

Université du Québec  
**Institut national de la recherche scientifique**  
Énergie Matériaux Télécommunications

**Estimation au sens du maximum de vraisemblance  
des directions d'arrivée et des délais de propagation  
dans un environnement à trajets multiples**

Par  
Souheib Ben Amor

Mémoire présenté pour l'obtention du grade de  
Maître ès Sciences (M.Sc.) en télécommunications

**Jury d'évaluation**

Directeur de recherche	Prof. Sofiène Affes, INRS-ÉMT
Co-directeur	Dr. Faouzi Bellili, INRS-ÉMT
Examineur interne	Prof. Charles L. Despins, INRS-ÉMT
Examineur externe	Prof. Wessam Ajib, Université du Québec à Montréal



# Remerciements

Tout d'abord, je remercie les membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Ensuite, je tiens à manifester l'expression de mes respects les plus distingués à mon encadreur Prof. Soffiène Affès pour toute aide qu'il m'a apportée. Je lui adresse ma plus vive gratitude et ma profonde reconnaissance pour la confiance qu'il m'a accordée et ses conseils fructueux qui m'ont permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions d'encadrement.

Je tiens également à remercier mon co-encadreur, Dr. Faouzi Bellili pour son assistance, ses conseils et sa patience.

Je remercie aussi mes amis Marwen, Hnayda, Emma et mes camarades de l'INRS pour leurs encouragements et leur soutien tout au long de ces deux années.

Mes vifs remerciements à ma famille et aux gens sans lesquels ce projet n'aurait jamais été mené à bien.

## Résumé

Dans cet mémoire, on aborde le problème de l'estimation conjointe des délais et des angles d'arrivée (JADE) dans un environnement à plusieurs réflexions avec un signal transmis connu à la réception. Dans notre étude, on se base sur le concept d'échantillonnage préférentiel ("importance sampling" ou IS) afin de développer un estimateur à maximum de vraisemblance ("maximum likelihood" ou ML). Contrairement à toutes les techniques existantes, l'estimateur ML proposé est *non-itératif* jouissant ainsi d'une optimalité globale. En plus, la technique proposée transforme le problème d'optimisation *multi-dimensionnel* de départ en des sous-problèmes *bi-dimensionnels* résultant ainsi en une réduction importante de la complexité de l'algorithme. D'autre part, en exploitant la nature sparse d'une pseudo-pdf proprement conçue, nous proposons une nouvelle approche pour la détection du nombre de trajets, un autre paramètre clé en communications sans-fil. Les simulations montrent un avantage significatif, en termes de performances et complexité, de notre nouvelle technique par rapport à plusieurs autres méthodes les plus représentatives de la littérature.

## Abstract

In this work, we tackle the problem of joint angle and delays estimation (JADE) of multiple reflections of a known signal impinging on multiple receiving antennae. Based on the importance sampling (IS) concept, we propose a new *non-iterative* maximum likelihood (ML) estimator that enjoys guaranteed global optimality and enhanced super-resolution capabilities. The new ML approach succeeds in transforming the original *multi-dimensional* optimization problem into multiple *two-dimensional* ones resulting thereby in huge computational savings. Moreover, it does not suffer from the off-grid problems that are inherent to most existing JADE techniques. By exploiting the sparsity feature of a carefully designed pseudo-pdf that is intrinsic to the new estimator, we also propose a novel approach that enables the exact estimation of the unknown number of paths over a wide range of practical signal-to-noise ratios (SNRs). Computer simulations show the distinct advantage of the new ML estimator over state-of-the art JADE techniques both in terms of accuracy and complexity.

# Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	iv
Abstract	v
Liste des acronymes	xi
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>2 Nouveaux estimateurs des directions d'arrivée et des délais de propagation</b>	<b>5</b>
2.1 Modèle du système . . . . .	5
2.2 Dérivation de la fonction de vraisemblance logarithmique . . . . .	7
2.3 Maximisation globale de la CLF . . . . .	9
2.3.1 Théorème de Pincus . . . . .	9
2.3.2 Approximation de la CLF et choix de la pseudo-pdf $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$ . . . . .	13
2.4 Génération des réalisations requises et l'utilisation du concept IS . . . . .	17
2.4.1 Génération des réalisations requises selon $\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$ . . . . .	17
2.4.2 Méthode d'échantillonnage préférentiel . . . . .	20
2.5 Les détails de l'implémentation . . . . .	23
2.5.1 Génération locale des réalisations requises . . . . .	23
2.5.2 Estimations des TDs et AoAs : . . . . .	25
2.6 Estimation du nombre de trajets . . . . .	30

<b>3</b>	<b>Résultats de simulations</b>	<b>34</b>
<b>4</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>43</b>
	<b>Appendices</b>	<b>44</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

# Table des figures

2.1	La fonction de distribution cumulative complémentaire de l'amplitude du ratio entre les éléments hors diagonaux et diagonaux de la matrice $\mathbf{D}^H\mathbf{D}$ . . . . .	15
2.2	Les pdfs marginales et conditionnelles pour $\bar{Q} = 2$ et SNR = 30 dB : (a) pdf marginale de $\tau$ , (b) pdf marginale de $\alpha$ , (c) pdf conditionnelle de $\alpha$ sachant $\tau_1^{(r)}$ , et (d) pdf conditionnelle de $\alpha$ sachant $\tau_2^{(r)}$ . . . . .	18
2.3	Illustration de la pseudo-pdf pour $\bar{Q} = 2$ et SNR = -10 dB : (a) CDF marginale de $\tau$ , (b) pdf marginale de $\tau$ , (c) pdf locale de $\tau$ autour de $\bar{\tau}_1$ , (d) pdf locale de $\tau$ autour de $\bar{\tau}_2$ , (e) CDF locale de $\tau$ autour de $\bar{\tau}_1$ , et (f) CDF locale de $\tau$ autour de $\bar{\tau}_2$ . . . . .	21
2.4	Le diagramme de la nouvelle technique basée sur le concept IS. . . . .	29
2.5	La valeur moyenne de $\rho(Q)$ pour différentes valeurs de $\bar{Q}$ , SNR = -10 dB, ULA avec $P = 5$ . . . . .	31
3.1	L'impact du paramètre, $\rho_0$ , sur la performance de la technique proposée pour $M = 128$ , SNR = -10 dB : (a) TDs, et (b) AoAs. . . . .	36
3.2	L'impact du paramètre, $\rho_1$ , sur la performance de la technique proposée pour $M = 128$ , SNR = -10 dB : (a) TDs, et (b) AoAs. . . . .	36
3.3	RMSE pour les TDs et AoAs avec $M = 128$ échantillons pour une séparation angulaire et temporaire <i>large</i> . . . . .	37
3.4	RMSE pour les TDs et AoAs avec $M = 128$ pour des trajets avec une séparation angulaire légère et une séparation large des délais et vice versa. . . . .	39



3.5	RMSE pour les TDs et AoAs avec $M = 128$ échantillons pour une séparation angulaire et temporelle <i>légère</i> . . . . .	40
3.6	Nombre total des opérations en fonction du : (a) nombre de trajets $\bar{Q}$ pour $M = 128$ et (b) nombre d'échantillons $M$ pour $\bar{Q} = 9$ , et $P = 5$ .	41

# Liste des tableaux

2.1	LES PROBABILITÉS DE LA SOUS-ESTIMATION, DE LA SUR-ESTIMATION, ET DE L'ESTIMATION EXACTE DU NOMBRE DE TRAJETS $(\bar{Q})$ . . . . .	32
-----	---	----

# Liste des acronymes

AoA	Angle of Arrival
BPSK	Binary Phase Shift Keying
CDF	Cumulative Distribution Function
CCDF	Complementary Cumulative Distribution Function
CFO	Carrier Frequency Offset
CLF	Compressed Likelihood Function
CRLB	Cramer-Rao Low Bound
DFT	Discrete Fourier Transform
DOA	Direction of Arrival
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
iid	indépendantes et identiquement distribuées
IML	Iterative Maximum likelihood
IS	Importance Sampling
JADE	Joint Angular and Delay Estimation
LLF	Log-Likelihood Function
LS	Least Squares
ML	Maximum likelihood
MUSIC	MUltiple SIgnal Classification
PDF	Probability Density Function
RRC	Root Raised Cosine
RMSE	Root Mean Square Error
SAGE	space-alternating generalized expectation maximization
SI-JADE	Shift Invariance-JADE

SNR	Signal to Noise Ratio
TD	Time Delay
TDOA	Time Difference of Arrival
UCA	Uniform Circular Array
ULA	Uniform Linear Array

# Chapitre 1

## Introduction générale

L'estimation de paramètres des canaux sans fil joue un rôle crucial dans le maintien et l'amélioration de la qualité de service des systèmes de communication. En effet, plusieurs caractéristiques du canal doivent être prises en considération afin de pouvoir reconstruire le signal émis à la réception. Parmi ces paramètres, on trouve la direction d'arrivée et le délai de propagation dont la connaissance permet une meilleure localisation de la cible. La connaissance de ces deux paramètres est aussi très utile pour les techniques de formation de voie (direction d'arrivée) et de synchronisation temporelle (délai de propagation).

Dans les modèles de propagation à multi-trajets, le signal source subit plusieurs réflexions générant ainsi plusieurs copies du même signal à la réception. Chaque copie se définit par un angle d'arrivée (AoA), un temps de retard (TD), ainsi qu'un coefficient de gain. La problématique d'estimation conjointe de ces paramètres à partir d'un nombre fini d'échantillons est plus connue sous le nom de "Joint Angle and Delay Estimation", (JADE). Le problème de JADE prouve son utilité dans plusieurs domaines généralement de nature militaire (ex., RADAR et SONAR) ou encore les applications liées aux systèmes de communications sans-fil. On trouve dans la littérature une étude exhaustive des problèmes liés à l'estimation disjointe des délais de propagation et des angles d'arrivée (AoA). En ce qui concerne l'estimation des AOAs, on trouve des méthodes de type ML [12, 13], ou encore MUSIC [14] et ESPRIT [15]. Ces mêmes méthodes ont été également adaptées pour l'estimation

des délais de propagation [19-23]. Les estimateurs disjoints de ces deux paramètres clés souffrent de deux principaux problèmes. Le premier est le manque de précision par rapport à l'estimation conjointe dans le cas de faibles séparations angulaire ou temporelle [2]. Le second c'est que les estimateurs disjoints ne sont pas capables de résoudre tous les trajets dans le cas où le nombre de ces derniers devient inférieur au nombre d'antennes réceptrices. De ce fait, les estimateurs des AOAs nécessitent un réseau d'antennes de très grande taille dans le cas d'environnements très denses en multi-trajets. En ce qui concerne le problème de JADE (idem, estimation conjointe), plusieurs techniques ont été reportées dans la littérature. On distingue deux catégories majeures : les techniques "sous-espace" et les techniques "ML". Les algorithmes faisant partie de la catégorie sous-espaces sont généralement basés sur l'une des deux approches : MUSIC ou ESPRIT [24-26]. Ces techniques ont l'avantage d'avoir une complexité réduite. En contrepartie, elles souffrent d'une dégradation de performances surtout à de faibles valeurs du SNR. Ceci est dû au fait qu'elles reposent sur une estimation de la matrice de covariance. Les techniques se basant sur l'estimation de maximum à vraisemblance fournissent par contre de meilleures performances en termes de précision mais souffrent d'une grande complexité, ce qui rend leur implémentation en pratique très difficile.

Dans le contexte JADE, on trouve dans la littérature deux estimateurs du type ML. Le premier a été introduit par Wax *et al.* dans [27]. C'est une technique *itérative* et on la désignera par l'approche IML dans ce qui suit. L'autre technique, *itérative* également et nommée Space-Alternating Generalized Expectation maximization (SAGE), se base sur l'algorithme d'espérance-maximisation. Cependant comme tout algorithme *itératif*, ces deux estimateurs ML peuvent ne pas converger au maximum global de la fonction de vraisemblance logarithmique (LLF) si les estimées initiales des paramètres ne sont pas assez fiables. Pire encore, ces algorithmes nécessitent une grille d'évaluation dans laquelle on trouve toutes les valeurs possibles des AoAs et des délais. Ainsi, en supposant que les vrais paramètres se trouvent sur la grille, ces techniques essayent de maximiser itérativement la LLF. Par conséquent, ces méthodes souffrent inévitablement d'un problème quand les vrais paramètres se

trouvent hors des grilles d'évaluation. Pour contourner ce problème, on peut insérer plus d'échantillons dans les grilles, mais ceci en augmentant la complexité de ces algorithmes.

Dans ce travail, on aborde le problème d'estimation conjointe des AoAs et des délais de propagation (JADE) provenant des multiples réflexions d'un signal connu au préalable. Nous développons une nouvelle solution non itérative au problème de l'estimation à maximum de vraisemblance conjointe des AoAs et TDs. Le problème d'optimisation multi-dimensionnel, dont souffre la plupart des estimateurs à maximum de vraisemblance, est résolu en faisant appel au concept d'échantillonnage préférentiel. Ce dernier permet de transformer le problème d'optimisation multi-dimensionnel original en sous-problèmes à deux dimensions. Une telle transformation permet de réduire la complexité de l'algorithme proposé qui, désormais, peut être implémenté selon une approche parallèle puisque les différentes optimisations à deux dimensions sont disjointes. Cette méthode a été utilisée auparavant pour l'estimation d'autres paramètres. Elle a été proposée pour la première fois par S. Kay et S. Saha dans [31] dans le contexte d'estimation de multiples fréquences. Cette technique a été également appliquée pour l'estimation conjointe du CFO et du canal pour : *i*) les communications "single-user OFDMA" [33], et *ii*) les communications MIMO-OFDM dans [34]. Plus récemment, cette approche a été utilisée dans le contexte de la localisation basée sur le paramètre TDOA [35], la synchronisation temporelle sans séquence d'apprentissage [36], sans oublier l'estimation des délais de propagation dans un environnement à multi-trajets [23]. Dans tous ces travaux, la combinaison du théorème de Pincus avec le concept IS a permis d'améliorer nettement les performances d'estimation.

Afin d'évaluer les performances de notre algorithme, on utilise la racine de l'erreur quadratique moyenne (Root Mean Square Error (RMSE)) comme mesure de performances et on compare notre estimateur aux algorithmes déjà proposés dans la littérature ainsi qu'à la borne inférieure de Cramer (CRLB).

Ce rapport suit la structure suivante : dans le 2<sup>ème</sup> chapitre, on introduit l'estimateur à maximum de vraisemblance proposé. Le chapitre 3 présente les résultats de

simulations en termes de performances et complexité. Le dernier chapitre sera dédié à la conclusion.



# Chapitre 2

## Nouveaux estimateurs des directions d'arrivée et des délais de propagation

Dans ce chapitre, on présente le modèle du système qu'on va adopter. On détaillera également les dérivations de l'estimateur proposé ainsi que les étapes de son implémentation. On fournira aussi quelques astuces pour permettre une implémentation pratique de l'algorithme proposé.

### 2.1 Modèle du système

On considère un système de communications sans fil dont le récepteur est constitué d'un réseau d'antennes à  $P$  éléments. Le signal émis, supposé connu à la réception, subit plusieurs réflexions dues à la nature de l'environnement de propagation. Un tel phénomène engendre l'apparition de plusieurs copies du même signal transmis arrivant de  $\bar{Q}$  différentes directions  $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{\bar{Q}}) \subset [0, \pi]^{\bar{Q}}$ . Chaque copie arrive également avec un délai de propagation  $\{\bar{\tau}_q\}_{q=1}^{\bar{Q}}$  avec  $\{\bar{\tau}_q\} \in [0, \tau_{\max}]$ . Le signal reçu est échantillonné aux instants  $\{t_m = mT_s\}_{m=0}^M$  avec une période d'échantillonnage  $T_s$ . Les  $M$  échantillons reçus sur le  $p^{\text{ème}}$  élément du réseau d'antennes peuvent s'écrire sous cette forme :

$$x_p(t_m) = \sum_{q=1}^{\bar{Q}} \bar{\gamma}_q s(t_m - \bar{\tau}_q) e^{j\pi\varphi_p(\bar{\alpha}_q)} + w_p(t_m) \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.1.1)$$

où  $\{\bar{\gamma}_q\}_{q=1}^{\bar{Q}}$  est le gain complexe de chaque trajet  $q$  inconnu à la réception.  $\{\varphi_p(\alpha)\}_{p=1}^P$  correspond à la transformation angulaire dont l'expression dépend de la configuration géométrique du réseau d'antennes au récepteur. Dans la majorité des cas, on suppose un réseau linéaire et uniforme (ULA) ou un réseau circulaire et uniforme (UCA). Pour ces deux types de configuration, l'expression de la transformation angulaire est donnée par :

$$\varphi_p(\alpha) = (p-1) \sin(\alpha) \quad (\text{ULA}) \quad \text{et} \quad \varphi_p(\alpha) = \frac{\cos(\alpha - 2[p-1]\pi/P)}{2 \sin(\pi/P)} \quad (\text{UCA}).$$

Les composantes du bruit sont représentées par  $w_p(t_m)$ . Ces dernières sont modélisées par un bruit blanc Gaussien complexe. Les parties réelle et imaginaire de ce processus sont supposées être indépendantes et chacune d'une variance  $\sigma^2/2$ . Le signal transmis  $s(t)$  peut selon l'application prendre différentes formes :

- Pour des applications RADAR, on utilise un signal de type "chirp" dont l'expression est donnée par  $s(t) = A \cos(2\pi[f_0 + \nu t]t)$  où  $A$  représente l'amplitude et  $\nu = \frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0}$ .  $f_1$  et  $f_0$  représentent, respectivement, les fréquences à l'instant  $t_1$  et  $t_0 = 0$ .
- Pour des applications en communications sans fil, on utilise d'habitude une séquence d'apprentissage. Cette séquence contient  $K$  symboles pilotes  $a_1, a_2, \dots, a_K$  mis en forme par un filtre en racine de cosinus surélevé  $p(t)$ . Dans ce cas, le signal transmis prend cette forme :  $s(t) = \sum_{k=1}^K a_k p(t - kT)$  où  $T$  est la période symbole. Le nombre de symboles  $K$  requis dépend de l'application et du modèle adopté. Cependant, il doit être suffisamment élevé afin d'obtenir les meilleures performances.

