

Mots clés: **Régression des quantiles, estimation bayésienne, b-splines, crues, étiages**

### 1. Introduction & contexte

- Caractère aléatoire des débits impose une analyse de leurs probabilités d'occurrence
- Prévisions des risques, approvisionnement et gestion des ressources, dimensionnement des ouvrages, stabilité du milieu aquatiques
- Chaque débit est associé à une fréquence d'apparition  $f$  ou à une période de retour  $T$
- Techniques d'analyse fréquentielle traditionnelles: cadre stationnaire

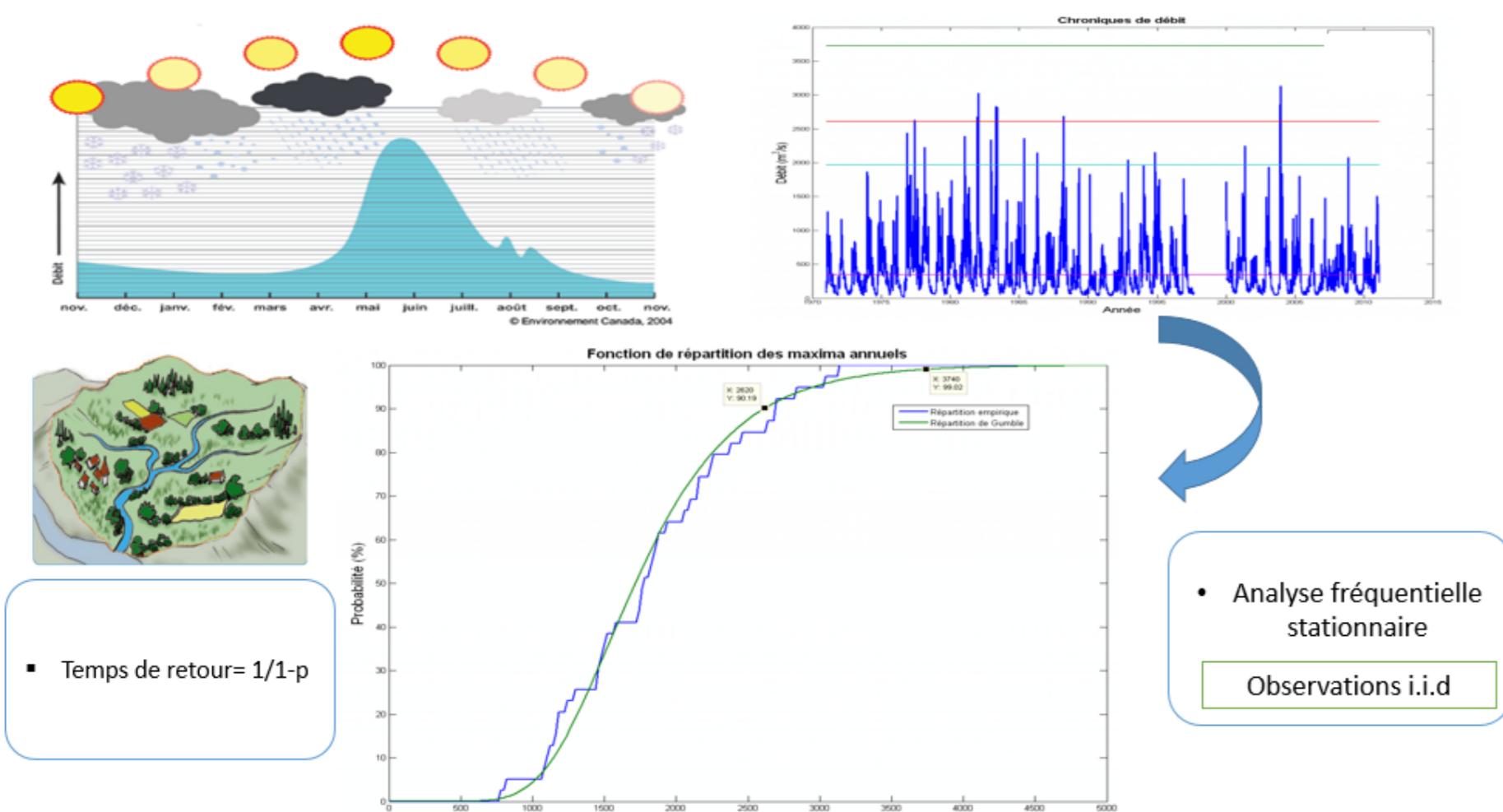


Figure 1: Analyse fréquentielle stationnaire

- Analyse fréquentielle non-stationnaire
- Non-stationnarité des événements hydrologiques extrêmes
- Changement de la distribution de probabilité avec le temps

