cruciale. Dans le but de développer de tels systèmes, une connaissance plus précise des différents paramètres du canal de propagation est nécessaire. En particulier, l'angle d'arrivée des signaux par rapport au récepteur est un des paramètres clé du canal de propagation.

L'estimation de directions d'arrivée (DDAs) constitue un intérêt de primordial pour diverses applications telles que le RADAR, le SONAR et plus récemment les communications cellulaires. L'estimation des DDAs est surtout nécessaire dans la formation de voie (de l'anglais "beamforming"). En effet, les performances des antennes se traduisent fondamentalement par leur faculté à focaliser le rayonnement dans une direction particulière tout en minimisant l'énergie dans les autres directions. Ce processus nécessite donc la parfaite connaissance des différentes directions d'arrivée justifiant ainsi le travail de ce mémoire de maîtrise. Les méthodes d'estimation des DDAs sont diverses et peuvent être classifiées en deux catégories: les méthodes basées sur la notion de sous-espace et les méthodes du maximum de vraisemblance (MV). Comme son nom l'indique, une méthode de sous-espace est basée sur l'idée du partage de l'espace d'observation en deux sous-espaces:

le sous-espace signal et le sous-espace bruit. Ces deux sous-espaces ont la particularité d'être orthogonaux permettant ainsi de localiser les sources. Malgré le fait que ces méthodes sont souvent qualifiées de méthodes à haute résolution fournissant une estimation d'angle d'arrivée d'une grande résolution, leurs performances d'estimation se dégradent considérablement en présence d'un faible rapport signal sur bruit (RSB) et/ou un nombre réduit d'observations [1]. Les méthodes sous-espace les plus connues sont les méthodes du goniomètre ou MUSIC (MUltiple Signal Classification) et ESPRIT (Estimation of Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques). La méthode du maximum de vraisemblance a été introduite par Sir Ronald Fisher en 1912. Fisher a présenté cette méthode comme étant zéro-défaut par rapport aux méthodes qui existaient à l'époque en mettant l'accent sur la richesse de ses propriétés théoriques. En effet, l'estimation par MV possède deux propriétés fondamentales: la normalité asymptotique et la convergence. Les propriétés asymptotiques ont été largement étudiées [par Cramér (1949), Van Der Vaart (1998), Scholz (2006)]. L'estimation par MV est basée directement sur les échantillons reçus (au lieu de leurs statistiques d'ordre supérieur), ce qui rend ces méthodes efficaces, fournissant en général d'excellentes estimées. La multitude d'applications utilisant des méthodes à MV est le meilleur témoin de leur efficacité, parfois au dépend de la complexité [2]. Selon une autre perspective, les techniques d'estimation des DDAs peuvent être classifiées en deux différentes catégories selon le cas si une information a priori sur les symboles envoyés est présente ou absente au niveau du récepteur: NDA (de l'anglais Non-Data Aided) et DA (Data Aided). Les méthodes NDA sont des méthodes aveugles qui nécessitent un nombre d'échantillons assez élevé. Leurs performances se dégradent souvent à de faibles RSB. Les méthodes DA, par contre, sont des méthodes assistées nécessitant la connaissance de toute la séquence envoyée par l'émetteur. Elles sont connues pour leur performance élevée au détriment de l'ensemble du débit du système. Il semble donc raisonnable de concevoir une troisième alternative comme un juste milieu entre ces deux cas extrêmes. L'estimation assistée par le décodeur (CA) a été conçue précisément dans cet objectif.

Tout canal de transmission présente un bruit aléatoire qui perturbe la communication. L'effet du bruit se traduit par des erreurs de transmission à la réception. Le codage canal a vu le jour pour lutter contre ces perturbations. En effet, l'insertion de manière judicieuse d'une redondance dans le message émis permet de corriger les erreurs éventuelles à la réception. En 1948, Claude Shannon, un jeune ingénieur des Bell Laboratories, a conçu une borne réelle définissant la quantité d'information maximale qui peut être transmise sur un canal de transmission, prédisant sans le savoir, les performances ultimes pouvant être atteintes par la technique de redondance. Cependant, la théorie de l'information ne montre pas comment atteindre ces performances. Au départ, deux familles de codes ont été introduits: les codes convolutifs et les codes en blocs.

Ces deux familles titubaient contre une barrière appelée complexité sans pour autant s’approcher de la limite de Shannon. L’année 1993 marqua le début d’une nouvelle ère. C. Berrou et A. Glavieux inventèrent le turbo-code, un modèle astucieux de codage et de décodage. L’idée de base était de concevoir un turbo décodeur constitué de deux décodeurs covolutifs qui s’échangent une certaine information mutuellement. Cette information, appelée l’information extrinsèque, représente une mesure de confiance des décodeurs envers les bits décodés. Ce schéma ingénieux a permis d’atteindre la limite de Shannon, jugée impossible à atteindre jusque-là.

L’incorporation de l’estimation dans le processus de décodage est une recette qui a attiré plusieurs chercheurs au fil du temps. Une pléthore de travaux de recherche traitant l’estimation des décalages en temps, en phase et en fréquence ont été rapportés dans la littérature (voir [3–17]). En effet, l’information extrinsèque échangée entre les décodeurs, se prouve un ingrédient utile pour optimiser la qualité des estimées sans présenter aucun impact négatif quant à l’efficacité spectrale du système. L’efficacité spectrale est d’une importance primordiale pour les futures générations des systèmes de communication sans fil qui promettent de garantir une haute qualité de service, en satisfaisant l’accroissement continu en termes de débit et de capacité. Il est donc nécessaire d’utiliser, en parallèle aux turbo-codes, des modulations à haute efficacité spectrale tels que les modulations QAM. Actuellement, les turbo-codes, conjointement avec les modulations d’amplitude en quadrature (QAM), sont adoptés par les standards WiMAX [18], Long Term Evolution (LTE)-, Advanced (LTE-A) et Beyond (LTE-B) [19].

Une revue bibliographique approfondie a révélé qu’aucune contribution n’a abordé le problème d’estimation des DDAs dans le contexte CA. Ce qui a suscité un vif intérêt et une grande motivation de notre part pour attaquer ce problème, pour la première fois. Nous proposons un estimateur DDA CA dérivé dans le sens MV à faible coût où les processus de turbo-décodage et d’estimation sont performés côte à côte [20]. On va encore plus loin en considérant des signaux modulés en QAM. L’algorithme propose d’utiliser l’information qui provient des décodeurs, à chaque itération turbo, pour raffiner les DDAs estimées. Cette même estimation est utilisée- dans l’itération turbo suivante- pour améliorer les performances du décodage à travers un beamforming désormais redirigé dans une meilleure direction. Afin de caractériser théoriquement le gain de performances en termes d’estimation des DDAs qui est dû à l’assistance du décodeur, nous développons aussi, pour la première fois, l’expression analytique de la borne de Cramér-Rao (BCR) [21]. Cette borne présume que les données disponibles sont utilisées de façon optimale pour estimer le paramètre recherché. Nous validerons aussi l’expression analytique de la BCR à travers une approche empirique basée sur des simulations Monte-Carlo exhaustives.

Ce rapport est organisé comme suit: le chapitre 1 est un chapitre introductif qui servira comme une mise en contexte du travail réalisé. Dans le deuxième chapitre, nous développerons l'estimateur DDA MV CA. Le chapitre 3 fournit les dérivations nécessaires pour le développement de l'expression analytique de la BCR. Nous terminerons par présenter les résultats obtenus dans le chapitre 5 avant de terminer par une conclusion.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter des généralités concernant l'estimation des DDAs. Ensuite nous introduirons les turbo-codes et leurs importances dans l'estimation des différents paramètres qui caractérisent le canal sans fil. Nous présenterons également la borne de Cramér-Rao (BCR), utilisée pour caractériser théoriquement le gain de performances en termes d'estimation des DDAs qui est dû à l'assistance du décodeur.

1.2 Estimation des DDAs

1.2.1 Applications de l'estimation des directions d'arrivée

L'estimation des directions d'arrivée est d'un immense intérêt pour les applications radar, sonar mais aussi pour les communications sans fil. En effet, l'angle d'arrivée du signal au récepteur est un des paramètres clés caractérisant le canal de propagation. Il convient donc de l'utiliser afin d'optimiser la liaison radio. En d'autres termes, utilisant les données reçues au niveau de l'antenne, les méthodes d'estimation des angles d'arrivées ont pour objectif de repérer les signaux de l'utilisateur utile et d'éliminer les autres signaux qualifiés d'interférant. Ce mécanisme permet de maximiser la puissance dans la direction de l'utilisateur privilégié. De ce fait, une précision extrême des estimés des directions d'arrivée est nécessaire afin de garantir la qualité de service

promise par les nouveaux standards des systèmes de communications sans fil. De surcroît, l'estimation des DDAs est aussi utilisée dans la vidéo conférence pour diriger la camera vers le locuteur. Les DDAs sont aussi présents dans l'univers robotique pour déterminer la direction précise du robot.

1.2.2 Configuration des antennes réceptrices

L'estimation des DDAs repose sur la géométrie des antennes réceptrices. Les deux configurations les plus populaires dans la littérature sont le réseau linéaire uniforme (ULA) et le réseau circulaire uniforme (UCA) qu'on présentera ci-dessous.

Configuration d'un réseau d'antennes linéaire uniforme

Depuis leur introduction, les réseaux d'antennes linéaires uniformes ont réussi à attirer plusieurs chercheurs. Cela est dû en grande partie à leurs échantillonnages spatiaux uniformes qui se traduisent par des vecteurs ayant une forme Vandermonde. Cette forme est au cœur des dérivations de plusieurs estimateurs tels que MUSIC et root-MUSIC. La Fig. 1.1 représente un réseau ULA. Ce réseau est constitué de M antennes isotropes, alignées et espacées d'une même distance d .

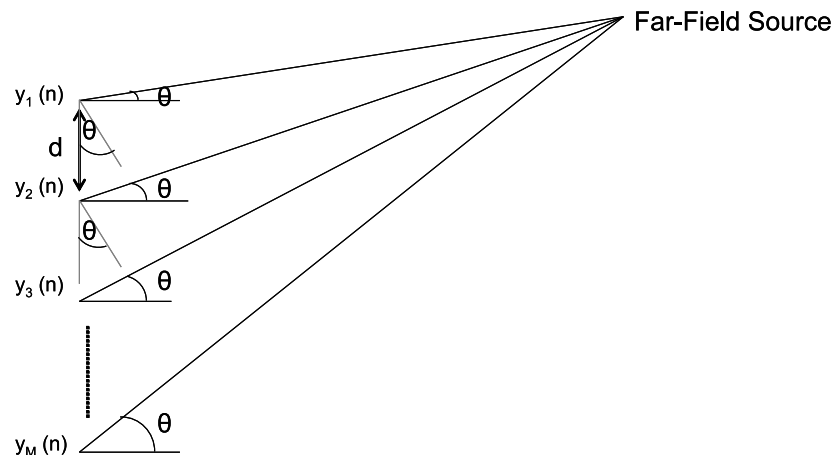


Figure 1.1 – Réseau d'antennes linéaire uniforme

Pour cette configuration, le vecteur directionnel (de l'anglais steering vector), fonction de l'angle d'incidence

θ , est donnée par:

$$\mathbf{a}(\theta) = \left[1, e^{j\pi \sin(\theta)}, e^{j\pi \sin(\theta)}, \dots, e^{j\pi(M-1)\sin(\theta)} \right]^T. \quad (1.1)$$

Configuration d'un réseau d'antennes circulaire uniforme

Soit le réseau d'antennes circulaire uniforme représenté dans la figure Fig. 1.2. Il s'agit de M antennes isotropes espacées sur un cercle. L'avantage de ces configurations est la couverture azimutale. De plus, ces configurations sont intéressantes dans le développement de systèmes expérimentaux [22] puisqu'ils permettent de produire des faisceaux qui pointent vers des élévations basses à intermédiaire, évitant ainsi les pertes des configurations classiques.

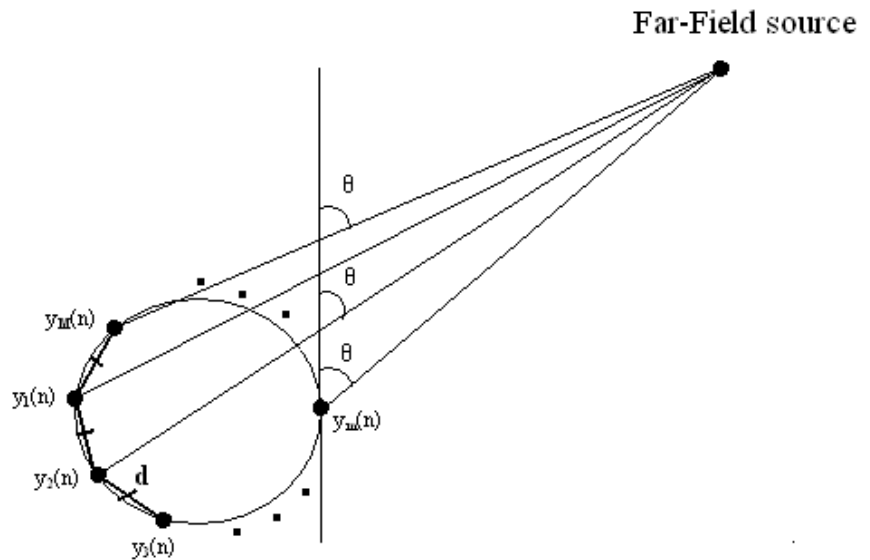


Figure 1.2 – Réseau d'antennes circulaire uniforme

Le vecteur directionnel de la configuration UCA est donné par [19]:

$$\mathbf{a}(\theta) = \left[1, e^{\frac{j\pi \cos(\theta)}{2\sin(\pi/M)}}, e^{\frac{j\pi \cos(\theta-2\pi/M)}{2\sin(\pi/M)}}, \dots, e^{\frac{j\pi \cos(\theta-2(M-1)\pi/M)}{2\sin(\pi/M)}} \right]^T. \quad (1.2)$$

1.2.3 Classification des estimateurs de DDA

Les estimateurs de DDA peuvent être classifiés en deux extrêmes catégories, les estimateurs complètement aveugles ou NDA et les estimateurs DA:

- i) L'estimation NDA est effectuée à partir des échantillons reçus sans aucune connaissance de ce qui a été transmis au préalable. Ces techniques sont souvent utilisées lorsque les décisions ne sont pas disponibles ou ne sont pas fiables et que les données sont complètement inconnues. Elles ont l'avantage d'être indépendante de la phase évitant ainsi la boucle à verrouillage de phase et de fréquence. Cependant, ces techniques souffrent d'une dégradation de performance en présence d'un SNR faible ou d'un nombre réduit d'échantillons.
- ii) L'estimation DA, quant à elle, repose sur des séquences parfaitement connues. Elles offrent de bonnes performances en présence d'un nombre limité d'échantillons mais cela va au dépend du débit du système.

1.3 Les turbo-codes

Le codage canal a été conçu pour lutter contre les effets néfastes du canal de transmission. Il consiste à donner une forme particulière au signal transmis afin de corriger les erreurs éventuelles introduites par le canal, et en particulier le bruit. Plus précisément, le codage canal consiste à introduire une redondance au signal qui permettra au moins de détecter les erreurs survenues à la transmission, voire même les corriger. Cependant, choisir le meilleur code canal consiste à prendre en considération trois contraintes différentes: il faut d'abord avoir une idée *à priori* des effets du canal. Ensuite, il faut considérer le débit souhaité et le taux d'erreur binaire admissible par le système. Il est vrai que la redondance introduite a pour effet de diminuer les erreurs de transmission, elle dégrade, cependant, le débit de transmission du système. Le but est de choisir le codage canal qui permet de s'approcher de la capacité introduite par Shannon tout en ayant la complexité la plus faible. En pratique, les symboles de redondance sont une combinaison linéaire des symboles d'information.

1.3.1 Qu'est-ce que les turbo-codes?

Les turbo-codes ont été présentés à la communauté scientifique en 1993 par deux chercheurs de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Brest, Claude Berrou et Alain Glavieux. La communauté des spécialistes du codage canal a été très sceptique face aux performances des turbo-codes, si proche de

la limite de Shannon. Cependant, beaucoup de chercheurs ont réussi à avoir les mêmes résultats peu après, confirmant ainsi le battage médiatique autour des turbo-codes. Depuis, les turbo-codes ont marqué l'histoire des codes correcteurs d'erreurs ce qui a eu pour effet de dynamiser les recherches dans plusieurs domaines. Aujourd'hui, ils sont utilisés dans les standards LTE et LTE-A ainsi que dans les agences spatiales mondiales. L'originalité des turbo-codes se manifeste dans le procédé de décodage. Un procédé itératif permettant d'affiner les résultats de manière progressive. En effet, les itérations du décodage permettent de corriger de plus en plus d'erreurs. D'ailleurs, les turbo-codes doivent leur nom à ce processus itératif: la combustion des moteurs turbo est favorisée grâce à une partie des gaz d'échappement telles les informations échangées entre les deux décodeurs améliorent les performances.