Les paramètres inconnus des différents trajets sont groupés dans ces trois vecteurs :  $\bar{\alpha} = [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{\bar{Q}}]^T$ ,  $\bar{\tau} = [\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \dots, \bar{\tau}_{\bar{Q}}]^T$  ainsi que  $\bar{\gamma} = [\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_{\bar{Q}}]^T$ . On regroupe également les échantillons reçus à l'instant  $t_m$  dans un seul vecteur  $\mathbf{x}(t_m) = [x_1(t_m), x_2(t_m), \dots, x_P(t_m)]^T$  pour obtenir la relation suivante :

$$\mathbf{x}(t_m) = \sum_{q=1}^{\bar{Q}} \mathbf{a}(\bar{\alpha}_q) \bar{\gamma}_q s(t_m - \bar{\tau}_q) + \mathbf{w}(t_m), \quad (2.1.2)$$

où  $\mathbf{w}(t_m)$  est le vecteur contenant les composantes du bruit sur toutes les antennes. Le vecteur de direction  $\mathbf{a}(\alpha)$  pour une quelconque direction  $\alpha$ , est donné par :

$$\mathbf{a}(\alpha) = [e^{j\pi\varphi_1(\alpha)}, e^{j\pi\varphi_2(\alpha)}, \dots, e^{j\pi\varphi_P(\alpha)}]^T.$$

## 2.2 Dérivation de la fonction de vraisemblance logarithmique

Dans cette section, on dérive la fonction de vraisemblance concentrée (CLF) “compressed likelihood function”. Une fonction qui dépend seulement des paramètres d’intérêt (les délais de propagation  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ , les angles d’arrivée  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  ainsi que le nombre de trajets  $\bar{Q}$ ). En fait, on a  $\mathbf{w}(t_m) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_P)$ . Ce qui permet d’écrire la fonction de vraisemblance logarithmique comme suit :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{m=0}^{M-1} \left\| \mathbf{x}(t_m) - \sum_{q=1}^{\bar{Q}} \mathbf{a}(\alpha_q) \gamma_q s(t_m - \tau_q) \right\|^2. \quad (2.2.3)$$

Il faut noter que  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\boldsymbol{\gamma}$  sont des paramètres génériques qui balayent toutes les valeurs possibles  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ , et  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ . Maintenant, en appliquant l’identité de Parseval en passant du domaine temporel au domaine fréquentiel, on écrit :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}) \approx \sum_{m=0}^{M-1} \left\| \mathbf{x}(\omega_m) - \sum_{q=1}^{\bar{Q}} \mathbf{a}(\alpha_q) \gamma_q e^{-j\omega_m \tau_q} s(\omega_m) \right\|^2, \quad (2.2.4)$$

où  $\{\omega_m = \frac{m}{MT_s}\}_{m=0}^{M-1}$  correspond à la  $m^{\text{ème}}$  fréquence. Les transformées de Fourier discrètes (DFT) de  $\{s(t_m)\}_m$  et  $\{\mathbf{x}(t_m)\}_m$  sont représentées, respectivement, par  $\{s(\omega_m)\}_m$  et  $\{\mathbf{x}(\omega_m)\}_m$ . On définit par la suite la matrice  $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})$  de taille  $(M\bar{Q} \times \bar{Q})$  comme suit :

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau}) \triangleq [\boldsymbol{\Phi}_0(\boldsymbol{\tau})^T \boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{\tau})^T \dots \boldsymbol{\Phi}_{M-1}(\boldsymbol{\tau})^T]^T, \quad (2.2.5)$$

où  $\{\boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau})\}_{m=0}^{M-1}$  sont des matrices de taille  $(\bar{Q} \times \bar{Q})$  et dont l’expression est donnée par :

$$\boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau}) \triangleq s(\omega_m) \text{diag}(e^{-j\omega_m \tau_1}, e^{-j\omega_m \tau_2}, \dots, e^{-j\omega_m \tau_{\bar{Q}}}). \quad (2.2.6)$$

On définit également la matrice de direction comme suit :

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \triangleq [\mathbf{a}(\alpha_1) \ \mathbf{a}(\alpha_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\alpha_{\bar{Q}})]. \quad (2.2.7)$$

En utilisant les nouvelles matrices définies plus haut, l'équation (2.2.4) devient équivalente à :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}) \approx \left\| \mathbf{x} - [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})] \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\gamma} \right\|^2, \quad (2.2.8)$$

où les échantillons reçus dans le domaine fréquentiel sont organisés dans le vecteur  $\mathbf{x}$  de manière à obtenir la forme suivante :  $\mathbf{x} \triangleq [\mathbf{x}(\omega_1)^T \ \mathbf{x}(\omega_2)^T \ \cdots \ \mathbf{x}(\omega_M)^T]^T$ . La maximisation conjointe de (2.2.8) selon  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ , et  $\boldsymbol{\gamma}$  est une tâche extrêmement complexe. Cependant, on peut trouver le  $\boldsymbol{\gamma}$  optimal, pour n'importe quelles valeurs de  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\boldsymbol{\alpha}$  on suivant l'approche présentée dans [38]. L'estimation devient ainsi un simple problème de moindre carrés linéaire dont la solution est donnée par :

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{MLE}} = \left[ \underbrace{[\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})] \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})}_{\triangleq \mathbf{D}} \right]^\dagger \mathbf{x}, \quad (2.2.9)$$

où  $\mathbf{D}^\dagger$  est la pseudo-inverse Moore-Penrose de  $\mathbf{D}$  donnée par :  $\mathbf{D}^\dagger = (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H$ . En injectant l'estimée  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{MLE}}$  de  $\boldsymbol{\gamma}$  dans (2.2.8) et après quelques manipulations algébriques, on obtient la fonction de vraisemblance compressée qui dépend seulement de  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  comme suit :

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{x}^H \mathbf{D} (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \mathbf{x}. \quad (2.2.10)$$

On peut ainsi obtenir les estimées ML conjointes de  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  et  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$[\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MLE}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{MLE}}] = \underset{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}}{\operatorname{argmax}} \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}). \quad (2.2.11)$$

On peut par la suite obtenir une estimée des coefficients des différents trajets,  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{MLE}}$ , en injectant les estimées  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MLE}}$  et  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{MLE}}$  dans l'équation (2.2.9). L'expression de la CLF présentée dans (2.2.11) est encore une fonction non-linéaire dont l'optimisation *analytique* paraît insoluble. Une autre difficulté fait surface également. Sachant que

le problème a une dimension de  $2\bar{Q}$ , une recherche exhaustive par quadrillage demanderait un calcul prohibitif même à petites valeurs de  $\bar{Q}$ . Tel que démontré plus tard dans le chapitre 3, les deux algorithmes ML [27, 28], basés sur une approche *itérative*, entraînent une très grande complexité sans aucune garantie d’atteindre le maximum global de la fonction objective. Dans ce contexte, on présente une nouvelle technique *non-itérative* pour la résolution du problème JADE. En se basant sur une approche ML, cette technique assure une optimalité globale à une complexité très réduite.

## 2.3 Maximisation globale de la CLF

Dans cette partie, on aborde la maximisation de la fonction objective (CLF) obtenue dans (2.2.11). La méthode proposée est une approche ML *non-itérative* basée essentiellement sur le théorème de Pincus [29]. À première vue, la solution apportée par ce théorème peut paraître limitée dans la pratique puisque, comme on va le voir par la suite, cette solution inclut une intégration multidimensionnelle. Cependant, grâce à une approximation de la CLF qui est à la fois très précise et simple, on transformera l’intégration multidimensionnelle en plusieurs intégrations bidimensionnelles. Le problème sera par la suite reformulé en un calcul d’espérances de variables *pseudo-aléatoires* bidimensionnelles. Ces espérances seront évaluées en utilisant le concept d’échantillonnage préférentiel.

### 2.3.1 Théorème de Pincus

Comme il a été fait récemment dans le cadre de l’estimation des directions d’arrivée [13], on utilisera le théorème proposé par Pincus dans [29] afin d’obtenir les estimées ML des AOAs et TDs dans le contexte du problème JADE

**THÉORÈME** : Soit  $S$  un domaine borné dans un espace Euclidien  $\mathbb{R}^n$  à  $n$  dimensions. Le vecteur  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  représente un élément quelconque de  $S$ . Soit  $F(\mathbf{x})$  une fonction continue sur  $S$  et qui atteint son maximum en un point

$\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T \in S$ . Alors  $z_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) est donné par :

$$z_i = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\int \dots \int x_i e^{\rho F(\mathbf{x})} dx_1 \dots dx_n}{\int \dots \int e^{\rho F(\mathbf{x})} dx_1 \dots dx_n}. \quad (2.3.12)$$

Ce théorème peut être appliqué à notre problème d'optimisation de (2.2.11) en utilisant  $n = 2\bar{Q}$  ainsi que les identifications suivantes :

- $S = [0, \tau_{\max}]^{\bar{Q}} \times [-\pi, \pi]^{\bar{Q}}$  comme domaine borné de  $\mathbb{R}^{2\bar{Q}}$  ;
- $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\tau}^T]^T$  et  $\mathbf{z} = [\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MLE}}^T, \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{MLE}}^T]^T$  ;
- $F(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  est une fonction continue en  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\tau}$ .

Plus précisément, les estimées ML peuvent être écrites sous cette forme en suivant le théorème (2.3.12) pour  $q = 1, \dots, \bar{Q}$  :

$$\hat{\tau}_{q, \text{MLE}} = \int \dots \int \tau_q \bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\tau}, \quad (2.3.13)$$

$$\hat{\alpha}_{q, \text{MLE}} = \int \dots \int \alpha_q \bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\tau}, \quad (2.3.14)$$

où la limite présentée dans (2.3.12) est approximée par une valeur suffisamment élevée,  $\rho_0$ , de  $\rho$  et  $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  n'est que la CLF normalisée définie comme suit :

$$\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) \triangleq \frac{e^{\rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})}}{\int \dots \int e^{\rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})} d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\tau}}. \quad (2.3.15)$$

Intuitivement quand  $\rho_0$  tend vers l'infini,  $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  devient une fonction Dirac-delta centrée autour du vrai maximum de la fonction  $\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  [13, 31] dont la position est donnée par les expressions (2.3.13) et (2.3.14).

*Preuve* : Une démonstration détaillée du théorème existe dans l'article publié par Pincus lui-même [29].

À première vue, en essayant d'éviter une recherche par quadrillage, le problème d'optimisation multidimensionnel s'est transformé en une intégration de même dimension. L'intégration elle-même est très difficile à mettre en pratique. Cependant,

en analysant la CLF normalisée dans (2.3.15), on peut voir que  $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  a toutes les caractéristiques d’une fonction de densité de probabilité (pdf). Ceci est dû au fait que la fonction est positive et intègre à “1”. Puisque les variables incluses dans  $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  ne sont pas vraiment aléatoires, on utilisera le terme “*pseudo-pdf*” pour désigner la CLF normalisée. Cependant, en interprétant  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  comme des vecteurs aléatoires sont distribués selon la pdf  $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$ , alors les estimées ML de (2.3.13) et (2.3.14) peuvent être considérées comme des espérances statistiques, idem, pour  $q = 1, 2, \dots, \bar{Q}$ , on a :

$$\hat{\tau}_{q,\text{MLE}} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}} \{\tau_q\} \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_{q,\text{MLE}} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}} \{\alpha_q\}. \quad (2.3.16)$$

Par conséquent, si on arrive à générer  $R$  réalisations,  $\{\boldsymbol{\tau}^{(r)}\}_{r=1}^R$  et  $\{\boldsymbol{\alpha}^{(r)}\}_{r=1}^R$ , en utilisant la *pseudo-pdf* conjointe  $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha})$ , alors on aura une approximation précise des espérances statistiques mentionnées dans (2.3.16) par un simple moyennage des espérances comme suit :

$$\hat{\tau}_{q,\text{MLE}} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tau_q^{(r)} \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_{q,\text{MLE}} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \alpha_q^{(r)}. \quad (2.3.17)$$

Évidemment, en augmentant le nombre de réalisations  $R$  utilisé dans (2.3.17), la variance des estimées obtenues diminue. Ceci permet de s’approcher du maximum global de la CLF [43]. Cependant, la fonction  $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  a  $2\bar{Q}$  arguments et elle est également extrêmement non linéaire. Ainsi, il n’est pas possible de générer les réalisations requises selon cette *pseudo-pdf*. Pour contourner ce problème, on opte pour le concept d’échantillonnage préférentiel [13, 31], ce qui nous permet de reformuler (2.3.14) comme suit :

$$\hat{\tau}_{q,\text{MLE}} = \int \cdots \int_{\tau_q} \frac{\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})}{\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})} \bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\tau}, \quad (2.3.18)$$

$$\hat{\alpha}_{q,\text{MLE}} = \int \cdots \int_{\alpha_q} \frac{\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})}{\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})} \bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\tau}, \quad (2.3.19)$$

où  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  est la *fonction d’importance* qui n’est rien d’autre qu’une autre pseudo-pdf. Cette dernière est conçue pour permettre une génération facile des réalisations  $\{\boldsymbol{\tau}^{(r)}\}_{r=1}^R$  et  $\{\boldsymbol{\alpha}^{(r)}\}_{r=1}^R$  et doit être en même temps aussi fidèle que possible à la pseudo-pdf originale  $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$ . En optant pour cette solution, les vecteurs  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\tau}$

peuvent être perçus comme étant distribués selon  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  et les estimées ML, mentionnées dans (2.3.18) et (2.3.19), sont équivalentes aux espérances statistiques des nouvelles transformées des variables aléatoires, idem :

$$\widehat{\tau}_{q, \text{MLE}} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}} \left\{ \eta(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}) \tau_q \right\}, \quad (2.3.20)$$

$$\widehat{\alpha}_{q, \text{MLE}} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}} \left\{ \eta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) \alpha_q \right\}, \quad (2.3.21)$$

où  $\eta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  est défini comme étant le ratio suivant :

$$\eta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) \triangleq \frac{\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})}{\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})}. \quad (2.3.22)$$

Avec un bon choix de la fonction  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$ , on peut contrôler le degré de précision des estimées mentionnées dans (2.3.20) et (2.3.21) en augmentant la valeur de  $R$  dans les expressions suivantes :

$$\widehat{\tau}_{q, \text{MLE}} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \tau_q^{(r)}, \quad (2.3.23)$$

$$\widehat{\alpha}_{q, \text{MLE}} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \alpha_q^{(r)}. \quad (2.3.24)$$

Dans la prochaine partie, on discutera du choix de la fonction d'importance  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$ . Un choix qui prendra en considération la séparation entre les  $\bar{Q}$  paires d'angle et délai de propagation  $\{(\alpha_q, \tau_q)\}_{q=1}^{\bar{Q}}$ . En d'autre termes, on cherchera à trouver une fonction  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  qui peut s'écrire sous cette forme :

$$\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \prod_{q=1}^{\bar{Q}} \bar{g}_q(\alpha_q, \tau_q). \quad (2.3.25)$$

Ceci permettra d'interpréter  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  comme étant une pseudo-pdf correspondant à un ensemble de variables aléatoires bidimensionnelles. Ainsi, on génère des réalisations indépendantes selon  $\{\bar{g}_q(\alpha_q, \tau_q)\}_q^{\bar{Q}}$  au lieu de faire appel à  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  pour générer directement des vecteurs aléatoires  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  de dimension  $\bar{Q}$ . En même temps, on devra choisir une fonction  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  qui soit la plus fidèle possible à  $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$ . On devra procéder ainsi pour limiter la variance de l'erreur d'estimation.



### 2.3.2 Approximation de la CLF et choix de la pseudo-pdf

$$\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$$

En inspectant l'équation (2.2.10), on peut remarquer que la CLF originale ne peut pas être réécrite en un produit de fonctions séparables. Ceci est dû à la présence de l'inverse de matrice  $(\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1}$ . Cependant, comme on le démontrera par la suite, cette matrice peut être approximée par une matrice diagonale. En fait, en rappelant l'expression de  $\mathbf{D}$  dans (2.2.9) avec quelques manipulations algébriques, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^H \mathbf{D} &= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})^H [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^H] [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})] \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau}), \\ &= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})^H \left( \mathbf{I}_M \otimes [\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})] \right) \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau}). \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Puis en remarquant que  $\mathbf{I}_M \otimes [\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})]$  est une matrice diagonale par blocs, on peut montrer que :

$$\mathbf{D}^H \mathbf{D} = \sum_{m=1}^M \boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau})^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau}). \quad (2.3.27)$$

D'après (2.2.7) et (2.2.5), on rappelle que la  $l^{\text{ème}}$  colonne de la matrice de direction est  $[\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})]_l = \mathbf{a}(\alpha_l)$ . On a également la matrice  $\boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau})$  qui est diagonale. Ainsi, on peut immédiatement aboutir à :  $[\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau})]_l = [\boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau})]_{l,l} [\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})]_l = s(\omega_m) e^{-j\omega_m \tau_l} \mathbf{a}(\alpha_l)$ . Le  $(l, k)^{\text{ème}}$  élément peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}^H \mathbf{D}]_{l,k} &= \sum_{m=1}^M \left( [\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau})]_l \right)^H [\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau})]_k, \\ &= \sum_{m=1}^M |s(\omega_m)|^2 e^{j\omega_m(\tau_l - \tau_k)} \mathbf{a}(\alpha_l)^H \mathbf{a}(\alpha_k), \\ &= \left( \sum_{m=1}^M |s(\omega_m)|^2 e^{j\omega_m(\tau_l - \tau_k)} \right) \times \left( \sum_{p=1}^P e^{j\pi(p-1)[\cos(\alpha_k) - \cos(\alpha_l)]} \right). \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

On peut obtenir les éléments diagonaux en prenant  $k = l$  dans (2.3.28) :

$$[\mathbf{D}^H \mathbf{D}]_{k,k} = P \sum_{m=1}^M |s(\omega_m)|^2. \quad (2.3.29)$$

Grâce à la superposition destructive (pour  $l \neq k$ ) des exponentiels complexes<sup>1</sup> dans (2.3.28), on peut prévoir que les éléments hors diagonaux de  $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$  seront négligeables par rapport à ses éléments diagonaux. On peut alors approximer  $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$  par une matrice diagonale comme suit :

$$\mathbf{D}^H \mathbf{D} \approx P E_s \mathbf{I}_{\bar{Q}}, \quad (2.3.30)$$

où  $E_s = \sum_{m=1}^M |s(\omega_m)|^2$  représente l'énergie du signal transmis. Dans le but de prouver cette hypothèse, on définit le ratio entre les éléments de la diagonale et ceux hors la diagonale de la matrice  $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$  comme suit :

$$\beta_{l,k} \triangleq \frac{\left( \sum_{m=1}^M |s(\omega_m)|^2 e^{j\omega_m(\tau_l - \tau_k)} \right) \left( \sum_{p=1}^P e^{j(p-1)\pi(\cos(\alpha_k) - \cos(\alpha_l))} \right)}{P \sum_{m=1}^M |s(\omega_m)|^2}. \quad (2.3.31)$$

L'étape suivante consiste à générer un très grand nombre de réalisations des couples  $(\tau_l, \tau_k)$  et  $(\alpha_l, \alpha_k)$  uniformément distribuées dans  $[0, \tau_{\max}]^2$  et  $[0, \pi]^2$ . Après avoir injecté ces réalisations dans (2.3.31), on calcule la fonction de distribution cumulative complémentaire (CCDF) de  $|\beta_{l,k}|$ , idem,  $F_c(x) = Pr[|\beta_{l,k}| \geq x]$ . On trace par la suite cette fonction dans la Fig. 2.1

Comme le montre la Fig. 2.1, les éléments hors diagonaux de la matrice  $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$  peuvent être négligés par rapport à ceux de la diagonale. En effet, on voit bien que la probabilité que  $|\beta_{l,k}|$  dépasse 0.1 est presque nulle pour tout  $l \neq k$ . On peut ainsi tenir compte de cette approximation de  $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$  qui est à la fois valide et précise. On utilise par la suite ce résultat pour obtenir une approximation précise de la CLF :

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) \approx \frac{1}{PE_s} \mathbf{x}^H \mathbf{D} \mathbf{D}^H \mathbf{x}. \quad (2.3.32)$$

Maintenant, à partir de (2.2.9), on a  $\mathbf{D} = [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})] \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})$ . En utilisant le résultat obtenu dans (2.3.32), on peut écrire :

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) \approx \frac{1}{PE_s} \left\| \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})^H [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^H] \mathbf{x} \right\|^2. \quad (2.3.33)$$

---

<sup>1</sup>Ceci rappelle l'évanouissement par multi-trajets dans les canaux sans-fil.

