

Université du Québec
Institut National de la Recherche Scientifique
Énergie, Matériaux et Télécommunications

Allocation et adaptation optimales de la puissance dans HARQ tronqué

Par

Mohammed Jabi

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
Maître ès sciences (M.Sc.) en télécommunications

Jury d'évaluation

Président du jury

Examinatrice externe

Directeur de recherche

Codirecteur de recherche

Codirecteur de recherche

Long Le, INRS-EMT

Besma Smida, Purdue University Calumet

Leszek Szczeciński, INRS-EMT

Mustapha Benjillali, INPT

Fabrice Labeau, McGill University

Résumé

Le protocole ARQ Hybride (Hybrid Automatic Repeat reQuest) permet d'assurer et d'améliorer la fiabilité des transmissions dans les réseaux de communication. Ce mécanisme combine les techniques de retransmission ARQ avec un code correcteur d'erreurs FEC (Forward Error Correction).

Dans ce travail, on considère la transmission HARQ à redondance incrémentale et HARQ avec Chase combining dans un canal à évanouissements par blocs. On suppose que l'émetteur, n'ayant aucune information sur l'état du canal, peut soit allouer la puissance en connaissant des statistiques du canal, soit l'adapter en fonction des états précédents du canal. L'objectif de notre travail est de trouver la puissance optimale qui minimise la probabilité de coupure sous contrainte sur la puissance moyenne à long terme.

Pour les SNR de grandes valeurs, on propose une approche alternative afin d'exprimer, d'une manière analytique, les valeurs optimales de la puissance. Ainsi, on obtient l'expression analytique de la diversité et du gain obtenus grâce à la connaissance des états précédents du canal.

Étudiant

Directeur de recherche

Remerciements

Au terme de ce travail, j'exprime ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à l'accomplissement de ce travail.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements à Mme. Besma SMIDA et à M. Long LE d'avoir accepté de faire partie du jury d'évaluation.

Je tiens à coeur à exprimer ma grande gratitude à mon directeur de recherche, M. Leszek SZCZECIŃSKI, pour avoir fait le suivi de mon projet de recherche depuis sa définition jusqu'à son accomplissement final et aussi pour ses conseils, ses directives précieuses et surtout sa patience et sa disponibilité. Ses questions pertinentes étaient toujours un déclencheur de plus de curiosité et d'approfondissement.

Mes remerciements s'adressent également à mes codirecteurs de recherche, M. Mustapha BENJILLALI et M. Fabrice LABEAU pour leur soutien qu'ils n'ont cessé de me prodiguer tout le long de cette période.

Un spécial hommage est rendu à tous les professeurs de l'INRS-EMT et au personnel de soutien du centre. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère reconnaissance et de ma profonde gratitude.

Liste des acronymes

- **ACK** Acknowledgement
- **ARQ** Automatic Repeat reQuest
- **CC** Chase Combining
- **CRC** Cyclique Redundancy Check
- **CSI** Channel State Information
- **DP** Dynamic Programming
- **FEC** Forward Error Correction
- **GP** Geometric Programming
- **HARQ** Hybrid Automatic Repeat reQuest
- **IR** Incremental Redundancy
- **NACK** Negative Acknowledgement
- **OSI** Open Systems Interconnection
- **SNR** Signal-to-Noise Ratio
- **dB** décibel

Table des matières

1	Introduction	13
1.1	Objectifs	13
1.2	Contributions	14
1.3	Structure du document	15
2	Modèle et notions de base	16
2.1	HARQ	16
2.1.1	HARQ type I	17
2.1.2	HARQ avec Chase combining	17
2.1.3	HARQ à redondance incrémentale	17
2.2	Modèle du système	18
2.3	Métriques	19
2.3.1	Probabilité de coupure	20
2.3.2	Puissance moyenne à long terme	21
2.3.3	Approximation de la probabilité de coupure	22
2.4	Outils d'optimisation	27
2.4.1	Problème dual	28
2.4.2	Programmation géométrique	29
2.4.3	Programmation dynamique	31
2.4.4	Conclusion	33
3	Adaptation et allocation optimale de la puissance	34
3.1	Problème d'optimisation	34
3.1.1	Cas de l'adaptation	34
3.1.2	Cas de l'allocation	36
3.2	Revue de la littérature	36
3.3	Adaptation optimale de la puissance	37
3.3.1	Cadre général	38

3.3.2	Cas de IR-HARQ	41
3.3.3	Cas de CC-HARQ	43
3.4	Allocation optimale de la puissance	45
3.4.1	Cadre général	45
3.4.2	Cas de IR-HARQ	46
3.4.3	Cas de CC-HARQ	47
3.5	Exemples numériques	48
4	Allocation vs Adaptation : gain du feedback	52
4.1	Problème d'optimisation	52
4.1.1	Cas de l'adaptation linéaire de la puissance	52
4.1.2	Cas de l'allocation de la puissance	54
4.1.3	Cadre général	55
4.2	Diversité et gain du feedback	58
4.2.1	Diversité	58
4.2.2	Gain du feedback	59
4.3	Exemples numériques	60
5	Conclusion	62

Table des figures

1.1	Modèle du système HARQ	14
2.1	Modèle du canal à évanouissements par blocs (block fading) .	18
2.2	Valeur exacte de la probabilité de coupure f_K comparée avec son approximation \tilde{f}_K (2.29) en fonction de SNR moyen $\bar{\gamma}$. Cas de IR-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 2$, $R = 1$ et $K = 1, 2, 3, 4$	26
3.1	Les puissances d'adaptation optimales $\tilde{P}_k(I_{k-1})$ dans le cas de IR-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 2$, $K = 4$, $R = 1.5$ et $\bar{\gamma} = -4$ dB.	42
3.2	Les puissances d'adaptation optimales $\tilde{P}_k(I_{k-1})$ dans le cas de CC-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 2$, $K = 4$, $R = 1.5$ et $\bar{\gamma} = -2$ dB.	44
3.3	Les puissances optimales de l'allocation \hat{P}_k dans le cas de IR-HARQ dans un canal Nakagami- m où $K = 4$, $m = 2$ et $R = 1.5$. Les deux cas sans bornes (c-à-d, $P_{\max} = \infty$) et avec bornes (c-à-d, $P_{\max} = 5$) sont montrés pour la comparaison. . .	47
3.4	Les puissances optimales de l'allocation \hat{P}_k dans le cas de CC-HARQ dans un canal Nakagami- m où $K = 4$, $m = 2$ et $R = 1.5$. Les deux cas sans bornes (c-à-d, $P_{\max} = \infty$) et avec bornes (c-à-d, $P_{\max} = 5$) sont montrés pour la comparaison. . .	48
3.5	Valeur optimale de la probabilité de coupure (dans le cas de l'adaptation $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et de l'allocation $P_{\text{out}}^{\text{al}}$) comparée avec la probabilité de coupure lors de l'utilisation d'une puissance constante P_{out}^c (c-à-d $P_k = \bar{P} = 1, \forall k$). Les deux cas avec bornes (c-à-d, $P_{\max} = 5$) et sans bornes (c-à-d, $P_{\max} = \infty$) sont montrés dans le but de comparer. Cas de IR-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 2$, $R = 1.5$ et $K = 2, 4$	49

- 3.6 Valeur optimale de la probabilité de coupure (dans le cas de l'adaptation $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et de l'allocation $P_{\text{out}}^{\text{al}}$) comparée avec la probabilité de coupure lors de l'utilisation d'une puissance constante $P_{\text{out}}^{\text{c}}$ (c-à-d $P_k = \bar{P} = 1, \forall k$). Les deux cas avec bornes (c-à-d, $P_{\text{max}} = 5$) et sans bornes (c-à-d, $P_{\text{max}} = \infty$) sont montrés dans le but de comparer. Cas de CC-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 2$, $R = 1.5$ et $K = 2, 4$ 50
- 3.7 Valeur optimale de la probabilité de coupure dans le cas de l'adaptation $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ comparée avec le cas de l'allocation $P_{\text{out}}^{\text{al}}$. Cas de CC-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 1, 3$, $R = 1.5$, $K = 2, 4$ et $P_{\text{max}} = \infty$ 51
- 4.1 Valeur optimale de la probabilité de coupure, trouvée en utilisant la programmation dynamique (dans le cas de l'adaptation $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et de l'allocation $P_{\text{out}}^{\text{al}}$), comparée avec celle trouvée à l'aide de la programmation géométrique. (dans le cas de l'adaptation linéaire $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et de l'allocation $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{al}}$). Cas de CC-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 1, 2, 3$, $K = 2$, $R = 1.5$ et $P_{\text{max}} = \infty$ 61

Liste des tableaux

4.1	Valeurs de G_K en dB pour Nakagami- m où $m = 1, 2, 3$ et $K = 2, 4$	60
-----	--	----

Chapitre 1

Introduction

Un des problèmes majeurs de la communication des données consiste à contrôler les erreurs de transmission causées par le bruit et l'évanouissement du canal. Afin d'assurer la fiabilité des transmissions, on distingue deux approches : L'approche réactive ARQ (Automatic Repeat reQuest) où l'émetteur réagit à la signalisation d'un paquet erroné ou carrément perdu, en retransmettant ce paquet. Cette signalisation peut être effectuée par l'émission d'acquittements positifs ACK (ACKnowledgement) ou négatifs NACK (Negative-ACKnowledgement). La deuxième approche est proactive FEC (Forward Error Correction) où l'émetteur ajoute de la redondance afin de permettre au destinataire de détecter et de corriger une partie des erreurs. Cela permet d'éviter la retransmission et donc de faire des économies de bande, voire d'assurer la transmission, dans certaines situations où il n'y a pas de voie de retour. Pour donner de meilleures performances, ces deux mécanismes sont souvent combinés ; une telle combinaison est appelée " ARQ hybride " ou HARQ (Hybrid Automatic Repeat reQuest). En principe, HARQ retransmet le paquet infiniment jusqu'à la réception d'un ACK. Dans le cas particulier où le protocole permet uniquement un nombre fini de retransmissions, on parle de HARQ tronqué.