1.3.2 Turbo encodeur

Depuis plusieurs années, les codeurs étaient implémentés en série. Les turbo encodeurs ont apportée, là aussi, une nouveauté par rapport à ce qui existait auparavant. Il s'agit de deux codeurs convolutifs récursifs implémentés, non en série, mais en parallèle (cf. Fig. 1.3). La séquence d'information de K bits constitue l'entrée directe au codeur 1 et via l'entrelaceur au codeur 2. Le rôle de l'entrelaceur est, comme son nom l'indique, de permuter les bits avant de les faire alimenter au deuxième codeur. Cette opération permet d'avoir des séquences de parité aussi indépendantes que possible. La sortie du codeur 1, qu'on a appelée p dans la Fig 1.3 est constituée des bits d'information codées et des bits de parité. De même, la sortie du codeur 2, q dans la figure, est constituée des bits d'information codés et des bits de parité relatifs à ce codeur. Soit R_1 et R_2 les taux de codage relatifs de chaque codeur. Le rendement global du turbo encodeur est donnée par:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - 1. \quad (1.3)$$

1.3.3 Turbo décodeur

Bien que le codage paraisse simple, le décodage turbo est bien plus complexe. Comme on peut voir à la figure Fig. 1.4, le décodage nécessite deux décodeurs SISO (de l'anglais Soft-Input Soft-Output). Le premier décodeur va recevoir la séquence de bits systématiques (les bits d'information bruités) et la séquence de bit

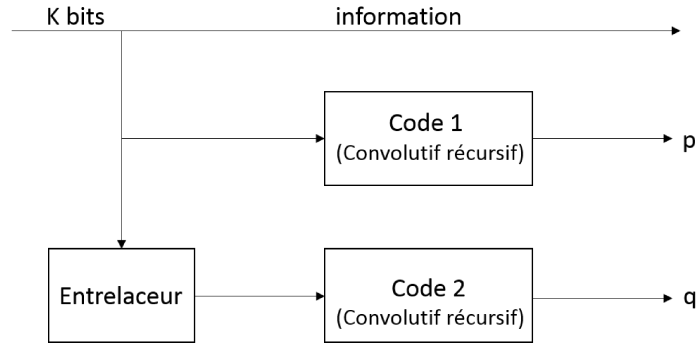


Figure 1.3 – Turbo encodeur

de parité qui découle du premier codeur. Le second décodeur recevra aussi les bits systématiques ainsi que les bits de parité provenant du deuxième codeur. Les deux décodeurs vont ensuite délivrer, chacun, une estimation de la fiabilité de chaque bit codé. En effet, cette estimation se traduit par le rapport de vraisemblance (LLR) obtenu selon le critère de Maximum de Vraisemblance à Posteriori (MAP) comme suit:

$$\Upsilon = \log \frac{\Pr\{b_k = 1/\text{observation}\}}{\Pr\{b_k = 0/\text{observation}\}},$$

où b_k est le bit codé. Chaque décodeur procède au calcul de ce LLR qui comporte une composante dépendant uniquement des bits de parité, qu'on appelle information extrinsèque. Il suffit donc d'extraire l'information extrinsèque et de l'injecter à l'autre décodeur. Cette information constitue donc une mesure de confiance de l'estimation et elle sera échangée, de manière itérative, entre les deux décodeurs. Après un certain nombre d'itérations, les informations extrinsèques des deux décodeurs, deviennent de plus en plus corrélées et l'estimée s'approche de plus en plus d'une estimée MAP.

1.3.4 Généralités sur la borne Cramér-Rao

La borne Cramér-Rao est une limite inférieure sur la variance de tous les estimateurs non-biaisés. De façon générale, il est bien plus simple de calculer la BCR que la variance de l'estimateur. Cette borne présume que les données disponibles sont utilisées de façon optimale pour estimer le paramètre recherché. Le calcul de la dite borne est souvent d'un grand intérêt, aussi bien pour les problèmes théoriques que pour des applications pratiques. Dans un problème théorique, la borne BCR permet de s'assurer s'il reste de la place pour des

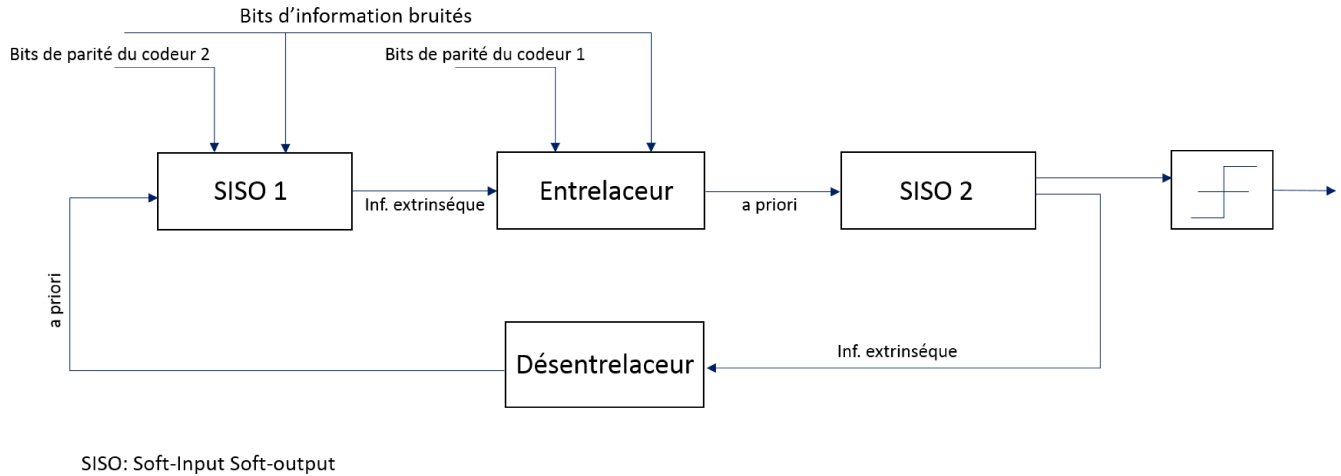


Figure 1.4 – Turbo décodeur

améliorations possibles en matière d'erreur d'estimation. Pour des applications d'ordre pratiques, il s'agit souvent de développer un système qui répond à des spécifications définies au préalable. La BCR permet dans ce cas de s'assurer que le nombre envisagé d'observation permet d'atteindre les performances requises. Selon la forme du signal transmis, on peut définir deux catégories de la BCR: la BCR stochastique et la BCR déterministe.

Considérons N échantillons reçus disponibles au récepteur, $\{y_{\ell}(n)\}_{n=1,2,\dots,N}$. Chaque échantillon reçu, affecté par un bruit aléatoire, a la forme suivante:

$$y(n) = S(n, \theta) + w(n),$$

où $S(n, \theta)$ est le signal transmis et θ est le paramètre inconnu à estimer. Dans le cas stochastique, la forme d'onde du signal transmis, $S(n)$, est supposé être généré d'un processus aléatoire stationnaire [23–25]. Dans le cas déterministe, le signal transmis est supposé être déterministe mais inconnu. Contrairement à la BCR déterministe, connue d'être inatteignable dans le cas général, la BCR stochastique peut être atteinte asymptotiquement par l'estimateur MV stochastique [21]. Dans notre travail, nous nous proposons de développer la BCR stochastique afin de valider la performance du nouvel estimateur MV.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu de l'estimation des directions d'arrivée ainsi que les applications qui requièrent la connaissance de la direction précise des signaux. Ensuite, nous avons introduit les turbo-codes en donnant une vue d'ensemble sur les processus d'encodage et de décodage. Enfin, nous avons donné une brève description de la borne de Cramér-Rao. Dans le chapitre suivant, nous allons procéder au développement du nouvel estimateur MV assisté par le turbo décodeur.

Chapitre 2

Développement de l'estimateur à maximum de vraisemblance de la direction d'arrivée

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons de présenter le modèle du système et de dériver sa fonction de vraisemblance. Ensuite nous procéderons au développement de l'estimateur à maximum de vraisemblance. L'estimation sera assistée par le décodage au niveau de chaque itération turbo.

2.2 Modèle du système

On considère une architecture constituée de deux encodeurs récurrents systématiques (RSC) concaténés en parallèle et séparés par un entrelaceur (cf. Fig. 1.3). Les encodeurs RSC sont les plus utilisés parce qu'ils offrent de meilleures performances que les encodeurs non systématiques. Le taux de codage R du turbo-encodeur de la figure Fig. 1.3 est de $1/3$. Il est également possible de poinçonner les bits de parité des encodeurs pour atteindre un rendement de $1/2$.

Les bits codés (c.-à-d., les bits d'information et les bits de parité) sont ensuite mappés vers une constellation M -QAM codées en Gray. Le codage de Gray est connu d'être efficace puisque le passage d'un symbole à son plus proche voisin sur la constellation ne requiert que le changement d'un seul bit. L'ordre de modulation est dénoté par M ou $M = 2^{2q}$ pour un entier $q \geq 1$. L'alphabet de la constellation est dénoté par $\mathcal{C}_q = \{c_1, c_1, \dots, c_M\}$. Le récepteur est équipé de N_a antennes et le signal reçu est supposé être affecté par un bruit blanc Gaussien additif (AWGN). A chaque indice de temps k , les échantillons reçus sur toutes les antennes sont empilés dans un seul vecteur $\mathbf{y}(k) = [y_1(k), y_2(k), \dots, y_{N_a}(k)]^T$. Dans la terminologie de traitement de signal, $\mathbf{y}(k)$ est connu sous le nom de *snapshot* et il est modélisé comme suit pour $k = 0, 1, \dots, K - 1$:

$$\mathbf{y}(k) = S \mathbf{a}(\theta) x(k) + \mathbf{w}(k), \quad (2.1)$$

où S est le coefficient du canal et $x(k)$ est le k -ième symbole transmis. De surcroit, $\mathbf{a}(\theta)$ est le vecteur directionnel fonction de la direction d'arrivée à estimer, θ , et donné par:

$$\mathbf{a}(\theta) = \left[e^{j2\pi\varphi_0(\theta)}, e^{j2\pi\varphi_1(\theta)}, \dots, e^{j2\pi\varphi_{N_a-1}(\theta)} \right]^T. \quad (2.2)$$

Dans l'équation (2.2), $\{\varphi_i(\theta)\}_{i=0}^{N_a-1}$ représentent les transformées du paramètre scalaire θ et dépendent de la configuration du réseaux d'antennes (cf. 1.2.2). Les éléments aléatoires du bruit, $\mathbf{w}(k)$, sont modélisés par des vecteurs Gaussiens complexes circulaires ayant des parties réelles et imaginaires indépendantes et de matrice de covariance $\mathbb{E}\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^H(k)\} = \sigma^2\mathbf{I}$. Afin de développer l'estimateur et l'expression de la BCR, il est connu dans les pratiques de la théorie d'estimation qu'il est essentiel de trouver l'expression analytique de la fonction logarithmique de vraisemblance (LLF) du système, ce qui sera l'objectif de la partie suivante.

2.3 Dérivation de l'expression analytique de la LLF

La LLF globale du système est donnée par:

$$\mathcal{L}(\mathbf{Y}; \theta) \triangleq \ln(p[\mathbf{Y}; \theta]), \quad (2.3)$$

\mathbf{Y} étant la matrice qui regroupe tous les snapshots, c.-à-d., $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(K-1)]$ et $p[\mathbf{Y}; \theta]$ est la fonction de densité de probabilité (pdf) de \mathbf{Y} paramétrée par θ . Utilisant l'hypothèse d'un entrelaceur de

large taille, il convient de supposer que les bits codés sont indépendants. Cette hypothèse a été largement utilisée dans la littérature (voir [26,27]). Les symboles transmis, étant des représentations de différents blocks de bits codés, sont aussi supposés être indépendants. De ce fait, $p[\mathbf{Y}; \theta]$ peut se factoriser comme suit:

$$p[\mathbf{Y}; \theta] = \prod_{k=0}^{K-1} p[\mathbf{y}(k); \theta]. \quad (2.4)$$

Dans (2.4), la pdf de chaque snapshot s'obtient à partir de (2.1) comme suit:

$$p[\mathbf{y}(k); \theta] = \sum_{c_m \in \mathcal{C}_q} Pr[x(k) = c_m] p[\mathbf{y}(k); \theta | x(k) = c_m]. \quad (2.5)$$

Dans l'équation (2.5), $\mathcal{C}_q = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$ est l'alphabet de la constellation de Gray utilisée et $\{Pr[x(k) = c_m]\}_m$ sont les probabilités *à priori* (APPs) des symboles transmis dont on développera l'expression dans la prochaine sous-section. De plus, utilisant le fait que $\mathbf{y}(k)$ conditionné par $x(k)$ a une distribution Gaussienne et en remarquant que $\|\mathbf{a}(\theta)\|^2 = N_a$, il s'ensuit que:

$$p[\mathbf{y}(k); \theta] = \frac{1}{\pi^{N_a} \sigma^{2N_a}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{y}(k)\|^2\right) D_k(\theta), \quad (2.6)$$

dans laquelle $D_k(\theta)$ est donnée par:

$$D_k(\theta) = \sum_{c_m \in \mathcal{C}_q} Pr[x(k) = c_m] \exp\left(-\frac{N_a S^2 |c_m|^2}{\sigma^2}\right) \times \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \Re\left\{S c_m^* \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}(k)\right\}\right). \quad (2.7)$$

Dérivation de l'expression des APPs

Nous nous proposons de trouver l'expression des APPs des symboles transmis en fonction des LLRs *à priori* des bits.

Considérons une constellation QAM arbitraire d'ordre M où chaque point c_m de son alphabet est mappé vers une séquence de $\log_2(M) = 2q$ bits, $\{\bar{b}_l\}_{l=1}^{2q}$, suivant les règles du mapping de Gray. On utilisera dorénavant la notation suivante pour dénoter le mapping:

$$c_m \longleftrightarrow \bar{b}_1^m \bar{b}_2^m \dots \bar{b}_l^m \dots \bar{b}_{2q}^m.$$

À chaque instant d'indice k , un symbole $x(k)$ est sélectionné parmi les M points de la constellation, $\{c_m\}_{m=1}^M$, et envoyé à travers le canal. On utilisera la même notation pour souligner le mapping entre le symbole $x(k)$ et la séquence de bits qu'il couvre, c.-à-d.:

$$x(k) \longleftrightarrow b_1^k b_2^k \dots b_l^k \dots b_{2q}^k.$$

En raison de l'indépendance entre les bits codés, les APPs de chaque symbole transmis, $x(k)$, se réduisent au produit des APPs des bits comme suit:

$$Pr[x(k) = c_m] = \prod_{l=1}^{2q} Pr[b_l^k = \bar{b}_l^m], \quad \forall c_m \in \mathcal{C}_q. \quad (2.8)$$

On définit également le LLR du l -ième bit codé, b_l^k , obtenu suite à la transmission de $x(k)$ par:

$$L_l(k) \triangleq \ln \left(\frac{Pr[b_l^k = 1]}{Pr[b_l^k = 0]} \right). \quad (2.9)$$

Utilisant l'équation (2.9) et le fait que $Pr[b_l^k = 0] + Pr[b_l^k = 1] = 1$, on peut écrire les APPs des bits transmis en fonction des LLRs *à priori* sous la forme suivante:

$$Pr[b_l^k = 1] = \frac{e^{L_l(k)}}{1 + e^{L_l(k)}} \quad \text{et} \quad Pr[b_l^k = 0] = \frac{1}{1 + e^{L_l(k)}}. \quad (2.10)$$

Pour des raisons de clarté, les deux équations dans (2.10) vont être fusionnées ensemble pour obtenir une seule expression générique:

$$Pr[b_l^k = \bar{b}_l^m] = \frac{1}{2 \cosh(L_l(k)/2)} e^{(\bar{b}_l^m - 1) \frac{L_l(k)}{2}}. \quad (2.11)$$

Le bit \bar{b}_l^m prend une des valeurs 0 ou 1 dépendamment de: i) les règles du mapping de Gray utilisées et ii) lequel des symboles $\{c_m\}_{m=1}^M$ est transmis à l'instant k . En remplaçant $Pr[b_l^k = \bar{b}_l^m]$ par leurs expressions, on réécrit les APPs des symboles comme suit:

$$Pr[x(k) = c_m] = \underbrace{\prod_{l=1}^{2q} \frac{1}{2 \cosh(L_l(k)/2)}}_{\beta_k} \prod_{l=1}^{2q} e^{(\bar{b}_l^m - 1) \frac{L_l(k)}{2}}. \quad (2.12)$$

Dans ce qui suit, nous nous proposons de présenter une procédure simple, constituée de 3 étapes, permettant la construction d'une constellation QAM arbitraire et codée suivant les règles de Gray. Ce processus récursif sera minutieusement étudié pour que les propriétés de ces constellations soient bien exploitée afin de factoriser $D_k(\theta)$ dans (2.7).

Concept de construction d'une constellation QAM codée en Gray

Utilisant ce processus récursif, on peut construire une constellation QAM d'ordre 2^{2q} en partant uniquement de deux ingrédients:

- i) Une constellation QPSK quelconque pourvue qu'elle soit codée en Gray.
- ii) Une constellation QAM en Gray d'ordre $2^{2(q-1)}$.

Le processus est décrit en 3 étapes comme suit:

- **étape 1:** Peupler le quadrant supérieur de droite de la constellation 2^{2q} -QAM désirée par les points de la constellation QAM d'ordre inférieur (la constellation d'ordre $2^{2(q-1)}$ dont on dispose). Il est clair que les points obtenus manqueront de 2 bits, ceci est simplement parce qu'ils ont été clonés à partir d'une constellation d'ordre $2^{2(q-1)}$ où chaque point est représenté par $2q-2$ bits. Par souci de simplicité et sans perte de généralité, on assumera que les 2 bits manquants, dans chaque point de la nouvelle constellation, sont les bits de poids le plus faible.
- **étape 2:** Peupler les 3 quadrants restants de la constellation 2^{2q} -QAM par symétrie par rapport aux axes des x , celui des y ainsi que du point central. Tous les points de la constellation désirée auront désormais 2 bits manquants.
- **étape 3:** Il est maintenant temps d'utiliser la constellation basique QPSK. Il suffira de prendre les deux bits de chaque quadrant de cette dernière et les copier à la place des bits manquants dans les quadrants correspondant de la nouvelle constellation obtenue suite à l'étape 2.

Nous présentons dans la figure Fig. 2.1 un exemple illustratif du dit processus permettant la construction d'une constellation 16-QAM à partir d'une constellation 4-QAM et d'une constellation QPSK basique. On réfère aux deux bits manquants des étapes 1 et 2 par "×" dans les figures Fig. 2.1-a) et Fig. 2.1-b). Ces derniers seront ajoutés à la troisième et dernière étape et seront marqués en quatre couleurs différentes. L'exemple de la figure Fig. 2.1 permet d'affirmer que la constellation construite est bien une constellation de Gray. En effet, prenons deux points adjacents quelconques c_{m_1} et c_{m_2} de la constellation 2^{2q} -QAM obtenue (deux points adjacents vérifient principalement $|c_{m_1} - c_{m_2}| = 2d_q$, $2d_q$ étant la distance minimale entre deux symboles). Deux hypothèses sont à envisager dans ce cas:

- 1) Si les deux points choisis, c_{m_1} et c_{m_2} , appartiennent au même quadrant alors, à la lumière de la 3e

étape du processus de construction, ces deux points possèdent les mêmes bits de poids le plus faible, c.-à-d., $\bar{b}_{2q}^{m_1} = \bar{b}_{2q}^{m_2}$ et $\bar{b}_{2q-1}^{m_1} = \bar{b}_{2q-1}^{m_2}$. La séquence des bits restants (qu'on a noté $\bar{\mathbf{b}}_p^{m_1} \triangleq \bar{b}_1^{m_1} \bar{b}_2^{m_1} \dots \bar{b}_{2q-2}^{m_1}$ et $\bar{\mathbf{b}}_p^{m_2} \triangleq \bar{b}_1^{m_2} \bar{b}_2^{m_2} \dots \bar{b}_{2q-2}^{m_2}$) a été obtenue à partir de deux points adjacents de la constellation de Gray d'ordre $2^{2(q-1)}$ (voir les étapes 1 et 2 du processus de construction). Ces deux séquences, $\bar{\mathbf{b}}_p^{m_1}$ et $\bar{\mathbf{b}}_p^{m_2}$ diffèrent donc par un seul bit et ainsi les deux séquences correspondantes à c_{m_1} et c_{m_2} , $\bar{\mathbf{b}}_p^{m_1} \bar{b}_{2q-2}^{m_1} \bar{b}_{2q-1}^{m_1}$ et $\bar{\mathbf{b}}_p^{m_2} \bar{b}_{2q-2}^{m_2} \bar{b}_{2q-1}^{m_2}$, ne diffère que par un seul bit.