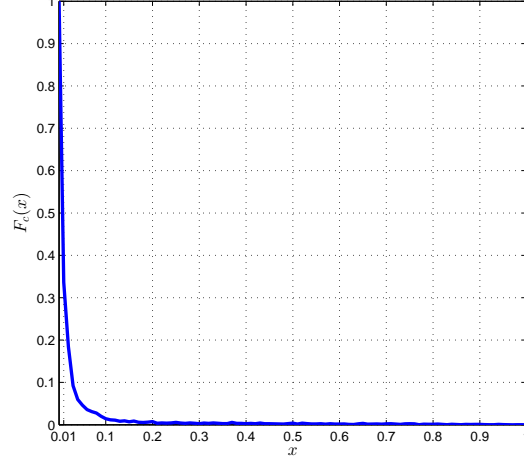


FIGURE 2.1 : La fonction de distribution cumulative complémentaire de l'amplitude du ratio entre les éléments hors diagonaux et diagonaux de la matrice  $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ .

En faisant appel au fait que  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}(\omega_1)^T \mathbf{x}(\omega_2)^T \cdots \mathbf{x}(\omega_M)^T]^T$  et le résultat obtenu dans (2.2.5), on peut montrer que :

$$\Phi(\boldsymbol{\tau})^H [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^H] \mathbf{x} = \sum_{m=1}^M (\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \Phi_m(\boldsymbol{\tau}))^H \mathbf{x}(\omega_m). \quad (2.3.34)$$

Par conséquent, l'équation (2.3.33) peut être réécrite comme suit :

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) \approx \frac{1}{PE_s} \sum_{q=1}^{\bar{Q}} \left| \sum_{m=1}^M [\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \Phi_m(\boldsymbol{\tau})]_q^H \mathbf{x}(\omega_m) \right|^2. \quad (2.3.35)$$

Après quelques manipulations algébriques, on obtient l'approximation suivante de la CLF :

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) \approx \frac{1}{PE_s} \sum_{q=1}^{\bar{Q}} I(\alpha_q, \tau_q), \quad (2.3.36)$$

dans laquelle  $I(\alpha, \tau)$  est le périodogramme du signal dont l'expression est donnée par :

$$I(\alpha, \tau) = \left| \sum_{p=1}^P e^{j\pi(p-1)\cos(\alpha)} \sum_{m=1}^M s(\omega_m) x_p^*(\omega_m) e^{-j2\pi\tau\omega_m} \right|^2, \quad (2.3.37)$$

où  $x_p(\omega_m)$  est le  $p^{\text{ème}}$  élément du vecteur  $\mathbf{x}(\omega_m)$ . La décomposition de la CLF approximée dans (2.3.36) peut être interprétée comme étant une superposition des contributions distinctes des  $\bar{Q}$  paires angle-délag. On exploite cette propriété pour

créer la nouvelle pseudo-pdf (après normalisation) :

$$\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\exp \left\{ \rho_1 \sum_{q=1}^{\bar{Q}} I(\alpha_q, \tau_q) \right\}}{\int \cdots \int \exp \left\{ \rho_1 \sum_{q=1}^{\bar{Q}} I(\alpha'_q, \tau'_q) \right\} d\boldsymbol{\alpha}' d\boldsymbol{\tau}'}. \quad (2.3.38)$$

Notez bien que le facteur  $\frac{1}{PE_s}$ , présent dans (2.3.36), est absorbé dans le nouveau paramètre,  $\rho_1 \neq \rho_0$ , dont on discutera le choix dans la suite. Notez également que la nouvelle pseudo-pdf est conçue selon une approximation fidèle à la CLF originale. La décomposition linéaire dans (2.3.36) permet de séparer  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  en fonction des paires angle-délai. En fait, on peut montrer que  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$  peut être factorisée comme suit :

$$\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \prod_{q=1}^{\bar{Q}} \bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha_q, \tau_q), \quad (2.3.39)$$

où

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha, \tau) = \frac{e^{\rho_1 I(\alpha, \tau)}}{\iint e^{\rho_1 I(\alpha', \tau')} d\alpha' d\tau'}. \quad (2.3.40)$$

Ceci implique qu'avec ce choix de la fonction  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$ , les  $\bar{Q}$  paires angle-délai  $\{(\alpha_q, \tau_q)\}_{q=1}^{\bar{Q}}$  sont des variables indépendantes et identiquement distribuées (iid) [idem, selon la même distribution bidimensionnelle  $\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha, \tau)$ ]. Ainsi, pour générer les vecteurs de réalisations  $\boldsymbol{\alpha}^{(r)}$  et  $\boldsymbol{\tau}^{(r)}$  selon la distribution multidimensionnelle  $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau})$ , on peut facilement générer, de façon indépendante,  $\bar{Q}$  couples de réalisations  $(\alpha_q^{(r)}, \tau_q^{(r)})$  selon la distribution bidimensionnelle  $\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha, \tau)$  et construire par la suite les vecteurs de réalisations comme étant  $\boldsymbol{\alpha}^{(r)} = [\alpha_1^{(r)}, \alpha_1^{(r)}, \dots, \alpha_{\bar{Q}}^{(r)}]$  et  $\boldsymbol{\tau}^{(r)} = [\tau_1^{(r)}, \tau_1^{(r)}, \dots, \tau_{\bar{Q}}^{(r)}]$ . On répète ce même processus pour  $r = 1, 2, \dots, R$  afin d'obtenir les  $R$  réalisations requises. Ces réalisations seront utilisées pour obtenir les estimées dans (2.3.23) et (2.3.24) par un simple moyennage. Dans la prochaine section, on expliquera la méthode de génération des  $\bar{Q}$  couples  $\{(\alpha_q^{(r)}, \tau_q^{(r)})\}_{q=1}^{\bar{Q}}$  en utilisant la distribution bidimensionnelle,  $\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha, \tau)$ , et comment appliquer le concept d'échantillonnage préférentiel.

## 2.4 Génération des réalisations requises et l'utilisation du concept IS

Dans cette section, on présente la méthode adoptée pour la génération des réalisations requises selon la distribution  $\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha, \tau)$ . On introduit également le concept IS et on expliquera comment cet outil peut être intégré dans notre algorithme.

### 2.4.1 Génération des réalisations requises selon $\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha, \tau)$

Pour commencer, on présente un résultat bien connu dans la théorie des probabilités. Une distribution conjointe,  $\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha, \tau)$ , peut être factorisée en pdfs marginales et conditionnelles selon les deux formes équivalentes suivantes :

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha, \tau) = \bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)\bar{g}_{\bar{\alpha}|\bar{\tau}}(\alpha|\tau) \quad \text{ou} \quad \bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha, \tau) = \bar{g}_{\bar{\alpha}}(\alpha)\bar{g}_{\bar{\tau}|\bar{\alpha}}(\tau|\alpha), \quad (2.4.41)$$

où  $\bar{g}_{\bar{\tau}}$  [resp.,  $\bar{g}_{\bar{\alpha}}(\alpha)$ ] est la pdf marginale de  $\tau$  [resp.  $\alpha$ ] et  $\bar{g}_{\bar{\tau}|\bar{\alpha}}(\tau|\alpha)$  [resp.,  $\bar{g}_{\bar{\alpha}|\bar{\tau}}(\alpha|\tau)$ ] est la pdf conditionnelle de  $\tau$  sachant  $\alpha$  [resp.,  $\alpha$  sachant  $\tau$ ]. Les deux identités mentionnées dans (2.4.41) permettent de générer  $(\alpha_q^{(r)}, \tau_q^{(r)})$  selon ces deux alternatives :

1. ALTERNATIVE 1 : générer  $\tau_q^{(r)}$  en utilisant la pdf marginale,  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)$ , puis faire appel à la pdf conditionnelle de  $\alpha$  sachant  $\tau_q^{(r)}$ , idem,  $\bar{g}_{\bar{\alpha}|\bar{\tau}}(\alpha|\tau = \tau_q^{(r)})$ , afin d'acquérir les réalisations des angles  $\alpha_q^{(r)}$ .
2. ALTERNATIVE 2 : générer  $\alpha_q^{(r)}$  en utilisant la pdf marginale,  $\bar{g}_{\bar{\alpha}}(\alpha)$ , puis faire appel à la pdf conditionnelle de  $\tau$  sachant  $\alpha_q^{(r)}$ , idem,  $\bar{g}_{\bar{\tau}|\bar{\alpha}}(\tau|\alpha = \alpha_q^{(r)})$ , afin d'acquérir les réalisations des délais de propagations  $\tau_q^{(r)}$ .

Cependant, la deuxième alternative, [idem, commencer par la pdf marginale des angles,  $\bar{g}_{\bar{\alpha}}(\alpha)$ ], n'est pas la bonne option en pratique vu que  $\bar{g}_{\bar{\alpha}}(\alpha)$  ne permet pas de discerner des angles très proches. En effet, des angles faiblement espacés sont inclus dans un seul lobe principal même en l'absence totale du bruit [40]. Ce phénomène est illustré par la Fig. 2.2(b) pour une séparation angulaire  $|\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2| = 6^\circ$  et un SNR = 30 dB (avec  $\bar{\tau}_1 = 4T$  et  $\bar{\tau}_2 = 5T$ ).

Contrairement à la pdf marginale de  $\alpha$ , celle des délais de propagation,  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)$ , permet

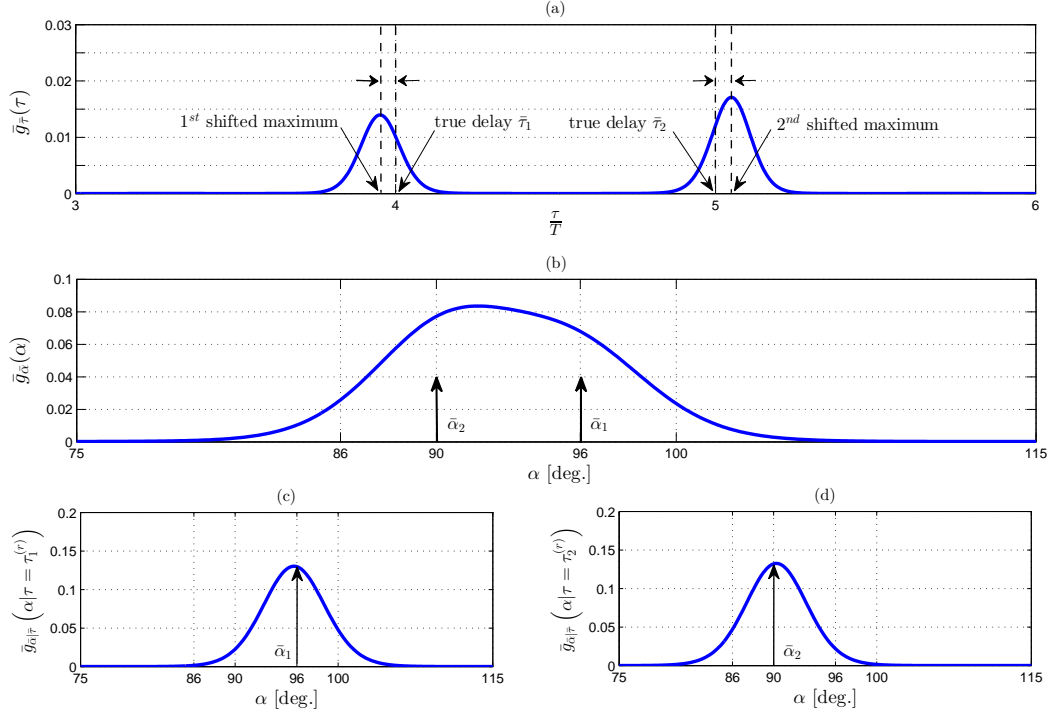


FIGURE 2.2 : Les pdfs marginales et conditionnelles pour  $\bar{Q} = 2$  et SNR = 30 dB : (a) pdf marginale de  $\tau$ , (b) pdf marginale de  $\alpha$ , (c) pdf conditionnelle de  $\alpha$  sachant  $\tau_1^{(r)}$ , et (d) pdf conditionnelle de  $\alpha$  sachant  $\tau_2^{(r)}$ .

toujours de discerner les  $\bar{Q}$  lobes principaux liés au vrais délais,  $\{\bar{\tau}_q\}_{q=1}^{\bar{Q}}$ . Ceci reste valide même pour une séparation angulaire réduite comme l'illustre la Fig. 2.2(a). Par ailleurs, la pdf marginale des délais de propagation,  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)$ , peut résoudre des délais faiblement espacés (idem, quand  $|\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2|$  est une fraction de  $T$ ) même si les deux trajets sont très étroitement espacés dans le domaine spatial (typiquement,  $|\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2| = 0.5^\circ$ ). Pour ces raisons, on choisit la première alternative et on commence par évaluer  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)$  comme suit :

$$\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau) = \int \bar{g}_{\bar{\alpha},\bar{\tau}}(\alpha, \tau) d\alpha, \quad (2.4.42)$$

On utilise ce résultat pour générer le  $r^{\text{ème}}$  vecteur de réalisations,  $\boldsymbol{\tau}^{(r)} = [\tau_1^{(r)}, \tau_2^{(r)}, \dots, \tau_{\bar{Q}}^{(r)}]^T$ . Tel qu'illustré dans les Figs. 2.2(c) et (d), à une faible séparation angulaire (idem,

$|\alpha_1 - \alpha_2| = 6^\circ$ ), chaque  $q^{\text{ème}}$  pdf conditionnelle dont l'expression est donnée par :

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}|\bar{\tau}}(\alpha|\tau = \tau_q^{(r)}) = \frac{\bar{g}_{\bar{\alpha},\bar{\tau}}(\alpha, \tau_q^{(r)})}{\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau_q^{(r)})}, \quad q = 1, 2, \dots, \bar{Q} \quad (2.4.43)$$

possède un seul lobe principal autour du vrai angle  $\bar{\alpha}_q$  qui est associé au délai  $\bar{\tau}_q$ .

Avant d'aborder la prochaine étape, on rappelle le lemme suivant [39] qui sera extrêmement utile pour la génération des réalisations en question :

**Lemme 1** : Pour une variable aléatoire  $X \in \mathcal{X}$  avec une pdf  $f_X(x)$  et une CDF  $F_X(x)$ , on dénote la fonction inverse de la CDF comme étant  $F_X^{-1}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $u \rightarrow x$  tel que  $F_X(x) = u$ . Ainsi, pour chaque variable aléatoire uniforme,  $U \in [0, 1]$ , la variable aléatoire  $\tilde{X} = F_X^{-1}(U)$  est distribuée selon  $f_X(\cdot)$ .

Afin de générer les délais de propagation en utilisant la pdf marginale  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)$ , on fait appel au résultat du *Lemme 1*. Cette opération sera appliquée pour  $q = 1, 2, \dots, \bar{Q}$  afin d'obtenir les réalisations  $\{\tau_q^{(r)}\}_{r=1}^R \sim \bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)$  en suivant les étapes suivantes :

1. générer  $R$  réalisations  $\{u_q^{(r)}\}_{r=1}^R \sim U[0, 1]$  pour  $q = 1, 2, \dots, \bar{Q}$ ,
2. obtenir  $\left\{ \{\tau_q^{(r)} = \bar{G}_{\bar{\tau}}^{-1}(u_q^{(r)})\}_{r=1}^R \right\}_{q=1}^{\bar{Q}}$  où  $\bar{G}_{\bar{\tau}}(\cdot)$  est la CDF associée à  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)$ .

Cependant, selon le niveau du SNR, l'utilisation de la pdf marginale  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)$  fait face à certains problèmes en pratique :

- À des valeurs faibles du SNR, on observe l'apparition de quelques lobes secondaires comme le montre la Fig. 2.3(b) à SNR = -5 dB. Ces lobes secondaires seront traduits en plusieurs pentes additionnelles dans la CDF,  $\bar{G}_{\bar{\tau}}(\tau)$ , comme c'est le cas dans la Fig. 2.3(a). Par conséquent, toute réalisation  $u \sim U[0, 1]$  qui correspond aux régions de ces pentes en question, causera la génération d'une réalisation aberrante. En d'autres termes, les réalisations générées,  $\tau = \bar{G}_{\bar{\tau}}^{-1}(u)$ , ne correspondront à aucun vrai délai. Ce phénomène est également illustré dans la Fig. 2.3(a) pour deux réalisations  $u'$  et  $u''$ . Ces valeurs aberrantes résulteront en un biais d'estimation qui affectera sévèrement les performances

d'estimation. Afin d'éviter le problème des valeurs aberrantes, il est possible de faire disparaître les lobes secondaires en choisissant une valeur très grande du paramètre  $\rho_1$  [cf. (2.3.40)]. Cependant, un tel choix causera le rétrécissement de la largeur des lobes principaux et augmentera de ce fait les chances d'avoir les vrais délais à l'extérieure de ces lobes. Ainsi, toutes les réalisations générées seront décalées résultant encore une fois en un biais d'estimation.