1.1 Objectifs

Le but principal de notre travail est d'optimiser les performances des systèmes de communication implémentant le mécanisme de retransmission HARQ.

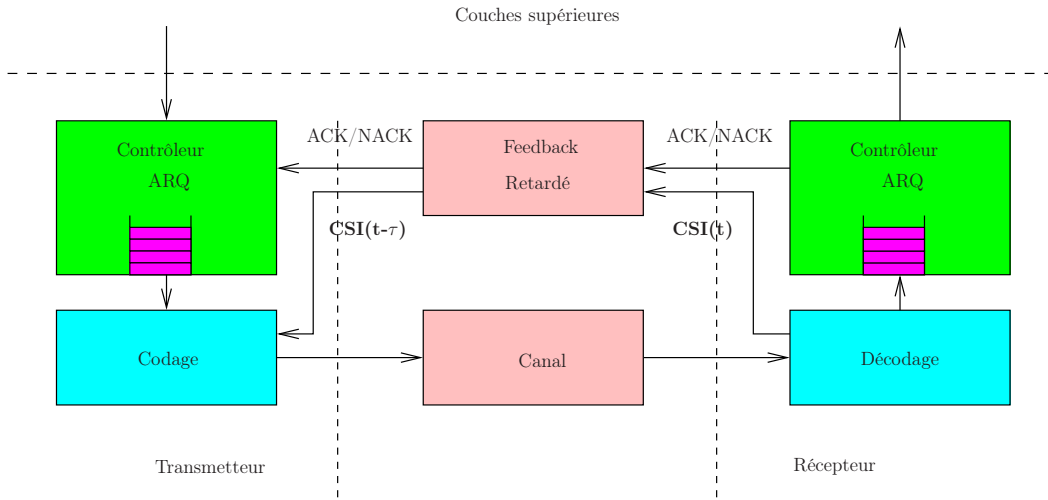


FIGURE 1.1 – Modèle du système HARQ

Les schémas HARQ sont généralement implémentés dans la deuxième couche du modèle OSI. Comme le montre la figure 1.1, le canal d’acquittements est utilisé pour transmettre une information sur l’état du décodage du paquet (ACK/NACK) au niveau du récepteur. D’autres informations sur l’état du canal CSI (Channel State Information) peuvent être transmises avec ces messages d’acquittements. Habituellement, il existe un retard entre le moment où le CSI est acquis par le récepteur et le moment où le transmetteur le reçoit, ceci est dû au temps pris par le CSI dans le canal du feed-back pour atteindre le transmetteur ; on parle dans ce cas de CSI retardée. Notre objectif est d’explorer comment utiliser les CSI retardées afin d’améliorer les performances des systèmes de communication.

1.2 Contributions

Notre projet se place dans la catégorie des travaux visant l’amélioration des performances de HARQ. Spécialement, on vise à trouver une politique d’allocation et d’adaptation de la puissance dans les systèmes HARQ, permettant de diminuer la probabilité de coupure sous contrainte sur la puissance moyenne à long terme. C’est dans ce cadre que :

1. On utilise la programmation dynamique afin de trouver le schéma op-

timal d'adaptation de la puissance. Le but est de minimiser la probabilité de coupure sous contrainte sur la puissance moyenne à long terme. Cette approche est valable quand la fonction de répartition de l'évanouissement du canal est continue, ce qui est le cas de la majorité des modèles existants.

2. On suggère une fonction simple d'adaptation de la puissance. Il s'agit de la fonction linéaire qu'on optimise à l'aide de la programmation géométrique.
3. On traite le cas de l'allocation de la puissance pour le HARQ tronqué. La méthode d'optimisation proposée couvre deux protocoles différents de HARQ. On adopte le cas général du canal Nakagami- m .
4. On démontre l'expression analytique de la valeur maximale de la diversité.
5. On définit et on caractérise le gain obtenu grâce à la connaissance des états précédents du canal.
6. On présente une approximation simple et exacte de la probabilité de coupure pour IR-HARQ dans un canal Nakagami- m .
7. Finalement, on illustre avec des exemples numériques, le gain des solutions optimales proposées, par rapport à l'allocation constante de la puissance.

1.3 Structure du document

Ce document est divisé en trois principaux chapitres et une conclusion. Le chapitre suivant présente le modèle du système et les notations adoptées. Nous y rappelons notamment les métriques et les techniques d'optimisation utilisées par la suite. Dans le chapitre 3, nous allons définir notre objectif d'une manière formelle. Puis, nous passons à résoudre notre problème d'optimisation à l'aide de la programmation dynamique. Nous nous intéressons à résoudre le problème relatif aux grandes valeurs de SNR dans le dernier chapitre. La programmation géométrique sera au rendez vous afin de résoudre ce problème simplifié. Nous développons les expressions analytiques de la diversité et du gain obtenus grâce à la connaissance des états précédents du canal. Les chapitres 3 et 4 seront clôturés par des illustrations numériques.

Finalement, le dernier chapitre de ce document sera un résumé du travail effectué ainsi qu'une vue sur les horizons possibles lors de travaux à venir.

Chapitre 2

Modèle et notions de base

Dans ce chapitre nous posons le cadre de notre travail et nous présentons les différentes notions utilisées dans les chapitres qui suivent. Nous passons en revue dans un premier temps les différents protocoles HARQ. Nous définissons ensuite le modèle du canal à évanouissements par blocs et les différentes caractéristiques qui lui sont associées. Puis, nous présentons les métriques utilisées, à savoir la probabilité de coupure et la puissance moyenne à long terme. Enfin, nous introduisons quelques outils d'optimisation.

2.1 HARQ

Pour garantir une transmission fiable des données et afin d'améliorer la robustesse dans les canaux bruités, deux techniques fondamentales sont souvent utilisées : Forward Error Correction (FEC) et Automatic Repeat reQuest (ARQ). Dans les schémas FEC, un code correcteur d'erreurs est utilisé pour corriger les erreurs de transmission. Concernant les régimes ARQ, si une erreur est détectée dans un message reçu, alors une retransmission est demandée par l'envoi d'un accusé de réception négatif (NACK). Pour les protocoles ARQ typiques, ceci est répété jusqu'à ce que le paquet soit reçu sans erreurs, ainsi un accusé de réception positif (ACK) est envoyé à l'émetteur.

La combinaison des deux mécanismes ARQ et FEC est appelée HARQ (Hybrid Automatic Repeat reQuest). Ce dernier offre de meilleures performances comparé aux approches ARQ ou FEC [1] .

2.1.1 HARQ type I

HARQ type-I utilise un code conçu pour détecter les erreurs et un autre pour les corriger. Quand un message est prêt à être transmis, les bits Cyclique Redundancy Check (CRC) sont d'abord générés et ajoutés aux données, ensuite, la trame résultante est codée avec FEC.

A la réception du paquet, si une erreur est détectée, c'est-à-dire que le nombre d'erreurs dans le paquet reçu est au-delà de la capacité de correction de FEC, alors le récepteur rejette le paquet et une retransmission est demandée. La retransmission ultérieure est un paquet identique et le récepteur tente à nouveau de récupérer correctement le message transmis.

Cette opération sera répétée jusqu'à la réception du paquet correct ou l'atteinte du nombre maximal de transmissions permises (certaines applications ont des contraintes de délai et le protocole ne peut pas permettre un grand nombre de retransmissions), ce cas particulier est appelé HARQ tronqué [2], [3].

2.1.2 HARQ avec Chase combining

Ce protocole se base sur le même principe que le HARQ type-I, la seule différence consiste en la conservation des paquets erronés. En effet, si le paquet n'est pas bien reçu, le récepteur garde les paquets erronés et demande une retransmission. A cette étape, le récepteur procède à une combinaison du nouveau paquet reçu avec les anciens paquets, dans le but de décoder le message. il est à noter que tous les paquets sont identiques. Dans ce qui suit, on notera HARQ avec Chase combining par CC-HARQ.

2.1.3 HARQ à redondance incrémentale

Comme le protocole précédent, lorsque le récepteur détecte la présence d'erreurs, il enregistre le paquet erroné dans une mémoire temporaire et demande la retransmission du message. La différence entre ce protocole et CC-HARQ est que les retransmissions ne sont pas généralement identiques, elles contiennent de différents bits de redondance.

Après chaque tentative, la nouvelle redondance, reçue et combinée avec les transmissions précédentes, donne un mot de code plus apte à la correction. Si les retransmissions ne peuvent être décodées qu'après la combinaison avec

les paquets précédents, alors on parle de HARQ type-II. Dans ce qui suit, on notera HARQ à redondance incrémentale par IR-HARQ.

2.2 Modèle du système

Un canal radio est typiquement modélisé par un bruit additif blanc Gaussien et un gain multiplicatif. Le bruit additif s'ajoute au signal transmis à l'entrée du récepteur. Le gain multiplicatif représente les évanouissements que subit le signal transmis au cours des différents chemins possibles pour parvenir au récepteur. Un canal est dit à évanouissements par blocs, si ses évanouissements restent constants pendant un bloc et varient d'une façon indépendante d'un bloc à un autre. La durée d'un bloc est donc inférieure au temps de cohérence du canal.