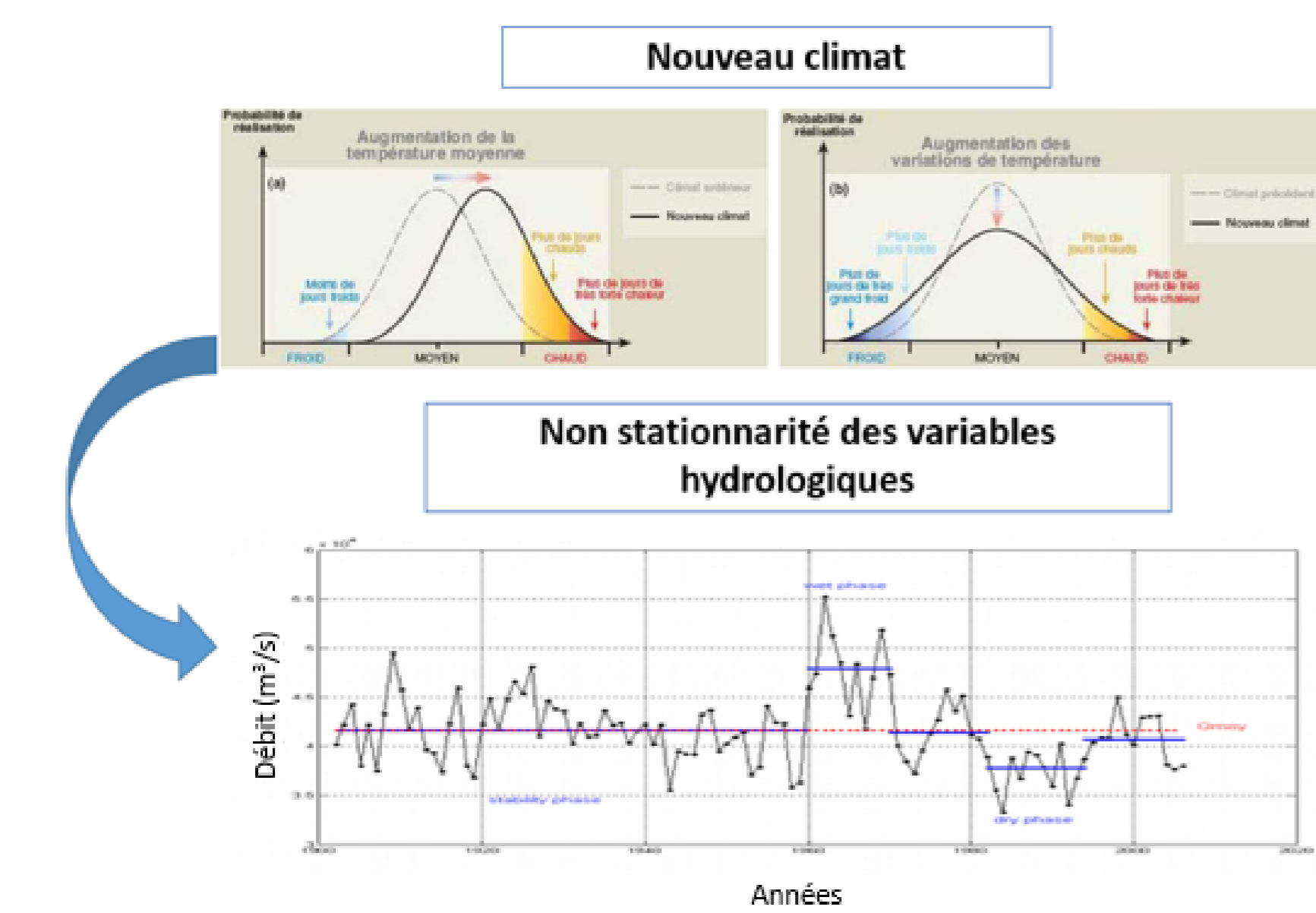


Figure 2: Changements climatiques et non-stationnarité

### 2. Motivation & objectifs

- Estimation des des événements extrêmes dans un contexte non-stationnaire
- Introduction des covariables
- Introduction à la régression des quantiles linéaires (QL) [Koenker, 2005]