- À valeurs élevées du SNR, les lobes secondaires sont par défaut de faible amplitude et une valeur faible de  $\rho_1$  peut être privilégiée. Cependant, la différence d'amplitude entre les lobes principaux mène à des pentes disproportionnées de la CDF. Par conséquent, on aura un nombre déséquilibré de réalisations pour chaque lobe principal. L'une des solutions qui peut remédier à ce problème consiste à choisir une valeur élevée de  $R$ . Ainsi, on peut garantir un nombre suffisant de réalisations générées pour chaque lobe principal. Mais ceci aura un impact sur la complexité de l'algorithme.

Afin de contourner le problème mentionné auparavant, on fait appel au concept d'*échantillonnage préférentiel* (IS). Comme l'indique son nom, le concept IS permet de s'assurer que toutes les réalisations sont générées dans une région qui est considérée "plus importante" *a priori*. En effet, le concept IS permet de générer toutes les réalisations autour des vrais délais et des vrais angles et par conséquent évite systématiquement le problème des valeurs aberrantes. Il faut mentionner également qu'il nécessite de générer le même nombre de réalisations sans tenir compte de l'amplitude des lobes principaux.

## 2.4.2 Méthode d'échantillonnage préférentiel

Comme mentionné précédemment, notre objectif est de s'assurer que toutes les réalisations sont générées aux alentours des vrais délais et des angles. Ainsi, on commence par extraire des valeurs initiales des délais de propagation avec une recherche linéaire de faible résolution :

$$[\hat{\tau}_1^{(0)}, \hat{\tau}_2^{(0)}, \dots, \hat{\tau}_Q^{(0)}] = \underset{\tau}{\operatorname{argmax}}_{\bar{Q}} \bar{g}_{\tau}(\tau), \quad (2.4.44)$$



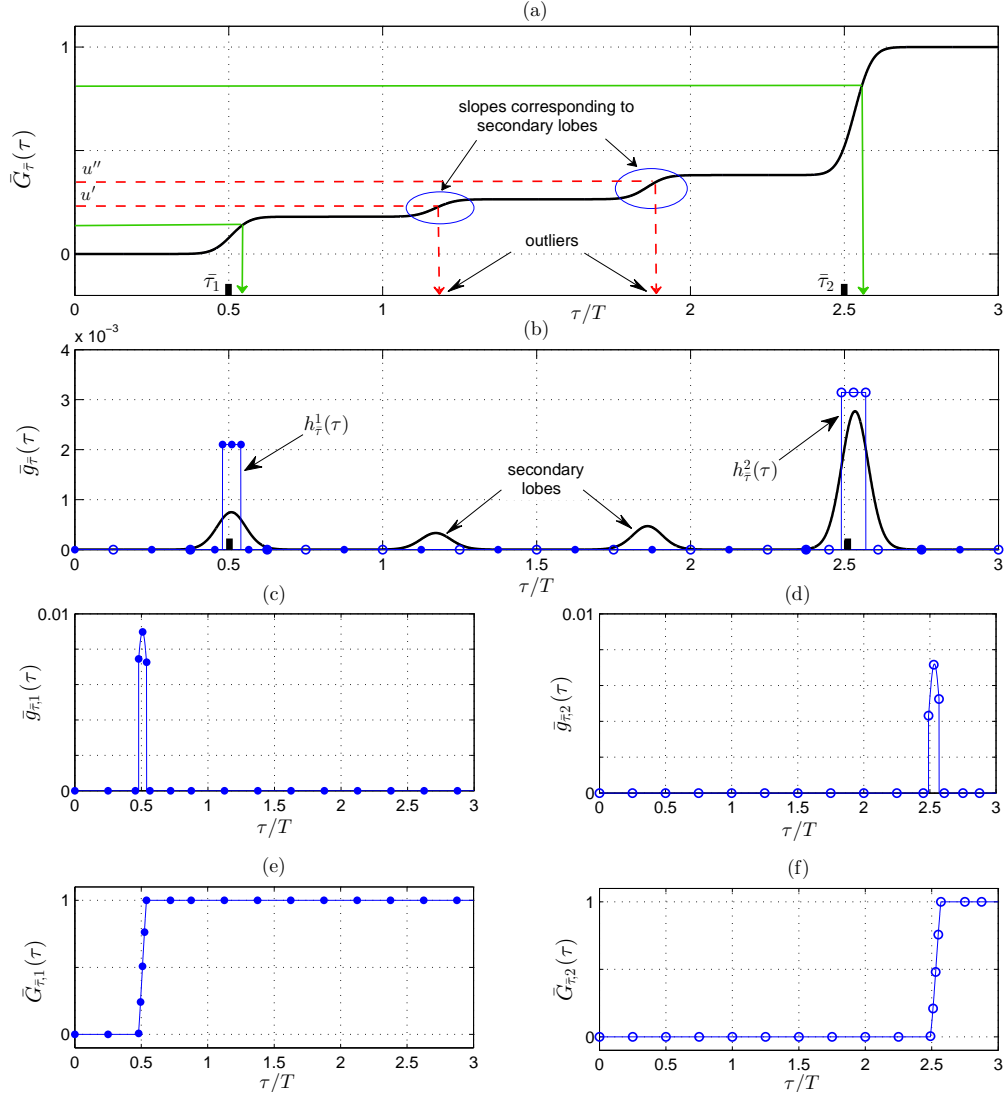


FIGURE 2.3 : Illustration de la pseudo-pdf pour  $\bar{Q} = 2$  et  $\text{SNR} = -10$  dB : (a) CDF marginale de  $\tau$ , (b) pdf marginale de  $\tau$ , (c) pdf locale de  $\tau$  autour de  $\bar{\tau}_1$ , (d) pdf locale de  $\tau$  autour de  $\bar{\tau}_2$ , (e) CDF locale de  $\tau$  autour de  $\bar{\tau}_1$ , et (f) CDF locale de  $\tau$  autour de  $\bar{\tau}_2$ .

où  $\text{argmax}_{\bar{Q}}\{\cdot\}$  donne les positions des  $\bar{Q}$  pics les plus importants de n'importe quelle fonction coût. La recherche initiale est réalisée avec un pas relativement large  $\Delta_{\bar{\tau}}$ . Puisque les lobes principaux de  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)$  sont décalés [cf. Fig. 2.2(a)], alors (2.4.44) ne fournit pas des estimées précises des délais même pour un pas  $\Delta_{\bar{\tau}}$  très faible. Les estimées initiales dans (2.4.44) sont utilisées par la suite pour extraire des estimées

des AoAs en faisant appel aux pdfs conditionnelles suivantes :

$$\hat{\alpha}_q^{(0)} = \underset{\alpha}{\operatorname{argmax}} \bar{g}_{\bar{\alpha}|\bar{\tau}} \left( \alpha | \tau = \hat{\tau}_q^{(0)} \right) \quad \text{pour } q = 1, 2, \dots, \bar{Q}. \quad (2.4.45)$$

De la même façon, on effectue une recherche linéaire initiale dans (2.4.45) avec un pas  $\Delta_{\bar{\alpha}}$  assez large. Ensuite, dans le but de forcer une génération des réalisations,  $\{\tau_q^{(r)}\}_{r=1}^R$  (resp.  $\{\alpha_q^{(r)}\}_{r=1}^R$ ), aux alentours des vrais délais (resp. vrais angles), on fixe les  $\bar{Q}$  intervalles suivants pour les délais et les angles :

$$\begin{aligned} D_{\hat{\tau}_q^{(0)}} &= \left[ \hat{\tau}_q^{(0)} - \delta_{\bar{\tau}}, \hat{\tau}_q^{(0)} + \delta_{\bar{\tau}} \right], \\ D_{\hat{\alpha}_q^{(0)}} &= \left[ \hat{\alpha}_q^{(0)} - \delta_{\bar{\alpha}}, \hat{\alpha}_q^{(0)} + \delta_{\bar{\alpha}} \right]. \end{aligned}$$

Ces intervalles sont centrés aux alentours de  $\hat{\tau}_q^{(0)}$  et  $\hat{\alpha}_q^{(0)}$ , respectivement et la taille de ces derniers est contrôlée par les paramètres  $\delta_{\bar{\tau}}$  et  $\delta_{\bar{\alpha}}$  dont les valeurs seront spécifiées dans le chapitre 3. On définit ainsi les fonctions d'*importance* des délais et des angles associées aux intervalles locaux comme suit :

$$h_{\hat{\tau}_q^{(0)}}(\tau) = \begin{cases} h_{\bar{\tau}}^q & \text{pour } \tau \in D_{\hat{\tau}_q^{(0)}}, \\ 0 & \text{autrement;} \end{cases} \quad (2.4.46)$$

$$h_{\hat{\alpha}_q^{(0)}}(\alpha) = \begin{cases} h_{\bar{\alpha}}^q & \text{pour } \alpha \in D_{\hat{\alpha}_q^{(0)}}, \\ 0 & \text{autrement;} \end{cases} \quad (2.4.47)$$

Dans le cas où  $\bar{Q} = 2$ , les deux fonctions d'*importance* des délais sont illustrées dans la Fig. 2.3(b) avec les lignes pointillées et encerclées. Les  $\bar{Q}$  pseudo-pdfs (qui se réfèrent aux pseudo-pdfs *locales*) utilisées pour générer les réalisations dans  $D_{\hat{\tau}_q^{(0)}} \times D_{\hat{\alpha}_q^{(0)}}$  pour  $q = 1, 2, \dots, \bar{Q}$ , peuvent être exprimées comme suit :

$$\bar{g}_{\bar{\tau},q}(\tau) = h_{\bar{\tau}}^q(\tau) \bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau), \quad (2.4.48)$$

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}|\bar{\tau},q}(\alpha|\tau) = h_{\bar{\alpha}}^q(\alpha) \bar{g}_{\bar{\alpha}|\bar{\tau}}(\alpha|\tau). \quad (2.4.49)$$

Les constantes  $h_{\bar{\tau}}^q$  et  $h_{\bar{\alpha}}^q$  dans (2.4.46) et (2.4.47) sont calculées de manière à avoir les pseudo-pdfs locales dans (2.4.48) et (2.4.49) intégrants chacune à 1. Par exemple,  $h_{\bar{\tau}}^q$  doit satisfaire :

$$\int_0^{\bar{\tau}_{\max}} \bar{g}_{\bar{\tau},q}(\tau) d\tau = h_{\bar{\tau}}^q \int_{\tau \in D_{\hat{\tau}_q^{(0)}}} \bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau) d\tau = 1, \quad (2.4.50)$$

permettant ainsi d'écrire :

$$h_{\bar{\tau}}^q = \left( \int_{\hat{\tau}_q^{(0)} - \delta_{\bar{\tau}}}^{\hat{\tau}_q^{(0)} + \delta_{\bar{\tau}}} \bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau) d\tau \right)^{-1}. \quad (2.4.51)$$

Pour la même raison,  $h_{\bar{\alpha}}^q$  est donnée par :

$$h_{\bar{\alpha}}^q = \left( \int_{\hat{\alpha}_q^{(0)} - \delta_{\bar{\alpha}}}^{\hat{\alpha}_q^{(0)} + \delta_{\bar{\alpha}}} \bar{g}_{\bar{\alpha}|\bar{\tau}}(\alpha|\tau) d\alpha \right)^{-1}. \quad (2.4.52)$$

Il faut mentionner que le fait d'introduire les fonctions d'impulsion dans (2.4.48) et (2.4.49) permet d'obtenir des pseudo-pdfs conjointes angle/délai isolées pour chaque  $q^{\text{ème}}$  trajet. Ainsi, en pratique, le processus de génération des réalisations autour des vrais couples angle/délai,  $(\bar{\alpha}_q, \bar{\tau}_q)$ , peut être implémenté selon une approche parallèle. Ceci permet de réduire la complexité de l'algorithme. Pour mieux illustrer ce qu'on vient de décrire, on présente les pseudo-pdfs locales et isolées,  $\bar{g}_{\bar{\tau},1}(\tau)$  et  $\bar{g}_{\bar{\tau},2}(\tau)$ , dans les Figs. 2.3(c) et (d), respectivement dans le cas  $\bar{Q} = 2$ . De plus, comme on peut le remarquer dans les Figs. 2.3(e) et 2.3(f), les CDFs locales,  $\bar{G}_{\bar{\tau},1}(\tau)$  et  $\bar{G}_{\bar{\tau},2}(\tau)$ , présentent une seule pente localisée aux alentours du vrai délai. Ainsi, en appliquant le résultat du LEMME 1, chaque réalisation uniforme  $u_q^{(r)} \in [0, 1]$ , engendre une réalisation du délai  $\tau_q^{(r)} \in D_{\hat{\tau}_q^{(0)}}$  [i.e., dans les environs de  $\bar{\tau}_q$ ]. Pour les mêmes raisons, toutes les réalisations des angles, générées selon la  $q^{\text{me}}$  pdf conditionnelle isolée, appartiennent à  $D_{\hat{\alpha}_q^{(0)}}$  [i.e., dans les environs de  $\bar{\alpha}_q$ ].

## 2.5 Les détails de l'implémentation

Dans cette section, on donne tous les détails nécessaires pour une implémentation pratique et simple de notre algorithme d'estimation. On aborde également les détails concernant la génération locale des réalisations et l'estimation des délais de propagations et des AoAs.

### 2.5.1 Génération locale des réalisations requises

On considère le cas d'un réseau d'antennes ULA où tous les AoAs possibles sont confinés dans l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$ . On rappelle également que  $\tau \in [0, \bar{\tau}_{\max}]$  où

$\bar{\tau}_{\max}$  peut être choisi librement aussi élevé que souhaité. La première étape consiste à évaluer le périodogramme,  $I(\alpha_i, \tau_j)$ , dont l'expression est donnée dans (2.3.37). L'évaluation doit se faire en points  $(\alpha_i, \tau_j)$  de la grille avec des pas  $\Delta_{\bar{\alpha}}^{\text{broad}}$  et  $\Delta_{\bar{\tau}}^{\text{broad}}$  relativement larges. Par la suite, on approxime les intégrales par de simples sommes discrètes et on évalue la pdf conjointe,  $\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha, \tau)$ , dans (2.3.40) à chaque point de la grille (idem,  $\forall(\alpha_i, \tau_j) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, \bar{\tau}_{\max}]$ ) :

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha_i, \tau_j) = \frac{\exp\{\rho_1 I(\alpha_i, \tau_j)\}}{\sum_i \sum_j \exp\{\rho_1 I(\alpha_i, \tau_j)\} \Delta_{\bar{\tau}}^{\text{broad}} \Delta_{\bar{\alpha}}^{\text{broad}}}. \quad (2.5.53)$$

À partir de (2.5.53), on calcule la pdf marginale des délais comme suit :

$$\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau_j) = \sum_i \bar{g}(\alpha_i, \tau_j) \Delta_{\bar{\alpha}}^{\text{broad}}, \quad \forall \tau_j \in [0, \tau_{\max}]. \quad (2.5.54)$$

Les estimées initiales,  $\{\hat{\tau}_q^{(0)}\}_{q=1}^{\bar{Q}}$ , sont les points de la grille qui correspondent aux  $\bar{Q}$  maximums les plus larges de (2.5.54). Par la suite, pour chaque  $q = 1, 2, \dots, \bar{Q}$ , la pdf conditionnelle du  $q^{\text{ème}}$  angle qui correspond au délai  $\hat{\tau}_q^{(0)}$  peut être obtenue directement comme suit :

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}|\bar{\tau}}(\alpha_i | \tau = \hat{\tau}_q^{(0)}) = \frac{\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha_i, \hat{\tau}_q^{(0)})}{\bar{g}_{\bar{\tau}}(\hat{\tau}_q^{(0)})}, \quad \forall \alpha_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \quad (2.5.55)$$

Pour le  $q^{\text{ème}}$  AoA, la valeur initiale estimée,  $\hat{\alpha}_q^{(0)}$ , est également le point de la grille d'évaluation,  $\alpha_i$ , qui correspond au maximum de (2.5.55). L'étape suivante consiste à générer les réalisations dans les intervalles  $D_{\hat{\tau}_q^{(0)}}$  et  $D_{\hat{\alpha}_q^{(0)}}$  pour  $q = 1, 2, \dots, \bar{Q}$ . Afin d'obtenir ces réalisations, on procède comme suit :

- **ÉTAPE 1** : Évaluer la pdf conjointe,  $\bar{g}_{\bar{\alpha}, \bar{\tau}}(\alpha, \tau)$ , *localement* sur les nouveaux points de la grille  $(\alpha'_i, \tau'_j) \in D_{\hat{\alpha}_q^{(0)}} \times D_{\hat{\tau}_q^{(0)}}$  selon ce qui a été mentionné dans (2.5.53); mais avec des pas plus petits (idem,  $\Delta_{\bar{\tau}}^{\text{small}} < \Delta_{\bar{\tau}}^{\text{broad}}$  et  $\Delta_{\bar{\alpha}}^{\text{small}} < \Delta_{\bar{\alpha}}^{\text{broad}}$ ).
- **ÉTAPE 2** : Calculer la  $q^{\text{ème}}$  pdf marginale localement en tout point  $\tau'_j \in D_{\hat{\tau}_q^{(0)}}$  suivant l'équation (2.5.54), idem :

$$\bar{g}_{\bar{\tau}, q}(\tau'_j) = \sum_i \bar{g}(\alpha'_i, \tau'_j) \Delta_{\bar{\alpha}}^{\text{small}} \quad \forall \tau'_j \in D_{\hat{\tau}_q^{(0)}}. \quad (2.5.56)$$

- **ÉTAPE 3** : Calculer la  $q^{\text{ème}}$  CDF locale des délais comme suit :

$$\bar{G}_{\bar{\tau},q}(\tau'_j) = \sum_{l \leq j} \bar{g}_{\bar{\tau},q}(\tau'_l) \Delta_{\bar{\tau}}^{\text{small}} \quad \forall \tau'_j \in D_{\hat{\tau}_q^{(0)}}. \quad (2.5.57)$$

- **ÉTAPE 4** : Générer  $R$  réalisations  $\{u_q^{(r)}\}_{r=1}^R \sim U[0, 1]$  et inverser  $\bar{G}_{\bar{\tau},q}(\cdot)$  via une interpolation linéaire pour obtenir les réalisations locales des délais  $\tau_q^{(r)} = \bar{G}_{\bar{\tau},q}^{-1}(u_q^{(r)})$  pour  $r = 1, 2, \dots, R$ .
- **ÉTAPE 5** : Pour  $r = 1, 2, \dots, R$ , obtenir la pdf locale de la  $q^{\text{ème}}$  AoA sachant  $\tau_q^{(r)}$  à partir de la pdf conjointe locale (déjà évaluée à l'“ÉTAPE 1”). Cette étape peut être traduite comme suit :

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}|\bar{\tau}}(\alpha'_i | \tau = \tau_q^{(r)}) = \frac{\bar{g}_{\bar{\alpha},\bar{\tau}}(\alpha'_i, \tau_q^{(r)})}{\bar{g}_{\bar{\tau},q}(\tau_q^{(r)})}, \quad \forall \alpha'_i \in D_{\hat{\alpha}_q^{(0)}}.$$

- **ÉTAPE 6** : Évaluer la CDF locale de la  $q^{\text{ème}}$  angle,  $\bar{G}_{\bar{\alpha},q}(\alpha'_i)$ , similairement à  $\bar{G}_{\bar{\tau},q}(\tau'_j)$  dans (2.5.57) et générer la  $r^{\text{ème}}$  réalisation,  $\alpha_q^{(r)} = \bar{G}_{\bar{\alpha},q}^{-1}(u_q^{(r)})$ , en utilisant également l'interpolation linéaire.