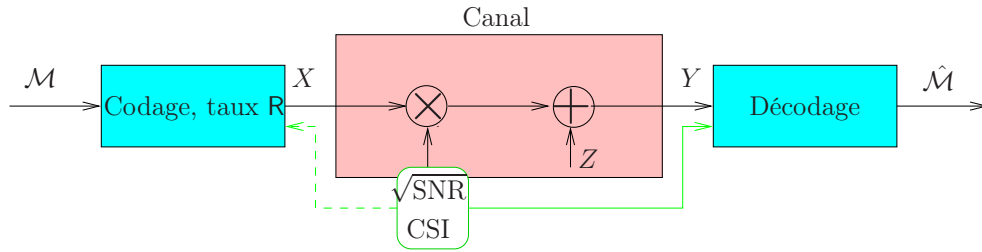


FIGURE 2.1 – Modèle du canal à évanouissements par blocs (block fading)

Nous considérons un système HARQ dans un canal à évanouissements par blocs. Le signal reçu y_k après la (re)transmission k est donné par :

$$y_k = \sqrt{\gamma_k P_k(\mathcal{CSI}_{k-1})} \cdot x_k + z_k, \quad (2.1)$$

où x_k est le signal transmis, z_k représente un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance égale à 1. $P_k(\mathcal{CSI}_{k-1}) \geq 0$ est la puissance utilisée dans la $k^{\text{ième}}$ transmission et elle est une fonction des réalisations précédentes du canal \mathcal{CSI}_{k-1} . γ_k est le SNR instantané qui caractérise l'évanouissement du canal.

Pour garantir une transmission fiable des données, on suppose que le système utilise la technique HARQ-tronqué où un paquet est retransmis au

maximum $K - 1$ fois. Le débit de transmission est constant pour toutes les transmissions et est égal à R .

On suppose que la valeur de γ_k est parfaitement connue (ou estimée) au niveau du récepteur (mais inconnue au niveau de l'émetteur) et γ_k varie d'une façon i.i.d (indépendante et identiquement distribuée) d'un bloc à un autre, avec $\bar{\gamma}_k = \mathbb{E}_{\gamma_k}[\gamma_k]$, où $\mathbb{E}_{\gamma}[\cdot]$ représente la moyenne mathématique sur γ . L'indépendance est justifiée par le cas pratique où les différentes transmissions ne sont pas envoyées d'une façon successive. On les sépare par une période de temps suffisante pour garantir que les réalisations du canal deviennent indépendantes.

Dans les exemples numériques, on va considérer que γ_k suit la loi Nakagami- m . La densité de probabilité $p_{\gamma}(x)$ est donnée par :

$$p_{\gamma}(x) = \frac{m^m \cdot x^{m-1}}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{m \cdot x}{\bar{\gamma}}\right), \quad x > 0, \quad (2.2)$$

où

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} t^{m-1} e^{-t} dt, \quad (2.3)$$

est la fonction Gamma.

Donc, la fonction de répartition de γ est donnée par :

$$F_{\gamma}(x) = 1 - \frac{\Gamma(m, \frac{m}{\bar{\gamma}}x)}{\Gamma(m)}, \quad (2.4)$$

où

$$\Gamma(s, x) = \int_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad (2.5)$$

est la fonction Gamma incomplète supérieure.

2.3 Métriques

Dans cette section, nous présentons les métriques à analyser. Nous définissons tout d'abord le concept de la probabilité de coupure et de la puissance moyenne à long terme. Nous passons par la suite à des approximations de la probabilité de coupure pour les deux cas CC-HARQ et IR-HARQ.

2.3.1 Probabilité de coupure

Notons par f_k la probabilité que le récepteur n'arrive pas à décoder correctement le paquet après k transmissions. Dans le cas de IR-HARQ, f_k est égale à la probabilité que l'information mutuelle accumulée est inférieure au débit de transmission R . Dans le cas de CC-HARQ, f_k est égale à la probabilité que le SNR accumulé est inférieur à un SNR cible : $\gamma_{\text{th}} = 2^R - 1$.

Autrement dit, f_k est donnée par [4] :

$$f_k = \begin{cases} \Pr \left\{ \sum_{l=1}^k \log(1 + \gamma_l \cdot P_l(\mathcal{CS}\mathcal{I}_{l-1})) < R \right\}, & \text{pour IR-HARQ,} \\ \Pr \left\{ \log \left(1 + \sum_{l=1}^k \gamma_l \cdot P_l(\mathcal{CS}\mathcal{I}_{l-1}) \right) < R \right\}, & \text{pour CC-HARQ,} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$= \begin{cases} \Pr \left\{ I_k^{(\text{IR})} < I_{\text{th}}^{(\text{IR})} \right\} & \text{pour IR-HARQ,} \\ \Pr \left\{ I_k^{(\text{CC})} < I_{\text{th}}^{(\text{CC})} \right\} & \text{pour CC-HARQ,} \end{cases} \quad (2.7)$$

où $I_{\text{th}}^{(\text{IR})} = R$, $I_{\text{th}}^{(\text{CC})} = \gamma_{\text{th}}$, $I_k^{(\text{IR})} = \sum_{l=1}^k \log(1 + \gamma_l P_l(\mathcal{CS}\mathcal{I}_{l-1}))$ et $I_{\text{th}}^{(\text{CC})} = \sum_{l=1}^k \gamma_l P_l(\mathcal{CS}\mathcal{I}_{l-1})$.

Par définition, la probabilité de coupure P_{out} est égale à la probabilité d'échouer à décoder correctement un message après avoir retransmis le paquet $K - 1$ fois. Alors on a :

$$P_{\text{out}} = f_K. \quad (2.8)$$

Allocation et adaptation de la puissance

Nous considérons trois scénarios différents en fonction de la façon dont le CSI est utilisé par l'émetteur :

- Transmission avec puissance constante si la puissance est fixe le long du processus HARQ, c'est-à-dire $P_k(\mathcal{CS}\mathcal{I}_{k-1}) \equiv \bar{P}$.
- Allocation si la puissance est uniquement une fonction de l'index de retransmission k , c'est-à-dire, $P_k(\mathcal{CS}\mathcal{I}_{k-1}) \equiv \hat{P}_k \cdot \mathbb{I}(I_{k-1} \leq I_{\text{th}})$ avec $\mathbb{I}(x) = 1$ si x est vrai et 0 sinon.
- Adaptation si une information sur l'état du canal CSI est connue au niveau de l'émetteur, alors ce dernier pourra ajuster la puissance dans la retransmission suivante en fonction de cette information, on parle alors

de l'adaptation de la puissance. D'après l'équation (2.6), l'échec du décodage après la $k^{\text{ième}}$ transmission dépend uniquement de $I_{k-1}^{(*)}$ et de γ_k pour les deux protocoles IR-HARQ et CC-HARQ, avec $* \in \{\text{IR}, \text{CC}\}$. Notons qu'on a supposé que γ_k est inconnu au niveau de l'émetteur et qu'on ne peut pas prédire sa valeur à cause de l'indépendance entre les blocs. En conséquence, $I_{k-1}^{(*)}$ est le paramètre unique nécessaire pour adapter la puissance P_k :

$$P_k(\mathcal{CST}_{k-1}) \equiv \tilde{P}_k(I_{k-1}) \cdot \mathbb{I}(I_{k-1} \leq I_{\text{th}}), \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.9)$$

où $I_0^{(*)} = 0$ et $\tilde{P}_k(x) = 0$ pour $x > I_{\text{th}}^{(*)}$ car la $k^{\text{ième}}$ transmission n'arrive que si le décodage échoue après la $(k-1)^{\text{ème}}$ transmission.

Afin de simplifier l'analyse, on suppose que l'émetteur a une connaissance parfaite de $I_{k-1}^{(*)}$. Autrement dit, on ignore les erreurs dues à la discrétisation de la valeur de $I_{k-1}^{(*)}$, avec $* \in \{\text{IR}, \text{CC}\}$. Cette supposition permet d'évaluer le gain maximal réalisable lors de l'adaptation de la puissance.

En d'autres termes, si le récepteur peut envoyer uniquement un bit (ACK ou NACK) dans le canal de retour, alors on parle soit de l'allocation de la puissance ou bien de la transmission avec puissance fixe. Si le récepteur peut envoyer plusieurs bits dans le canal de retour, alors on dira qu'on a une adaptation de la puissance. On supposera que le nombre de bits dans le canal de retour est suffisant pour décrire la valeur de $I_{k-1}^{(*)}$.

2.3.2 Puissance moyenne à long terme

D'après le théorème récompense-renouvellement "reward-renewal theorem" [5], la puissance moyenne à long terme est donnée par [4] :

$$\bar{P} \triangleq \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{CST}_K}[P]}{\mathbb{E}_{\mathcal{CST}_K}[T]}, \quad (2.10)$$

où $\mathbb{E}_{\mathcal{CST}_K}[T]$ est le nombre moyen de transmissions nécessaires pour compléter la transmission du paquet et $\mathbb{E}_{\mathcal{CST}_K}[P]$ est l'énergie moyenne utilisée lors du processus HARQ. L'espérance est par rapport le gain du canal.

$\mathbb{E}_{\mathcal{CST}_K}[T]$ est donné par, [6] :

$$\mathbb{E}_{\mathcal{CST}_K}[T] = \sum_{k=0}^{K-1} f_k, \quad (2.11)$$

avec f_k la probabilité d'avoir un décodage incorrect après k transmissions, définie en (2.6) :

L'énergie moyenne $\mathbb{E}_{\mathcal{CS}\mathcal{I}_K}[P]$ est définie par [4] :

$$\mathbb{E}_{\mathcal{CS}\mathcal{I}_K}[P] = \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{\mathcal{CS}\mathcal{I}_{k-1}}[P_k(\mathcal{CS}\mathcal{I}_{k-1})], \quad (2.12)$$

où $\mathbb{E}_{\mathcal{CS}\mathcal{I}_{k-1}}[P_k(\mathcal{CS}\mathcal{I}_{k-1})]$ est l'énergie moyenne utilisée pendant la $k^{\text{ième}}$ transmission : Par conséquent, la puissance moyenne à long terme peut être exprimée comme suit :

$$\bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{\mathcal{CS}\mathcal{I}_{k-1}}[P_k(\mathcal{CS}\mathcal{I}_{k-1})]}{\sum_{k=0}^{K-1} f_k}. \quad (2.13)$$

2.3.3 Approximation de la probabilité de coupure

Dans cette partie, nous allons présenter une approximation simple et précise permettant d'évaluer la probabilité de coupure pour les systèmes IR-HARQ et CC-HARQ. Cette approximation couvre le cas général du canal à évanouissements Nakagami- m . En effet, on aura besoin par la suite d'exprimer f_k en fonction de f_{k-1} et de P_k comme suit :

$$f_k \approx \frac{h_k}{P_k^{m_k}} \cdot f_{k-1}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq K, \quad (2.14)$$

avec m_k le paramètre de la distribution Nakagami- m . Le paramètre h_k est indépendant de P_k .