2) Si les deux points, c_{m_1} et c_{m_2} , n'appartiennent pas au même quadrant alors le fait qu'ils soient adjacents implique qu'ils sont symétriques par rapport à l'axe des x ou l'axe des y . Ils possèdent donc, suivant l'étape 2, les mêmes $2q - 2$ premiers bits, c.-à-d., $\bar{\mathbf{b}}_q^{m_1} = \bar{\mathbf{b}}_q^{m_2}$. Utilisant le fait que leurs bits de poids le plus faibles manquants sont copiés à partir d'une constellation de Gray. Ces derniers diffèrent donc par un seul bit.

Pour conclure, on peut affirmer, qu'en utilisant le processus de construction établit ci-haut, toute constellation obtenue est une constellation de type Gray.

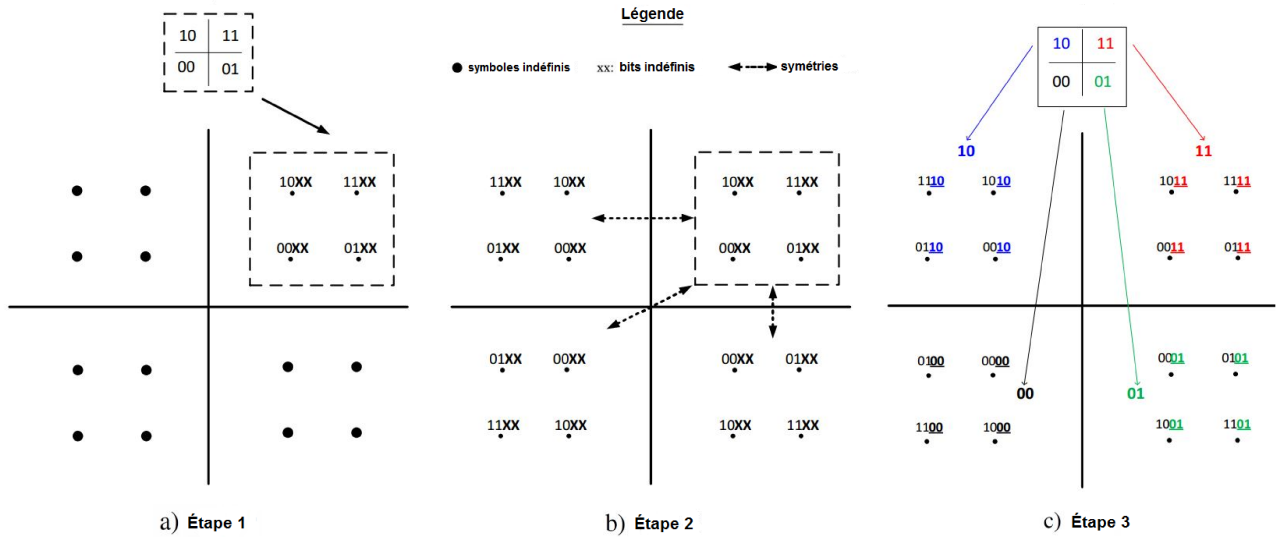


Figure 2.1 – Illustration de la construction récursive d'une constellation 16-QAM de type Gray à partir d'une constellation 4-QAM de type Gray

Il ne va sans dire que l'exemple illustre la construction d'une seule constellation 16-QAM de type Gray.

Il est possible, cependant, d'obtenir toutes les constellations 16-QAM de type Gray possibles. Utilisant l'exemple de la figure Fig. 2.1, on peut obtenir toutes les constellations 16-QAM de type Gray possibles en suivant trois étapes: i) utiliser une constellation QPSK différente que celle utilisée dans Fig. 2.1. ii) utiliser une constellation de base 4-QAM différente aussi de celle de l'exemple de la figure Fig. 2.1. iii) utiliser n'importe quelle position pour les bits manquants de l'étape 1 (les positions ne sont pas nécessairement consécutives). Pour obtenir toutes les constellations 64-QAM, il suffit de commencer par n'importe quelle constellation Gray 16-QAM et appliquer ii) et iii). Par souci de clarté et de concision, on utilisera la constellation QPSK de la figure Fig. 2.1-c comme la constellation de base qu'on utilisera dans toutes les itérations nécessaires à la construction d'une constellation d'ordre souhaité. Pour les mêmes raisons, on assumera aussi que les bits manquants de l' "étape 1" sont toujours les bits de poids le plus faible.

Rappelons qu'on a dénoté l'alphabet de la constellation Gray 2^{2q} -QAM obtenue par \mathcal{C}_q , on dénotera désormais son quadrant supérieur de droite par $\tilde{\mathcal{C}}_q$. Ainsi, tout point $c_m \in \mathcal{C}_q$ appartient à un ensemble de quatre points symétriques $\{\tilde{c}_m, \tilde{c}_m^*, -\tilde{c}_m, -\tilde{c}_m^*\}$ pour un point $\tilde{c}_m \in \tilde{\mathcal{C}}_q$. De surcroit, due aux symétries de l' "étape 2", ces quatre points possèdent exactement les mêmes $2q - 2$ bits de poids le plus fort, $\bar{b}_1^m \bar{b}_2^m \bar{b}_3^m \dots \bar{b}_{2q-3}^m \bar{b}_{2q-2}^m$. De ce fait, si on considère ces $2q - 1$ bits uniquement et on définit la quantité suivante:

$$\mu_{k,q}(c_m) \triangleq \prod_{l=1}^{2q-2} e^{(2\bar{b}_l^m - 1) \frac{L_l(k)}{2}} \quad \forall c_m \in \mathcal{C}_q, \quad (2.13)$$

on conclue immédiatement que:

$$\mu_{k,q}(\tilde{c}_m) = \mu_{k,q}(-\tilde{c}_m) = \mu_{k,q}(\tilde{c}_m^*) = \mu_{k,q}(-\tilde{c}_m^*). \quad (2.14)$$

De plus, on peut réécrire (2.12) sous la forme suivante pour tout $c_m \in \mathcal{C}_q$:

$$Pr[x(k) = c_m] = \beta_k \mu_{k,q}(\tilde{c}_m) e^{(2\bar{b}_{2q-1}^m - 1) \frac{L_{2q}(k)}{2}} e^{(2\bar{b}_{2q}^m - 1) \frac{L_{2q-1}(k)}{2}}. \quad (2.15)$$

Les deux bits impliqués dans les deux exponentielles de l'équation (2.15) sont exactement les mêmes pour tous les symboles appartenant au même quadrant (car ils ont été ajoutés à l' "étape 3"). En considérant la constellation QPSK de la figure Fig. 2.1-c, ces bits auront les valeurs suivantes:

$$\bar{b}_{2q-1}^m \bar{b}_{2q}^m = \begin{cases} 11 & \forall \tilde{c}_m \in \tilde{\mathcal{C}}_q, \\ 00 & \forall -\tilde{c}_m \in -\tilde{\mathcal{C}}_q. \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{b}_{2q-1}^m \bar{b}_{2q}^m = \begin{cases} 01 & \forall \tilde{c}_m^* \in \tilde{\mathcal{C}}_q^*, \\ 10 & \forall -\tilde{c}_m^* \in -\tilde{\mathcal{C}}_q^*. \end{cases} \quad (2.16)$$

Il est clair que ces résultats peuvent changer suivant le choix de la constellation QPSK de base. Une question légitime peut être alors posée: comment le résultat final restera-t-il valide pour toutes les constellations

2^{2q} -QAM possibles? Dans ce travail, le choix de $\tilde{\mathcal{C}}_q$ comme étant le quadrant supérieur de droite est dû au fait que les bits “11” sont placés dans ce même quadrant de la constellation QPSK de base. Les dérivations à venir resteront valide en choisissant $\tilde{\mathcal{C}}_q$ comme étant le quadrant qui reflète les bits “11” dans tout autre constellation de base QPSK.

En utilisant (2.16) dans (2.15) et en faisant appel aux égalités dans (2.14), on retrouve que:

$$Pr[x(k) = \tilde{c}_m] = \beta_k \mu_{k,q}(\tilde{c}_m) e^{\frac{L_{2q-1}(k)}{2}} e^{\frac{L_{2q}(k)}{2}}, \quad (2.17)$$

$$Pr[x(k) = \tilde{c}_m^*] = \beta_k \mu_{k,q}(\tilde{c}_m) e^{-\frac{L_{2q-1}(k)}{2}} e^{\frac{L_{2q}(k)}{2}}, \quad (2.18)$$

$$Pr[x(k) = -\tilde{c}_m] = \beta_k \mu_{k,q}(\tilde{c}_m) e^{-\frac{L_{2q-1}(k)}{2}} e^{-\frac{L_{2q}(k)}{2}}, \quad (2.19)$$

$$Pr[x(k) = -\tilde{c}_m^*] = \beta_k \mu_{k,q}(\tilde{c}_m) e^{\frac{L_{2q-1}(k)}{2}} e^{-\frac{L_{2q}(k)}{2}}. \quad (2.20)$$

Les quatre équations ci-dessus sont définies pour tout \tilde{c}_m et ses points symétriques appartenant aux autres quadrants. Ils forment l'ensemble complet des probabilités *a priori* pour chaque symbole transmis $x(k)$. Il est à noter que, chaque quatre points symétriques, \tilde{c}_m , \tilde{c}_m^* , $-\tilde{c}_m$, et $-\tilde{c}_m^*$, se partagent le même terme $\beta_k \mu_{k,q}(\tilde{c}_m)$. Cette propriété se prouvera de grande importance dans la factorisation de l'expression de $D_k(\theta)$.

Factorisation de $D_k(\theta)$

L'objectif de cette partie est de réécrire l'expression de $p[\mathbf{y}(k); \theta]$ comme étant le produit de deux termes homologues ce qui nous permettra de simplifier l'expression de la LLF du système. D'après l'équation (2.6), factoriser $p[\mathbf{y}(k); \theta]$ revient simplement à factoriser $D_k(\theta)$ dont l'expression était donnée (2.7) par:

$$D_k(\theta) = \sum_{c_m \in \mathcal{C}_q} Pr[x(k) = c_m] \exp\left(-\frac{N_a S^2 |c_m|^2}{\sigma^2}\right) \times \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \Re\left\{S c_m^* \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}(k)\right\}\right).$$

Commençons tout d'abord par utiliser la décomposition $\mathcal{C}_q = \tilde{\mathcal{C}}_q \cup (-\tilde{\mathcal{C}}_q) \cup \tilde{\mathcal{C}}_q^* \cup (-\tilde{\mathcal{C}}_q^*)$ pour transformer la somme sur $c_m \in \mathcal{C}_q$ dans (2.21) en une somme sur $\tilde{c}_m \in \tilde{\mathcal{C}}_q$. Nous utiliserons aussi le fait que les quatre points symétriques, (\tilde{c}_m , $-\tilde{c}_m$, \tilde{c}_m^* and $-\tilde{c}_m^*$), possèdent le même module pour écrire $D_k(\theta)$ sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 D_k(\theta) = & \sum_{\tilde{c}_m \in \tilde{\mathcal{C}}_q} e^{-\rho N_a |\tilde{c}_m|^2} \left[Pr[x(k) = \tilde{c}_m^*] \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \Re\{\tilde{c}_m^* S \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}(k)\}\right) + Pr[x(k) = -\tilde{c}_m^*] \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \Re\{-\tilde{c}_m^* S \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}(k)\}\right) \right. \\
 & \left. + Pr[x(k) = \tilde{c}_m] \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \Re\{\tilde{c}_m S \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}(k)\}\right) + Pr[x(k) = -\tilde{c}_m] \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \Re\{-\tilde{c}_m S \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}(k)\}\right) \right]. \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Ensuite, en injectant les expressions des APPs (2.17)-(2.20) dans l'équation (2.21) et en utilisant la fameuse identité $e^x + e^{-x} = 2 \cosh(x)$, on retrouve que:

$$\begin{aligned}
 D_k(\theta) = & 2\beta_k \sum_{\tilde{c}_m \in \tilde{\mathcal{C}}_q} \mu_{k,q}(\tilde{c}_m) e^{-\rho N_a |\tilde{c}_m|^2} \times \\
 & \left[\cosh\left(\frac{2\Re\{\tilde{c}_m^* S \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}(k)\}}{\sigma^2} + \frac{L_{2q-1}(k)}{2} + \frac{L_{2q}(k)}{2}\right) + \cosh\left(\frac{2\Re\{\tilde{c}_m S \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}(k)\}}{\sigma^2} - \frac{L_{2q-1}(k)}{2} + \frac{L_{2q}(k)}{2}\right) \right]. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Pour aller un peu plus loin, il suffit d'utiliser la formule suivante: $\cosh(x) + \cosh(y) = 2 \cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$ avec les deux identités triviales: $\tilde{c}_m^* + \tilde{c}_m = 2\Re\{\tilde{c}_m\}$ et $\tilde{c}_m^* - \tilde{c}_m = -2j\Im\{\tilde{c}_m\}$. Ceci nous permettra d'avoir:

$$\begin{aligned}
 D_k(\theta) = & 4\beta_k \sum_{\tilde{c}_m \in \tilde{\mathcal{C}}_q} \mu_{k,q}(\tilde{c}_m) e^{-\rho N_a |\tilde{c}_m|^2} \times \\
 & \cosh\left(\frac{2S\sqrt{N_a} \Re\{\tilde{c}_m\}}{\sigma^2} u_k(\theta) + \frac{L_{2q}(k)}{2}\right) \times \cosh\left(\frac{2S\sqrt{N_a} \Im\{\tilde{c}_m\}}{\sigma^2} v_k(\theta) + \frac{L_{2q-1}(k)}{2}\right), \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

où $u_k(\theta)$ et $v_k(\theta)$ représentent les vecteurs de formation de faisceaux de réception dans la direction à estimer (de l'anglais receive beamforming output). Ils sont donnés par:

$$u_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \Re\{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}(k)\}, \quad (2.24)$$

$$v_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \Im\{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}(k)\}. \quad (2.25)$$

Notons aussi que le quadrant supérieur de droite de la constellation 2^{2q} -QAM obtenue peut être exprimé en fonction des coordonnées cartésiennes comme suit: $\tilde{\mathcal{C}}_q = \{(2i-1)d_q + j(2n-1)d_q\}_{i,n=1}^{2^{q-1}}$. Tout point de

la constellation peut donc s'exprimer ainsi: $\tilde{c}_m = (2i - 1)d_q + j(2n - 1)d_q$. Il devient ainsi très commode de remplacer la somme sur $\tilde{c}_m \in \tilde{\mathcal{C}}_q$ dans (2.23) par une somme sur les deux compteurs i et n .

Dans ce cas, factoriser $D_k(\theta)$ revient à factoriser le terme $\mu_{k,q}(\tilde{c}_m)$. En effet, il suffira de réécrire ce dernier sous la forme d'un produit de deux termes indépendant l'un en fonction du compteur i et l'autre en fonction du compteur n . Pour ce faire, il est utile d'étudier minutieusement les propriétés de la constellation de Gray obtenue à travers le processus de construction en trois étapes décrit précédemment. Par abus de notation, on utilisera l'exposant (i, n) au lieu de m , c'est-à-dire:

$$\bar{b}_l^m \equiv \bar{b}_l^{(i,n)}, \quad \text{for } l = 1, 2, \dots, 2q. \quad (2.26)$$

Partant de cette nouvelle notation, on peut utiliser les deux propriétés suivantes obtenues en examinant la constellation:

- 1) Les bits de position impaire, $\bar{b}_{2l-1}^{(i,n)}$, ne changent pas pour tous les points de la constellation situés sur une même ligne *horizontale*. Ils ne changent donc pas en variant l'abscisse du symbole ou encore le compteur i .
- 2) Les bits de position paire, $\bar{b}_{2l}^{(i,n)}$, ne changent pas pour tous les points de la constellation situés sur une même ligne *verticale*.

Ces deux propriétés peuvent être vérifiées au moins informellement sur la constellation QPSK initiale de la figure Fig. 2.1 (ce qui correspond à un ordre de modulation $q = 1$). Procédons maintenant à une démonstration par récurrence sur l'ordre de modulation q .

Démonstration:

Supposons que ces propriétés sont vraies jusqu'à l'ordre $q - 1$ (correspondant à la constellation QAM d'ordre $2^{2(q-1)}$). Rappelons que la constellation d'ordre $q - 1$ a été placée au quadrant supérieur droite de la constellation d'ordre q et que les trois autres quadrants ont été obtenus grâce à la symétrie de de l' "étape 2". En conséquence, ces propriétés sont vérifiées pour les $2q - 2$ premiers bits de tous les symboles de la constellation d'ordre q . Les bits restants sont copiés à partir de la constellation QPSK de base faisant que ces propriétés soient vérifiées pour l'ensemble des points de la constellation. Ce qu'il fallait démontrer.