## 2.5.2 Estimations des TDs et AoAs :

Afin d'obtenir des estimées plus précises, on opte pour la moyenne *circulaire* à la place de la moyenne linéaire qui est déjà présentée dans (2.3.23). Les arguments affirmant l'avantage de la moyenne circulaire existent déjà dans [13, 31]. En fait, on montre dans ce qui suit que la moyenne circulaire réussit à sélectionner les meilleurs réalisations et ceci en termes de distance Euclidienne par rapport au vrais délais et angles. La moyenne circulaire [44, ch. 2,3] de chaque transformation  $f(\Phi)$  d'une variable aléatoire  $\Phi \in [-\pi, \pi]$  avec une distribution  $p_\Phi(\phi)$  est définie comme étant  $\bar{\phi} \triangleq \angle \mathbb{E}\{f(\Phi)e^{j\Phi}\}$ . En suivant le même principe pour la moyenne linéaire, si  $\phi^{(r)} \sim p_\Phi(\cdot)$  pour  $r = 1, 2, \dots, R$  sont des réalisations de  $\Phi$ , alors  $\bar{\phi}$  peut être estimée comme suit :

$$\hat{\bar{\phi}} = \angle \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R f(\phi^{(r)}) e^{j\phi^{(r)}}. \quad (2.5.58)$$

Notez bien que les réalisations originales  $\tau_q^{(r)}$  et  $\alpha_q^{(r)}$  appartiennent, respectivement, à  $[0, \tau_{\max}]$  et  $[-\pi/2, \pi/2]$  pour ULAs ( $[0, 2\pi]$  pour UCAs). On a donc besoin de transformer les réalisations vers l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  afin d'appliquer la moyenne circulaire. Pour cela, on utilise les transformations  $\phi_1(\tau_q^{(r)}) = 2\pi(\tau_q^{(r)}/\tau_{\max} - 1/2) \in [-\pi, \pi]$  et  $\phi_2(\alpha_q^{(r)}) = 2\alpha_q^{(r)} \in [-\pi, \pi]$  pour ULAs<sup>2</sup>. La moyenne circulaire est appliquée en premier lieu en utilisant les réalisations transformées  $\phi_1(\tau_q^{(r)})$  et  $\phi_2(\alpha_q^{(r)})$ . Les vrais délais et AoAs sont estimés par la suite à l'aide des transformations inverses,  $\phi_1^{-1}(x) = \tau_{\max}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}x)$  et  $\phi_2^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ , comme suit :

$$\widehat{\tau}_q = \tau_{\max} \left( \frac{1}{2\pi} \angle \left[ \sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) e^{j2\pi(\frac{\tau_q^{(r)}}{\tau_{\max}} - \frac{1}{2})} \right] + \frac{1}{2} \right), \quad (2.5.59)$$

$$\widehat{\alpha}_q = \frac{1}{2} \angle \left[ \sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) e^{j(2\alpha_q^{(r)} - \pi)} \right]. \quad (2.5.60)$$

En fait, on montre dans l'appendice A le résultat suivant :

**LEMME 2** : Les estimées  $\widehat{\boldsymbol{\tau}} = [\widehat{\tau}_1, \widehat{\tau}_2, \dots, \widehat{\tau}_Q]$  et  $\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = [\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \dots, \widehat{\alpha}_Q]$  calculées à partir des moyennes circulaires dans (2.5.59) et (2.5.60) correspondent aux vecteurs de réalisations qui permettent de minimiser la distance Euclidienne avec les vrais délais et angles, idem :

$$[\widehat{\boldsymbol{\tau}}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}] = \underset{\boldsymbol{\tau}^{(r)}, \boldsymbol{\alpha}^{(r)}}{\operatorname{argmin}} \left( \|\boldsymbol{\tau}^{(r)} - \bar{\boldsymbol{\tau}}\|^2 + \|\boldsymbol{\alpha}^{(r)} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}\|^2 \right). \quad (2.5.61)$$

*Preuve* : Appendice A.

Maintenant, en utilisant (2.3.15) et (2.3.38) dans (2.3.22), on donne l'expression simplifiée du coefficient de pondération,  $\eta(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)})$  :

$$\eta(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) = \frac{\mu \exp \left\{ \rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \right\}}{\exp \left\{ \rho_1 \sum_{q=1}^Q I(\alpha_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) \right\}}, \quad (2.5.62)$$

---

<sup>2</sup>Il faut mentionner qu'on s'intéressera dans ce qui suit à l'estimation avec des configurations ULA puisque les résultats avec UCAs seront pratiquement les mêmes à une petite différence près. En fait cette seule différence résidera dans la transformation  $\phi_2(\alpha_q^{(r)}) = \alpha_q^{(r)} - \pi$  dont l'inverse  $\phi_2^{-1}(x) = x + \pi$  sera bien évidemment utilisée dans (2.5.60).

où

$$\mu = \frac{\int \cdots \int \exp \left\{ \rho_1 \sum_{q=1}^{\bar{Q}} I(\alpha_q, \tau_q) \right\} d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\tau}}{\int \cdots \int \exp \left\{ \rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) \right\} d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\tau}}. \quad (2.5.63)$$

Dans le but de réduire la complexité et évaluer proprement ce coefficient, on fait appel à deux remarques très importantes. En fait, on remarque bien que seul le calcul des arguments des quantités complexes dans (2.5.59) et (2.5.60) est nécessaire. Ceci est dû au fait que le ratio des intégrales,  $\mu$ , dans (2.5.63) est un terme positif également invariable en fonction de  $r$  dans (2.5.59) et (2.5.60), ce qui permet d'omettre cet argument par la suite. Le deuxième point concerne le paramètre  $\rho_0$ . En fait, ce paramètre doit être très élevé pour satisfaire la limite dans (2.3.12). Cependant, l'évaluation du ratio dans (2.5.62) peut causer un débordement. Pour résoudre ce problème, on peut utiliser le coefficient de pondération *normalisé* suivant :

$$\bar{\eta}(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) = \exp \left\{ \rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \rho_1 \sum_{q=1}^{\bar{Q}} I(\alpha_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) - \max_{1 \leq r \leq R} \left[ \rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \rho_1 \sum_{q=1}^{\bar{Q}} I(\alpha_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) \right] \right\}, \quad (2.5.64)$$

dans (2.5.59) et (2.5.60) au lieu de  $\eta(\boldsymbol{\tau}^{(r)}, \boldsymbol{\alpha}^{(r)})$  sans affecter le résultat final. Ceci est possible car on a seulement besoin de calculer l'argument des nombres complexes. Dans ce qui suit, on suggère quelques astuces permettant de réduire la complexité de l'algorithme et l'aidant à atteindre la CRLB. En fait, on remarque que les estimées initiales  $\hat{\tau}_q^{(0)}$  et  $\hat{\alpha}_q^{(0)}$  sont décalées, respectivement, des vrais délais et angles par tout au plus<sup>3</sup>  $0.1T$  et  $0.1^\circ$  (idem,  $|\hat{\tau}_q^{(0)} - \bar{\tau}_q| \leq 0.1T$  et  $|\hat{\alpha}_q^{(0)} - \bar{\alpha}_q| \leq 0.1^\circ$ ). En principe, les estimées basées sur le concept IS dans (2.5.59) et (2.5.60) peuvent fournir des estimations exactes (non décalées) en utilisant un nombre très grand de

---

<sup>3</sup>Le décalage varie selon la séparation des vrais délais et des angles mais ne dépasse jamais  $\pm 0.1T$  et  $\pm 0.1^\circ$  pour  $q = 1, 2, \dots, \bar{Q}$ . En tenant compte du fait que l'algorithme peut résoudre une séparation minimale de  $\pm 0.25T$ , un décalage excédant la valeur  $\pm 0.1T$  pour les délais causera un chevauchement entre les deux intervalles locaux.

réalisations. En effet, en utilisant des simulations exhaustives, on trouve des estimées exactes avec  $R_0 = 20000$  réalisations générées localement avec des pas  $\delta_{\bar{\tau}} = 0.2T$  et  $\delta_{\bar{\alpha}} = 0.2^\circ$ . Ces valeurs typiques de  $\delta_{\bar{\tau}}$  et  $\delta_{\bar{\alpha}}$  sont choisies de façon à ce que les vraies valeurs des paramètres inconnues soient incluses dans les intervalles locaux  $D_{\hat{\tau}_q^{(0)}} = [\hat{\tau}_q^{(0)} - 0.2T, \hat{\tau}_q^{(0)} + 0.2T]$  et  $D_{\hat{\alpha}_q^{(0)}} = [\hat{\alpha}_q^{(0)} - 0.2^\circ, \hat{\alpha}_q^{(0)} + 0.2^\circ]$ . Ceci est dû au fait que  $|\hat{\tau}_q^{(0)} - \bar{\tau}_q| \leq 0.1T$  et  $|\hat{\alpha}_q^{(0)} - \bar{\alpha}_q| \leq 0.1^\circ$ . Ainsi, on s'assure du fait qu'une partie des  $R_0 = 20000$  réalisations sont effectivement générées aux alentours des vrais délais et angles comme l'exige le concept IS. Toutefois, on fait face à une très grande complexité due au recours à un nombre de réalisations aussi important. Dans le but de réduire cette complexité, on exécute l'algorithme en deux étapes<sup>4</sup> avec des résolutions différentes. À chaque étape, on utilise un nombre réduit de réalisations dans des intervalles plus rétrécis aux alentours des paramètres à estimer.

- ÉTAPE I : Générer  $R_1 \ll R_0$  réalisations,  $\{\tau_q^{(r)}\}_{r=1}^{R_1}$  et  $\{\alpha_q^{(r)}\}_{r=1}^{R_1}$ , dans les intervalles locaux  $D_{\hat{\tau}_q^{(0)}}$  et  $D_{\hat{\alpha}_q^{(0)}}$ . Par la suite obtenir les estimées  $\hat{\tau}_q$  et  $\hat{\alpha}_q$  tel que mentionné dans (2.5.59) et (2.5.60).
- ÉTAPE II : Générer, à nouveau,  $R_2 \ll R_0$  nouvelles réalisations  $\{\tau'_q{}^{(r)}\}_{r=1}^{R_2}$  et  $\{\alpha'_q{}^{(r)}\}_{r=1}^{R_2}$  incluses dans des intervalles plus rétrécis et centrés autour des estimées  $\hat{\tau}_q$  et  $\hat{\alpha}_q$ . Ces derniers sont déjà acquis à l'«ÉTAPE I», idem,  $D'_{\hat{\tau}_q} = [\hat{\tau}_q - \delta'_{\bar{\tau}}, \hat{\tau}_q + \delta'_{\bar{\tau}}]$  et  $D'_{\hat{\alpha}_q} = [\hat{\alpha}_q - \delta'_{\bar{\alpha}}, \hat{\alpha}_q + \delta'_{\bar{\alpha}}]$  avec  $\delta'_{\bar{\tau}} = 0.01T$  et  $\delta'_{\bar{\alpha}} = 0.02^\circ$ . Par la suite, on calcule les MLEs des AoAs en utilisant les nouvelles réalisations des angles,  $\{\boldsymbol{\alpha}'^{(r)} = [\alpha'_{1}{}^{(r)}, \alpha'_{2}{}^{(r)}, \dots, \alpha'_{\bar{Q}}{}^{(r)}]\}_{r=1}^{R_2}$ , et les estimées des délais,  $\hat{\boldsymbol{\tau}} = [\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_{\bar{Q}}]^T$ , obtenues à l'«ÉTAPE I». Les nouvelles estimées sont calculées à partir de l'expression suivante :

$$\hat{\alpha}_{q,\text{MLE}} = \frac{1}{2} \angle \left[ \sum_{r=1}^{R_2} \bar{\eta}(\boldsymbol{\alpha}'^{(r)}, \hat{\boldsymbol{\tau}}) e^{j(2\alpha'_q{}^{(r)} - \pi)} \right]. \quad (2.5.65)$$

On utilise les estimées ML des AoAs,  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MLE}} = [\hat{\alpha}_{1,\text{MLE}}, \hat{\alpha}_{2,\text{MLE}}, \dots, \hat{\alpha}_{\bar{Q},\text{MLE}}]^T$ , obtenues dans (2.5.65) avec les réalisations,  $\{\boldsymbol{\tau}'^{(r)} = [\tau'_{1}{}^{(r)}, \tau'_{2}{}^{(r)}, \dots, \tau'_{\bar{Q}}{}^{(r)}]\}_{r=1}^{R_2}$ ,

---

<sup>4</sup>L'extension à une exécution multi-résolution à  $N$  étapes peut se faire en suivant le même principe.



pour trouver les estimées finales des délais de propagation selon l'expression suivante :

$$\widehat{\tau}_{q, \text{MLE}} = \tau_{\max} \left( \frac{1}{2\pi} \angle \left[ \sum_{r=1}^{R_2} \bar{\eta}(\boldsymbol{\tau}'^{(r)}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MLE}}) e^{j2\pi \left( \frac{\tau_q^{(r)}}{\tau_{\max}} - \frac{1}{2} \right)} \right] + \frac{1}{2} \right). \quad (2.5.66)$$

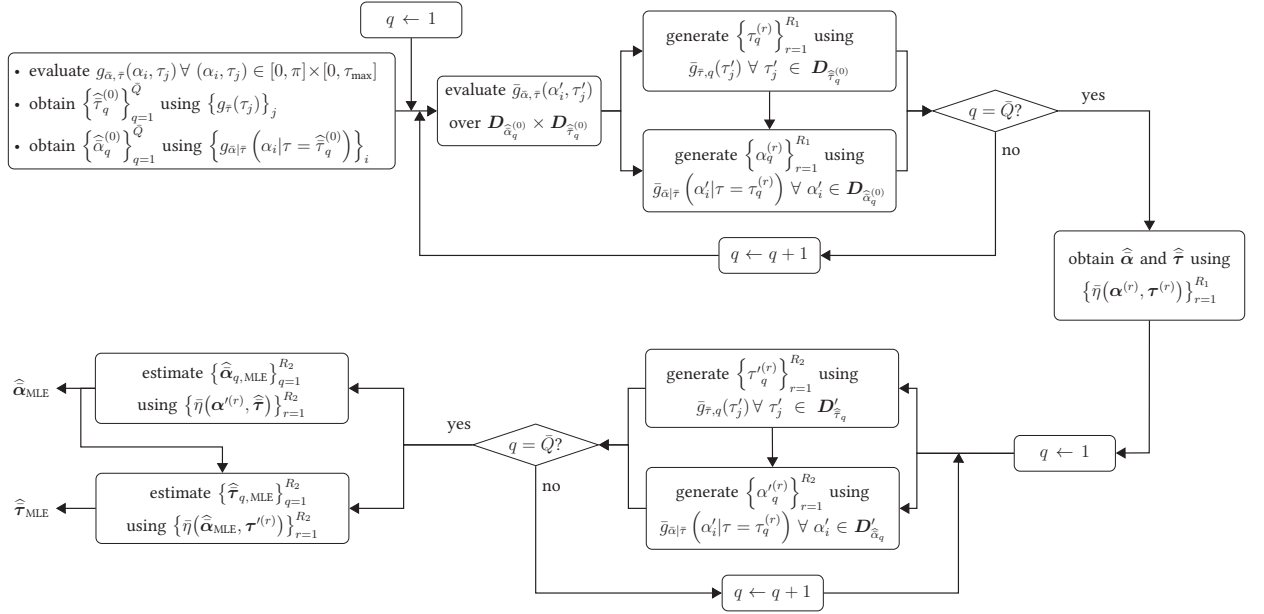


FIGURE 2.4 : Le diagramme de la nouvelle technique basée sur le concept IS.

Toutes les étapes d'implémentation de notre algorithme (incluant les étapes décrites ci-dessus) figurent dans l'organigramme de la Fig. 2.4. Pour finir, on mentionne que les valeurs des délais et des angles générées ne sont pas limitées par la contrainte de précision de la grille d'évaluation. Ceci est dû à l'interpolation linéaire qu'on a déjà présentée à l'“ÉTAPE 4” et à l'“ÉTAPE 6”. Ainsi, contrairement aux autres algorithmes qui souffrent de problèmes liés à la présence des vrais paramètres hors de la grille d'évaluation, notre algorithme permet de contourner ce problème et les estimées ML dans (2.5.65) et (2.5.66) ne sont pas obligées d'avoir des valeurs des points exacts de la grille.