L'objectif des approximations présentées ci-dessous est de trouver l'expression de h_k .

IR-HARQ

La probabilité de coupure dans le cas de IR-HARQ est définie par (2.6) :

$$f_k = \Pr \left\{ I_k^{(\text{IR})} < R \right\}, \quad (2.15)$$

où $I_k^{(\text{IR})} = \sum_{i=1}^k \log(1 + \gamma_i P_i)$. Par conséquent, l'évaluation de la probabilité de coupure revient à calculer la fonction de répartition (CDF) de $I_k^{(\text{IR})}$ évaluée au point R .

Pour alléger l'écriture, on note $I_k^{(\text{IR})} = I_k$ et :

$$C_k = \log_2(1 + \gamma_k P_k), \quad (2.16)$$

donc :

$$I_k = \sum_{i=1}^k C_i. \quad (2.17)$$

Il n'existe pas dans la littérature une expression analytique exacte de (2.15). Cependant, plusieurs approximations ont été proposées pour des cas particuliers, à titre d'exemple le cas du canal Rayleigh [7], [8]. Dans ce qui suit, nous proposons une approximation de (2.15) pour le cas général du canal Nakagami- m .

Nous utiliserons l'approximation en point de selle (SPA) [9]. C'est une approximation simple et précise de la fonction de répartition (CDF) d'une variable aléatoire I_k . Cette approximation exige la connaissance de la fonction génératrice des moments (MGF) $\mathcal{M}(s)$ et de la fonction génératrice cumulée (CGF) $\kappa(s)$ définies respectivement par :

$$\mathcal{M}_k(s) = \mathbb{E}_{I_k}[e^{I_k \cdot s}], \quad (2.18)$$

$$\kappa_k(s) = \log(\mathcal{M}_k(s)). \quad (2.19)$$

En appliquant la transformée de Laplace sur $\kappa_k(s)$, on aboutit à l'expression de l'approximation en point de selle [9]

$$f_K \approx \tilde{F}_{I_K}(R) = \begin{cases} Q(-\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \cdot \left(\frac{1}{\hat{w}} - \frac{1}{\hat{u}} \right), & \text{si } R \neq \mathbb{E}_{I_K}[I_K], \\ \frac{1}{2} + \frac{\kappa'''(0)}{6\sqrt{2\pi}[\kappa''(0)]^{3/2}}, & \text{si } R = \mathbb{E}_{I_K}[I_K], \end{cases} \quad (2.20)$$

avec :

$$\hat{w} = \text{sign}(\hat{s}) \sqrt{2(\hat{s} \cdot \gamma_{\text{th}} - \kappa(\hat{s}))}, \quad \hat{u} = \hat{s} \sqrt{\kappa''(\hat{s})},$$

où $\kappa'(s)$, $\kappa''(s)$ et $\kappa'''(s)$ sont respectivement la première, la deuxième et la troisième dérivée de $\kappa(s)$, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$, $Q(x) = \int_x^\infty \phi(t)dt$ et \hat{s} désigne la solution unique de l'équation

$$\kappa'(\hat{s}) = R. \quad (2.21)$$

Grâce à l'indépendance entre les variables, on a : $\mathcal{M}(s) = \prod_{k=1}^K \mathcal{M}_k(s)$ et $\kappa(\hat{s}) = \sum_{k=1}^K \kappa_k(\hat{s})$. Donc quand on obtient la valeur de \hat{s} , les expressions de $\mathcal{M}(\hat{s})$ et $\kappa''(\hat{s}) = \sum_{k=1}^K \kappa_k''(\hat{s})$ sont obtenues directement grâce à $\mathcal{M}_k(\hat{s})$ et de $\kappa_k''(\hat{s})$.

L'expression (2.20) est valable pour toutes les valeurs de R . Cependant, seules les valeurs de la probabilité de coupure qui sont petites, présentent un intérêt pratique.

On remplace $Q(-\hat{w})$ par $\frac{-\phi(\hat{w})}{\hat{w}}$ [10, Appendix II]¹, on obtient alors l'approximation suivante :

$$f_K \approx \hat{F}_{I_K}(R) = \frac{\mathcal{M}(\hat{s})e^{-\hat{s}R}}{|\hat{s}|\sqrt{2\pi\kappa''(\hat{s})}}. \quad (2.22)$$

L'expression (2.22) est la même que celle présentée dans [10].

Il est à signaler que l'étape la plus difficile lors de l'utilisation de SPA est la résolution de l'équation (2.21). En effet, pour les canaux Nakagami- m , les fonctions Meijer et les fonctions hypergéométriques généralisées figurent dans les expressions de $\mathcal{M}(s)$ et de $\kappa(s)$, ce qui rend la résolution analytique de l'équation (2.21) impossible.

En pratique, la fiabilité des systèmes de communication est traduite par une faible probabilité de coupure. Par conséquent, on cible des valeurs petites de CDF.

Considérons que, pour les valeurs petites de R on a $2^R \approx 1 + \log(2)R$. Ainsi, $\mathcal{M}_k(s)$ et $\kappa_k''(s)$ peuvent être approximés respectivement par $\hat{\mathcal{M}}_k(s)$ et $\hat{\kappa}_k''(s)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k(s) &\approx \hat{\mathcal{M}}_k(s) \\ &= \left(\frac{\log(2)m_k}{\log(2)m_k - sP_k\bar{\gamma}_k} \right)^{m_k} \cdot \left(1 + \frac{\log(2)m_k P_k \bar{\gamma}_k}{\log(2)m_k - sP_k\bar{\gamma}_k} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

1. Dans le cas général : $Q(t) \leq \phi(t)/t$. Cependant lorsque $t \gg 1$: $Q(t) \approx \phi(t)/t$

et donc

$$\begin{aligned} \kappa_k''(s) \approx \hat{\kappa}_k''(s) &= \frac{(m_k + 1)(P_k \bar{\gamma}_k)^2}{(\log(2)m_k - sP_k \bar{\gamma}_k)^2} \\ &= \frac{(P_k \bar{\gamma}_k)^2}{(\log(2)m_k - P_k \bar{\gamma}_k \cdot [s - m_k \log(2)])^2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Il est facile de montrer que $\hat{s} \xrightarrow{R \rightarrow 0} -\infty$. En considérant un tel comportement limite (c'est-à-dire pour $\tilde{s} \approx \hat{s} \rightarrow -\infty$), alors $\log(2)m_k - \tilde{s}\tilde{P}_k\tilde{\gamma}_k \approx -\tilde{s}P_k\bar{\gamma}_k$.

Ainsi les formules (2.23) et (2.24) sont approximées comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}_k(\tilde{s}) \approx \tilde{\mathcal{M}}_k(\tilde{s}) &= \left(\frac{-\log(2)m_k}{\tilde{s}\bar{\gamma}_k} \right)^{m_k} \\ &\cdot \left(1 - \frac{\log(2)m_k}{\tilde{s}} \right) \cdot \left(\frac{1}{P_k} \right)^{m_k}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

et

$$\hat{\kappa}_k''(\tilde{s}) \approx \tilde{\kappa}_k''(\tilde{s}) = \frac{(m_k + 1)}{\tilde{s}^2} - \frac{1}{(\tilde{s} - m_k \log(2))^2}, \quad (2.26)$$

d'où, une solution approximée de l'équation (2.21) est donnée par :

$$-\frac{\tilde{m}_K}{\tilde{s}} = R, \quad (2.27)$$

où

$$\tilde{m}_K = \sum_{k=1}^K m_k. \quad (2.28)$$

Par conséquent, l'approximation de la probabilité de coupure dans le cas de IR-HARQ est exprimée par :

$$\begin{aligned} f_K \approx \tilde{f}_K &= \frac{R \cdot e^{\tilde{m}_K}}{\tilde{m}_K \sqrt{2\pi \sum_{k=1}^K \tilde{\kappa}_k''\left(\frac{-\tilde{m}_K}{R}\right)}} \cdot \prod_{k=1}^K \left(\frac{\log(2)Rm_k}{\tilde{m}_K \bar{\gamma}_k} \right)^{m_k} \\ &\cdot \left(1 + \frac{\log(2)Rm_k}{\tilde{m}_K} \right) \cdot \left(\frac{1}{P_k} \right)^{m_k}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

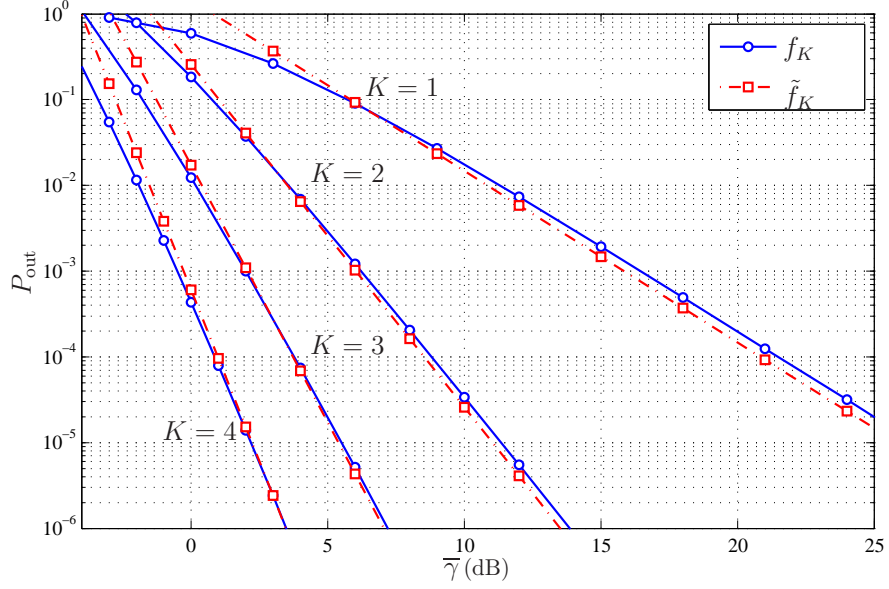


FIGURE 2.2 – Valeur exacte de la probabilité de coupure f_K comparée avec son approximation \tilde{f}_K (2.29) en fonction de SNR moyen $\bar{\gamma}$. Cas de IR-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 2$, $R = 1$ et $K = 1, 2, 3, 4$.