Table 1: Régression MCO vs Régression QL

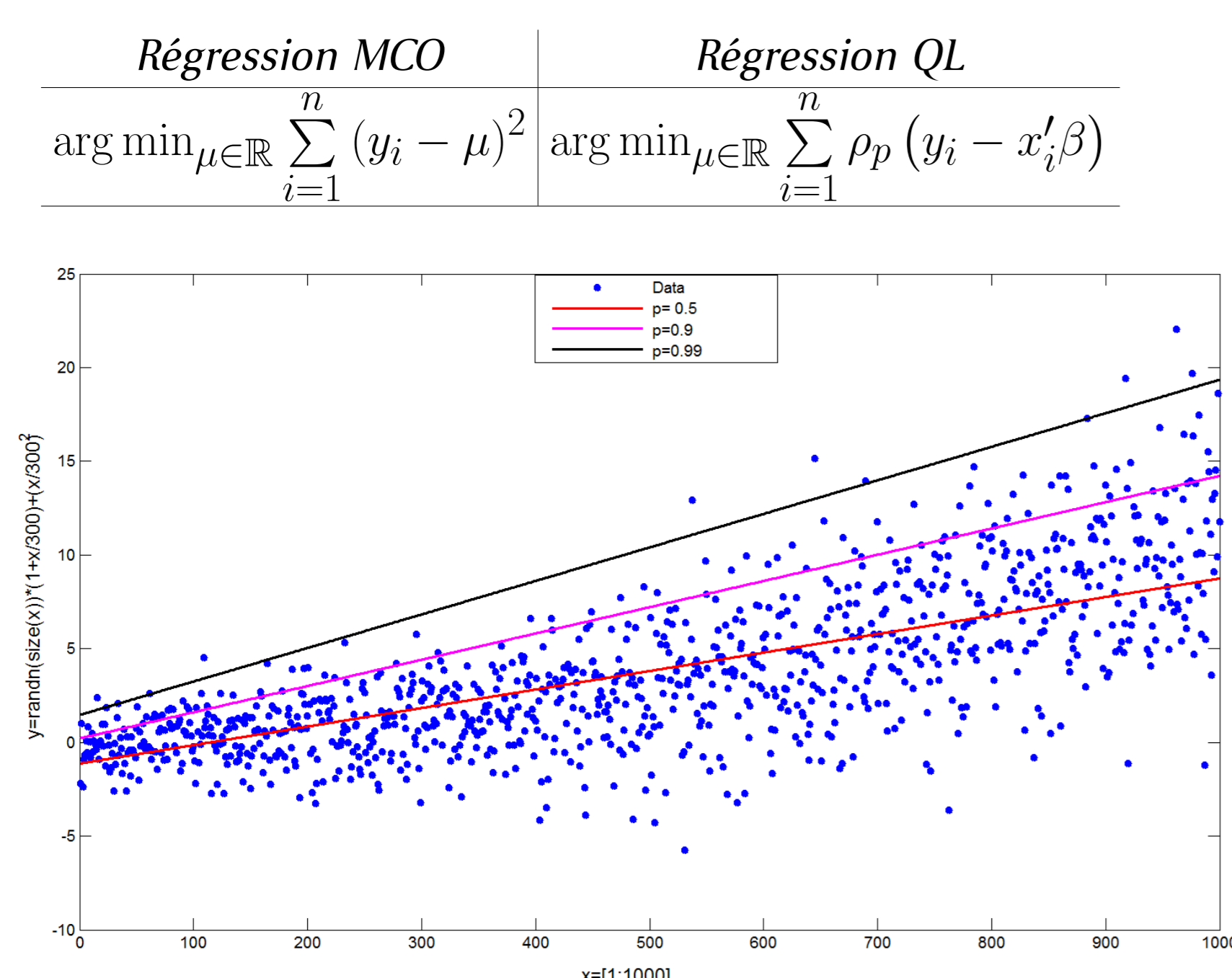


Figure 3: Exemple-Régression des quantiles linéaires

- Régression des quantiles avec les fonctions B-Splines
- Utilité des fonction non linéaires spécialement les B-Splines [De Boor, 2001]