## 2.6 Estimation du nombre de trajets

Toutes les techniques JADE existantes, y compris la nôtre, nécessitent une connaissance *a priori* du nombre de trajets  $\bar{Q}$ . En pratique, ce paramètre est inconnu et doit être estimé avant même de passer à l'acquisition des AoAs et des délais. Dans cette section, on propose une approche heuristique permettant de fournir une estimation exacte de  $\bar{Q}$  à des SNRs positifs. Comme on le montrera par la suite, cette approche est intrinsèque à l'algorithme IS et n'entraîne presque pas de complexité additionnelle. En fait, cette approche repose sur le fait que le periodogramme est sparse, autant que la pdf marginale des délais de propagation  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau_i)$ , figurant dans la Fig. 2.3(b). En effet, avec un choix judicieux du paramètre  $\rho_1$ , il est possible de réduire l'amplitude des lobes secondaires qui sont dus à la contribution du bruit. Ainsi, on obtient une pseudo-pdf dont l'énergie est presque totalement concentrée aux alentours des lobes principaux correspondant aux vrais délais. Après avoir évalué  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau_i)$  dans (2.5.54) sur  $[0, \tau_{\max}]$ , la technique peut se résumer en deux étapes principales :

1. ÉTAPE 1 : Extraire les points,  $\{\overset{\circ}{\tau}_q\}_q^{Q_{\text{tot.}}}$ , qui correspondent aux maxima de tous les pics dans  $\{\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau_i) \forall \tau_i \in [0, \tau_{\max}]\}$  où  $Q_{\text{tot.}}$  est le nombre total des maxima. Notez bien que  $Q_{\text{tot.}}$  est toujours supérieur à  $\bar{Q}$  à cause des lobes secondaires.
2. ÉTAPE 2 : Arranger dans un ordre décroissant les valeurs suivantes  $\{|\bar{g}_{\bar{\tau}}(\overset{\circ}{\tau}_q)|^2\}_q^{Q_{\text{tot.}}}$  qui correspondent à  $\{\overset{\circ}{\tau}_q\}_q^{Q_{\text{tot.}}}$ . Par la suite, obtenir une estimée  $\hat{Q}$  (pour le nombre de trajets) comme étant le premier nombre de maxima,  $Q$ , auquel la somme des fractions d'énergie dépasse un certain seuil, idem :

$$\rho(Q) = \frac{\sum_q^Q |\bar{g}_{\bar{\tau}}(\overset{\circ}{\tau}_q)|^2}{\sum_q^{Q_{\text{tot.}}} |\bar{g}_{\bar{\tau}}(\overset{\circ}{\tau}_q)|^2} \geq \kappa, \quad (2.6.67)$$

$$\rho(Q-1) = \frac{\sum_q^{Q-1} |\bar{g}_{\bar{\tau}}(\overset{\circ}{\tau}_q)|^2}{\sum_q^{Q_{\text{tot.}}} |\bar{g}_{\bar{\tau}}(\overset{\circ}{\tau}_q)|^2} < \kappa, \quad (2.6.68)$$

où  $\kappa$  est un seuil qui peut être prédéterminé avant l'exécution de l'algorithme.

Tout d'abord, on doit souligner le fait que la procédure de détermination du seuil  $\kappa$  ne peut pas être appliquée à d'autres algorithmes vu qu'aucun de ces algorithmes

ne révèle un quelconque caractère sparse comme celui de la pseudo-pdf de notre algorithme. Ces algorithmes sont donc obligés de faire appel à des méthodes de détection de signaux traditionnelles comme celle décrite dans [41] dans le but d'estimer le nombre de trajets  $\bar{Q}$ .

Comme on l'a déjà mentionné, le seuil  $\kappa$  peut être optimisé avant l'exécution de l'algorithme afin d'obtenir la plus faible erreur d'estimation. Pour atteindre cet objectif, on procède à des simulations Monte-Carlo pour toutes les valeurs  $1 \leq Q \leq Q_{\text{tot.}}$ , pendant lesquelles on évalue la moyenne du ratio mentionné dans (2.6.67), et qui est notée par :

$$\bar{\rho}(Q) \triangleq \mathbb{E}\{\rho(Q)\}. \quad (2.6.69)$$

Ensuite, la meilleure valeur de  $\kappa$  est sélectionnée parmi toutes ces valeurs moyennes comme le suggère la Fig. 2.5 (notez bien que la Fig. 2.5(b) présente un zoom de la Fig. 2.5(a) aux alentours de la région d'intérêt). Ces résultats sont obtenus avec 10000 exécutions Monte-Carlo pour chaque  $\bar{Q}$  à une valeur du SNR de -10 dB.

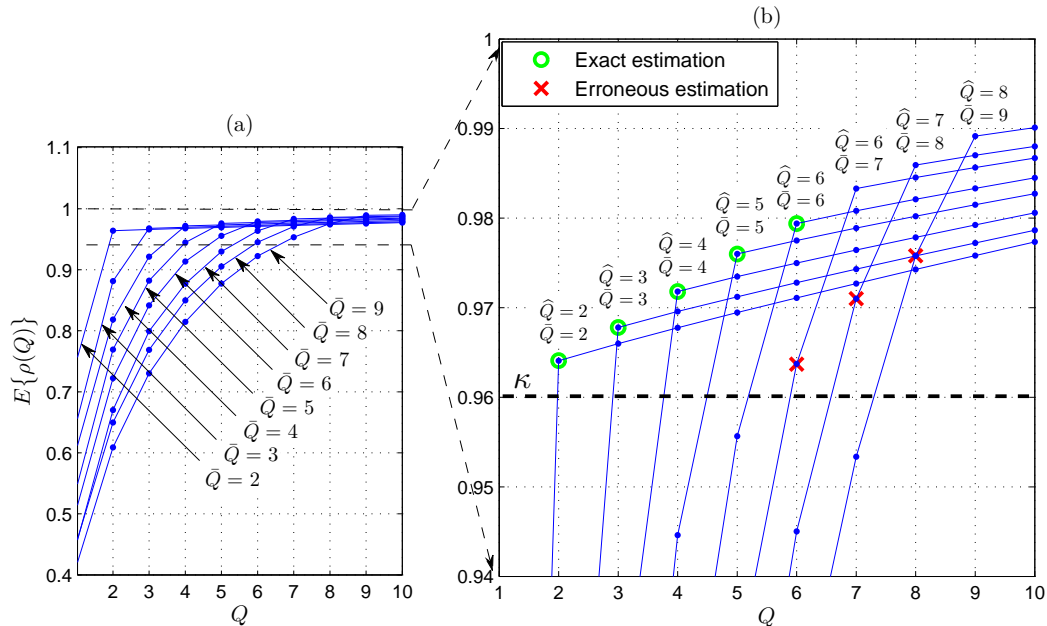


FIGURE 2.5 : La valeur moyenne de  $\rho(Q)$  pour différentes valeurs de  $\bar{Q}$ , SNR = -10 dB, ULA avec  $P = 5$ .

Comme le suggère la Fig. 2.5(b), pour une valeur extrêmement faible du SNR,  $\kappa = 0.96$  est un choix approprié du seuil. En fait, avec un tel seuil et pour  $\bar{Q} = 2$ , on peut voir que la première valeur de  $Q$  à laquelle  $\rho(Q)$  dépasse  $\kappa = 0.96$  (en moyenne) est  $Q = 2$ , idem, “estimation exacte”. On observe la même chose pour  $\bar{Q} = 3, 4, 5$  et 6 comme le montre la Fig. 2.5(b). Cependant, pour  $\bar{Q} = 7$ , la première valeur qui vérifie (2.6.67) en moyenne est  $Q = 6$ , idem, “sous-estimation” et la même remarque tient aussi pour  $\bar{Q} = 8$  et  $\bar{Q} = 9$ .

TABLE 2.1 : LES PROBABILITÉS DE LA SOUS-ESTIMATION, DE LA SUR-ESTIMATION, ET DE L’ESTIMATION EXACTE DU NOMBRE DE TRAJETS ( $\bar{Q}$ )

	under-estim. (%)	over-estim. (%)	exact estim. (%)	under-estim. (%)	over-estim. (%)	exact estim. (%)	under-estim. (%)	over-estim. (%)	exact estim. (%)	under-estim. (%)	over-estim. (%)	exact estim. (%)	under-estim. (%)	over-estim. (%)	exact estim. (%)
	-10			-5			0			15			30		
2	0.80	0.50	<b>98.70</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>
3	5.30	0.80	<b>93.90</b>	0.10	0	<b>99.90</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>
4	5.65	5.45	<b>88.90</b>	0.45	0	<b>99.55</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>
5	15.25	4.85	<b>79.90</b>	3.10	0.10	<b>96.80</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>
6	18.50	3.85	<b>77.65</b>	2.45	0.05	<b>97.50</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>
7	10.60	15.90	<b>73.50</b>	1.25	0.50	<b>98.25</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>
8	9.00	21.85	<b>69.15</b>	1.30	1.60	<b>97.10</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>
9	5.10	38.60	<b>56.30</b>	0.75	5.30	<b>93.95</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>	0	0	<b>100</b>
Average of exact estim. (%) over all the values of $\bar{Q}$	<b>79.75</b>			<b>97.88</b>			<b>100</b>			<b>100</b>			<b>100</b>		

Au Tableau I, on liste les probabilités de “sous-estimation”, “sur-estimation”, et “estimation exacte”, pour différentes valeurs du SNR en utilisant 10000 exécutions Monte-Carlo et le même seuil  $\kappa = 0.96$ . La dernière ligne de ce tableau montre la probabilité moyenne d’“estimation exacte” sur toutes les valeurs de  $\bar{Q}$  considérées. On voit bien que la nouvelle approche donne une “estimation exacte” dans 80% et 98% des cas à des valeurs du SNR de -10 dB et de -5 dB, respectivement. Cependant pour des valeurs positives du SNR, l’approche réussit toujours à estimer exactement  $\bar{Q}$  (idem 100% d’“estimation exacte”).

En se basant sur le caractère sparse du périodogramme, l’algorithme a été implémenté sur plusieurs étages. Une telle implémentation requiert une évaluation du

périodogramme dans des intervalles locaux ainsi qu'un nombre réduit de réalisations générées. Ceci permet, vers la fin, de réduire la complexité tout en conservant les mêmes performances. Il faut noter aussi que l'ajout de la technique d'estimation du nombre de trajets permet à l'algorithme d'opérer de manière indépendante sans aucun coût significatif en terme de complexité.

# Chapitre 3

## Résultats de simulations

Dans ce chapitre, on présente les performances de notre algorithme en termes de la racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) qui est défini pour chaque  $q^{\text{ème}}$  délai et AoA comme suit :

$$\begin{aligned}\text{RMSE}(T) &= \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{M_c} (\hat{\tau}_{q, \text{MLE}}^{[m]} - \bar{\tau}_q)^2}{M_c}}, \\ \text{RMSE}(\text{deg.}) &= \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{M_c} (\hat{\alpha}_{q, \text{MLE}}^{[m]} - \bar{\alpha}_q)^2}{M_c}},\end{aligned}$$

où  $M_c = 5000$  est le nombre total des exécutions Monte-Carlo et  $\hat{\tau}_{q, \text{MLE}}^{[m]}$  et  $\hat{\alpha}_{q, \text{MLE}}^{[m]}$  sont, respectivement, les estimées de  $\bar{\tau}_q$  et  $\bar{\alpha}_q$  durant la  $m^{\text{ème}}$  exécution Monte-Carlo. Tout d'abord on fournit quelques astuces concernant le choix des paramètres  $\rho_0$  et  $\rho_1$ . En effet, contrairement à  $\rho_0$ , le paramètre  $\rho_1$  doit être choisi soigneusement.

- Choix de  $\rho_0$  : Comme le propose le théorème de Pincus, la valeur de ce paramètre doit être infini pour satisfaire la limite à l'infini dans (2.3.12). En pratique, on est contraint à travailler avec une valeur finie mais suffisamment élevée et qui peut être optimisée avant l'exécution de l'algorithme. En fait, on remarque pour des valeurs faibles de  $\rho_0$  que l'algorithme fournit des performances médiocres comme on peut le voir dans la Fig. 3.1. En augmentant la valeur de  $\rho_0$ , les performances de l'algorithme s'améliorent de façon remarquable. On remarque également que les performances de l'estimateur se stabilisent à partir d'une certaine valeur  $\bar{\rho}_0$ , signifiant que toute valeur  $\rho_0 > \bar{\rho}_0$

peut être sélectionnée. Comme le montre la Fig. 3.1, le seuil minimum de  $\rho_0$  est  $\bar{\rho}_0 = 300$  à partir duquel l'estimateur fournit toujours les mêmes performances en termes des délais de propagation et angles d'arrivée (idem, proche de la CRLB).

- Choix de  $\rho_1$  : Le rôle principal de ce paramètre est de contrôler l'ouverture des lobes principaux qui apparaissent aux alentours des vrais délais et angles (inconnus),  $\{\bar{\alpha}_q\}_{q=1}^{\bar{Q}}$  et  $\{\bar{\tau}_q\}_{q=1}^{\bar{Q}}$  dans  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)$  et  $\bar{g}_{\bar{\alpha}|\bar{\tau}}(\alpha|\tau)$ , respectivement. En fait, prendre une valeur élevée de  $\rho_1$  rétrécit sévèrement l'ouverture des lobes principaux dans  $\bar{g}_{\bar{\tau}}(\tau)$ , ce qui peut rendre les délais à l'extérieur de ces lobes. Puisque les réalisations de chaque  $q^{\text{ème}}$  délai,  $\bar{\tau}_q$ , sont générées à l'intérieur du lobe principal, elles seront toutes décalées de  $\bar{\tau}_q$  résultant en un biais inévitable. Alors contrairement à  $\rho_0$ , il y a un seuil maximal,  $\bar{\rho}_1$ , qui ne doit pas être dépassé par  $\rho_1$  comme le montre la Fig. 3.2. On remarque dans cette figure que les performances de l'estimateur se détériorent (surtout des délais) si on dépasse le seuil maximal  $\bar{\rho}_1 = 40$ .

Dans ce qui suit, on compare notre algorithme avec les deux méthodes suivantes SI-JADE [26] et TST-MUSIC [24], ainsi que les deux seuls estimateurs ML qui sont IML [27] et SAGE [28]. Tous ces estimateurs seront aussi comparés à la CRLB [26]. Cette dernière est considérée comme étant la référence pour des meilleures performances à atteindre. Dans nos simulations, on considère  $M = 128$  échantillons reçus à travers un réseau ULA constitué de  $P = 5$  antennes espacées l'une de l'autre d'une demi longueur d'onde. Le paramètre  $\rho_1$  est fixé à  $\rho_1 = 4$  et  $\rho_0$  (qui doit être suffisamment élevé) est fixé à  $\rho_0 = 8000$ . On précise également que  $R_1 = R_2 = 1000$  réalisations générées (durant l'“ÉTAPE I” et l'“ÉTAPE II”) fournissent des estimées suffisamment précises des délais et des angles.

On commence nos simulations avec une situation *confortable* pour tous les estimateurs avec des trajets suffisamment espacés dans les domaines temporel et spatial.

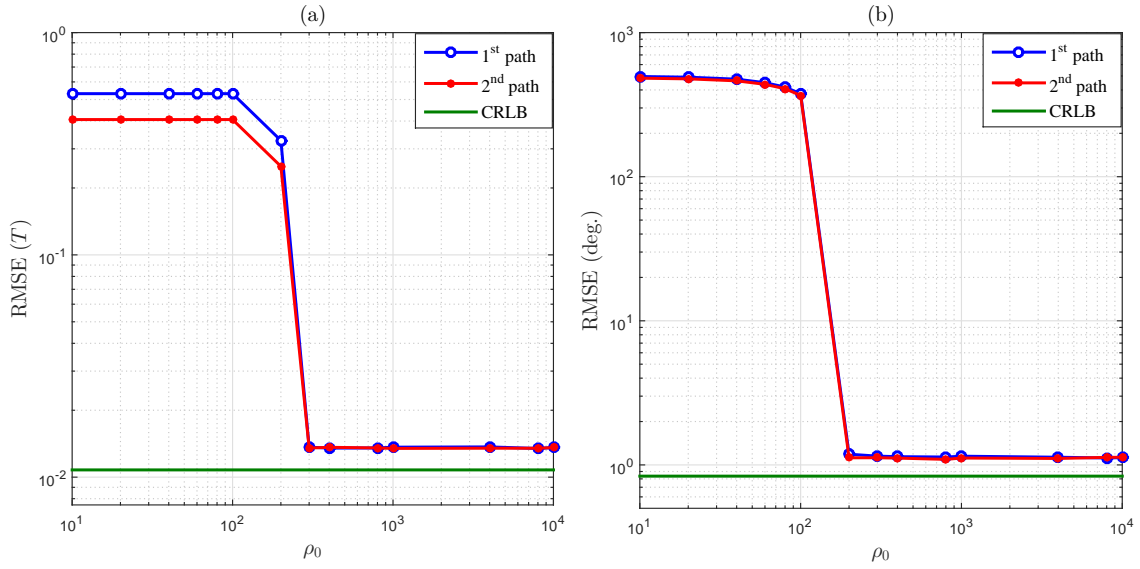


FIGURE 3.1 : L'impact du paramètre,  $\rho_0$ , sur la performance de la technique proposée pour  $M = 128$ ,  $\text{SNR} = -10$  dB : (a) TDs, et (b) AoAs.