La Figure 2.2 montre la valeur exacte de la probabilité de coupure f_K et son approximation \tilde{f}_K pour de différents valeurs de K . Elle illustre l'exactitude de l'approximation SAP utilisée.

En utilisant l'approximation dérivée dans (2.29), on aboutit à l'expression de h_k .

Pour $2 \leq k \leq K$:

$$h_k = \frac{\tilde{m}_{k-1}}{\tilde{m}_k} \cdot \left(\frac{\log(2)R \cdot m_k \exp(1)}{\bar{\gamma}_k} \right)^{m_k} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\kappa}_l'' \left(\frac{-\tilde{m}_{k-1}}{R} \right) \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{\tilde{m}_k} \right)^{m_l} \left(1 - \frac{\log(2)R \cdot m_l}{\tilde{m}_k} \right)}}{\sqrt{\sum_{l=1}^k \tilde{\kappa}_l'' \left(\frac{-\tilde{m}_k}{R} \right) \prod_{l=1}^{k-1} \left(\frac{1}{\tilde{m}_{k-1}} \right)^{m_l} \left(1 - \frac{\log(2)R m_l}{\tilde{m}_{k-1}} \right)}}. \quad (2.30)$$

Pour $k = 1$:

$$h_1 = \frac{R \cdot e^{m_1}}{m_1 \sqrt{2\pi \tilde{\kappa}_1'' \left(\frac{-m_1}{R} \right)}} \cdot (1 + \log(2)R) \cdot \left(\frac{\log(2)R}{\bar{\gamma}_1} \right)^{m_1}. \quad (2.31)$$

CC-HARQ

Nous utilisons ici une méthode simple, proposée dans [11], permettant d'évaluer de façon précise la probabilité de coupure dans les systèmes CC-HARQ. Pour le cas des canaux à évanouissements distribués selon Nakgami- m , la probabilité de coupure peut être approximée par [11] :

$$f_K \approx \left(\frac{\exp(1) \cdot \gamma_{\text{th}}}{\tilde{m}_K} \right)^{\tilde{m}_K} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \tilde{m}_K}} \cdot \prod_{k=1}^K \left(\frac{m_k}{\bar{\gamma}_k P_k} \right)^{m_k}, \quad (2.32)$$

où \tilde{m}_K est défini dans (2.28) et γ_{th} est le SNR cible.

Par conséquent, l'expression de h_k pour $2 \leq k \leq K$, est donnée par :

$$h_k = \left(\frac{\exp(1) \gamma_{\text{th}} m_k}{\bar{\gamma}_k \tilde{m}_k} \right)^{m_k} \cdot \left(1 - \frac{m_k}{\tilde{m}_k} \right)^{\tilde{m}_{k-1} + 0.5}, \quad (2.33)$$

avec $\tilde{m}_K = \sum_{k=1}^K m_k$ et γ_{th} est le SNR seuil. Finalement, pour $k = 1$:

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_1}} \left(\frac{\exp(1) \cdot \gamma_{\text{th}}}{\bar{\gamma}_1} \right)^{m_1}. \quad (2.34)$$

2.4 Outils d'optimisation

Dans cette section, nous allons définir les différents outils d'optimisation utilisés par la suite. Nous présentons deux théorèmes de grande utilité dans la résolution des problèmes d'optimisation utilisant la dualité et la programmation géométrique.

2.4.1 Problème dual

On considère le problème d'optimisation dans la forme standard :

$$\begin{aligned} p^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} & g_0(x), \\ \text{sujet à} & g_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned} \quad (2.35)$$

On suppose que le domaine de définition de ce problème n'est pas vide, c'est-à-dire, il existe au moins un élément $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que : $g_i(x^*) \leq 0$, $1 \leq i \leq m$.

On appellera le problème d'optimisation (2.35) le problème primaire (PP) et on notera p^* sa solution optimale .

On définit la fonction Lagrangienne $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ par :

$$L(x, \lambda) = g_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x), \quad (2.36)$$

où λ_i est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g_i(x) \leq 0$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.

Les problèmes d'optimisation sous contraintes sont généralement difficiles à résoudre. En effet, l'application des conditions nécessaires KKT sur (2.36) revient à résoudre un système d'équations, ce qui n'est pas toujours abordable. C'est pourquoi on définit le problème dual (PD) "équivalent" au problème primaire (PP). La résolution du problème (PD) est en général plus facile et permet de déduire la solution de (PP) sous quelques conditions.

La fonction duale de Lagrange $d : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ est la valeur minimale de la fonction de Lagrange, pour $\lambda \in \mathbf{R}^m$:

$$d(\lambda) = \min_x L(x, \lambda) = \min_x \left(g_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \right). \quad (2.37)$$

La fonction duale $d(\lambda)$ donne une borne inférieure à la solution optimale p^* du problème primaire (2.35). Ainsi, $\forall \lambda \geq 0$ on a [12] :

$$d(\lambda) \leq p^*. \quad (2.38)$$

Le problème dual (PD) est alors défini par :

$$\begin{aligned} d^* = \min_{\lambda} & d(\lambda), \\ \text{sujet à} & \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

On appelle d^* la solution optimale du problème dual (PD) (2.39).

La solution optimale d^* est donc par définition la meilleure borne inférieure de p^* trouvée à l'aide de la fonction duale de Lagrange. En particulier, nous avons une inégalité simple mais importante :

$$d^* \leq p^*, \quad (2.40)$$

qui traduit la notion de la dualité faible. La différence $p^* - d^*$ est nommée l'écart optimal de la dualité.

En conséquence, le problème (PD) est équivalent au problème primaire (P) si l'écart optimal de dualité est égal à 0 :

$$d^* = p^*, \quad (2.41)$$

dans ce cas, on parle de la dualité forte.

Quelles que soient les fonctions $g_i(x)$ figurant dans le problème primaire (P) , la dualité faible (2.40) est toujours garantie. Cependant la dualité forte (2.41) ne l'est pas toujours.

Plusieurs théorèmes d'optimisation démontrent les conditions que doivent satisfaire les fonctions $g_i(x)$ afin d'avoir une forte dualité. On s'intéressera dans ce travail aux conditions démontrées dans [13] :

Théorème 1 [13] : *Soit H une variable aléatoire.*

Si :

- $g_i(x) = \mathbb{E}_H[h_i(x, H)]$, $\forall i \in \{1, ..m\}$.
- *La fonction de densité de probabilité de H n'a pas de point de positivité strict, c'est-à-dire, la fonction de répartition de H est continue.*

Alors on a la forte dualité, c'est-à-dire, l'écart de dualité est égale à zéro.

Les fonctions $h_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq m$ peuvent n'être ni convexes ni continues.

2.4.2 Programmation géométrique

La programmation géométrique est une méthode conçue pour résoudre un type particulier des problèmes d'optimisation non-linéaires. Un problème primaire (PP) de la programmation géométrique est formulé de la manière standard suivante [14] :

$$\begin{aligned} & \min_x g_0(x), & (2.42) \\ \text{sujet à} & \begin{cases} g_m(x) \leq 1, & 1 \leq m \leq M, \\ x_j > 0, & 1 \leq j \leq N, \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$g_m(x) = \sum_{t=1}^{T_m} c_{mt} \prod_{j=1}^N x_j^{a_{mtj}}, \quad 0 \leq m \leq M, \quad (2.43)$$

et $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, T_m est le nombre des termes dans chaque fonction posynomiale $g_m(x)$, $0 \leq m \leq M$ et $T = \sum_{m=0}^M T_m$ est le nombre total des termes dans le problème (2.42). Les exposants a_{mtj} sont des nombres réels, toutefois, les coefficients c_{mt} sont supposés être positifs. Pour alléger l'écriture, on notera $(c_1, c_2, \dots, c_T) \triangleq (c_{01}, c_{0,2}, \dots, c_{0,T_0}, c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,T_1}, c_{2,1}, \dots, c_{M,T_M})$. Le problème de maximisation suivant est appelé le problème dual (D) qui correspond au problème primaire (P) :

$$\max_{\delta} v(\delta) = \left[\prod_{i=1}^T \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right] \prod_{m=1}^M \lambda_m(\delta)^{\lambda_m(\delta)}, \quad (2.44)$$

avec : $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_T)$, et :

$$\lambda_m(\delta) = \sum_{t=1}^{T_m} \delta_{mt}, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (2.45)$$

sujet aux contraintes linéaires :

$$\begin{cases} \delta_{mt} \geq 0, & \forall t \in \{1, \dots, T_m\}, \forall m \in \{0, \dots, M\}, \\ \sum_{t=1}^{T_0} \delta_{0t} = 1, \\ \sum_{m=0}^M \sum_{t=1}^{T_m} a_{mtj} \delta_{mt} = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}. \end{cases} \quad (2.46)$$

On appelle $T - (N + 1)$ le degré de difficulté . On s'intéressera par la suite au problème de la programmation géométrique où : $T - (N + 1) = 0$,

on parlera alors d'un problème de la programmation géométrique avec zéro degré de difficulté.