En bref, les deux propriétés présentées précédemment peuvent être exprimées différemment. En effet, les bits de positions impaires, $\{\bar{b}_{2l-1}^{(i,n)}\}_{l=1}^q$, ne changent pas sur une ligne horizontale ce qui les rend inchangeables en variant l'abscisse des symboles $(2i - 1)d_q$ ou encore en variant le compteur i . Ces bits sont donc fonction du compteur n seulement. Le même raisonnement s'applique sur les bits de position paire, $\{\bar{b}_{2l}^{(i,n)}\}_{l=1}^q$, ce qui

nous permet d'adopter les notations suivantes:

$$\left\{ \bar{b}_{2l-1}^{(i,n)} \equiv \bar{b}_{2l-1}^{(n)} \quad \text{et} \quad \bar{b}_{2l}^{(i,n)} \equiv \bar{b}_{2l}^{(i)} \right\}_{l=1}^q. \quad (2.27)$$

Ainsi, en utilisant le résultat de (2.27) dans (2.13) et en regroupant les bits impairs et les bits pairs dans deux termes différents, on obtient la décomposition suivante du terme $\mu_{k,q}(\tilde{c}_m)$:

$$\mu_{k,q}(\tilde{c}_m) = \eta_{k,2q}(i) \times \eta_{k,2q-1}(n), \quad \forall \tilde{c}_m \in \tilde{\mathcal{C}}_q, \quad (2.28)$$

où $\eta_{k,2q}(i)$ et $\eta_{k,2q-1}(n)$ sont données par:

$$\eta_{k,2q}(i) \triangleq \prod_{l=1}^{p-1} e^{(2\bar{b}_{2l}^{(i)} - 1) \frac{L_{2l}(k)}{2}}, \quad (2.29)$$

$$\eta_{k,2q-1}(n) \triangleq \prod_{l=1}^{p-1} e^{(2\bar{b}_{2l-1}^{(n)} - 1) \frac{L_{2l-1}(k)}{2}}. \quad (2.30)$$

Enfin, en utilisant le résultat de (2.28) dans (2.23) et le fait que le module de chaque symbole de la constellation est donnée par: $|\tilde{c}_m|^2 = d_q^2([2i-1]^2 + [2n-1]^2)$, $D_k(\theta)$ s'écrit comme suit:

$$D_k(\theta) = 4\beta_k \sum_{i=1}^{2^{q-1}} \sum_{n=1}^{2^{q-1}} \left[\eta_{k,2q}(i) e^{-\rho N_a d_q^2 (2i-1)^2} \cosh\left(\frac{2S[2i-1]\sqrt{N_a}d_q}{\sigma^2} u_k(\theta) + \frac{L_{2q}(k)}{2}\right) \times \right. \\ \left. \eta_{k,2q-1}(n) e^{-\rho N_a d_q^2 (2n-1)^2} \cosh\left(\frac{2S[2n-1]\sqrt{N_a}d_q}{\sigma^2} v_k(\theta) + \frac{L_{2q-1}(k)}{2}\right) \right]. \quad (2.31)$$

Il suffit maintenant de séparer les deux sommes dans (2.31) pour retrouver une forme très intéressante de $D_k(\theta)$ comme suit:

$$D_k(\theta) = 4\beta_k H_{k,2q}(u_k(\theta)) H_{k,2q-1}(v_k(\theta)), \quad (2.32)$$

dans laquelle $H_{k,s}(\cdot)$ est donnée par (pour $s = 2q$ ou $2q-1$):

$$H_{k,s}(x) = \sum_{i=1}^{2^{q-1}} \eta_{k,q}(i) e^{-\rho N_a [2i-1]^2 d_q^2} \cosh\left(\frac{2S[2i-1]\sqrt{N_a}d_q}{\sigma^2} x + \frac{L_q(k)}{2}\right).$$

L'objectif de cette partie étant de dériver l'expression de la LLF du système donnée par l'équation (2.3) et qui, en remplaçant $p[\mathbf{y}(k); \theta]$ par son expression trouvée dans (2.6), devient:

$$\mathcal{L}(\mathbf{Y}; \theta) = -KN_a \ln(\pi\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{K-1} \|\mathbf{y}(k)\|^2 + \sum_{k=0}^{K-1} \ln(D_k(\theta)).$$

Il suffit maintenant de remplacer $D_k(\theta)$ par son expression déjà établit dans (2.32) la LLF du système se décompose immédiatement en la somme de deux termes analogues:

$$\mathcal{L}(\mathbf{Y}; \theta) = \sum_{k=0}^{K-1} \ln \left(H_{k,2q}(u_k(\theta)) \right) + \sum_{k=0}^{K-1} \ln \left(H_{k,2q-1}(v_k(\theta)) \right). \quad (2.33)$$

La forme intéressante de la LLF du système est une étape cruciale franchie et qui apportera beaucoup d'aisance dans le développement de l'estimateur MV ainsi que de la BCR.

2.4 Dérivation de l'estimateur MV CA [20]

Comme mentionné précédemment, les techniques d'estimation de directions d'arrivée qui existaient auparavant ne semblent pas percevoir le décodeur. En effet, sans connaissance *à priori*, ces techniques opèrent sur les snapshots reçus, $\{y(k)\}_{k=0}^{K-1}$. Ensuite, un générateur de faisceaux de réception (de l'anglais receive beamformer), dirigé dans la direction de l'estimée acquise de manière aveugle, $\hat{\theta}_{\text{NDA}}$, retourne la séquence d'information correspondante $y(\hat{\theta}_{\text{NDA}})$ qui va être utiliser pour décoder les données. Il est à noter que $\hat{\theta}_{\text{NDA}}$ peut être acquise en utilisant n'importe quelle technique d'estimation classique. Cependant, la technique MV fournit l'estimée la plus précise et c'est cette technique qu'on utilisera dans ce travail. L'estimée MV (EMV) NDA est donnée par:

$$\hat{\theta}_{\text{MV-NDA}} = \operatorname{argmax}_{\theta'} \mathcal{L}^{(0)}(\theta'), \quad (2.34)$$

où $\mathcal{L}^{(0)}(\cdot)$ est la LLF NDA obtenue à partir de (2.33) en utilisant $L_l(k) = 0$ pour tout l et k . En effet, dans le cas NDA, le récepteur ne possède aucune information *à priori* sur les données transmises. Ceci se traduit par $P[b_l^k = 0] = P[b_l^k = 1] = 1/2$. En conséquence, on déduit à partir de (2.9) que $L_l(k) = 0$. La LLF NDA est donc donnée par:

$$\mathcal{L}^{(0)}(\theta') = \sum_{k=0}^{K-1} \left[\ln \left(H(u_k(\theta')) \right) + \ln \left(H(v_k(\theta')) \right) \right], \quad (2.35)$$

où $H(\cdot)$ s'écrit comme:

$$H(x) = \sum_{i=1}^{2^q-1} e^{-\rho N_a d_q^2 [2i-1]^2} \cosh \left(\frac{2S[2i-1]\sqrt{N_a d_q}}{\sigma^2} x \right).$$

Il est à noter que $u_k(\theta')$ et $v_k(\theta')$ impliqués dans (2.35) sont, respectivement, la partie réelle et la partie imaginaire de la sortie d'un beamformer de réception dirigé dans une direction candidate, θ' , que la vrai DDA inconnu, θ , pourrait prendre. Il est clair que l'EMV donnée par l'équation (2.34) est celle qui maximise le gain d'antenne et elle n'est atteinte que quand θ' prend la valeur de la vrai DDA, θ .

Après beamforming, la séquence de sortie s'écrit comme:

$$\mathbf{y}(\hat{\theta}_{\text{MV-NDA}}) = [y_0(\hat{\theta}_{\text{MV-NDA}}), y_1(\hat{\theta}_{\text{MV-NDA}}), \dots, y_{K-1}(\hat{\theta}_{\text{MV-NDA}})]^T.$$

Cette séquence, dans le cas NDA, est utilisée pour décoder les données une fois pour toute. Cette approche expose le système a diverses erreurs de décodage si $\hat{\theta}_{\text{MV-NDA}}$ n'est pas suffisamment précise due à un RSB faible. Pour remédier à cela, on propose une nouvelle et plus efficace solution où l'estimation de la direction d'arrivée est judicieusement incorporée dans le turbo-décodage. Pour bien appréhender ce mécanisme, il est important d'introduire d'abord quelques notions relatives au turbo-décodage.

Quelques notions relatives au turbo-décodage

Supposons qu'un beamformer de réception dans la direction de la vrai DDA, θ , retourne la séquence d'information suivante:

$$\mathbf{y}(\theta) = [y_0(\theta), y_1(\theta), \dots, y_{K-1}(\theta)]^T, \quad (2.36)$$

où

$$y_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{y}(k). \quad (2.37)$$

En utilisant cette séquence d'information, le démodulateur extrait les LLRs des bits (bit likelihoods) comme suit:

$$\Lambda_l(k) \triangleq \ln \left(\frac{p[\mathbf{y}(\theta) | b_l^k = 1]}{p[\mathbf{y}(\theta) | b_l^k = 0]} \right), \quad (2.38)$$

et les alimente au turbo décodeur. Ensuite les deux décodeurs SISO échangent une information extrinsèque afin de mettre à jour les LLRs *a posteriori* des bits codés données par:

$$\Upsilon_l(k) = \ln \left(\frac{Pr[b_l^k = 1 | \mathbf{y}(\theta)]}{Pr[b_l^k = 0 | \mathbf{y}(\theta)]} \right). \quad (2.39)$$

Sachant que le turbo-décodage est basé sur un principe itératif, on dénotera les LLRS *a posteriori*, à chaque itération r par $\Upsilon_l^{(r)}(k)$. Après un certain nombre d'itération R , un état d'équilibre est atteint où $\Upsilon_l^{(R)}(k) \approx \Upsilon_l(k)$ pour tout l et k . Le signe de cette dernière sera utilisé pour détecter les données. De plus, en utilisant la formule de Bayes, on peut écrire:

$$Pr[b_l^k = 1 | \mathbf{y}(\theta)] = \frac{p[\mathbf{y}(\theta) | b_l^k = 1] Pr[b_l^k = 1]}{p[\mathbf{y}(\theta)]}, \quad (2.40)$$

et

$$Pr[b_l^k = 0 | \mathbf{y}(\theta)] = \frac{p[\mathbf{y}(\theta) | b_l^k = 0] Pr[b_l^k = 0]}{p[\mathbf{y}(\theta)]}. \quad (2.41)$$

En prenant le ratio de (2.40) et (2.41) et en appliquant la fonction logarithme, on retrouve les LLRs *à priori* comme suit:

$$L_l(k) = \Upsilon_l(k) - \Lambda_l(k) \approx \Upsilon_l^{(R)}(k) - \Lambda_l(k), \quad (2.42)$$

Les LLRs *à priori* sont donc calculés à partir des LLRs *a posteriori* à l'état d'équilibre et des $\Lambda_l(k)$ obtenus par le démodulateur. Ces équations sont tout ce dont on aura besoin pour introduire notre mécanisme d'estimation.

Incorporation de l'estimation dans le turbo-décodage

La séquence d'information donnée par (2.36) est utilisée pour initialiser le processus de décodage. L'estimation de la direction d'arrivée ainsi que le beamforming sont ensuite incorporés dans chaque itération r du décodeur turbo. On modifie alors (2.42) comme suit:

$$L_l^{(r)}(k) = \Upsilon_l^{(r)}(k) - \Lambda_l^{(r-1)}(k). \quad (2.43)$$

Ceci nous permettra d'avoir des LLR *à priori* plus fiables et donc des EMV DDA, $\hat{\theta}_{\text{MV-CA}}^{(r)}$, de plus en plus fiables après chaque itération. Les vraisemblances des bits, $\Lambda_l^{(r-1)}(k)$, sont obtenues à partir de la séquence d'information retournée par le beamformer durant l'itération précédente $r - 1$. C'est-à-dire qu'elles sont obtenues en remplaçant $\mathbf{y}(\theta)$ par $\mathbf{y}(\hat{\theta}_{\text{MV-CA}}^{(r-1)})$ dans l'équation (2.38):

$$\Lambda_l^{(r-1)}(k) \triangleq \ln \left(\frac{p[\mathbf{y}(\hat{\theta}_{\text{MV-CA}}^{(r-1)}) | b_l^k = 1]}{p[\mathbf{y}(\theta) | b_l^k = 0]} \right). \quad (2.44)$$

L'EMV DDA de l'itération r , $\widehat{\theta}_{\text{MV-CA}}^{(r)}$, est donc donnée par:

$$\widehat{\theta}_{\text{MV-CA}}^{(r)} = \underset{\theta'}{\operatorname{argmax}} \mathcal{L}^{(r)}(\theta'), \quad (2.45)$$

où $\mathcal{L}^{(r)}(\theta')$ est bien évidemment la LLF du système codé (LLF CA), obtenue en remplaçant $L_l(k)$ par $L_l^{(r)}(k)$ dans l'équation (2.33):

$$\mathcal{L}^{(r)}(\theta') = \sum_{k=1}^K \ln \left(H_{k,2q}^{(r)}(u_k(\theta')) \right) + \ln \left(H_{k,2q-1}^{(r)}(v_k(\theta')) \right), \quad (2.46)$$

dans laquelle $H_{k,s}^{(r)}(\cdot)$ s'écrit comme suit (pour $s = 2q$ et $2q - 1$):

$$H_{k,s}^{(r)}(x) = \sum_{i=1}^{2^q-1} \eta_{k,s}^{(r)}(i) e^{-\rho N_a [2i-1]^2 d_q^2} \cosh \left(\frac{2S[2i-1]\sqrt{N_a} d_q}{\sigma^2} x + \frac{L_s^{(r)}(k)}{2} \right).$$

Dans ce cas aussi, $\eta_{k,2q}^{(r)}(i)$ et $\eta_{k,2q-1}^{(r)}(i)$ sont obtenus en remplaçant $L_l(k)$ par $L_l^{(r)}(k)$ dans (2.29) et (2.30). A ce stade, le lecteur peut poser la question suivante: Comment la LLF CA de l'équation (2.45) est maximisée à chaque itération r du turbo décodeur? La réponse à cette question fera l'objet de la prochaine partie.

La technique de maximisation de la LLF CA

Etant donné que c'est l'expression analytique de la LLF CA qu'on a retrouvée dans (2.45), il est bien simple de la maximiser utilisant n'importe quelle technique de maximisation itérative. Dans ce travail, on a choisi une des techniques les plus populaires: la technique Newton-Raphson. À chaque itération i de l'algorithme Newton-Raphson, l'EMV DDA, $\widehat{\theta}_i^{(r)}$, est donnée par:

$$\widehat{\theta}_i^{(r)} = \widehat{\theta}_{i-1}^{(r)} - \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(r)}(\theta)}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}^{(r)}(\theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta = \widehat{\theta}_{i-1}^{(r)}}. \quad (2.47)$$

Cet algorithme se caractérise par le critère de convergence: $|\widehat{\theta}_i^{(r)} - \widehat{\theta}_{i-1}^{(r)}| \leq \epsilon$ qui, une fois atteint, produit l'EMV DDA CA, $\widehat{\theta}_{\text{MV-CA}}^{(r)}$, de l'itération r du décodeur turbo. Le seuil ϵ est prédéfini et constitue un paramètre clé qui a un impact considérable sur la qualité des estimées. Il est clair aussi que l'algorithme Newton-Raphson

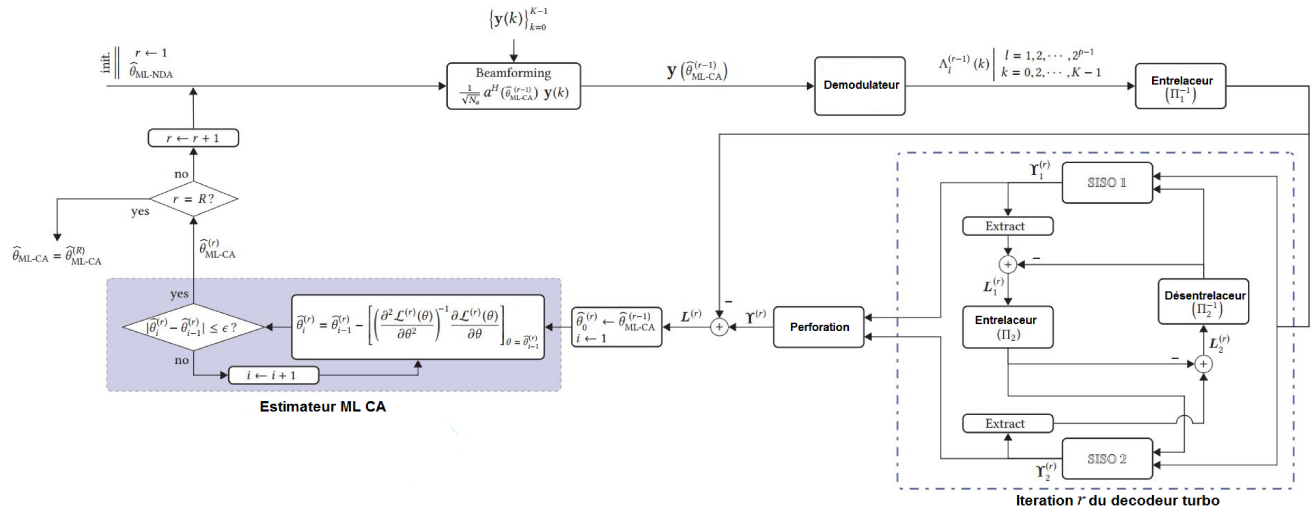


Figure 2.2 – Architecture de l’estimateur MV CA incorporé dans le turbo décodeur.

est lui aussi itératif et nécessite donc d’être initialisé par une estimée efficace afin d’assurer sa convergence vers un maximum global de la LLF considérée. Pour ce faire, à chaque itération turbo, l’algorithme est initialisé par $\hat{\theta}_{MV-CA}^{(r-1)}$, c.-à-d.:

$$\hat{\theta}_0^{(r)} = \hat{\theta}_{MV-CA}^{(r-1)}, \quad (2.48)$$

où $\hat{\theta}_{MV-CA}^{(r-1)}$ est la MVE obtenue à l’itération précédente.

Notons que tout le mécanisme est initialisé via la MVE NDA obtenue à l’équation (2.34). Cette dernière est aussi obtenue par la maximisation de $\mathcal{L}^{(0)}(\theta)$ en utilisant l’algorithme Newton-Raphson avec comme initialisation une estimée obtenue par une recherche à large échelle (de l’anglais grid search) sur θ . Pour mieux comprendre ce nouveau processus, on va procéder à sa schématisation dans ce qui suit.

Schématisation du nouveau mécanisme Estimation/turbo-décodage

Le nouveau schéma d’estimation et de décodage est illustré dans la figure Fig. 2.2. Plaçons nous dans une itération r du turbo décodeur. Le démodulateur extrait les vraisemblances des bits à partir de la séquence d’information sortie du beamformer de l’itération $r - 1$. Ces vraisemblances des bits vont ensuite alimenter les deux décodeurs SISO. Ces derniers vont retourner les LLRs *a posteriori* de l’itération r . Plus précisément, le premier décodeur retourne les LLRs *a posteriori* correspondant aux bits de données et de parité du premier

codeur. Ensuite, il y'a extraction des LLRs *a posteriori*, $\hat{\mathbf{Y}}_1^{(r)}$, correspondant uniquement aux bits de données, lesquels seront utilisés pour trouver l'information extrinsèque. Cette information va être passée au deuxième décodeur. Ce dernier va, à son tour, produire les LLRs *a posteriori*, $\hat{\mathbf{Y}}_2^{(r)}$, correspondant à la même séquence de bits d'information et au bits de parité provenant du deuxième codeur cette fois. Puis $\hat{\mathbf{Y}}_1^{(r)}$ et $\hat{\mathbf{Y}}_2^{(r)}$ subiront une perforation dans le but d'obtenir les LLRs *a posteriori* de tous les bits codés, $\hat{\mathbf{Y}}^{(r)}$. Les LLR *a priori* correspondant sont ensuite obtenus et servent d'entrée au bloc d'estimation afin de trouver l'estimée MV de l'itération r , $\hat{\theta}_{\text{MV-CA}}^{(r)}$.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dérivé l'expression de la fonction de vraisemblance du système. Celle-ci a été écrite comme la somme de deux termes analogues facilitant ainsi toutes les dérivations. Ensuite, nous avons procédé à la dérivation du nouvel estimateur MV CA. On a expliqué l'intégration de l'estimation dans le décodage. Ces derniers s'améliorent mutuellement après chaque itération turbo. Dans le prochain chapitre, on se propose de dériver la borne Cramér-Rao afin de valider l'estimateur développé.