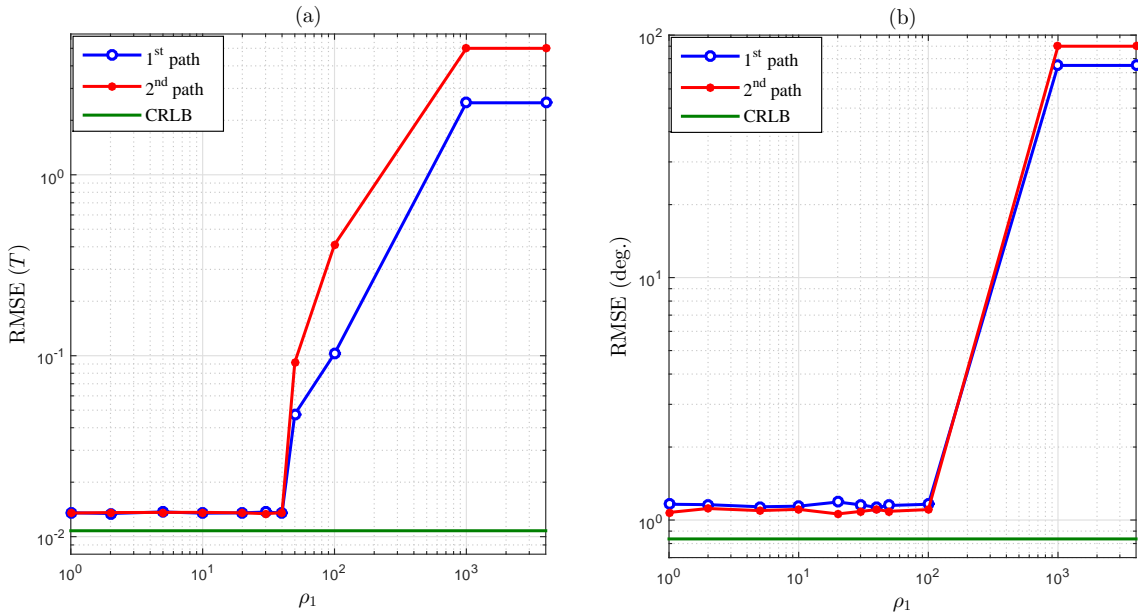


FIGURE 3.2 : L'impact du paramètre,  $\rho_1$ , sur la performance de la technique proposée pour  $M = 128$ ,  $\text{SNR} = -10$  dB : (a) TDs, et (b) AoAs.



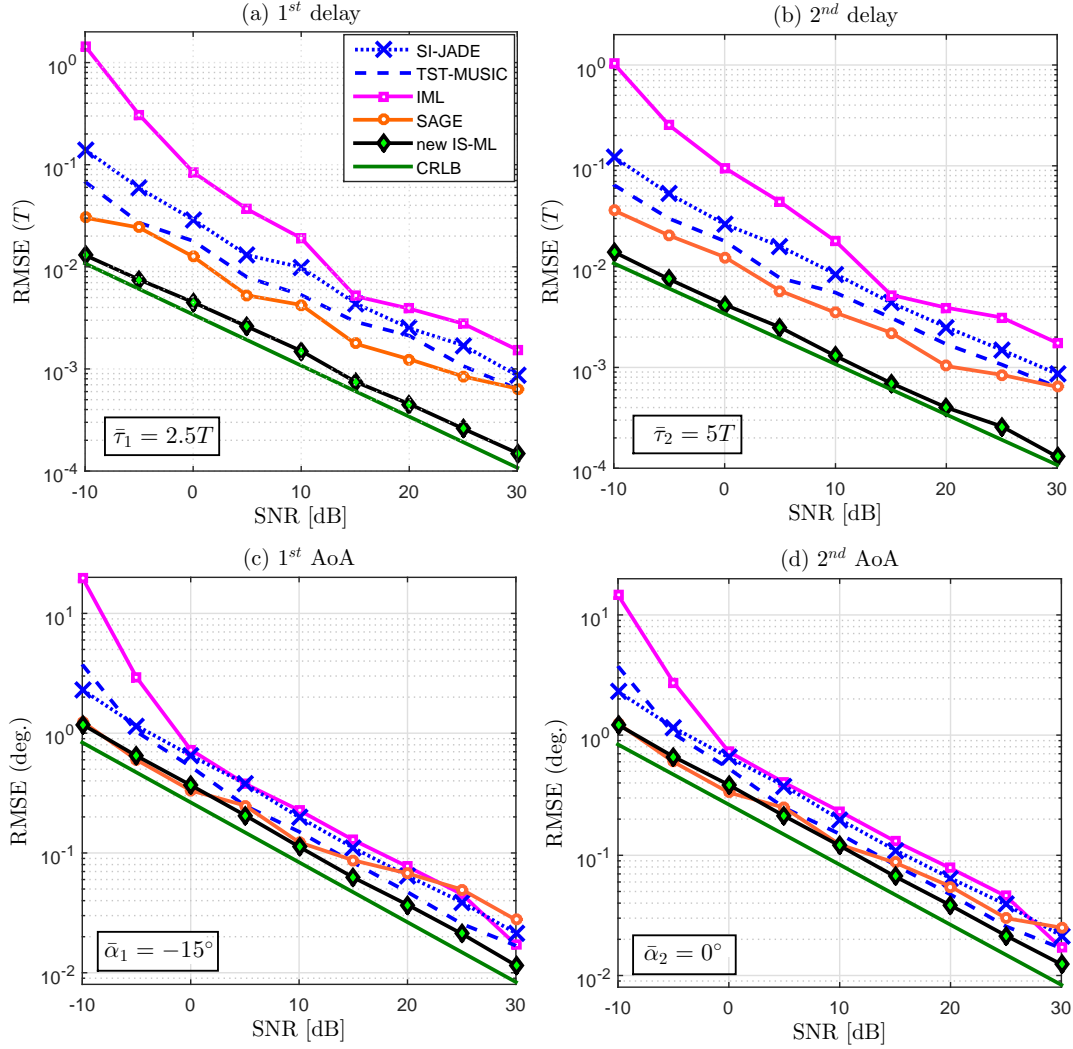


FIGURE 3.3 : RMSE pour les TDs et AoAs avec  $M = 128$  échantillons pour une séparation angulaire et temporelle *large*.

Les résultats sont présentés dans la Fig. 3.3 où le signal transmis est un “chirp” linéaire avec  $f_0 = 0$  Hz et  $f_{\max} = 1$  MHz (cf. chapitre II). Le signal reçu est échantillonné au taux de Nyquist, idem,  $T_s = 1/2f_{\max}$ . Par ailleurs, on considère deux trajets de même puissance localisés aux directions  $\bar{\alpha}_1 = -15^\circ$  et  $\bar{\alpha}_2 = 0^\circ$  avec des délais de propagation  $\bar{\tau}_1 = 2.5T$  et  $\bar{\tau}_2 = 5T$ , respectivement, où  $T = T_s$ . On voit bien que notre algorithme surpasse toutes les autres techniques, surtout en termes d’estimation des délais pour toutes les valeurs du SNR. On remarque également que l’estimateur se rapproche de la CRLB même à des valeurs très faibles du SNR. Les algorithmes MUSIC et ESPRIT ne peuvent pas atteindre la CRLB dû à une esti-

mation inexacte de la matrice de covariance. À de telles séparations, SAGE permet d'obtenir une meilleure estimation des angles que notre technique, cependant à un coût en complexité 10 fois plus grand comme on le verra vers la fin de ce chapitre. L'autre solution ML (idem, IML) est affectée par l'amplification du bruit à des valeurs faibles du SNR puisque une division dans le domaine fréquentiel du signal reçu par  $s(\omega_m)$  est requise. Pour éviter ce problème, la solution proposée par les auteurs dans [27] était de choisir seulement les fréquences  $\{\omega_m\}_m$  pour lesquelles  $\{|s(\omega_m)|^2\}_m$  est significativement supérieure à la puissance du bruit  $\sigma^2$ . Le seuil choisi par les auteurs était de 30 dB, idem, seulement les observations,  $\{\mathbf{x}(\omega_m)\}_m$ , pour lesquelles  $10 \log_{10} (|s(\omega_m)|^2/\sigma^2) \geq 30$  dB seront exploitées durant le processus d'estimation. Évidemment, si le SNR diminue (idem,  $\sigma^2$  augmente), le nombre d'observations utiles diminue affectant ainsi les performances de l'algorithme IML.

Dans le reste des simulations, le signal transmis est désormais un bloc de  $K = 64$  symboles BPSK – chacun de période  $T$  — qui sont convolués par un filtre en cosinus surélevé avec un facteur d'excès de bande passante  $\Delta f = 0.3$ . Dans ce cas,  $T_s = T/2$  est la période d'échantillonnage la plus large qui vérifie le taux de Nyquist pour toutes les valeurs d'excès de bande passante (facteurs roll-off). On évalue par la suite les performances de tous les estimateurs dans des scénarios plus adverses où les trajets ont des angles ou des délais étroitement espacés. On considère alors dans la Fig. 3.4 trois trajets dont les deux premiers sont légèrement espacés en termes de délais et dont les deux derniers sont faiblement séparés en termes d'angles d'arrivés. Cette configuration est définie comme suit : les trajets sont localisés aux directions  $\bar{\alpha}_1 = -3^\circ$ ,  $\bar{\alpha}_2 = 0^\circ$  et  $\bar{\alpha}_3 = 0.5^\circ$  avec des délais respectifs  $\bar{\tau}_1 = 2.25T$ ,  $\bar{\tau}_2 = 2.5T$  et  $\bar{\tau}_3 = 5T$ .

On remarque que TST-MUSIC se comporte de la même façon que dans le premier scénario *confortable* de la Fig. 3.3. Ceci est tout à fait naturel vu que cet algorithme a été conçu pour ce genre de situations [24]. En effet, ce dernier fait appel à la technique de MUSIC traditionnelle à plusieurs reprises en alternant l'estimation entre les domaines temporel et spatial dans le but d'utiliser la séparation angulaire (respectivement celle des délais) pour réussir à distinguer les délais qui sont

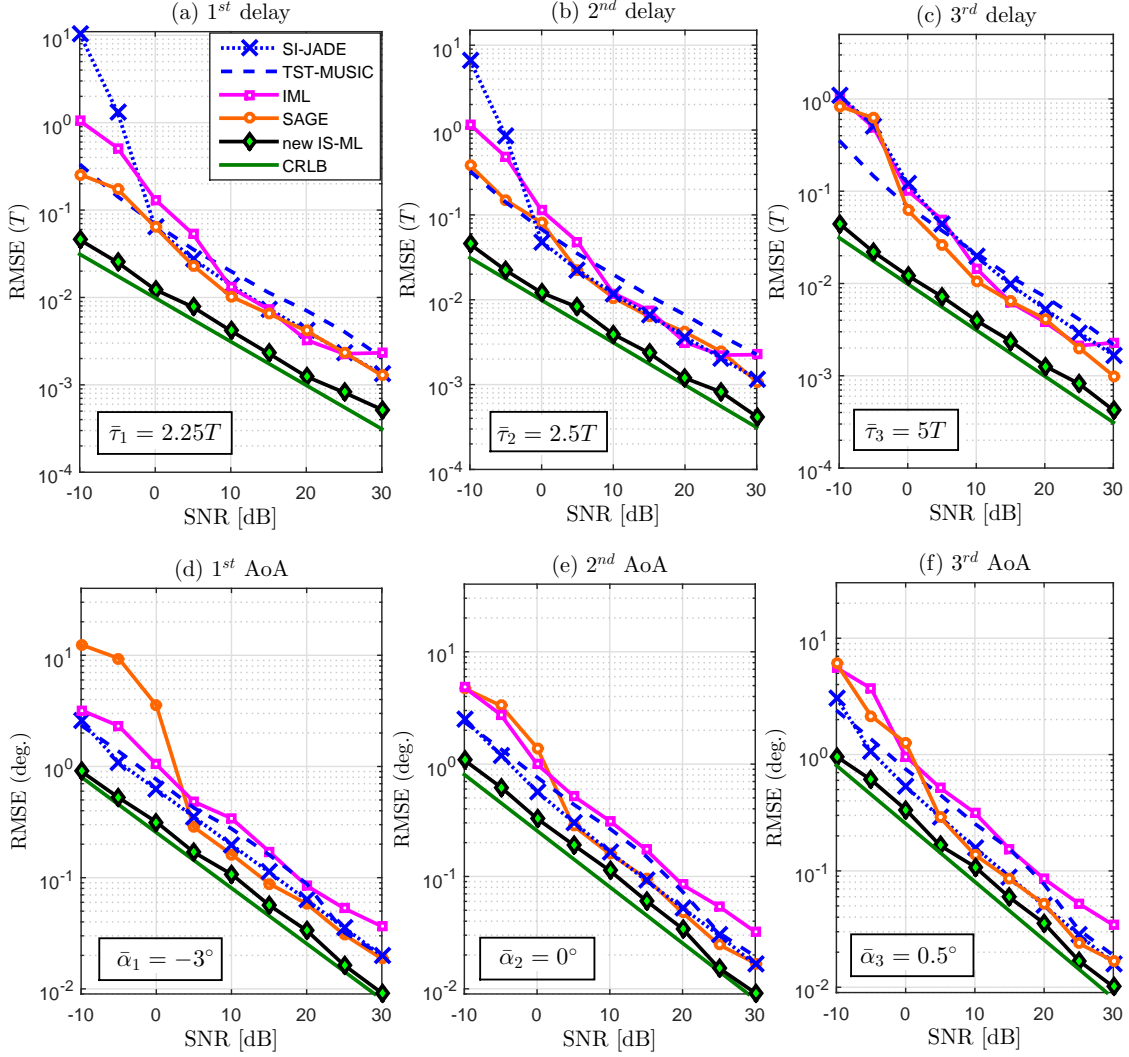


FIGURE 3.4 : RMSE pour les TDs et AoAs avec  $M = 128$  pour des trajets avec une séparation angulaire légère et une séparation large des délais et vice versa.

faiblement espacés (respectivement les angles faiblement espacés). Cependant IML, SAGE et SI-JADE observent une détérioration de leurs performances à de faibles SNRs. L'amélioration des performances de IML en termes des AoAs par rapport aux performances de notre technique, comme on peut le voir dans la Fig. 3.3, est due à l'amélioration du contenu spectral,  $s(\omega)$ , du cosinus surélevé comparé à celui du signal "chirp". En revanche, l'estimateur IS n'est pas affecté par la nature du signal transmis et garde les meilleures performances sur toute la plage du SNR.

La supériorité de la technique IS par rapport aux autres algorithmes est plus apprée-

ciée dans les scénarios les plus adverses où les trajets sont faiblement espacés à la fois dans les deux domaines spatial et temporel. En effet, on considère dans la Fig. 3.5 deux trajets faiblement espacés dans les domaines spatial et temporel avec une séparation angulaire de  $\Delta\bar{\alpha} = 0.5^\circ$  et une séparation des délais de  $\Delta\bar{\tau} = 0.25T$ .

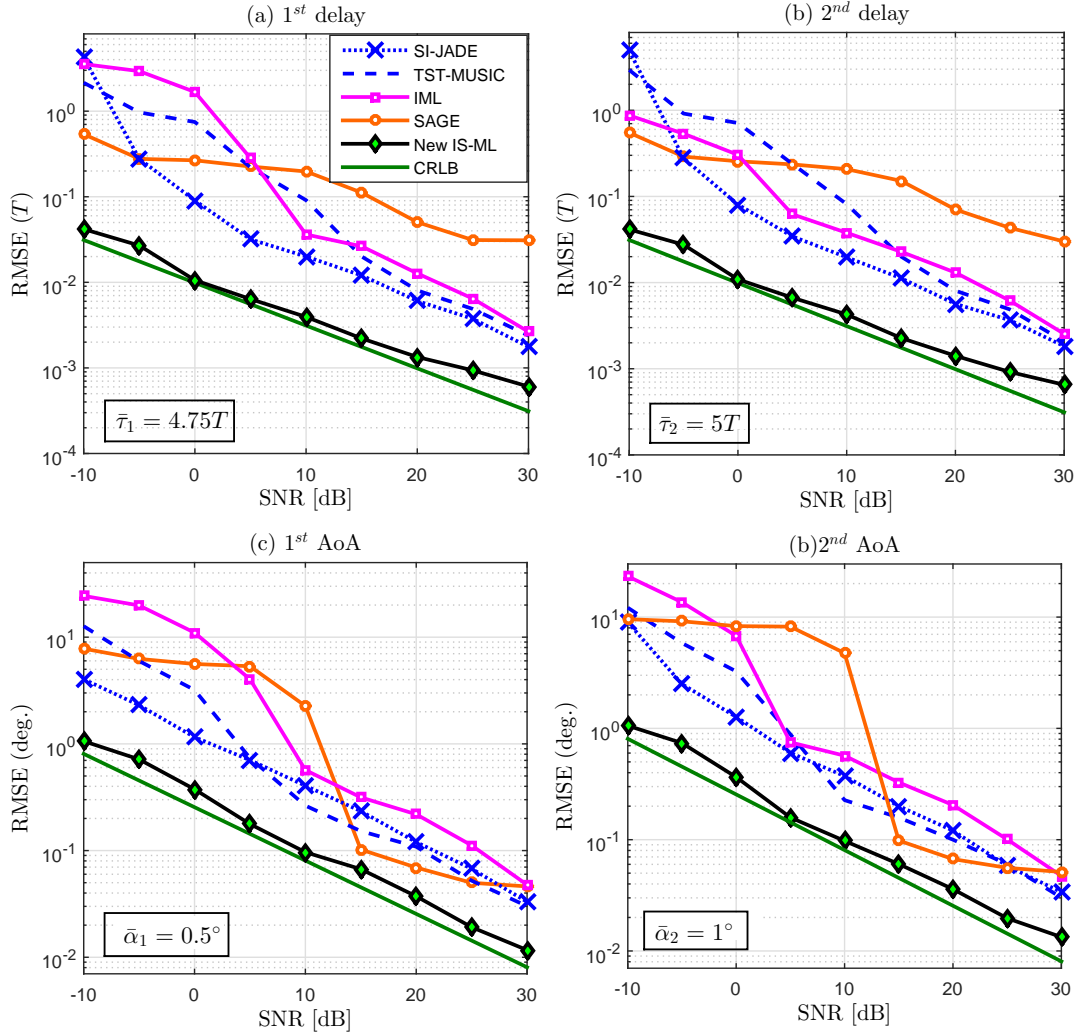


FIGURE 3.5 : RMSE pour les TDs et AoAs avec  $M = 128$  échantillons pour une séparation angulaire et temporelle *légère*.

Dans ce cas, les performances de toutes les techniques existantes sont sévèrement affectées sur toute la plage du SNR. Par contre, la technique IS est capable d'atteindre la CRLB même à de faibles valeurs du SNR permettant ainsi de mettre en valeur sa robustesse et ses capacités de super-résolution. On rappelle également que les

deux estimateurs ML existants sont de nature itérative et que leurs performances dépendent des estimées initiales qui sont obtenues à l'aide d'autres techniques sous-optimales (cf. [28] et [27] pour plus de détails). Ces techniques ne sont pas capables de fournir des estimés initiaux fiables dans des scénarios caractérisés par des trajets faiblement séparés et/ou par de faibles valeurs du SNR. Ainsi, ces deux algorithmes itératifs convergent vers des maxima locaux de la LLF. Par contre, notre technique est de nature non-itérative et atteint de ce fait le maximum global dans tous les scénarios.