Le charme du problème dual (2.44) est dû à la forme linéaire de ses contraintes, ce qui facilite énormément sa résolution, surtout dans le cas de zéro degré de difficulté. En effet, la maximisation dans le problème (2.44) revient uniquement à trouver la solution unique des contraintes linéaires (2.46).

On note $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_N)$ et $\underline{\delta} = (\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2, \dots, \underline{\delta}_T)$ les solutions optimales du problème primaire (2.42) et du problème dual (2.44). Dans [15, pp. 114-116], on démontre la condition pour avoir l'équivalence entre les deux problèmes (P) et (D) :

Théorème 2 [15] :

$g_0(\underline{x}) = v(\underline{\delta})$ si et seulement si,

$$\delta_{mt} = \begin{cases} \frac{c_{mt}\underline{x}_1^{a_{mt1}} \underline{x}_2^{a_{mt2}} \dots \underline{x}_N^{a_{mtN}}}{g_0(\underline{x})}, & \forall t \in \{1, \dots, T_0\}, m = 0, \\ \lambda_m(\underline{\delta})c_{mt}\underline{x}_1^{a_{mt1}} \underline{x}_2^{a_{mt2}} \dots \underline{x}_N^{a_{mtN}}, & \forall t \in \{1, \dots, T_m\}, \forall m \in \{1, \dots, M\}. \end{cases} \quad (2.47)$$

2.4.3 Programmation dynamique

Considérons un système dynamique et discret, décrit par :

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.48)$$

où

- k est un indice discret du temps,
- x_k est l'état du système, il englobe l'information du passé qui est utile pour une future optimisation,
- u_k est la variable de décision qui sera choisie à l'instant k , elle est une fonction de x_k , c'est-à-dire, $u_k = \mu_k(x_k)$ avec μ_k est la fonction qui relie x_k et u_k .
- w_k est un paramètre aléatoire,
- N est le nombre d'étapes,
- f_k est une fonction décrivant l'évolution du système.

On note $g_k(x_k, u_k, w_k)$ le coût accumulé jusqu'à l'instant k . On suppose que cette fonction est additive. Ainsi, le coût total obtenu à la fin du processus

est donné par :

$$g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, w_k). \quad (2.49)$$

À cause de la présence de w_k , le coût total est une variable aléatoire. Notre objectif est de trouver les valeurs optimales de u_0, u_1, \dots, u_{N-1} qui minimisent le coût total moyen :

$$\min_{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}} \mathbb{E} \left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, w_k) \right\}, \quad (2.50)$$

où l'espérance est calculée par rapport à la distribution conjointe des variables aléatoires impliquées.

On considère la classe des politiques $\pi = \{\mu_0, \dots, \mu_{N-1}\}$.

Pour chaque état initial x_0 et pour une politique particulière π , on définit la fonction du coût comme suit :

$$J_\pi(x_0) = \mathbb{E} \left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, w_k) \right\}. \quad (2.51)$$

On note $\pi^* = \{\mu_0^*, \mu_1^*, \dots, \mu_{N-1}^*\}$ la solution qui minimise (2.51) :

$$J_{\pi^*}(x_0) = \min_{\pi \in \Pi} J_\pi(x_0), \quad (2.52)$$

où Π est l'ensemble de toutes les politiques possibles π .

On considère le sous problème où on est à l'état x_i à l'instant i et on veut minimiser le coût entre les instants i et N :

$$\mathbb{E} \left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k), w_k) \right\}. \quad (2.53)$$

Sachant que la solution optimale de (2.51) est $\pi^* = \{\mu_0^*, \mu_1^*, \dots, \mu_{N-1}^*\}$, le principe d'optimalité [16] garantit que la solution optimale de (2.53) est la solution tronquée $\{\mu_1^*, \dots, \mu_{N-1}^*\}$.

Autrement dit, le principe d'optimalité suggère que la solution optimale peut être construite par parties.

La programmation dynamique se base sur le principe d'optimalité. En effet, elle résout le problème d'une manière séquentielle. Premièrement, on trouve la solution optimale du sous problème contenant uniquement le dernier état. Puis, on cherche la solution optimale du sous problème contenant les deux derniers états sachant qu'on a déjà trouvé la solution optimale du dernier état. On continue cette procédure jusqu'à l'obtention de la solution optimale du problème entier. Cette division du problème global en plusieurs sous problèmes séquentiels permet de réduire la dimension du problème d'optimisation dans chaque itération. C'est en effet une certaine application du principe 'diviser pour maîtriser'.

2.4.4 Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire les notions essentielles à la compréhension du reste du document. Dans les chapitres suivants, nous mettrons en oeuvre les différents approximations et outils d'optimisation que nous avons présentés ici pour minimiser la probabilité de coupure sous contrainte sur la puissance moyenne à long terme.

Chapitre 3

Adaptation et allocation optimale de la puissance

Dans ce chapitre, nous définissons formellement notre objectif. Nous allons tout d'abord analyser le cas d'adaptation optimale de la puissance pour les deux protocoles IR-HARQ et CC-HARQ. Puis, nous dérivons les expressions analytiques de la puissance optimale dans le cas de l'allocation. La reformulation des problèmes d'optimisation en programmation dynamique est expliquée. Par la suite, et à l'aide d'exemples numériques, nous allons comparer les performances des solutions optimales obtenues avec l'allocation constante de la puissance.

3.1 Problème d'optimisation

3.1.1 Cas de l'adaptation

Dans ce qui suit, nous tâcherons de trouver les puissances optimales $\{\tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)})\}_{k=1}^K$ qui minimisent la probabilité de coupure $P_{\text{out}} = f_K$ sous contrainte sur la puissance moyenne à long terme \bar{P}_{max} , et les valeurs maximales des puissances permises P_{max} . Le problème d'optimisation peut être

formulé comme suit :

$$\min_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2(I_1^{(*)}), \dots, \tilde{P}_K(I_{K-1}^{(*)})} f_K, \quad (3.1)$$

$$\text{sujet à : } \begin{cases} \bar{P} \leq \bar{P}_{\max}, \\ 0 \leq \tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)}) \leq P_{\max}, \quad 1 \leq k \leq K, \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $* \in \{IR, CC\}$ et la puissance à long terme est donnée par (2.13) :

$$\bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{I_{k-1}^{(*)}} [\tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)})]}{\sum_{k=0}^{K-1} f_k}. \quad (3.3)$$

avec

$$f_k = \Pr \left\{ I_k^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)} \right\} = F_{I_k^{(*)}}(I_{\text{th}}^{(*)}) = \int_0^{I_{\text{th}}^{(*)}} p_{I_k^{(*)}}(x) dx, \quad (3.4)$$

où $p_{I_k}(x)$ est la densité de probabilité de $I_k^{(*)}$ et

$$\mathbb{E}_{I_{k-1}^{(*)}} [\tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)})] = \int_0^{I_{\text{th}}^{(*)}} \tilde{P}_k(x) p_{I_{k-1}^{(*)}}(x) dx. \quad (3.5)$$

On définit la fonction Lagrangienne $L : \mathbf{R}^K \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, associée au problème (3.1), comme suit :

$$\begin{aligned} L & \left(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2(I_1^{(*)}), \dots, \tilde{P}_K(I_{K-1}^{(*)}), \lambda \right) \\ & = f_K + \lambda \left(\sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{I_{k-1}^{(*)}} [\tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)})] - \bar{P}_{\max} \sum_{k=0}^{K-1} f_k \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

où on garde les contraintes implicites sur la valeur maximale de la puissance : $0 \leq \tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)}) \leq P_{\max}$.

Sans perdre de généralité, on supposera par la suite que $\bar{P}_{\max} = 1$.

3.1.2 Cas de l'allocation

On considère le problème de l'allocation de la puissance optimale, c-à-d que la puissance est une fonction uniquement de l'index de retransmission k : $P_k(\mathcal{CSI}_{k-1}) \equiv \hat{P}_k \cdot \mathbb{I}(I_{k-1} \leq I_{\text{th}})$. Donc, l'énergie moyenne utilisée dans la $k^{\text{ième}}$ transmission (3.5) est donnée par :

$$\mathbb{E}[P_k] = \hat{P}_k \cdot f_{k-1}. \quad (3.7)$$

Ainsi, le problème d'optimisation (3.1) peut être reformulé dans le cas de l'allocation comme suit :

$$\min_{\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_K} f_K, \quad (3.8)$$

$$\text{sujet à : } \begin{cases} \bar{P} \leq \bar{P}_{\max}, \\ 0 \leq \hat{P}_k \leq P_{\max}, \quad 1 \leq k \leq K, \end{cases} \quad (3.9)$$

avec $* \in \{IR, CC\}$ et la puissance à long terme est donnée par (2.13) :

$$\bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^K \hat{P}_k f_{k-1}}{\sum_{k=0}^{K-1} f_k}. \quad (3.10)$$

Par conséquent, la fonction Lagrangienne L définie dans l'équation (3.6) peut être exprimée par :

$$L(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_K, \lambda) = f_K + \lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^K \hat{P}_k f_{k-1} - \sum_{k=0}^K f_k \right). \quad (3.11)$$

3.2 Revue de la littérature

Plusieurs travaux ont été présentés dans la littérature dans le but d'améliorer les performances de HARQ. Ces recherches ont traité la problématique de l'allocation optimale des ressources, dont la puissance.

Dans [4], les auteurs proposent un schéma d'adaptation de la puissance pour maximiser le 'throughput' dans le cas où l'état du canal est parfaitement connu. Un algorithme de contrôle de la puissance a été proposé en [17], permettant d'améliorer la diversité dans un canal quasi-statique. Le même type de canal a été traité dans [18], où on étudie le problème de minimisation de l'énergie moyenne sous contrainte sur la probabilité de coupure.

Le problème d'optimisation de l'énergie sous contrainte sur 'Packet Error Rate' est résolu en utilisant la programmation géométrique, pour le scénario codage espace-temps HARQ, dans un canal Rayleigh à évanouissements par blocs. La même méthode est utilisée [19] dans le but de trouver la puissance optimale en terme de la probabilité de coupure sous contrainte sur l'énergie totale pour le cas spécial du protocole CC-HARQ. Le même problème a été traité dans [20] mais pour le cas du protocole IR-HARQ avec seulement deux transmissions permises ($K = 2$).