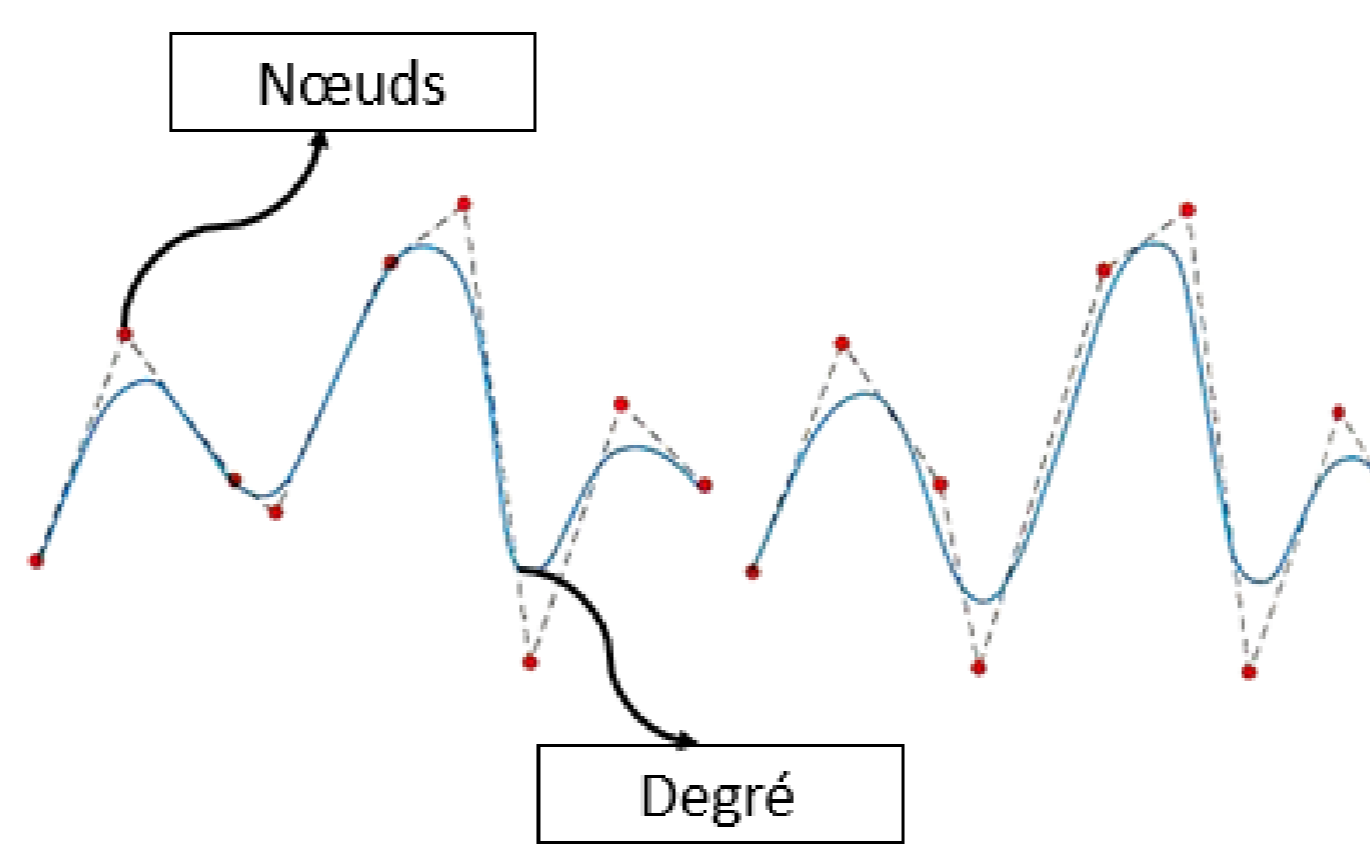


Figure 4: Fonctions B-Splines

### 3. Contexte théorique

- Modèle de régression non-linéaire

$$Y = f(X) + \varepsilon \quad (1)$$

- Utilisation des fonctions B-Splines dans le modèle (1)

$$Y = \sum_{i=1}^m \beta_i B_{i,k}(x) + \varepsilon \quad (2)$$

- Estimation des paramètres du modèle (2)