On compare également notre algorithme aux autres techniques en termes de complexité. On trace dans les Fig. 3.6(a) and (b) le nombre total d'opérations (idem,  $+$ ,  $\times$ ,  $\div$ ) requis par chaque technique en fonction du nombre de trajets,  $\bar{Q}$ , et du nombre d'échantillons,  $M$ .

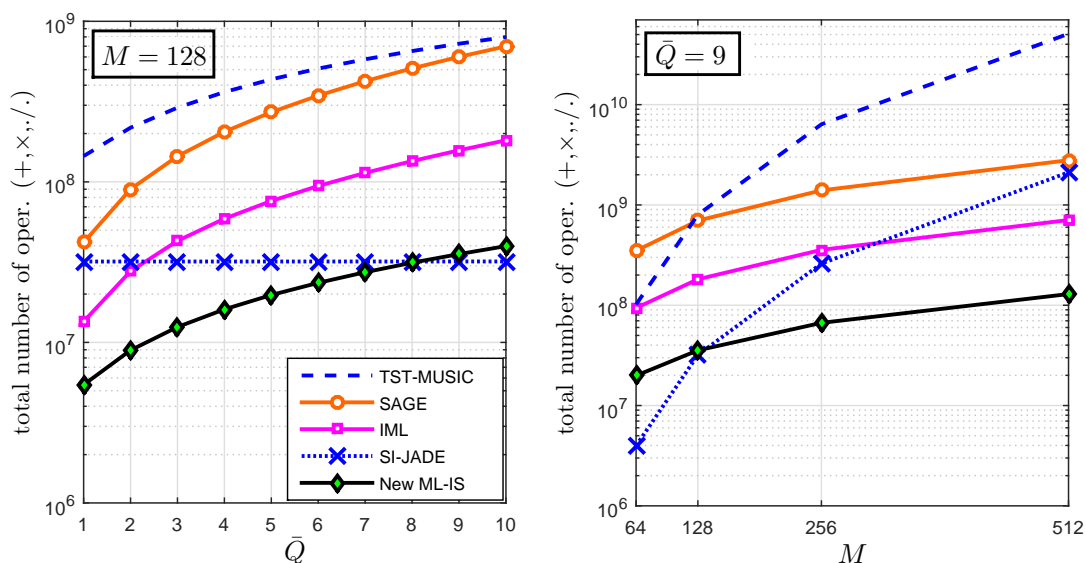


FIGURE 3.6 : Nombre total des opérations en fonction du : (a) nombre de trajets  $\bar{Q}$  pour  $M = 128$  et (b) nombre d'échantillons  $M$  pour  $\bar{Q} = 9$ , et  $P = 5$ .

D'après la Fig. 3.6(a), la technique IS permet un gain de calcul énorme par rapport à TST-MUSIC et les deux algorithmes itératifs. Par exemple, avec la même configuration des Figs. 3.3 et 3.5 (idem,  $P = 5$ ,  $M = 128$  et  $\bar{Q} = 2$ ), on peut voir clairement à partir de la Fig. 3.6(a) que IML, SAGE et TST-MUSIC sont, respectivement, 3,

10 et 22 fois plus complexes que la technique IS. La complexité de TST-MUSIC est affectée par l'application de l'algorithme MUSIC à plusieurs reprises. Avec la même configuration, la technique IS est 3 fois moins complexe que SI-JADE. Cependant, cette complexité est presque invariante en fonction de  $\bar{Q}$  et devient un peu moins complexe que notre algorithme pour  $\bar{Q} = 8$  et  $\bar{Q} = 9$ . Cependant, SI-JADE perd son avantage quand le nombre d'échantillons,  $M$ , augmente. Typiquement, pour  $M = 512$  et  $\bar{Q} = 9$ , SI-JADE devient 15 fois plus complexe que la méthode IS.

# Chapitre 4

## Conclusion générale

Dans ce rapport, nous avons proposé une nouvelle technique non itérative et statistiquement efficace pour l'estimation conjointe des délais de propagation et des angles d'arrivée dans un environnement à trajets multiples. La nouvelle technique ML est basée sur le concept de l'échantillonnage préférentiel et garantit une optimalité globale. Typiquement, cette technique permet de résoudre des trajets avec des séparations de l'ordre de  $\Delta\bar{\alpha} = 0.5^\circ$  et  $\Delta\bar{\tau} = 0.25T$  et d'atteindre la CRLB même à des valeurs du SNR aussi faibles que -10 dB. En exploitant les caractéristiques intrinsèques de la pseudo-pdf, nous avons aussi proposé une nouvelle approche permettant l'estimation exacte du nombre de trajets sur une large plage du SNR. Les simulations montrent une claire supériorité en termes de performances et de complexité de notre nouvelle technique sur celles proposées dans la littérature.

# Appendices

## Appendice A : Preuve du LEMME 2

Grâce à la théorie du maximum de vraisemblance, parmi toutes les réalisations générées  $\{\boldsymbol{\alpha}^{(r)}\}_{r=1}^R$  et  $\{\boldsymbol{\tau}^{(r)}\}_{r=1}^R$ , la plus proche paire,  $\boldsymbol{\alpha}^{(r_0)}$  et  $\boldsymbol{\tau}^{(r_0)}$ , des vrais délais et angles (en termes de distance Euclidienne) est celle qui permet de maximiser la CLF. En d'autres termes, on a :

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r_0)}, \boldsymbol{\tau}^{(r_0)}) > \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}), \quad \text{pour } 1 \leq r \neq r_0 \leq R, \quad (\text{A.1})$$

où

$$r_0 = \underset{1 \leq r \leq R}{\operatorname{argmin}} \left( \|\boldsymbol{\alpha}^{(r)} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}^{(r)} - \bar{\boldsymbol{\tau}}\|^2 \right). \quad (\text{A.2})$$

Maintenant, on rappelle que  $\rho_0$  peut être choisi librement aussi élevé que possible. Ainsi, après avoir optimisé  $\rho_1$  selon la discussion faite précédemment, une valeur suffisamment élevée de  $\rho_0$  peut être choisie de manière à vérifier :

$$\rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \gg \rho_1 \sum_{q=1}^{\bar{Q}} I(\alpha_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) \quad \text{pour } 1 \leq r \neq r_0 \leq R. \quad (\text{A.3})$$

Notez bien que  $\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{x}^H \mathbf{D} (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \mathbf{x}$  est toujours strictement positive puisque  $\mathbf{D} (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H$  est une matrice définie positive et  $I(\alpha_q^{(r)}, \tau_q^{(r)})$  est également positif. Ainsi, un choix de  $\rho_0$  qui satisfait la condition dans (A.3) est toujours possible. Avec ce choix particulier de  $\rho_0$ , on a :

$$\rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \rho_1 \sum_{q=1}^{\bar{Q}} I(\alpha_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) \approx \rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}). \quad (\text{A.4})$$

Cependant, en utilisant (A.4) dans (2.5.64) et en rappelant (A.1), il en résulte que :

$$\bar{\eta}(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) = e^{\rho_0 \beta^{(r)}}, \quad (\text{A.5})$$



où

$$\beta^{(r)} \triangleq \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r_0)}, \boldsymbol{\tau}^{(r_0)}). \quad (\text{A.6})$$

Maintenant, puisqu'on a

$$\beta^{(r_0)} = \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r_0)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\alpha}^{(r_0)}, \boldsymbol{\tau}^{(r_0)}) = 0, \quad (\text{A.7})$$

à partir de (A.5), on peut conclure que :

$$\bar{\eta}(\boldsymbol{\alpha}^{(r_0)}, \boldsymbol{\tau}^{(r_0)}) = 1. \quad (\text{A.8})$$

Toutefois, dû à (A.1), on a :

$$\beta^{(r)} < 0, \quad \text{pour tout } r \neq r_0. \quad (\text{A.9})$$

Et puisque  $\rho_0 \gg 1$ , il en suit que :

$$\bar{\eta}(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) = e^{\rho_0 \beta^{(r)}} \approx 0, \quad \text{pour tout } r \neq r_0. \quad (\text{A.10})$$

Pour conclure, on a pour  $1 \leq r \leq R$  :

$$\bar{\eta}(\boldsymbol{\alpha}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } r = r_0 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Maintenant, en injectant (A.11) dans (2.5.59) et (2.5.60), les moyennes circulaires des délais et des angles sont obtenues comme suit :

$$\hat{\tau}_q = \tau_{\max} \left( \frac{1}{2\pi} \angle \left\{ e^{j2\pi \left( \frac{\tau_q^{(r_0)}}{\tau_{\max}} - \frac{1}{2} \right)} \right\} + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.12})$$

$$\hat{\alpha}_q = \frac{1}{2} \angle \left\{ e^{j(2\alpha_q^{(r)} - \pi)} \right\}. \quad (\text{A.13})$$

Ce qui signifie que :

$$\hat{\tau}_q = \tau_q^{(r_0)}, \quad q = 1, 2, \dots, \bar{Q} \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{\alpha}_q = \alpha_q^{(r_0)}, \quad q = 1, 2, \dots, \bar{Q}. \quad (\text{A.15})$$

En rappelant (A.2), il s'avère que les vecteurs de réalisations  $\boldsymbol{\tau}^{(r_0)} = [\tau_1^{(r_0)}, \tau_2^{(r_0)}, \dots, \tau_{\bar{Q}}^{(r_0)}]$  et  $\boldsymbol{\alpha}^{(r_0)} = [\alpha_1^{(r_0)}, \alpha_2^{(r_0)}, \dots, \alpha_{\bar{Q}}^{(r_0)}]$ , sélectionnées par la moyenne circulaire comme étant les estimées ML dans (A.14) et (A.15), minimisent la distance Euclidienne combinée par rapport aux vraies valeurs des délais et des angles. En d'autres termes, avec le bon choix de  $\rho_0$ , la moyenne circulaire réussit à sélectionner les meilleures réalisations des angles et des délais au lieu de faire seulement la moyenne linéaire.

# Bibliographie

- [1] F. Bellili, S. Ben Amor, S. Affes, and A. Samet, “A new importance-sampling ML estimator of time delays and angles of arrival in multipath environments”, in *Proc. of IEEE ICASSP*, pp. 4219-4223, 2014.
- [2] A. J. Van der Veen, “Algebraic methods for deterministic blind beamforming”, *Proc. IEEE*, vol. 86, no. 10, pp. 1987-2008, Oct. 1998.
- [3] J. T. Chen and Y. C. Wang, “Performance analysis of the parametric channel estimators for MLSE equalization in multipath channels with AWGN”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 3, pp. 393-396, Mar. 2001.
- [4] B. R. Phelan, E. H. Lenzing, R. M. Narayanan, “Source localization using unique characterizations of multipath propagation in an urban environment”, in *Proc. IEEE SAM.*, pp. 189-192, 2012.
- [5] P. Bahl and V. Padmanabhan, “RADAR : an in-building RF-based user location and tracking system”, in *Proc. IEEE INFOCOM.*, pp. 775-784, 2000.
- [6] O. Hilsenrath and M. Wax, “Radio transmitter location finding for wireless communication network service and management,” U.S. Patent 6 026 304, Feb. 15, 2000.
- [7] C. Nerguizian, C. Despins, and S. Affes, “Geolocation in mines with an impulse response fingerprinting technique and neural networks”, *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 5, no. 3, pp. 603-611, Mar. 2001.

- [8] S. Dayekh, S. Affes, N. Kandil and C. Nerguizian “Cooperative localization in mines using fingerprinting and neural networks”, in *Proc. IEEE WCNC*, pp. 1-6, 2010.
- [9] C. Nerguizian, C. Despins and S. Affes, “Method and system for indoor geolocation using an impulse response fingerprinting technique,” U.S. Patent 7630943 B2, Dec. 8, 2009.
- [10] E. Kupershtein, M. Wax, and I. Cohen, “Single-site emitter localization via multipath fingerprinting”, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 61, no.1, pp. 10-21, Jan. 2013.
- [11] A. Jaffe and M. Wax, “Single-site localization via maximum discrimination multipath fingerprinting”, *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 62, no.7, pp. 1718-1728, Apr. 2014.
- [12] P. Stoica and A. Nehorai, “Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation,” *IEEE Trans. Acoust., Speech and Sig. Process.*, vol. 38, no. 10, pp. 1783-1795, Oct. 1990.
- [13] H. Wang, S. Kay, and S. Saha, “An importance sampling maximum likelihood direction of arrival estimator”, *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 56, no. 10, pp. 5082-5092, Oct. 2008.
- [14] R. O. Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” *IEEE Trans. Antenn. Propagat.*, vol. 34, n. 3, pp. 276-280, Mar. 1986.
- [15] R. Roy and T. Kailath, “ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques”, *IEEE Trans. Acoust. Speech and Sig. Process.*, vol. 37, no. 7, pp. 984-995, Aug. 1989.
- [16] J. Li, P. Stoica, and Z. S. Liu, “Comparative study of IQML and MODE direction-of-arrival estimators,” *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 46, no. 1, pp. 149-160, Jan. 1998.

- [17] M. Viberg and B. Ottersten, "Sensor array processing based on subspace fitting," *IEEE Trans. Acoust., Speech and Sig. Process.*, vol. 39, no. 5 pp. 1110-1121, May 1991.
- [18] M. L. McCloud and L. L. Scharf, "A new subspace identification algorithm for high-resolution DOA estimation", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 50, no. 10, pp. 1382-1390, Oct. 2002.
- [19] J. J. Fuchs, "Multipath time-delay detection and estimation", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 47, no. 1, pp. 237-243, Jan. 1999.
- [20] T. G. Manickam, R. J. Vaccaro, and D. W. Tufts, "A least-squares algorithm for multipath time-delay estimation", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 42, no. 11, pp. 3229-3233, Nov. 1994.
- [21] P. P. Moghaddam, H. Amindavar, and R. L. Kirlin, "A new time-delay estimation in multipath," *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 51, no. 5, pp. 1129-1142, May 2003.
- [22] K. Gedalyahu and Y. C. Eldar, "Time-delay estimation from low-rate samples : A union of subspaces approach," *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 58, no. 6, pp. 3017-3031, June 2010.
- [23] A. Masmoudi, F. Bellili, S. Affes, and A. Stéphane, "A maximum likelihood time delay estimator in a multipath environment using importance sampling", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 61, no. 1, pp. 182-193, Jan. 2013.
- [24] Y. Wang, J. Chen, and W. Fang, "TST-MUSIC for joint DOA-delay estimation", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 49, no. 4, pp. 721-729, Apr. 2001.
- [25] M. Vanderveen, A. Vanderveen, and A. Paulraj, "Estimation of multipath parameters in wireless communications", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 46, no. 3, pp. 682-690, Mar. 1998.

- [26] M. Vanderveen, A. Vanderveen, and A. Paulraj, "Joint angle and delay estimation using shift-invariance techniques", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 46, no. 2, pp. 405-418, Feb. 1998.
- [27] M. Wax and A. Leshem, "Joint estimation of time delays and directions of arrival of multiple reflections of a known signal", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 45, no. 10, pp. 2477-2477, Oct. 1997.
- [28] B. H. Fleury, M. Tschudin, R. Heddergott, D. Dahlhaus, and I. K. Pedersen, "Channel parameter estimation in mobile radio environments using the sage algorithm", *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 17, no.3, pp. 434-450, Mar. 1999.
- [29] M. Pincus "A closed form solution for certain programming problems", *Oper. Res.*, pp. 690-694, 1962.
- [30] R. Y. Rubinstein and D. P. Kroese, *Simulation and the Monte Carlo Method*, Wiley & Sons, 2009.
- [31] S. Kay and S. Saha, "Mean likelihood frequency estimation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 48, no. 7, pp. 1937-1946, July 2000.
- [32] S. Saha and S. M. Kay, "Maximum likelihood parameter estimation of superimposed chirps using Monte Carlo importance sampling," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 2, pp. 224-230, Feb. 2002.
- [33] J. Chen, Y. C. Wu, S. C. Chan, and T. S. Ng, "Joint maximum-likelihood CFO and channel estimation for OFDMA uplink using importance sampling," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, no. 6, pp. 3462-3470, Nov. 2008.
- [34] J. Chen, Y. C. Wu, S. Ma, and T. S. Ng, "Joint CFO and channel estimation for multiuser MIMO-OFDM systems with optimal training sequences," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 8, pp. 4008-4019, Aug. 2008.

- [35] G. Wang and H. Chen, "An importance sampling method for TDOA-based source localization," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 10, no. 5, pp. 1560-1568, May. 2011.
- [36] A. Masmoudi, F. Bellili, S. Affes, and A. Stéphenne, "A non-data-aided maximum likelihood time delay estimator using importance sampling," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 59, no. 10, pp. 4505-4515, Oct. 2011.
- [37] P. Stoica and A. Nehorai, "On the concentrated stochastic likelihood function in array signal processing," *Circuits, Syst., Signal Process.*, vol. 14, pp. 669-674, Sep. 1995.
- [38] H. Golub and V. Pereyra, "The differentiation of pseudo-inverses and nonlinear least squares problems whose variables separate," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 10, no. 2, Apr. 1973.
- [39] S. M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB*, Springer, 2005.
- [40] H. Wang and S. M. Kay, "A maximum likelihood angle-doppler estimator using importance sampling," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 46, no. 2, pp. 610-622, Apr. 2010.
- [41] M. Wax and T. Kailath, "Detection of signals by information theoretic criteria", *IEEE Trans. Acous. , Speech, and Sig. Process.*, vol. 33, no. 2, pp. 387-392, Apr. 1985.
- [42] S. Kay, "Comments on frequency estimation by linear prediction", *IEEE Trans. Acoust. Speech and Sig. Process.*, vol. 27, no. 2, pp. 198-199, Apr. 1979.
- [43] M. Evans and T. Swartz, *Approximating Integrals via Monte Carlo and Deterministic Methods*, New York : Oxford Univ. Press 2000.
- [44] K. V. Mardia, *Statistics of Directional Data*, Academic Press, 1972.

- [45] *E-UTRAN : User Equipment Radio Transmission and Reception*, 3GPP Std. TS 36.101, Sep. 2009.
- [46] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Vol. 1—Estimation Theory*, Prentice Hall, 1993.