Dans [21], on propose une discrétisation pratique de l'état du canal et une adaptation de la puissance qui permet d'atteindre la diversité optimale dans le cas de MIMO IR-HARQ. La solution proposée est sous optimale en terme de la probabilité de coupure.

En guise de conclusion, il n'existe pas de travaux dans la littérature proposant une politique d'adaptation de la puissance optimale en terme de la probabilité de coupure et de la diversité. Pour l'allocation de la puissance, des travaux traitent le cas particulier de deux transmissions (c'est-à-dire $K = 2$) dans un canal Rayleigh pour IR-HARQ.

Dans ce qui suit, nous proposons une politique optimale d'adaptation de la puissance en terme de la probabilité de coupure et de la diversité. Nous analysons le cas de l'allocation de la puissance dans un canal Nakagami- m pour K transmissions, $\forall K \in \mathbf{N}^*$.

3.3 Adaptation optimale de la puissance

Dans cette section, on analyse le cas où le récepteur peut envoyer, via le canal de retour, l'état du canal lors des transmissions précédentes. Alors, l'émetteur peut utiliser cette information pour ajuster la puissance à utiliser dans la transmission actuelle.

3.3.1 Cadre général

Il s'avère difficile d'utiliser les conditions Karush–Kuhn–Tucker (KKT) sur la fonction Lagrangienne (3.6) afin de résoudre le problème (3.1). Cette difficulté est due, entre autres, à la dimension du système d'équations à résoudre et à l'absence des expressions exactes (closed form) des fonctions objectives et des contraintes. C'est pourquoi on utilisera le problème dual.

Afin de satisfaire les conditions du Théorème 1, on exprime la fonction objective et les contraintes du problème sous forme d'espérance d'une variable aléatoire ayant une fonction de répartition continue. Or, la puissance \tilde{P}_1 est indépendante de toute variable aléatoire. À cet effet, on définit le sous-problème suivant $\forall \tilde{P}_1 > 0$:

$$\hat{f}_K(\tilde{P}_1) = \min_{\tilde{P}_2(I_1^{(*)}), \dots, \tilde{P}_K(I_{K-1}^{(*)})} f_K, \quad (3.12)$$

$$\text{sujet à : } \begin{cases} \sum_{k=2}^K \mathbb{E}_{I_{k-1}^{(*)}} [\tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)})] - \sum_{k=2}^{K-1} f_k \leq 1 + f_1 - \tilde{P}_1, \\ 0 \leq \tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)}) \leq P_{\max}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq K. \end{cases} \quad (3.13)$$

Par conséquent, la solution optimale de (3.1) est exprimée comme suit :

$$\min_{\tilde{P}_1} \hat{f}_K(\tilde{P}_1). \quad (3.14)$$

On exprime la probabilité de coupure (2.6) et l'énergie moyenne (2.12) en terme du gain du canal γ_k :

$$f_K = \Pr \left\{ I_K^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)} \right\} = \mathbb{E}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K} \left[\mathbb{I}(I_K^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)}) \right], \quad (3.15)$$

avec : $\mathbb{I}(x) = 1$ si x est vrai, et $\mathbb{I}(x) = 0$ si x est faux.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P] &= \tilde{P}_1 + \sum_{k=2}^K \mathbb{E}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}} \left[\tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)}) \right] \\ &= \tilde{P}_1 + \mathbb{E}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{K-1}} \left[\sum_{k=2}^K \tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)}) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

On définit la fonction duale de Lagrange $d : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$:

$$d(\tilde{P}_1, \lambda) = \min_{\tilde{P}_2(I_1^{(*)}), \dots, \tilde{P}_K(I_{K-1}^{(*)})} L\left(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2(I_1^{(*)}), \dots, \tilde{P}_K(I_{K-1}^{(*)}), \lambda\right), \quad (3.17)$$

Le problème d'optimisation dual est donné donc par :

$$D(\tilde{P}_1) = \min_{\lambda \geq 0} d(\tilde{P}_1, \lambda). \quad (3.18)$$

Ainsi, d'après le Théorème 1, l'écart de dualité est égal à 0. Autrement dit, $D(\tilde{P}_1) = \hat{f}_K(\tilde{P}_1)$, $\forall \tilde{P}_1 \geq 0$ tel que $1 + f_1 - \tilde{P}_1 > 0$.
Pour $*$ $\in \{\text{IR}, \text{CC}\}$, l'équation (3.17) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} d(\tilde{P}_1, \lambda) &= \min_{\tilde{P}_2(I_1^{(*)}), \dots, \tilde{P}_K(I_{K-1}^{(*)})} \mathbb{E}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K} \left[\mathbb{I}(I_K^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)}) + \lambda \sum_{k=2}^K \tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)}) \right. \\ &\quad \left. - \lambda \sum_{k=1}^{K-1} \mathbb{I}(I_{Kk}^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)}) \right] \quad (3.19) \\ &= \mathbb{E}_{\gamma_1} \left[-\lambda \cdot \mathbb{I}(I_1^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)}) + \lambda \cdot \tilde{P}_1(I_0^{(*)}) + \min_{\tilde{P}_2(I_1^{(*)})} \mathbb{E}_{\gamma_2} \left[-\lambda \cdot \mathbb{I}(I_2^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda \cdot \tilde{P}_1(I_1^{(*)}) + \min_{\tilde{P}_3(I_2^{(*)})} \mathbb{E}_{\gamma_3} \left[-\lambda \cdot \mathbb{I}(I_3^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)}) + \lambda \cdot \tilde{P}_1(I_1^{(*)}) + \dots \right] \dots \right] \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation (3.17) peut être écrite sous la forme récursive de

la programmation dynamique :

$$\begin{aligned}
d(\tilde{P}_1, \lambda) &= J_1(I_0^{(*)}) \\
J_1(I_0^{(*)}) &= \{-\lambda \cdot \mathbb{E}_{\gamma_1} \{\mathbb{I}(I_1^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)})\} + \lambda \cdot \tilde{P}_1(I_0^{(*)}) + \mathbb{E}_{\gamma_1} \{J_2(I_1^{(*)})\}\} \quad (3.20) \\
J_2(I_1^{(*)}) &= \min_{\tilde{P}_2(I_1^{(*)})} \{-\lambda \cdot \mathbb{E}_{\gamma_2} \{\mathbb{I}(I_2^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)})\} + \lambda \cdot \tilde{P}_2(I_1^{(*)}) \\
&\quad + \mathbb{E}_{\gamma_2} \{J_3(I_2^{(*)})\}\} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
J_k(I_{k-1}^{(*)}) &= \min_{\tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)})} \{-\lambda \cdot \mathbb{E}_{\gamma_k} \{\mathbb{I}(I_k^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)})\} + \lambda \cdot \tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)}) \\
&\quad + \mathbb{E}_{\gamma_k} \{J_{k+1}(I_k^{(*)})\}\} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

⋮

$$J_K(I_{K-1}^{(*)}) = \min_{\tilde{P}_K(I_{K-1}^{(*)})} \{\lambda \cdot \tilde{P}_K(I_{K-1}^{(*)}) + \mathbb{E}_{\gamma_K} \{\mathbb{I}(I_K^{(*)} < I_{\text{th}}^{(*)})\}\}, \quad (3.23)$$

où on a défini l'état x_k à l'instant k (section 2.4.3) par $x_k = I_k^{(*)}$. Les deux états aux instants k et $k - 1$ sont reliés par la relation suivante :

$$\begin{cases} I_k^{(\text{IR})} = I_{k-1}^{(\text{IR})} + \log\left(1 + \gamma_k \tilde{P}_k(I_{k-1}^{(\text{IR})})\right), \\ I_k^{(\text{CC})} = I_{k-1}^{(\text{CC})} + \gamma_k \tilde{P}_k(I_{k-1}^{(\text{CC})}). \end{cases} \quad (3.24)$$

On note que $I_k^{(*)} \in [0, I_{\text{th}}^{(*)}]$, donc $I_k^{(*)}$ peut être discrétisé en L points.

Pour une valeur donnée de $I_k^{(*)}$ et sachant que la valeur de la fonction $J_k(I_k^{(*)})$ est déjà connue, on peut trouver la valeur optimale $\tilde{P}_{k+1}(I_k^{(*)})$.

Par conséquent et grâce à la programmation dynamique (3.21)-(3.23), l'optimisation globale du problème (3.12) sur un ensemble de cardinal L^{K-1} se réduit à $(K - 1)L$ sous problèmes d'optimisation de dimension 1. On utilise la méthode numérique "Brent" pour trouver la valeur de λ qui permet de vérifier la contrainte sur la puissance moyenne.

Dans le reste de la section et afin d'alléger l'écriture, on notera $I_{k-1}^{(*)} \triangleq I_{k-1}$ et $I_{\text{th}}^{(*)} \triangleq I_{\text{th}}$ car le contexte de l'analyse montrera clairement si on parle de IR-HARQ ou de CC-HARQ.