Chapitre 3

Développement de l'expression analytique de la borne de Cramér-Rao

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons de développer l'expression analytique de la borne de Cramér-Rao. Cette borne servira comme référence permettant d'affirmer si les données disponibles sont utilisées de façon optimale pour estimer le paramètre recherché, la DDA dans ce cas. Cette borne inférieure revient originellement à Fisher dans un de ses travaux sur l'estimation à MV. Sa forme a été modernisée par la suite par Cramer (1946) et Rao (1945). Dans le contexte MV, seul le résultat asymptotique est intéressant puisque les estimateurs à MV ne sont pas sans biais. Il nous suffira de vérifier que l'estimateur à MV CA développé précédemment atteint cette borne asymptotiquement.

3.2 Développement de l'expression analytique de la BCR [21]

La BCR est une borne inférieure de la variance de n'importe quel estimateur sans biais $\hat{\theta}$ de θ :

$$\mathbb{E}\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} \geq \text{BCR}(\theta).$$

Son expression analytique est donnée par:

$$\text{BCR}(\theta) = \frac{1}{I(\theta)}, \quad (3.1)$$

où $I(\theta)$ représente l'information de Fisher (FI) des données reçues définie par:

$$I(\theta) \triangleq -\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{Y}; \theta)}{\partial \theta^2} \right\}. \quad (3.2)$$

En utilisant l'expression de la LLF donnée par l'équation (2.33) et en dénotant:

$$\begin{aligned} \gamma_{k,2q}(\theta) &\triangleq -\mathbb{E} \left\{ \partial^2 \ln (H_{k,2q}(u_k(\theta))) / \partial \theta^2 \right\}, \\ \gamma_{k,2q-1}(\theta) &\triangleq -\mathbb{E} \left\{ \partial^2 \ln (H_{k,2q-1}(v_k(\theta))) / \partial \theta^2 \right\}, \end{aligned}$$

on peut facilement réécrire $I(\theta)$ comme suit:

$$I(\theta) = \sum_{k=0}^{K-1} \left[\gamma_{k,2q}(\theta) + \gamma_{k,2q-1}(\theta) \right]. \quad (3.3)$$

Afin de retrouver les expressions de $\gamma_{k,2q}(\theta)$ et $\gamma_{k,2q-1}(\theta)$, il est nécessaire de trouver les pdfs de $u_k(\theta)$ et $v_k(\theta)$. Trouver ces pdfs est le but de la prochaine étape.

- Pdfs de $u_k(\theta)$ et $v_k(\theta)$:

Le modèle du système s'écrit comme dans (2.1):

$$\mathbf{y}(k) = S \mathbf{a}(\theta) x(k) + \mathbf{w}(k).$$

Par la suite on utilisera souvent la notation suivante:

$$y_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{y}(k),$$

qui nous permettra d'écrire:

$$y_k(\theta) = S \sqrt{N_a} x(k) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N_a}} \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{w}(k)}_{\tilde{w}_k(\theta)},$$

où $\tilde{w}_k(\theta)$ est une variable aléatoire (RV) de moyenne zéro et de variance donnée par:

$$\begin{aligned} \{\tilde{w}(\theta)\} &= \frac{1}{N_a} \mathbb{E} \left\{ [\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{w}(k)] [\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{w}(k)]^* \right\}, \\ &= \mathbf{a}(\theta)^H \mathbb{E} \{ \mathbf{w}(k) \mathbf{w}(k)^* \} \mathbf{a}(\theta)^T, \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $c_m \in \mathcal{C}$, la pdf de la variable aléatoires $y_k(\theta)$ dans (3.4) s'écrit comme:

$$p[y_k(\theta)|x(k) = c_m] = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} |y_k(\theta) - S\sqrt{N_a}c_m|^2 \right\}. \quad (3.4)$$

En moyennant (3.4) sur tous les points de la constellation, utilisant le fait que $y_k(\theta) = u_k(\theta) + jv_k(\theta)$, et en rappelant l'expression de $D_k(\theta)$ dans (2.7), il s'ensuit que:

$$p[y_k(\theta)] = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{u_k(\theta)^2}{\sigma^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{v_k(\theta)^2}{\sigma^2} \right\} D_k(\theta). \quad (3.5)$$

En remarquant que $\beta_k = \beta_{k,2q}\beta_{k,2q-1}$ avec:

$$\beta_{k,2q} = \frac{1}{2^q} \prod_{l=1}^q \frac{1}{\cosh(L_{2l}(k)/2)} \quad \text{et} \quad \beta_{k,2q-1} = \frac{1}{2^q} \prod_{l=1}^q \frac{1}{\cosh(L_{2l-1}(k)/2)}, \quad (3.6)$$

et en explicitant l'expression de $D_k(\theta)$ tels que dans (2.32), il s'ensuit que:

$$p[y_k(\theta)] = \frac{2\beta_{k,2q}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u_k(\theta)^2}{\sigma^2}} H_{k,2q}(u_k(\theta)) \frac{2\beta_{k,2q-1}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{v_k(\theta)^2}{\sigma^2}} H_{k,2q-1}(v_k(\theta)).$$

Il suffit maintenant de rappeler l'indépendance de $u_k(\theta)$ et $v_k(\theta)$, c'est-à-dire que $p[y_k(\theta)] = p[u_k(\theta), v_k(\theta)]$, pour trouver leurs pdfs comme suit:

$$p[u_k(\theta)] = \frac{2\beta_{k,2q}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} H_{k,2q}(u_k(\theta)) e^{-\frac{u_k(\theta)^2}{\sigma^2}}, \quad (3.7)$$

$$p[v_k(\theta)] = \frac{2\beta_{k,2q-1}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} H_{k,2q-1}(v_k(\theta)) e^{-\frac{v_k(\theta)^2}{\sigma^2}}. \quad (3.8)$$

Dans ce qui suit, on va présenter les détails relatifs au développement du terme $\gamma_{k,2q}(\theta)$. Il sera très facile de retrouver les dérivations relatives au terme $\gamma_{k,2q-1}(\theta)$ en utilisant la même démarche grâce aux symétries apparentes entre les pdfs de $u_k(\theta)$ et $v_k(\theta)$ (voir (3.7) et (3.8)).

Commençons d'abord par dénoter la première et seconde dérivées de $H_{k,2q}(x)$, respectivement, par $H'_{k,2q}(x)$ et $H''_{k,2q}(x)$. On peut alors montrer que:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln(H_{k,2q}(u_k(\theta))) = \dot{u}_k^2(\theta) \left[\frac{H''_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} - \frac{H'^2_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}^2(u_k(\theta))} \right] + \ddot{u}_k(\theta) \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))},$$

où $\dot{u}_k(\theta) = \partial u_k(\theta)/\partial\theta$ et $\ddot{u}_k(\theta) = \partial^2 u_k(\theta)/\partial^2\theta$. Ensuite, en utilisant l'indépendance entre les deux variables

$u_k(\theta)$ et $\dot{u}_k(\theta)$, on obtient l'espérance de cette quantité comme suit:

$$\gamma_{k,2q}(\theta) = \mathbb{E} \left\{ \dot{u}_k^2(\theta) \right\} \left[\mathbb{E} \left\{ \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} \right\} - \mathbb{E} \left\{ \frac{H''_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} \right\} \right] - \mathbb{E} \left\{ \ddot{u}_k(\theta) \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} \right\}. \quad (3.9)$$

Dans ce qui suit, on se propose de détailler les dérivations des quatre termes impliqués dans l'équation (3.9). Pour des raisons de clarté, nous allons définir deux termes qui vont apparaitre à plusieurs reprises dans les résultats futurs (pour $s = 2q$ ou $2q - 1$):

$$\omega_{k,s} \triangleq 2 d_q^2 \beta_{k,s} \cosh \left(\frac{L_{s(k)}}{2} \right) \sum_{i=1}^{2^q-1} \eta_{k,s}(i) (2i-1)^2, \quad (3.10)$$

$$\alpha_{k,s} \triangleq 2 d_q \beta_{k,s} \sinh \left(\frac{L_{s(k)}}{2} \right) \sum_{i=1}^{2^q-1} \eta_{k,s}(i) (2i-1). \quad (3.11)$$

1) Derivation de $\mathbb{E} \{ \dot{u}_k^2(\theta) \}$:

En utilisant la définition de $u_k(\theta)$ dans (2.24) avec l'équation (2.1), la dérivée première de $u_k(\theta)$ par rapport à la variable θ s'écrit comme suit:

$$\dot{u}_k(\theta) = \frac{S}{\sqrt{N_a}} \Re \{ \dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) x(k) \} + \frac{1}{\sqrt{N_a}} \Re \{ \dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \}, \quad (3.12)$$

où $\dot{\mathbf{a}}(\theta) = \partial \mathbf{a}(\theta) / \partial \theta$. En notant $z = \dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) x(k)$ et en utilisant l'identité $\Re\{z\} = \frac{1}{2}(z + z^*)$ avec le fait que $\dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) + \mathbf{a}(\theta)^H \dot{\mathbf{a}}(\theta) = 0$ (ceci provient du fait que $\|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2 = N_a$), on obtient:

$$\dot{u}_k(\theta) = \frac{jS}{\sqrt{N_a}} \dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) \Im \{ x(k) \} + \frac{1}{\sqrt{N_a}} \Re \{ \dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \}. \quad (3.13)$$

Il est à remarquer que $\dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta)$ est un imaginaire pur. De plus, les symboles transmis et le vecteur de bruit, $\mathbf{w}(k)$, sont indépendants. Ceci nous permet d'écrire:

$$\mathbb{E} \{ \dot{u}_k^2(\theta) \} = \frac{S^2}{N_a} |\dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta)|^2 \mathbb{E} \left\{ \Im \{ x(k) \}^2 \right\} + \frac{1}{N_a} \mathbb{E} \left\{ \Re \{ \dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \}^2 \right\}. \quad (3.14)$$

Suite à de fastidieuses manipulations algébriques, on prouve, dans l'Annexe A, les deux identités suivantes:

$$\mathbb{E} \left\{ \Re \left\{ \dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \right\}^2 \right\} = \frac{\sigma^2}{2} \|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2, \quad (3.15)$$

$$\mathbb{E} \left\{ \Im \left\{ x(k) \right\}^2 \right\} = \omega_{k,2q-1}. \quad (3.16)$$

Finalement, on retrouve l'expression analytique de $\mathbb{E} \left\{ \dot{u}_k^2(\theta) \right\}$ comme suit:

$$\mathbb{E} \left\{ \dot{u}_k(\theta)^2 \right\} = \frac{\sigma^2}{2N_a} \|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2 + \frac{S^2 \omega_{k,2q-1}}{2N_a} |\mathbf{a}^H(\theta) \dot{\mathbf{a}}(\theta)|^2. \quad (3.17)$$

2) Derivation de $\mathbb{E} \left\{ H'_{k,2q}(u_k(\theta)) / H_{k,2q}(u_k(\theta)) \right\}$:

Ce terme représente l'espérance mathématique d'une transformation connue de la variable aléatoires $u_k(\theta)$.

La distribution de cette dernière a été donnée dans l'équation (3.7). De ce fait, elle peut être évaluée en intégrant sur $p[u_k(\theta)]$ pour obtenir:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} \right\} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} p[u_k(\theta)] du_k(\theta) \\ &= \frac{2\beta_{k,2q}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} e^{-\frac{u_k^2(\theta)}{\sigma^2}} du_k(\theta), \end{aligned} \quad (3.18)$$

où $H'_{k,2q}(x) \triangleq \partial H_{k,2q}(x) / \partial x$ est donnée par:

$$H'_{k,2q}(x) = \frac{2S\sqrt{N_a}d_q}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{2q-1} \eta_{k,2q}(i)(2i-1)^2 e^{-\rho N_a d_q^2 [2i-1]^2} \times \sinh \left(\frac{2S[2i-1]\sqrt{N_a}d_q}{\sigma^2} x + \frac{L_{2q}(k)}{2} \right). \quad (3.19)$$

En injectant (3.19) dans (3.18) et en utilisant le changement de variable $t = 2u_k(\theta)/\sigma$, il s'ensuit que:

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} \right\} = \frac{4N_a}{\sigma^2} \rho \nu_{k,2q}(\rho), \quad (3.20)$$

où $\nu_{k,2q}(\cdot)$ est donnée par:

$$\nu_{k,2q}(\rho) = \frac{d_q^2 \beta_{k,2q}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{k,2q}^2(t, \rho)}{g_{k,2q}(t, \rho)} e^{-\frac{t^2}{4}} dt, \quad (3.21)$$

Dans cette équation, $f_{k,s}(t, \rho)$ et $g_{k,s}(t, \rho)$ s'expriment par (pour $s = 2q$ et $2q - 1$)

$$f_{k,s}(t, \rho) = \sum_{i=1}^{2^q-1} (2i-1)\eta_{k,s}(i) e^{-(2i-1)^2 d_q^2 \rho N_a} \times \sinh\left(\sqrt{2\rho N_a} [2i-1] d_q t + \frac{L_s(k)}{2}\right), \quad (3.22)$$

$$g_{k,s}(t, \rho) = \sum_{i=1}^{2^q-1} \eta_{k,s}(i) e^{-(2i-1)^2 d_q^2 \rho N_a} \times \cosh\left(\sqrt{2\rho N_a} [2i-1] d_q t + \frac{L_s(k)}{2}\right). \quad (3.23)$$

3) Derivation de $\mathbb{E}\left\{H''_{k,2q}(u_k(\theta))/H_{k,2q}(u_k(\theta))\right\}$:

En utilisant le même raisonnement que dans (3.18), cette espérance est calculée en intégrant sur la pdf de $u_k(\theta)$, ce qui nous donne:

$$\mathbb{E}\left\{\frac{H''_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))}\right\} = \int_{\mathbb{R}} \frac{H''_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} p[u_k(\theta)] du_k(\theta). \quad (3.24)$$

En remplaçant $p[u_k(\theta)]$ par son expression établit dans (3.7), on retrouve que:

$$\mathbb{E}\left\{\frac{H''_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))}\right\} = \frac{2\beta_{k,2q}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} H''_{k,2q}(u_k(\theta)) e^{-\frac{u_k^2(\theta)}{\sigma^2}} du_k(\theta), \quad (3.25)$$

où $H''_{k,2q}(x) \triangleq \partial^2 H_{k,2q}(x)/\partial x^2$ est donné par:

$$H''_{k,2q}(x) = \frac{4S^2 d_q^2 N_a}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{2^q-1} \eta_{k,2q}(i) (2i-1)^2 e^{-\rho N_a d_q^2 [2i-1]^2} \times \cosh\left(\frac{2S[2i-1]\sqrt{N_a} d_q}{\sigma^2} x + \frac{L_{2q}(k)}{2}\right). \quad (3.26)$$

Pour donner une forme intégrable à $H''_{k,2q}$ dans (3.26), on développe son expression en utilisant la fameuse identité $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$. On injecte le résultat trouvé dans (3.25) et on exploite le fait que $\sinh(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une fonction impaire (son intégrale est identiquement nulle) pour obtenir:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\frac{H''_{k,2q}(u(k))}{H_{k,2q}(u_k(\tau))}\right\} &= \frac{8\beta_{k,2q} S^2 N_a d_q^2}{(\sqrt{\pi\sigma^2})\sigma^4} \cosh\left(\frac{L_{2q}(k)}{2}\right) \times \\ &\sum_{i=1}^{2^q-1} (2i-1)^2 \eta_{k,2q}(i) e^{-\rho N_a (2i-1)^2 d_q} \int_{\mathbb{R}} \cosh\left(\frac{2S[2i-1]\sqrt{N_a} d_q}{\sigma^2} u_k(\theta)\right) e^{-\frac{u_k^2(\theta)}{\sigma^2}} du_k(\theta). \end{aligned} \quad (3.27)$$

De plus, en utilisant une intégration par partie, on montre que pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ on a:

$$\int_0^{+\infty} \cosh(bx) e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}. \quad (3.28)$$

On procède par la suite à une simple identification avec le résultat de (3.27) pour retrouver l'expression analytique de l'espérance dans (3.25) comme suit:

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} \right\} = \frac{4N_a}{\sigma^2} \rho \omega_{k,2q} . \quad (3.29)$$

4) Dérivation of $\mathbb{E} \left\{ \ddot{u}_k(\theta) \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} \right\}$:

Pour trouver cette espérance, on adopte une approche probabiliste dans laquelle on commence par trouver l'espérance par rapport à $\ddot{u}_k(\theta)$ conditionnée par rapport à $u_k(\theta)$. Puis on moyenne le résultat trouvé par rapport à $u_k(\theta)$. En faisant ainsi, on obtient:

$$\mathbb{E} \left\{ \ddot{u}_k(\theta) \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} \right\} = \mathbb{E}_{u_k} \left\{ \mathbb{E}_{\ddot{u}_k|u_k} \left\{ \ddot{u}_k(\theta) | u_k(\theta) \right\} \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} \right\}. \quad (3.30)$$