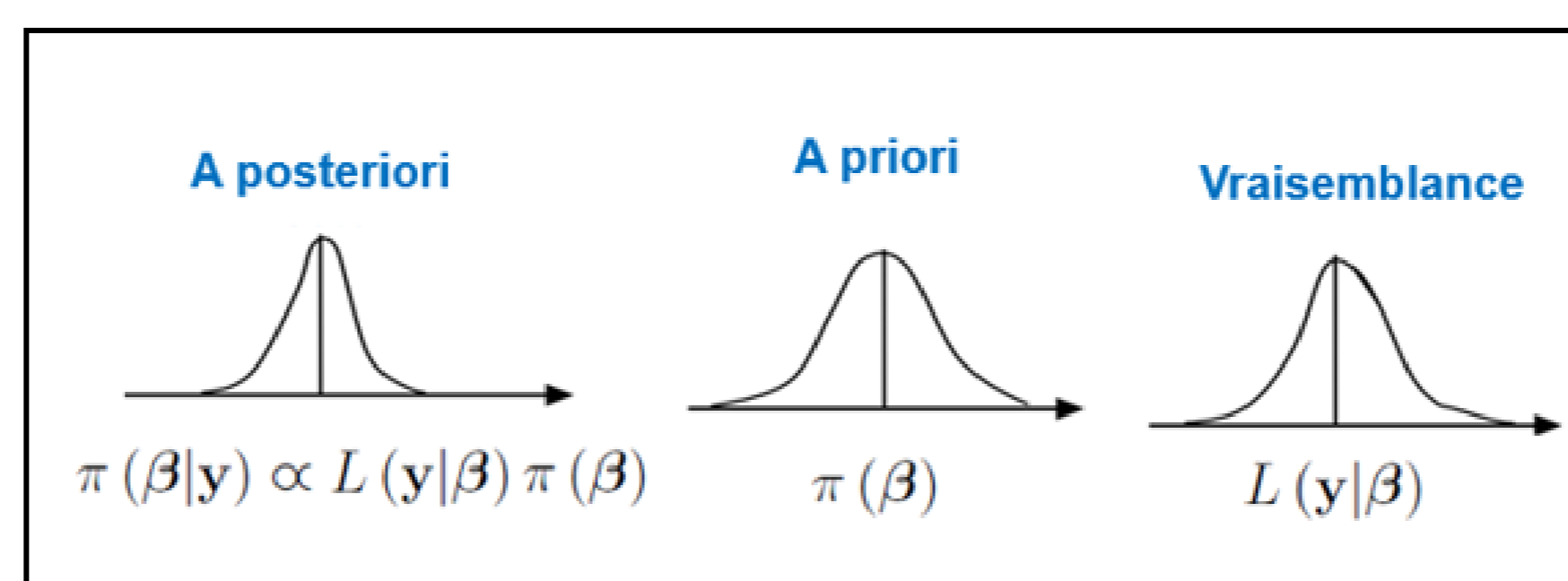


Figure 5: Théorème de Bayes

$$L = p^n (1-p)^n \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n \rho_p \left( y_j - \sum_{i=1}^m B_{ik}(x_j) \beta_i \right) \right\} \quad (3)$$

$$\pi(\beta) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ - \frac{1}{2} (\beta - \mu)' \Sigma^{-1} (\beta - \mu) \right\} \quad (4)$$

- Performance du modèle: "coefficient de détermination" pour les quantiles [Noh et al., 2012]

$$R(p) = 1 - \frac{|E(\rho(Y - \hat{f}(X)))|}{|E(\rho_p(Y - \hat{f}_c(X)))|} \quad (5)$$

$\hat{f}_c$  le modèle à comparer (linéaire ou quadratique)

### 4. Données

- Données de débit (min et max)
- Indices climatiques (AMO, PDO)