On démontre dans l'Annexe B que $\ddot{u}_k(\theta)$ s'exprime en fonction de $u_k(\theta)$ et $v_k(\theta)$ comme suit:

$$\ddot{u}_k(\theta) = -\frac{1}{N_a} \|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\| u_k(\theta) - \frac{1}{N_a} \Im \{ \mathbf{a}(\theta)^H \ddot{\mathbf{a}}(\theta) \} v_k(\theta) + z_k(\theta), \quad (3.31)$$

où $z_k(\theta)$ est une variable aléatoires de moyenne nulle et indépendante de $u_k(\theta)$. En utilisant l'indépendance de $u_k(\theta)$ et $v_k(\theta)$ déjà établie précédemment, il s'en suit que:

$$\mathbb{E} \{ \ddot{u}_k(\theta) | u_k(\theta) \} = -\frac{1}{N_a} \|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\| u_k(\theta) - \frac{1}{N_a} \Im \{ \mathbf{a}(\theta)^H \ddot{\mathbf{a}}(\theta) \} \mathbb{E} \{ v_k(\theta) \}.$$

l'espérance de $v_k(\theta)$ peut être obtenue aisément en intégrant par rapport à sa distribution établit dans (3.8) ce qui donne le résultat suivant:

$$\mathbb{E} \{ v_k(\theta) \} = S \sqrt{N_a} \alpha_{k,2q-1}.$$

Utilisant ces résultats dans (3.30) et intégrant par rapport à la pdf de $u_k(\theta)$, $p[u_k(\theta)]$, on obtient:

$$\mathbb{E} \left\{ \ddot{u}_k(\theta) \frac{H'_{k,2q}(u_k(\theta))}{H_{k,2q}(u_k(\theta))} \right\} = -2\rho \|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2 \omega_{k,2q} - 2\rho \Im \{ \mathbf{a}(\theta)^H \ddot{\mathbf{a}}(\theta) \} \alpha_{k,2q} \alpha_{k,2q-1}. \quad (3.32)$$

Après avoir trouvé les quatre termes dans (3.17), (3.20), (3.29), et (3.32), on les injecte dans l'équation (3.9) pour obtenir:

$$\gamma_{k,2q}(\theta) = 2\rho^2\omega_{k,2q-1}|\mathbf{a}^H(\theta)\dot{\mathbf{a}}(\theta)|^2[\nu_{k,2q}(\rho) - \omega_{k,2q}] + 2\rho\|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2\nu_{k,2q}(\rho) + 2\rho\Im\{\mathbf{a}(\theta)^H\ddot{\mathbf{a}}(\theta)\}\alpha_{k,2q}\alpha_{k,2q-1}.$$

La symétrie entre les distributions de $u_k(\theta)$ et $v_k(\theta)$ permet de trouver, utilisant le même raisonnement, l'expression de $\gamma_{k,2q-1}(\theta)$ comme suit:

$$\gamma_{k,2q-1}(\theta) = 2\rho^2\omega_{k,2q}|\mathbf{a}^H(\theta)\dot{\mathbf{a}}(\theta)|^2[\nu_{k,2q-1}(\rho) - \omega_{k,2q-1}] + 2\rho\|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2\nu_{k,2q-1}(\rho) - 2\rho\Im\{\mathbf{a}(\theta)^H\ddot{\mathbf{a}}(\theta)\}\alpha_{k,2q}\alpha_{k,2q-1}.$$

Les BCRs des DDAs CA sont finalement obtenues comme suit:

$$\text{BCR}(\theta) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{K-1} [\gamma_{k,2q}(\theta) + \gamma_{k,2q-1}(\theta)]}. \quad (3.33)$$

Il est à noter que l'expression de la BCR dépend des LLRS *a priori* des bits codés à travers les coefficients $\omega_{k,s}$, $\nu_{k,s}$, et $\alpha_{k,s}$ (pour $s = 2q$ et $s = 2q - 1$) impliqués dans les expressions de $\gamma_{k,2q}(\theta)$ et $\gamma_{k,2q-1}(\theta)$. Ces LLRs sont obtenus à partir des décodeurs dans un système turbo-codé selon (2.42). Cependant, ce résultat peut être généralisé au codes LDPC (Low density parity check) qui utilisent un des algorithmes de décodage itératif MAP ou BCJR (voir [28] et [26]) et où les nœuds des variables et les nœuds de contrôle jouent le rôle des deux décodeurs SISO dans les systèmes turbo.

Aussi intéressant qu'il puisse paraître, ce résultat de la BCR ne dépend pas de la géométrie d'antenne et est donc valide pour toutes les configurations. Les configurations les plus utilisées étant les configurations ULA et UCA. Pour ces deux géométries, la transformation de la DDA est donnée par:

$$\varphi_i^{\text{ULA}}(\theta) = (i-1)\sin(\theta), \quad \text{et} \quad \varphi_i^{\text{UCA}}(\theta) = \frac{\cos(\theta - 2[i-1]\pi/N_a)}{2\sin(\pi/N_a)}. \quad (3.34)$$

En conséquences, les deux facteurs géométriques, $|\mathbf{a}(\theta)^H \dot{\mathbf{a}}(\theta)|^2$ et $\|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2$ impliqués dans $\gamma_{k,2q}(\theta)$ et $\gamma_{k,2q-1}(\theta)$ sont explicitement exprimés par dans le Tableau 3.1. Il est à noter que le tableau ne contient pas l'expression du facteur $\Im\{\mathbf{a}(\theta)^H \ddot{\mathbf{a}}(\theta)\}$ puisque ce dernier s'annule suite à l'addition des deux termes $\gamma_{k,2q}(\theta)$ et $\gamma_{k,2q-1}(\theta)$.

Table 3.1 – Les facteurs géométriques des configurations ULA et UCA

	ULA	UCA
$\ \dot{\mathbf{a}}(\theta)\ ^2$	$\pi^2 \frac{N_a(N_a-1)(2N_a-1)}{6} \cos^2(\theta)$	$\frac{N_a \pi^2}{8 \sin^2(\pi/N_a)}$
$ \mathbf{a}(\theta)^H \dot{\mathbf{a}}(\theta) ^2$	$\pi^2 \cos^2(\theta) \left(\sum_{k=1}^{N_a-1} k \right)^2$	0

On insiste sur le fait que l'expression de la BCR dépend des DDAs à travers ces facteurs géométriques uniquement. Ces facteurs dépendent du paramètre θ pour la configuration ULA et sont indépendants de celui-ci pour la configuration UCA grâce à sa symétrie circulaire. Dans ce qui suit, on va évaluer l'estimateur MV de DDA CA développé dans le chapitre précédent par rapport à la BCR dont l'expression est donnée par (3.33).

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé l'expression analytique exacte de la borne de Cramér-Rao. Afin de valider cette dernière, nous évaluerons cette borne par une approche empirique. Nous comparerons également l'estimateur MV CA développé dans le chapitre 3 non seulement contre la BCR mais aussi contre des estimateurs très célèbres dans la littérature.

Chapitre 4

Évaluation de performances

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on procèdera à une étude de performance de l'estimateur MV développé. On commencera par valider l'expression analytique de la BCR en utilisant une approche empirique. On évaluera ensuite les performances de l'estimateur MV CA par rapport à la BCR des 3 scénarios: NDA, DA et CA. On comparera aussi notre nouvel estimateur par rapport aux deux estimateurs classiques: MUSIC et ESPRIT.

4.2 Paramètres de simulations

Pour toutes les simulations qu'on présentera ci-après, on considère un encodeur constitué de deux encodeurs RSC identiques de polynôme générateurs $(1, 0, 1, 1)$ et $(1, 1, 0, 1)$. Les deux encodeurs possèdent chacun un taux de codage $R_0 = 1/2$ (deux bits de sortie pour un bit d'entrée). La sortie de l'encodeur est poinçonnée pour atteindre le taux de codage désiré, R . La mémoire du code ou le nombre de registre à décalage est fixé à 4. On considère aussi les deux types de modulation 16- et 64-QAM comme exemples illustratifs des modulations QAM. On considère 4 antennes ($N_a = 4$) et pour toutes les figure la DDA considérée est $\theta = 45^\circ$.

4.3 Validation de l'expression analytique de la BCR

Dans cette section, on se propose de valider la BCR CA développé dans le chapitre 4. Pour ce faire, on adopte une approche qui évalue cette borne à travers des simulations Monte-Carlo exhaustives. On utilise une définition différente de l'information de Fisher qui fait appel à la première dérivée de la LLF et non la deuxième.

En effet, comme démontré dans [49], l'information de Fisher peut être exprimée par:

$$I(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{Y}; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}. \quad (4.1)$$

On utilise aussi une nouvelle définition de la LLF comme suit:

$$\mathcal{L}(\mathbf{Y}; \theta) = \ln \left(\sum_{l=1}^{M^K} Pr[\mathbf{x} = \mathbf{x}_l] p[\mathbf{Y}|\mathbf{x} = \mathbf{x}_l; \theta] \right), \quad (4.2)$$

où $\{\mathbf{x}_l\}_{l=1}^{M^K}$ représente toutes les valeurs possibles que la séquence des symboles transmis, $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(K-1)]^T$, peut prendre. Ensuite, en remarquant que:

$$\frac{\partial p[\mathbf{Y}|\mathbf{x} = \mathbf{x}_l; \theta]}{\partial \theta} = p[\mathbf{Y}|\mathbf{x} = \mathbf{x}_l; \theta] \frac{\partial \ln(p[\mathbf{Y}|\mathbf{x} = \mathbf{x}_l; \theta])}{\partial \theta}, \quad (4.3)$$

on obtient la dérivée première de (4.2) par rapport à θ comme suit:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{Y}; \theta)}{\partial \theta} = \sum_{l=1}^{M^K} \frac{Pr[\mathbf{x} = \mathbf{x}_l] p[\mathbf{Y}|\mathbf{x} = \mathbf{x}_l; \theta]}{p[\mathbf{Y}; \theta]} \times \frac{\partial \ln(p[\mathbf{Y}|\mathbf{x} = \mathbf{x}_l; \theta])}{\partial \theta}.$$

Puis, en utilisant la formule de Bayes' exprimée par:

$$Pr[\mathbf{x} = \mathbf{x}_l | \mathbf{Y}; \theta] = \frac{Pr[\mathbf{x} = \mathbf{x}_l] p[\mathbf{Y}|\mathbf{x} = \mathbf{x}_l; \theta]}{p[\mathbf{Y}; \theta]},$$

on obtient:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{Y}; \theta)}{\partial \theta} = \sum_{l=1}^{M^K} Pr[\mathbf{x} = \mathbf{x}_l | \mathbf{Y}; \theta] \frac{\partial \ln(p[\mathbf{Y}|\mathbf{x} = \mathbf{x}_l; \theta])}{\partial \theta} = E_{\mathbf{x}|\mathbf{Y}} \left\{ \frac{\partial \ln(p[\mathbf{Y}|\mathbf{x}; \theta])}{\partial \theta} \right\}. \quad (4.4)$$

De surcroit, l'indépendance des snapshots qui se manifeste par:

$$p[\mathbf{Y}|\mathbf{x}; \theta] = \prod_{k=0}^{K-1} p[\mathbf{y}(k)|x(k); \theta], \quad (4.5)$$

est utilisée pour démontrer que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{Y}; \theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=0}^{K-1} E_{x(k)|\mathbf{Y}} \left\{ \frac{2S}{\sigma^2} \Re \left\{ \hat{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{y}(k) x(k)^* \right\} \right\}. \quad (4.6)$$

Il est intéressant de constater que l'espérance conditionnelle de la quantité de droite de (4.6) peut être évaluée empiriquement. En effet, les probabilités *a posteriori* des bits codés (c.-à-d., $Pr[b_l^k = 0|\mathbf{Y}]$ and $Pr[b_l^k = 1|\mathbf{Y}]$) sont obtenues à partir des LLRs correspondant, $\Upsilon_l^{(R)}(k)$, à l'état d'équilibre comme montré dans (2.10). Celles des symboles transmis sont obtenues à partir du produit des probabilités *a posteriori* résultantes des bits associés. Cette espérance conditionnelle est ensuite obtenue comme suit:

$$\mathbb{E}_{x(k)|\mathbf{Y}} \left\{ \frac{2S}{\sigma^2} \Re \{ \hat{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{y}(k) x(k)^* \} \right\} = \sum_{c_m \in \mathcal{C}} Pr[x(k) = c_m | \mathbf{Y}] \left(\frac{2S}{\sigma^2} \Re \{ \hat{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{y}(k) c_m^* \} \right). \quad (4.7)$$

l'espérance par rapport à \mathbf{Y} dans l'équation (4.1) est quant à elle évaluée par des simulations Monte-Carlo exhaustives. On réalise un nombre L assez élevé de réalisations bruitées, $\{\mathbf{Y}_l\}_{l=1}^L$, pour \mathbf{Y} et l'espérance est donc approximée par la moyenne suivante:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Y}} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{Y}; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{Y}_l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2. \quad (4.8)$$

On note que la fonction intégrale donnée par (3.21) prend des valeurs extrêmement petites quand $|t|$ augmente. Par conséquent, l'intégrale sur $]-\infty, +\infty[$ peut être approximée, sans perte de précision, par une intégrale finie sur un support approprié, $[-T, T]$, dans lequel la méthode de Riemann peut être appliquée. Dans notre travail, on considère $T = 25$ et cette valeur nous permet d'avoir une valeur très précise de l'intégrale infinie.

Dans la figure Fig. 4.1, on trace les courbes de la BCR CA dont l'expression analytique a été donnée par (3.33) avec la BCR empirique obtenue dans la section 5.3. Nous traçons également les deux BCRs des cas extrêmes à savoir la BCR NDA correspondant à une estimation aveugles ($\hat{\theta}_{\text{MV-NDA}}$ donnée par (2.34)) et la BCR DA où tous les symboles sont connus à la réception. On remarque que la BCR CA coïncide parfaitement avec la BCR obtenue empiriquement ce qui permet de valider l'expression analytique qu'on a développé dans le chapitre 3. De surcroit, comme prévu intuitivement, la BCR CA est inférieure à celle correspondant à une estimation NDA. Ceci n'est pas surprenant puisque l'estimation NDA n'implique aucune connaissance *a priori* des données transmises. Ce résultat met en évidence les améliorations apportées par l'estimation assistée par le décodeur. Une autre caractéristique très attrayante du résultat obtenu est que, contrairement à la BCR NDA, la BCR CA décroît rapidement et atteint la BCR DA à partir d'un RSB assez faible. En d'autres termes, la BCR CA atteint, à partir d'un RSB faible, les mêmes performances d'estimation que celles

obtenues dans le cas le plus parfait, c'est-à-dire quand tous les symboles transmis sont connus à la destination.

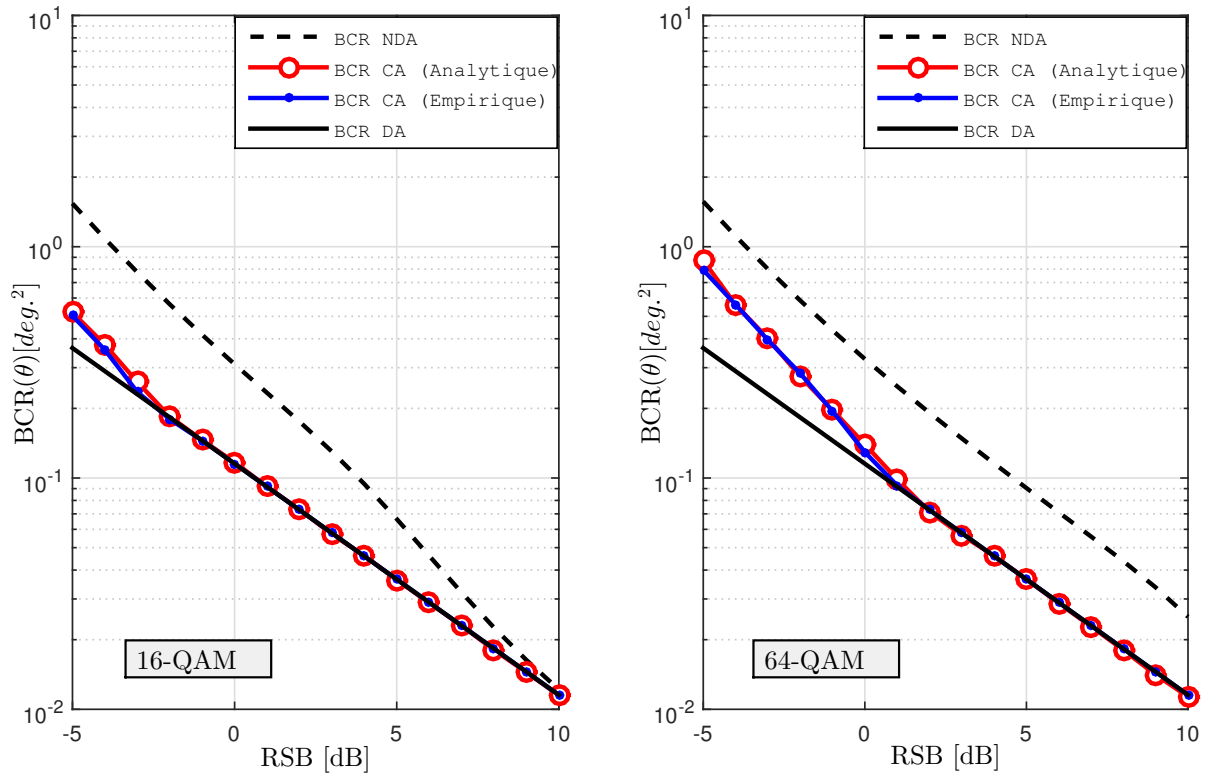


Figure 4.1 – BCR NDA, DA, et CA (analytique et empirique) avec $R = 1/3$ et $K = 206$ pour: (a) 16-QAM, et (b) 64-QAM.

4.4 Etude de performances de l'estimateur MV CA

Les figures 4.2 et 4.3 illustrent les performances du nouvel estimateur MV CA pour les deux modulations 16- et 64-QAM et pour deux taux de codage ($R = 1/3$ et $R = 1/2$). Les performances sont étudiées en termes d'erreur quadratique moyenne (MSE). On trace également les BCRs NDA, DA et CA. Ces dernières sont utilisées comme référence pour évaluer les performances du nouvel estimateur. Comme le montre les deux figures, peu importe la modulation et le taux de codage, l'estimateur MV CA est capable d'atteindre les performances prédites théoriquement par la BCR CA confirmant ainsi son efficacité dans la pratique.

Concentrons-nous maintenant sur l'étude de l'impact de l'ordre de modulation ainsi que le taux de codage.

En effet, comme prévu et pour un RSB faible, les performances de l'estimateur s'améliorent en diminuant le taux de codage. Ce résultat n'est guère surprenant puisqu'en introduisant plus de redondance, le décodeur est de mieux en mieux capable de détecter les bits erronés. En d'autres termes, plus de redondance rime avec de meilleures estimées des LLRs *à priori* impliqués dans la LLF CA de tout le système. D'autre part, en fixant le taux de codage et en augmentant la modulation, on voit très bien que les performances de l'estimateur MV CA se détériorent pour toute valeur du RSB. Ceci est un comportement typique souvent observé dans les problèmes d'estimation utilisant une modulation linéaire, quel que soit le paramètre estimé. En effet, en augmentant l'ordre de modulation, la distance entre les symboles dans une constellation normalisée diminue. Dans ce cas, le bruit a beaucoup plus d'impact sur la détection des symboles détériorant ainsi la qualité des estimées.