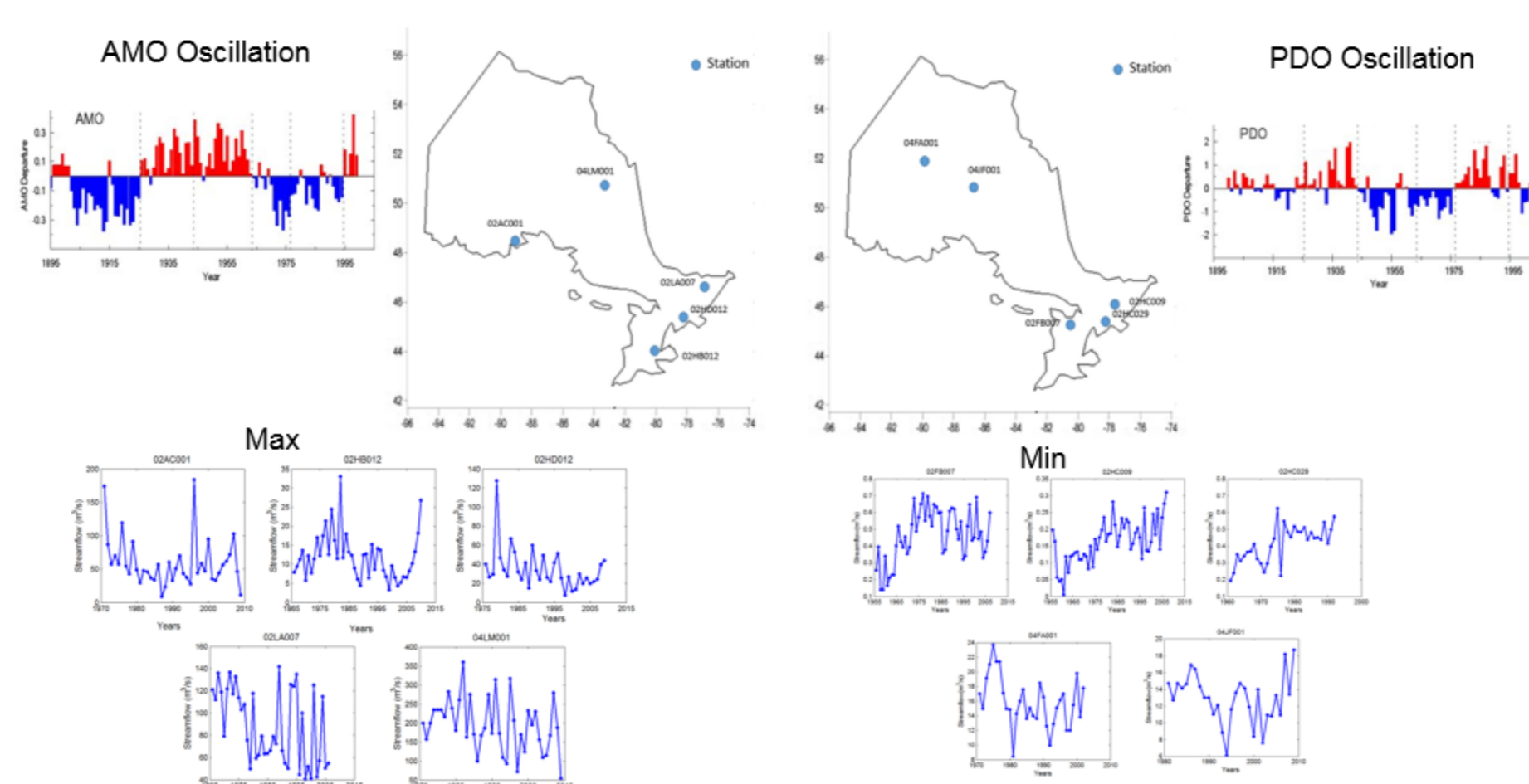


Figure 6: Données

### 5. Résultats

- Résultats Max vs AMO

Table 2: Validation du modèle (Max vs AMO)

(Degree, Knots)	02AC001		02HB012		02HD012		02LA007		04LM001	
	P=0.5	P=0.9	P=0.5	P=0.9	P=0.5	P=0.9	P=0.5	P=0.9	P=0.5	P=0.9
(1,1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
(1,2)	-0.09	0.17	-0.63	-0.37	0.61	-0.56	0.09	-0.02	0.12	0.07
(1,3)	-0.09	-0.06	-0.63	-0.13	0.60	0.02	0.12	-0.02	0.04	0.28
(2,1)	-0.04	0.29	-0.39	-0.06	-0.11	0.12	0.18	-0.03	0.27	0.15
(2,2)	0.20	0.16	-0.46	-0.01	-0.05	-0.31	0.69	0.01	0.38	0.20
(2,3)	0.26	0.11	0.10	-0.25	0.60	0.09	0.32	0.06	0.37	0.35
(3,1)	0.09	0.04	-0.62	-0.15	0.59	0.01	0.10	-0.07	0.04	0.28
(3,2)	0.29	0.12	-0.50	0.13	0.46	0.01	0.02	0.12	0.22	0.28
(3,3)	0.34	0.31	0.17	0.13	0.95	0.20	0.48	0.20	0.38	0.45
(3,4)	0.15	0.13	0.02	0.03	0.60	0.17	0.30	0.02	1.29	0.29

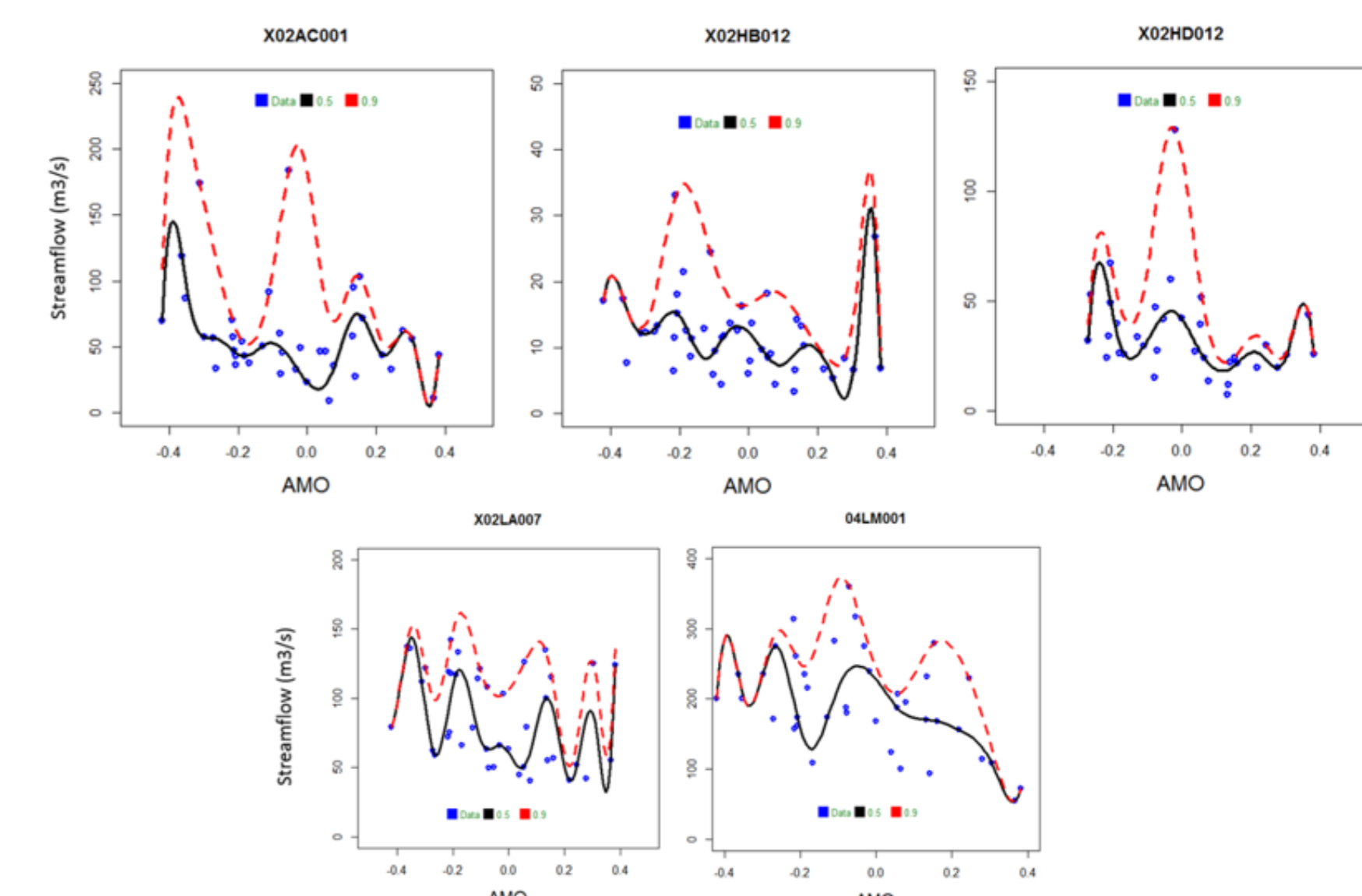


Figure 7: Max vs AMO

- Résultats Min vs PDO

Table 3: Validation du modèle (Min vs PDO)

(Degree, Knots)	02FB007		02HC009		02HC029		04FA001		04JF001	
	P=0.5	P=0.1	P=0.5	P=0.1	P=0.5	P=0.1	P=0.5	P=0.1	P=0.5	P=0.1
(1,1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
(1,2)	-0.74	0.06	0.01	-0.11	-0.05	-0.08	0.87	-0.11	0.33	0.12
(1,3)	-1.92	0.06	-0.15	0.13	0.63	0.12	0.03	1.12	0.98	1.12
(2,1)	-0.20	0.00	0.10	0.06	-0.41	0.32	-0.18	-0.18	0.24	-0.09
(2,2)	0.30	0.08	0.27	0.14	0.60	0.12	0.69	0.29	0.79	0.16
(2,3)	0.69	0.14	-0.16	0.01	0.19	0.10	0.62	0.11	0.39	0.11
(3,1)	-0.61	-0.01	0.07	0.07	-0.36	0.32	0.54	-0.26	-0.51	0.02
(3,2)	-1.45	0.17	0.14	0.12	0.54	0.11	0.34	0.11	-0.93	0.11
(3,3)	0.48	0.20	-0.32	0.11	0.18	0.08	0.32	0.09	0.24	0.08