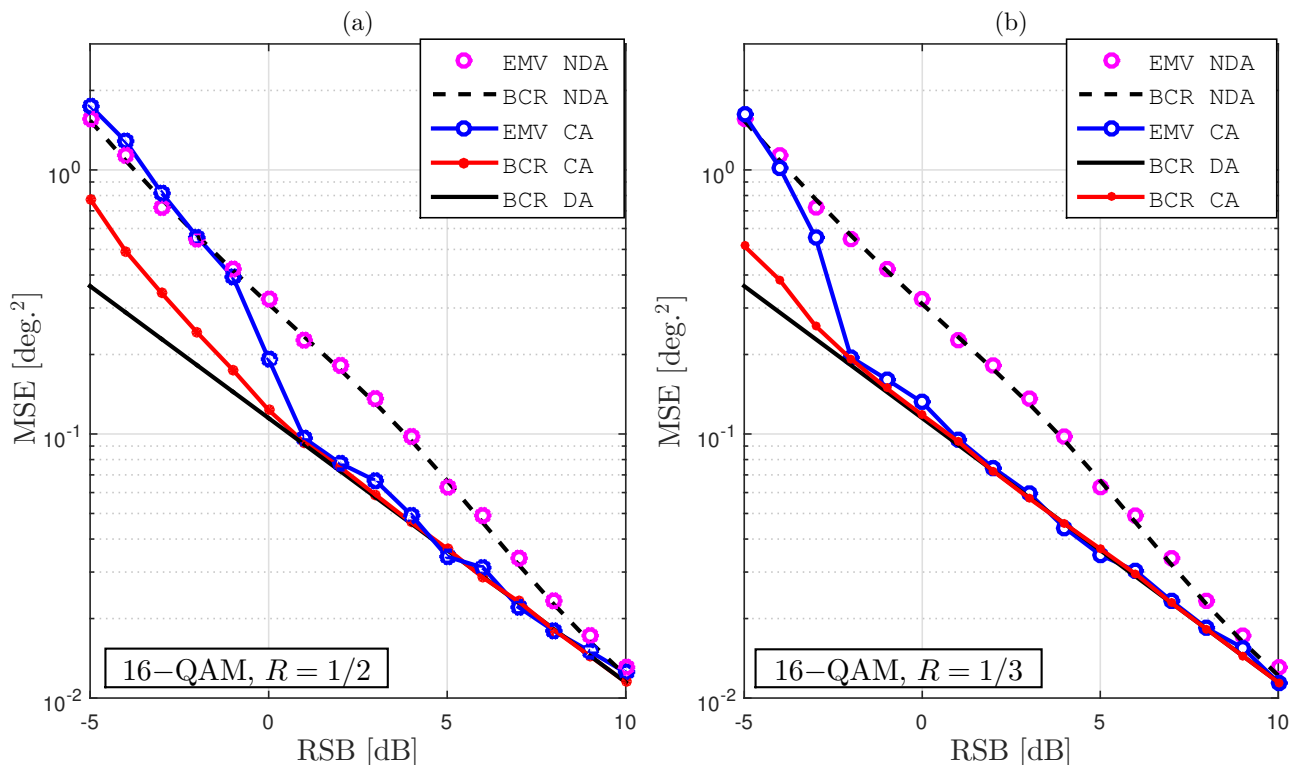


Figure 4.2 – EMV CA vs BCR pour 16-QAM, $K = 206$ avec: (a) $R = 1/2$, et (b) $R = 1/3$.

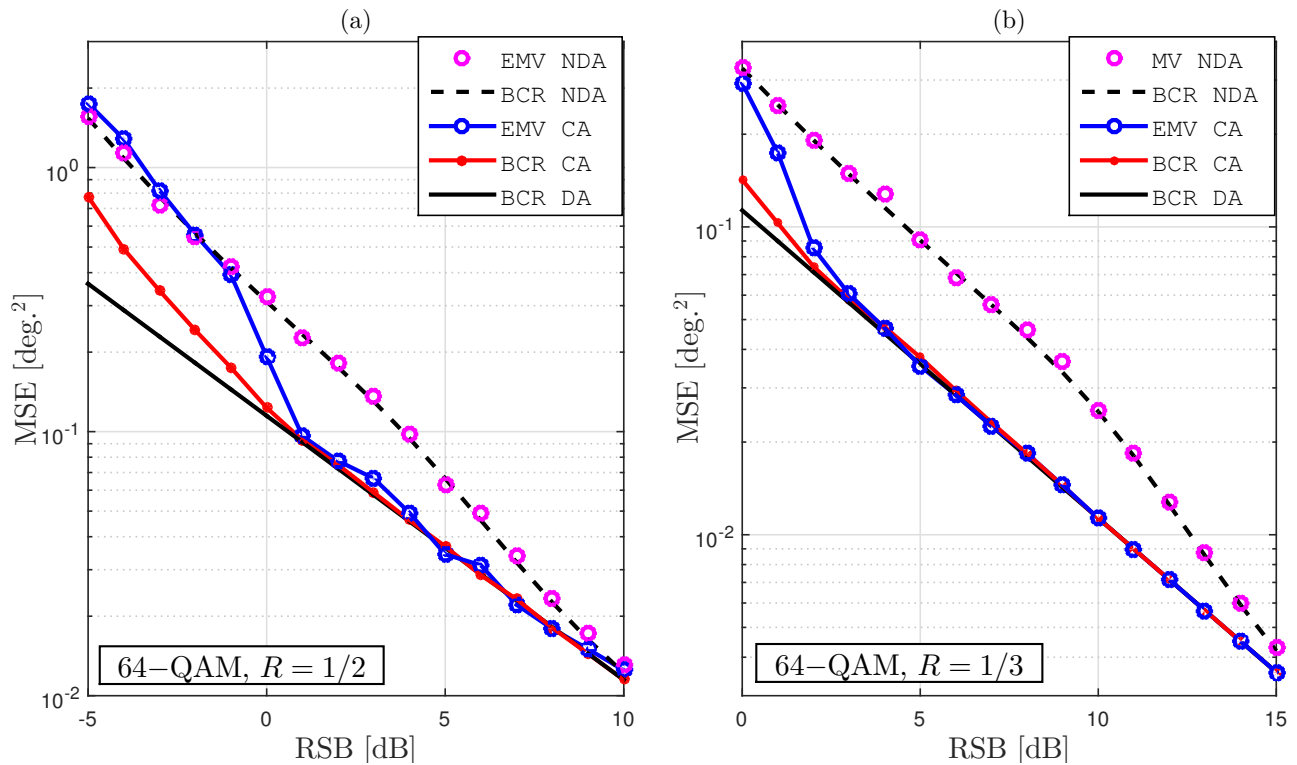


Figure 4.3 – EMV CA vs BCR pour 64-QAM, $K = 206$ avec: (a) $R = 1/2$, et (b) $R = 1/3$.

Dans les figures Figs. 4.4 et 4.5, nous comparons l'estimateur MV CA développé dans ce mémoire contre trois estimateurs: SP-EM, MUSIC [29] et ESPRIT [30]. Commençons d'abord par l'estimateur SP-EM MLE. Ce dernier est basé sur une combinaison de deux concepts: sum-product (SP) et expectation maximization (EM). L'algorithme repose sur l'approximation du critère de vraisemblance lui-même et est considéré comme une autre approche MV. Il est clair que l'estimateur MV CA proposé surpasse SP-EM MLE sur une bonne plage d'un RSB faible. Cet avantage est surtout accentué en augmentant l'ordre de modulation ou en diminuant le taux de codage.

Il convient également de remarquer les performances du nouvel estimateur par rapport aux deux techniques sous-espaces à savoir MUSIC et ESPRIT¹. L'estimateur MV CA proposé dépasse de loin ces deux derniers sur toute la plage du RSB. Rien d'étonnant dans ce résultat puisque les estimateurs MUSIC et ESPRIT sont tous les deux complètement aveugles et sont donc bornés par la BCR NDA indépendamment du nombre d'échantillons et du RSB.

1. Notez bien que l'estimateur ESPRIT a été implémenté utilisant les configurations suivantes: deux sous-espaces qui chevauchent séparés d'une distance $d_s = 1$, pour plus détails, on réfère le lecteur à [31].

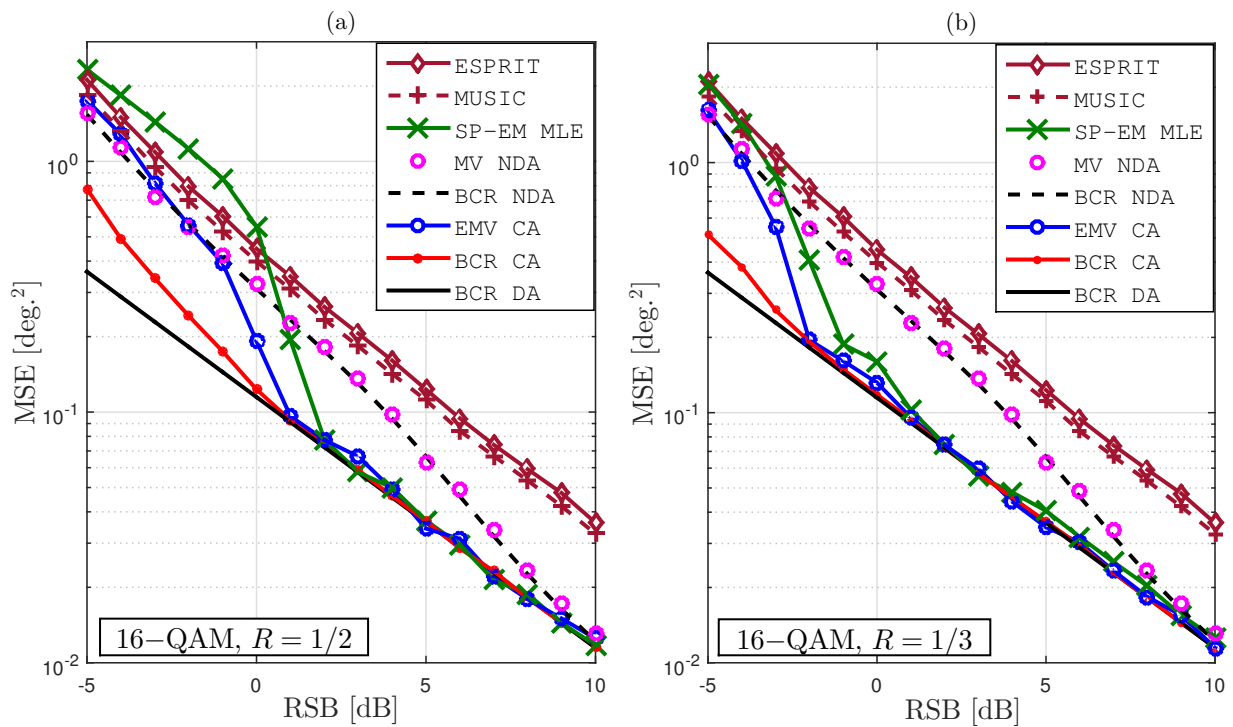


Figure 4.4 – MSE de différents estimateurs de DDA pour 16–QAM, $K = 206$ avec: (a) $R = 1/2$, et (b) $R = 1/3$.

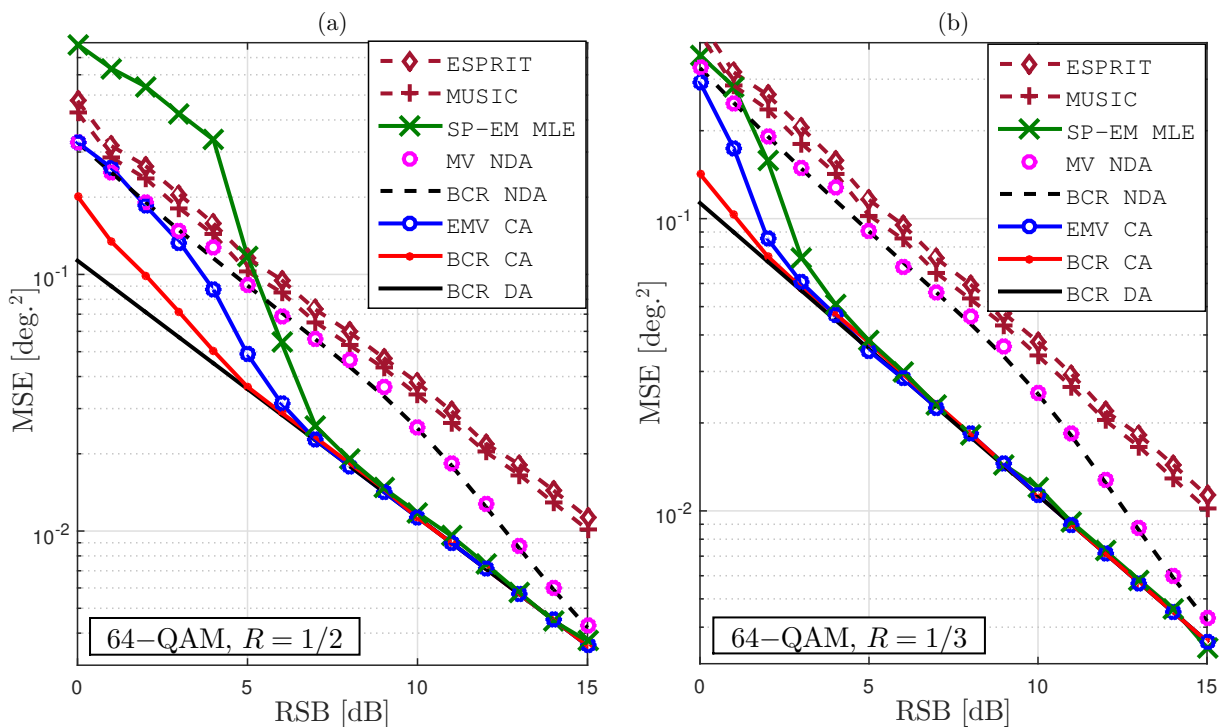


Figure 4.5 – MMSE de différents estimateurs de DDA pour 64–QAM, $K = 206$ avec: (a) $R = 1/2$, et (b) $R = 1/3$.

Pour compléter notre étude, nous examinons aussi la complexité de tous les estimateurs considérés ci-dessus. La figure Fig. 4.6 représente les complexités en terme du nombre d'opérations. Il est intéressant de voir qu'en termes de complexités, notre estimateur est là aussi loin devant SP-EM. Notre estimateur est 30 à 65 fois moins gourmand en opérations que SP-EM. Cependant, les deux méthodes de sous-espaces s'avèrent moins complexes. Ceci revient à faire face au compromis performance/complexité et le choix dans ce cas dépendra du système considéré.

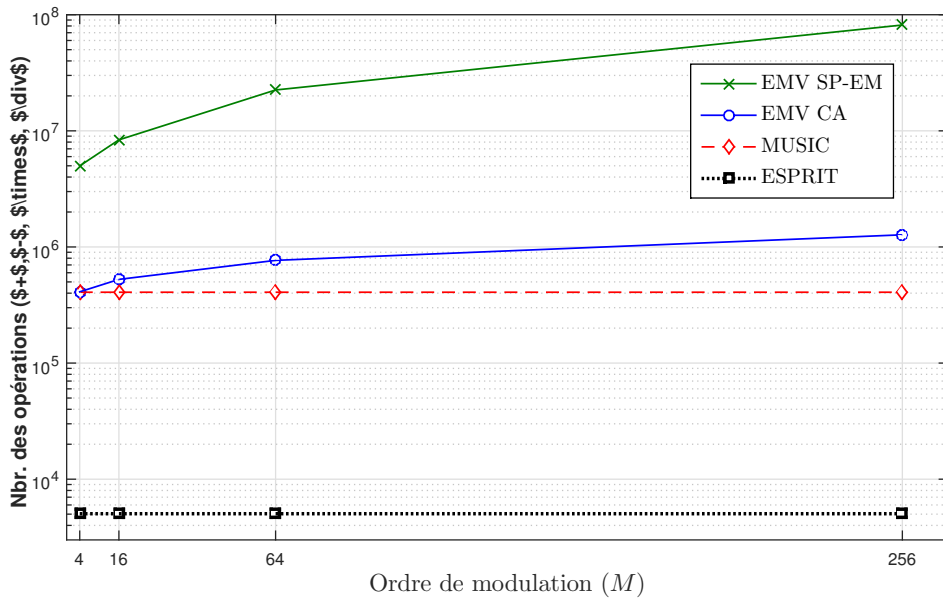


Figure 4.6 – Complexité de EMV CA, SP-EM MLE, Esprit et MUSIC.

Conclusion

Dans ce mémoire de maîtrise, nous avons développé un estimateur à maximum de vraisemblance de direction d'arrivée dans un contexte turbo-codé. Cet estimateur apporte la nouveauté d'être intégré dans le processus de turbo-décodage. En effet, les deux décodeurs turbo échangent une information extrinsèque qui représente une mesure de confiance des bits décodés. Cette information est utilisée par l'estimateur pour raffiner l'estimée de la direction d'arrive à chaque itération turbo. Cette estimée sera ensuite utilisée, par l'itération turbo suivante, pour améliorer le décodage.

Afin de caractériser théoriquement le gain de performance en terme d'estimation du DDA qui est dû à l'assistance du décodeur, nous avons aussi développé la borne de Cramér-Rao. La dérivation de l'expression analytique exacte de cette borne a été aussi un vrai défi mathématique qui a nécessité l'imagination d'un processus de construction de constellation qu'on a aussi présenté.

Ce travail a été couronné par d'excellents résultats obtenus en comparant notre estimateur aussi bien à la borne Cramér-Rao développée qu'à d'autres estimateurs classiques. L'intégration du processus d'estimation avec les turbo-codes s'est prouvée efficace procurant des performances très similaires au cas le plus parfait, à savoir quand toutes les données sont disponibles à la destination.

Le travail réalisé est basé principalement sur deux volets : les dérivations mathématiques et l'analyse critique des résultats. Dans un premier temps, j'ai commencé à faire les dérivations mathématiques nécessaires pour le développement de la borne Cramér-Rao présentée dans le chapitre 3. Après avoir analysé les résultats avec mon directeur et mon co-directeur de recherche, on a proposé d'avancer dans la même voie en dérivant un estimateur à maximum de vraisemblance où l'information extrinsèque est utilisée à chaque itération pour améliorer la qualité des estimées de la direction d'arrivée. J'ai alors entamé une étude bibliographique sur cette technique. Une fois les notions théoriques assimilées, j'ai procédé aux dérivations mathématiques de l'estimateur tel que présenté dans le chapitre 2. Mon co-directeur a ensuite proposé une étude de complexité

de l'estimateur développé pour donner de l'ampleur au travail réalisé en se comparant à d'autres travaux. J'ai alors réalisé une étude de complexité basée sur le nombre d'opérations mathématiques de chaque technique (voir le chapitre 4).