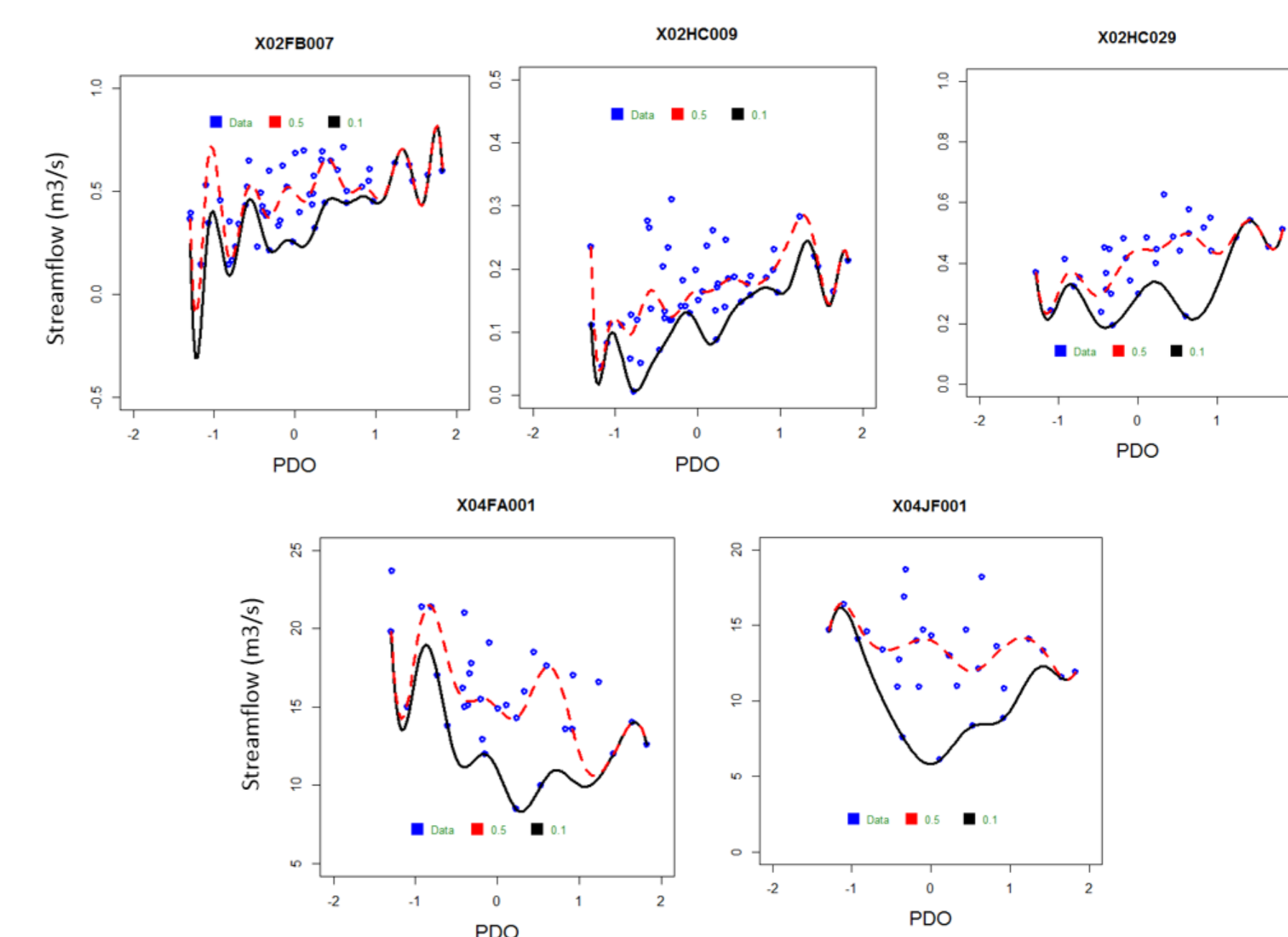


Figure 8: Min vs PDO

### 6. Conclusions

- Estimation des quantiles non stationnaires avec un modèle non paramétrique permet:
  - un ajustement plus flexible
  - une estimation améliorée par rapport aux modèles linéaires et quadratiques
- Nécessité d'une validation du modèle pour éviter un surajustement

### 7. Références

- \* R. Koenker, Quantile Regression. 2005
- \* C. De Boor, A practical guide to spline. Springer, 2001
- \* H. Noh, A. El Gouch, and I. Keilegom. Quality of fit measures in the framework of quantile regression. Scandinavian journal of statistics: theory and application, 40:105-118, 2012