La principale perspective de recherche qui apparait à l'issue de ce travail est d'étendre les résultats décrits précédemment, en utilisant des manipulations équivalentes, aux réseaux d'antennes rectangulaires uniformes.

Annexe A

Preuve de (3.15) et (3.16)

A.1 Preuve de (3.15)

Avant d'entamer le vif du sujet, on va prouver les deux identités suivantes:

$$\mathbb{E}\left\{\left[\mathbf{w}(k)^H \dot{\mathbf{a}}(\theta)\right]^2\right\} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left\{\left[\dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k)\right]^2\right\} = 0. \quad (\text{A.1})$$

En effet, on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\left[\mathbf{w}(k)^H \dot{\mathbf{a}}(\theta)\right]^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\mathbf{w}(k)^H \dot{\mathbf{a}}(\theta) \mathbf{w}^H(k) \dot{\mathbf{a}}(\theta)\right\}, \\ &= \mathbb{E}\left\{\dot{\mathbf{a}}(\theta)^T \mathbf{w}(k)^* \mathbf{w}(k)^H \dot{\mathbf{a}}(\theta)\right\}, \\ &= \mathbb{E}\left\{\dot{\mathbf{a}}(\theta)^T \left(\mathbf{w}(k) \mathbf{w}(k)^T\right)^* \dot{\mathbf{a}}(\theta)\right\}, \\ &= \dot{\mathbf{a}}(\theta)^T \left(\mathbb{E}\left\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}(k)^T\right\}\right)^* \dot{\mathbf{a}}(\theta). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Cependant, pour un bruit circulaire, on a: $\mathbb{E}\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}(k)^T\} = \mathbf{0}$. Cette identité est utilisée dans (A.2) pour trouver directement la première identité de (A.1). La deuxième identité s'obtient en utilisant les mêmes manipulations.

En utilisant maintenant l'identité triviale $\Re\{z\} = \frac{1}{2}(z + z^*)$ avec $z = \dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k)$, il s'ensuit que:

$$\mathbb{E}\left\{\Re\left\{\dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k)\right\}^2\right\} = \frac{1}{4} \mathbb{E}\left\{\left[\mathbf{w}^H(k) \dot{\mathbf{a}}(\theta) + \dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k)\right]^2\right\}. \quad (\text{A.3})$$

De ce fait, on obtient:

$$\mathbb{E}\left\{\Re\left\{\dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k)\right\}^2\right\} = \frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{\left[\mathbf{w}^H(k)\dot{\mathbf{a}}(\theta)\right]^2\right\} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbb{E}\left\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^H(k)\right\}\dot{\mathbf{a}}(\theta) + \frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{\left[\dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k)\right]^2\right\}.$$

Ensuite, en exploitant le fait que $\mathbb{E}\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^H(k)\} = \sigma^2\mathbf{I}_{N_a}$ et en utilisant les deux identités de l'équation (A.1), on obtient:

$$\mathbb{E}\left\{\Re\left\{\dot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k)\right\}^2\right\} = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2\sigma^2. \quad (\text{A.4})$$

A.2 Preuve de (3.16)

L'espérance de $\Im\{x(k)\}^2$ est obtenue en moyennant sur tous les points de la constellation comme suit:

$$\mathbb{E}\left\{\Im\{x(k)\}^2\right\} = \sum_{c_m \in \mathcal{C}} \Im\{c_m\}^2 Pr[x(k) = c_m]. \quad (\text{A.5})$$

En décomposant l'espace constellation comme suit: $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}} \cup (-\tilde{\mathcal{C}}) \cup \tilde{\mathcal{C}}^* \cup (-\tilde{\mathcal{C}}^*)$, où $\tilde{\mathcal{C}}$ est le quadrant supérieur de la partie droite, et en remarquant que $\Im\{\tilde{c}_m\}^2 = \Im\{-\tilde{c}_m\}^2 = \Im\{\tilde{c}_m^*\}^2 = \Im\{-\tilde{c}_m^*\}^2 \forall \tilde{c}_m \in \tilde{\mathcal{C}}$, on obtient:

$$\mathbb{E}\left\{\Im\{x(k)\}^2\right\} = \sum_{\tilde{c}_m \in \tilde{\mathcal{C}}} \Im\{\tilde{c}_m\}^2 \left(Pr[x(k) = \tilde{c}_m] + Pr[x(k) = -\tilde{c}_m] + Pr[x(k) = \tilde{c}_m^*] + Pr[x(k) = -\tilde{c}_m^*]\right). \quad (\text{A.6})$$

De plus, en utilisant les expressions explicites des APPs données par les équations (37)-(40) de [32] avec l'identité $\cosh(x) + \cosh(y) = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$, on retrouve que:

$$\begin{aligned} & Pr[x(k) = \tilde{c}_m] + Pr[x(k) = -\tilde{c}_m] + Pr[x(k) = \tilde{c}_m^*] + Pr[x(k) = -\tilde{c}_m^*] \\ &= 2\beta_k \mu_{k,q}(\tilde{c}_m) \left[\cosh\left(\frac{L_{2q}(k) + L_{2q-1}(k)}{2}\right) + \cosh\left(\frac{L_{2q}(k) - L_{2q-1}(k)}{2}\right) \right], \\ &= 4\beta_k \mu_{k,q}(\tilde{c}_m) \cosh\left(\frac{L_{2q}(k)}{2}\right) \cosh\left(\frac{L_{2q-1}(k)}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Utilisant le fait que dans un système de coordonnées Cartésien chaque point $\tilde{c}_m \in \tilde{\mathcal{C}}_p$ s'écrit comme $\tilde{c}_m = [2n-1]d_q + j[2i-1]d_q$ pour $1 \leq i, n \leq 2^{q-1}$, la somme de la partie droite de l'équation (A.6) peut s'écrire comme une double somme sur les deux compteurs n et i . Ajoutant à cela la décomposition utilisée dans l'équation (49) de [32], i.e.:

$$\mu_{k,q}(\tilde{c}_m) = \mu_{k,q}\left([2n-1]d_q + j[2i-1]d_q\right) = \eta_{k,2q}(i) \eta_{k,2q-1}(n), \quad (\text{A.8})$$

on retrouve que (A.6) est équivalente à:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left\{\mathfrak{F}\{x(k)\}^2\right\} \\
&= 4\beta_k \sum_{i=1}^{2^{q-1}} \sum_{n=1}^{2^{q-1}} \left[(2n-1)^2 d_q^2 \eta_{k,2q}(i) \eta_{k,2q-1}(n) \cosh\left(\frac{L_{2q}(k)}{2}\right) \cosh\left(\frac{L_{2q-1}(k)}{2}\right) \right] \\
&= \left[2\beta_{k,2q-1} \cosh\left(\frac{L_{2q-1}(k)}{2}\right) \sum_{n=1}^{2^{q-1}} (2n-1)^2 d_q^2 \eta_{k,2q-1}(n) \right] \left[2\beta_{k,2q} \cosh\left(\frac{L_{2q}(k)}{2}\right) \sum_{i=1}^{2^{q-1}} \eta_{k,2q}(i) \right], \tag{A.9}
\end{aligned}$$

où on utilise la décomposition $\beta_k = \beta_{k,2q}\beta_{k,2q-1}$. De plus, il a été démontré dans la LEMME 3 de [32] que:

$$2\beta_{k,s} \cosh\left(\frac{L_s(k)}{2}\right) \sum_{n=1}^{2^{q-1}} \eta_{k,s}(n) = 1. \tag{A.10}$$

En rappelant l'expression de $\omega_{k,2q-1}$ dans (3.10) et en injectant (A.10) dans (A.9), on obtient le résultat donné par (3.16).

Annexe B

Expression de $\ddot{u}_k(\theta)$

En considérant l'expression de $u_k(\theta)$ dans (2.24), on peut écrire:

$$\ddot{u}_k(\theta) = \frac{\partial^2 u_k(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \Re \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{y}(k) \}.$$

En remplaçant $\mathbf{y}(k)$ par son expression, i.e., $S \mathbf{a}(\theta) x(k) + \mathbf{w}(k)$, on obtient:

$$\ddot{u}_k(\theta) = \frac{S}{\sqrt{N_a}} \Re \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) x(k) \} + \frac{1}{\sqrt{N_a}} \Re \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \}. \quad (\text{B.1})$$

Ensuite, en utilisant l'identité $\Re\{x\} = \frac{1}{2}(x + x^*)$, on retrouve que:

$$\ddot{u}_k(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{N_a}} [S \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) x(k) + S \mathbf{a}(\theta)^H \ddot{\mathbf{a}}(\theta) x(k)^*] + \frac{1}{\sqrt{N_a}} \Re \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \}. \quad (\text{B.2})$$

De plus, en rappelant l'expression de $y_k(\theta)$, on peut montrer que $x(k)$ peut s'exprimer en fonction de $u_k(\theta)$ et $v_k(\theta)$ comme suit:

$$x(k) = \frac{1}{S\sqrt{N_a}} [u_k(\theta) + jv_k(\theta)] - \frac{1}{S N_a} \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{w}(k). \quad (\text{B.3})$$

En injectant maintenant (B.3) dans (B.2) et en utilisant l'identité:

$$\ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) + \mathbf{a}(\theta)^H \ddot{\mathbf{a}}(\theta) + 2\|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2 = 0, \quad (\text{B.4})$$

obtenue à partir de $\|\mathbf{a}(\theta)\|^2 = N_a$, il s'en suit que:

$$\ddot{u}_k(\theta) = -\frac{\|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2}{N_a} u_k(\theta) - \frac{1}{N_a} \Im \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) \} v_k(\theta) + z_k(\theta),$$

avec:

$$z_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \Re \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \} - \frac{1}{N_a \sqrt{N_a}} \Re \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \}.$$

En dénotant $\tilde{z}_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \Re \{ \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \}$, on obtient:

$$z_k(\theta) = \ddot{z}_k(\theta) - \frac{1}{N_a \sqrt{N_a}} \Re \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \}, \quad (\text{B.5})$$

et

$$u_k(\theta) = S \sqrt{N_a} \Re \{ x(k) \} + \tilde{z}_k(\theta). \quad (\text{B.6})$$

Pour montrer l'indépendance de $u_k(\theta)$ et $z_k(\theta)$, il convient de remarquer d'abord que $z_k(\theta)$ reflète uniquement la contribution du bruit, $\Re \{ x(k) \}$ et $z_k(\theta)$ sont donc indépendants. De plus, on montre que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \tilde{z}_k(\theta) z_k(\theta) \} &= \mathbb{E} \{ \tilde{z}_k(\theta) \ddot{z}_k(\theta) \} - \frac{1}{N_a \sqrt{N_a}} \mathbb{E} \left\{ \tilde{z}_k(\theta) \Re \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \} \right\}, \\ &= \frac{-1}{\sqrt{N_a}} \|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2 \sigma^2 - \frac{1}{\sqrt{N_a}} \left(-\|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2 \sigma^2 \right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que $\tilde{z}_k(\theta)$ et $z_k(\theta)$ sont deux variables aléatoires Gaussiennes et sont ainsi indépendantes. En conséquence, $u_k(\theta)$ et $z_k(\theta)$ sont indépendants. En utilisant le même raisonnement, l'expression de $\ddot{v}_k(\theta)$ impliqué dans $\gamma_{k,2q-1}(\theta)$ s'obtient comme suit:

$$\ddot{v}_k(\theta) = -\frac{\|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2}{N_a} v_k(\theta) + \frac{1}{N_a} \Im \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) \} u_k(\theta) + z'_k(\theta),$$

où $z'_k(\theta)$ est donnée par:

$$z'_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \Im \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \} - \frac{1}{N_a \sqrt{N_a}} \Im \{ \ddot{\mathbf{a}}(\theta)^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{w}(k) \}.$$

Références

- [1] P. Stoica and T. Söderström, “Statistical analysis of music and subspace rotation estimates of sinusoidal frequencies,” *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 39, no. 8, pp. 1836–1847, 1991.
- [2] P. Stoica and K. C. Sharman, “Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation,” *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 7, pp. 1132–1143, 1990.
- [3] C. Herzet, N. Noels, V. Lottici, H. Wymeersch, M. Luise, M. Moeneclaey, and L. Vandendorpe, “Code-aided turbo synchronization,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 6, pp. 1255–1271, 2007.
- [4] V. Lottici and M. Luise, “Embedding carrier phase recovery into iterative decoding of turbo-coded linear modulations,” *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 4, pp. 661–669, 2004.
- [5] N. Noels, H. Steendam, and M. Moeneclaey, “The cramer-rao bound for phase estimation from coded linearly modulated signals,” *Communications Letters, IEEE*, vol. 7, no. 5, pp. 207–209, 2003.
- [6] X. Wu and H. Xiang, “Iterative carrier phase recovery methods in turbo receivers,” *IEEE communications letters*, vol. 9, no. 8, pp. 735–737, 2005.
- [7] N. Noels, C. Herzet, A. Dejonghe, V. Lottici, H. Steendam, M. Moeneclaey, M. Luise, and L. Vandendorpe, “Turbo synchronization: an em algorithm interpretation,” in *Communications, 2003. ICC’03. IEEE International Conference on*, vol. 4, pp. 2933–2937, IEEE, 2003.
- [8] N. Noels, V. Lottici, A. Dejonghe, H. Steendam, M. Moeneclaey, M. Luise, and L. Vandendorpe, “A theoretical framework for soft-information-based synchronization in iterative (turbo) receivers,” *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, vol. 2005, no. 2, pp. 1–13, 2005.
- [9] C. Herzet, X. Wautelet, V. Ramon, and L. Vandendorpe, “Iterative synchronization: Em algorithm versus newton-raphson method,” in *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2006. ICASSP 2006 Proceedings. 2006 IEEE International Conference on*, vol. 4, pp. IV–IV, IEEE, 2006.

- [10] C. Herzet, V. Ramon, and L. Vandendorpe, "A theoretical framework for iterative synchronization based on the sum-product and the expectation-maximization algorithms," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 55, no. 5, pp. 1644–1658, 2007.
- [11] C. Herzet, V. Ramon, and L. Vandendorpe, "Turbo-synchronization: a combined sum-product and expectation-maximization algorithm approach," in *IEEE Workshop on Sign. Proc. Advances in Wireless Comm., SPAWC*, pp. 191–195, 2005.
- [12] C. Herzet, V. Ramon, L. Vandendorpe, and M. Moeneclaey, "Em algorithm-based timing synchronization in turbo receivers," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2003. Proceedings.(ICASSP'03). 2003 IEEE International Conference on*, vol. 4, pp. IV–612, IEEE, 2003.
- [13] V. Ramon, C. Herzet, L. Vandendorpe, and M. Moeneclaey, "Em algorithm-based multiuser synchronization in turbo receivers," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004. Proceedings.(ICASSP'04). IEEE International Conference on*, vol. 4, pp. iv–849, IEEE, 2004.
- [14] H. Wymeersch and M. Moeneclaey, "Iterative code-aided ml phase estimation and phase ambiguity resolution," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2005, no. 6, pp. 1–8, 2005.
- [15] L. Zhang and A. G. Burr, "Iterative carrier phase recovery suited to turbo-coded systems," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 3, no. 6, pp. 2267–2276, 2004.
- [16] L. Zhang and A. Burr, "A novel carrier phase recovery method for turbo coded qpsk systems," *Proc. of EW*, 2000.
- [17] F. Bellili, A. Methenni, and S. Affes, "Closed-form crlbs for cfo and phase estimation from turbo-coded square-qam-modulated transmissions," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 14, no. 5, pp. 2513–2531, 2015.
- [18] I. L. S. Committee *et al.*, "Ieee standard for local and metropolitan area networks part 16: Air interface for fixed and mobile broadband wireless access systems amendment 2: Physical and medium access control layers for combined fixed and mobile operation in licensed bands and corrigendum 1," *IEEE Std 802.16-2004/Cor 1-2005*, 2006.
- [19] "3gpp ts 36.211: 3rd generation partnership project; technical specification group radio access network; evolved universal terrestrial radio access (e-utra); physical channels and modulation,"
- [20] F. Bellili, C. Elguet, S. Ben Amor, S. Affes, and A. Stéphenne, "Code-aided doa estimation from turbo-coded qam transmissions: Analytical crlbs and maximum likelihood estimator," *submitted to Wireless Communications, IEEE Transactions on*, 2016.

- [21] F. Bellili, C. Elguet, S. Ben Amor, S. Affes, and A. Stéphenne, “Closed-form cramer-rao lower bounds for doa estimation from turbo-coded square-qam-modulated transmissions,” in *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2015 IEEE International Conference on*, pp. 3492–3496, IEEE, 2015.
- [22] D. Davies and A. Rudge, “The handbook of antenna design,” *London: Peregrinus*, vol. 2, 1983.
- [23] D. Slepian, “Estimation of signal parameters in the presence of noise,” *Information Theory, Transactions of the IRE Professional Group on*, vol. 3, no. 3, pp. 68–89, 1954.
- [24] W. J. Bangs, *Array processing with generalized beamformers*. University Microfilms, 1972.
- [25] P. Stoica and R. L. Moses, *Introduction to spectral analysis*, vol. 1. Prentice hall Upper Saddle River, 1997.
- [26] M. M. Mansour and N. R. Shanbhag, “High-throughput ldpc decoders,” *Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, IEEE Transactions on*, vol. 11, no. 6, pp. 976–996, 2003.
- [27] M. Valenti, “A guided tour of cml, the coded modulation library,” *Morganown, W. Va.: Iterative Solutions*, 2008.
- [28] T. J. Richardson, M. A. Shokrollahi, and R. L. Urbanke, “Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes,” *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 2, pp. 619–637, 2001.
- [29] R. O. Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, 1986.
- [30] R. Roy and T. Kailath, “Esprit-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques,” *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 37, no. 7, pp. 984–995, 1989.
- [31] H. L. Van Trees, *Detection, estimation, and modulation theory*. John Wiley & Sons, 2004.
- [32] F. Bellili, A. Methenni, and S. Affes, “Closed-form crlbs for snr estimation from turbo-coded bpsk-, msk-, and square-qam-modulated signals,” *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 62, no. 15, pp. 4018–4033, 2014.