3.3.2 Cas de IR-HARQ

Dans le contexte de IR-HARQ, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\gamma_k}[\mathbb{I}(I_k < I_{\text{th}})] &= \Pr\{I_{k-1} + \log(1 + \gamma_k \cdot P_k(I_{k-1})) < R\} \\ &= F_{\gamma_k}\left(\frac{2^{R-I_{k-1}} - 1}{\tilde{P}_k(I_{k-1})}\right).\end{aligned}\quad (3.25)$$

Pour avoir un minimum lors de la dernière étape de la programmation dynamique, on calcule la dérivée de la fonction qu'on veut minimiser dans (3.23) :

$$\begin{aligned}u(\tilde{P}_K) &= \lambda - \frac{2^{R-I_{K-1}} - 1}{\tilde{P}_K^2} \cdot p_{\gamma_K}\left(\frac{2^{R-I_{K-1}} - 1}{\tilde{P}_K}\right) \\ &= \lambda - \frac{1}{2^{R-I_{K-1}} - 1} \cdot q\left(\frac{2^{R-I_{K-1}} - 1}{\tilde{P}_K}\right).\end{aligned}\quad (3.26)$$

Il est facile de montrer que la fonction $q(x) \triangleq x^2 p_{\gamma_K}(x)$ satisfait $q(x) > 0$, $q(0) = 0$ et $q(\infty) = 0$. Ainsi, $q(x)$ admet un maximum $q_{\max} = \max_x q(x)$. Si $\lambda \cdot (2^{R-I_{K-1}} - 1) > q_{\max}$, alors la solution optimale de (3.26) n'existe pas. On prend dans ce cas, $\tilde{P}_K = 0$ ce qui donne $J_K(I_{K-1}) = 1$. Si $\lambda \cdot (2^{R-I_{K-1}} - 1) < q_{\max}$ alors $u(\tilde{P}_K)$ a au moins deux racines. Par exemple, dans le cas du canal Rayleigh, on a exactement deux racines. Le premier correspond au local minimal et l'autre au maximal. La solution optimale est ainsi celle qui a la deuxième dérivée positive.

Dans la figure 3.1, on montre les valeurs de $\tilde{P}_k(x)$ dans le cas où $K = 4$. Comme on peut le remarquer, la solution optimale peut consister à ce que l'émetteur reste silencieux. En effet, si après la $k^{\text{ième}}$ transmission, l'information mutuelle accumulée est inférieure à un certain seuil $I_{0,k}$ (dans la figure 3.1, $I_{0,1} \approx 0.14$, $I_{0,2} \approx 0.31$ et $I_{0,3} \approx 0.65$), alors l'émetteur décide de rester silencieux. Il s'agit d'envoyer avec une puissance égale à zéro jusqu'à ce que le nombre maximal de transmissions soit atteint. Là, il commence à transmettre un nouveau paquet. Ce "temps de silence" permet de respecter la contrainte sur la puissance moyenne à long terme.

Pour calculer la probabilité de coupure, on utilise (3.4) où la fonction de répartition cumulative (CDF) de I_k est notée par $F_{I_k}(x)$. En prenant en

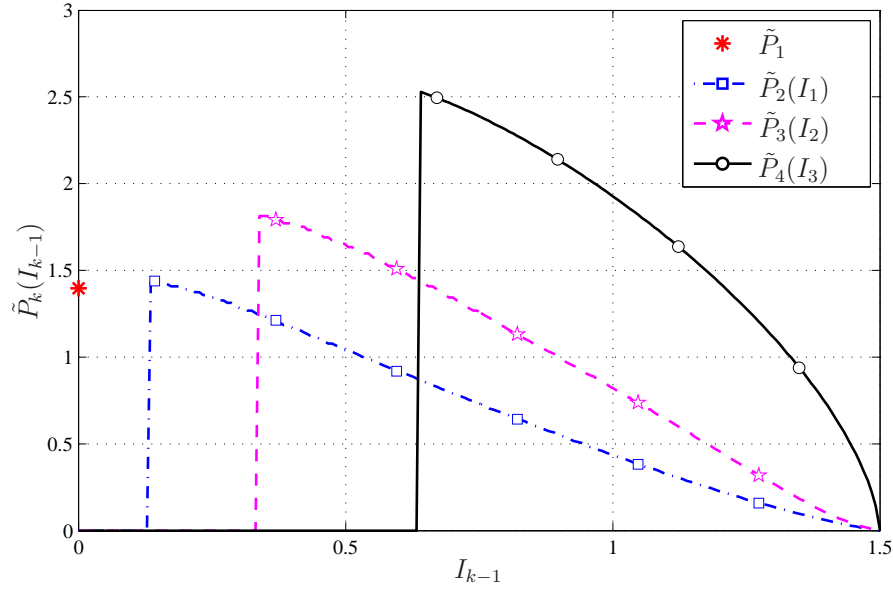


FIGURE 3.1 – Les puissances d’adaptation optimales $\tilde{P}_k(I_{k-1})$ dans le cas de IR-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 2$, $K = 4$, $R = 1.5$ et $\bar{\gamma} = -4$ dB.

considération le fait que $\tilde{P}_k(x) = 0$ pour $x \in [0, I_{0,k-1}]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 F_{I_k}(x) &= \Pr \left\{ I_{k-1} + \log(1 + \gamma_k \cdot \tilde{P}_k(I_{k-1})) < x \right\} \\
 &= \begin{cases} F_{I_{k-1}}(x), & \text{si } x < I_{0,k-1}, \\ F_{I_{k-1}}(I_{0,k-1}) \\ \quad + \int_{I_{0,k-1}}^x F_{\gamma} \left(\frac{2^{x-y} - 1}{\tilde{P}_k(y)} \right) \cdot p_{I_{k-1}}(y) dy, & \text{si } x > I_{0,k-1}. \end{cases} \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

$F_{I_k}(x)$ dépend de la valeur du PDF $p_{I_{k-1}}(y)$ de I_{k-1} .

La dérivée de (3.27) donne la forme récursive de PDF suivante :

$$p_{I_k}(x) = \begin{cases} p_{I_{k-1}}(x), & \text{si } x < I_{0,k-1}, \\ \int_{I_{0,k}}^x \frac{\log(2)2^{x-y}}{\tilde{P}_k(y)} p_{I_{k-1}}(y) \cdot p_\gamma\left(\frac{2^{x-y} - 1}{\tilde{P}_k(y)}\right) dy, & \\ p_{I_{k-1}}(x), & \text{si } x > I_{0,k-1}, \end{cases} \quad (3.28)$$

avec $p_{I_1}(x)$ est reliée à $p_\gamma(x)$ par la formule suivante :

$$p_{I_1}(x) = \frac{\log(2)2^x}{\tilde{P}_1} \cdot p_\gamma\left(\frac{2^x - 1}{\tilde{P}_1}\right). \quad (3.29)$$

3.3.3 Cas de CC-HARQ

Dans le contexte de CC-HARQ, on a :

$$\mathbb{E}_{\gamma_k} \left[\mathbb{I}(I_k^{(CC)} < I_{\text{th}}^{(CC)}) \right] = F_{\gamma_k} \left(\frac{\gamma_{\text{th}} - I_{k-1}}{\tilde{P}_k(I_{k-1})} \right). \quad (3.30)$$

Suivant la même approche que celle du cas IR-HARQ, pour avoir un minimum lors de la dernière étape de la programmation dynamique, on calcule la dérivée de la fonction qu'on veut minimiser dans (3.23) :

$$u(\tilde{P}_K) = \lambda - q \left(\frac{\gamma_{\text{th}} - I_{k-1}}{\tilde{P}_K} \right) \cdot \frac{1}{\gamma_{\text{th}} - I_{k-1}} = 0. \quad (3.31)$$

La condition pour avoir un minimum non nul est : $\lambda \cdot (\gamma_{\text{th}} - I_{k-1}) < q_{\text{max}}$.

La figure 3.2 montre les valeurs de $\tilde{P}_k(x)$ dans le cas où $K = 4$. Comme pour le protocole IR-HARQ, le "temps de silence" peut aussi apparaître comme une solution optimale du cas CC-HARQ. Par exemple : dans la figure 3.2 on a $I_{0,1} \approx 0.14$, $I_{0,2} \approx 0.34$ et $I_{0,3} \approx 0.63$.

Pour calculer la probabilité de coupure, on utilise (3.4) où la fonction de répartition cumulative (CDF) de I_k est notée par $F_{I_k}(x)$. En prenant en

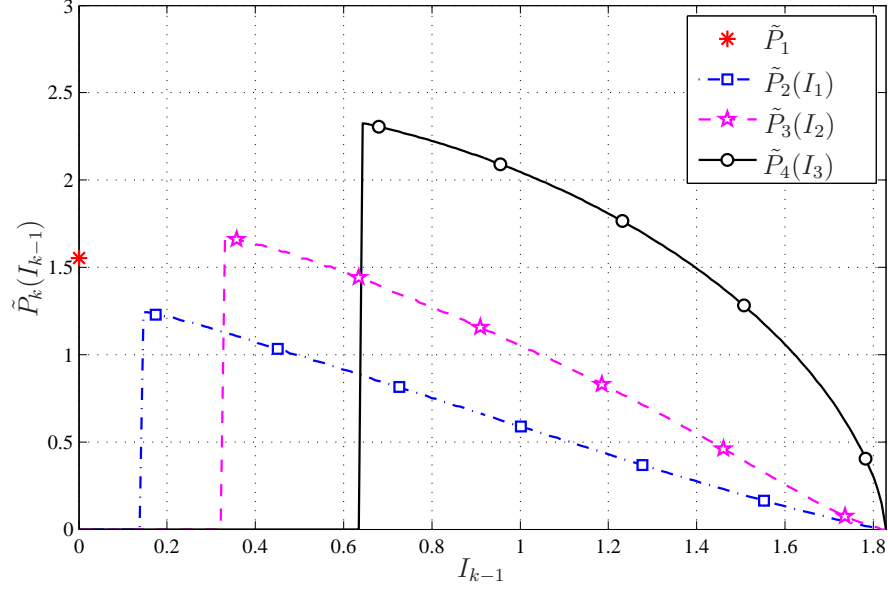


FIGURE 3.2 – Les puissances d’adaptation optimales $\tilde{P}_k(I_{k-1})$ dans le cas de CC-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 2$, $K = 4$, $R = 1.5$ et $\bar{\gamma} = -2$ dB.

considération le fait que $\tilde{P}_k(x) = 0$ pour $x \in [0, I_{0,k-1}]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 F_{I_k}(x) &= \Pr \left\{ I_{k-1} + \gamma_k \cdot \tilde{P}_k(I_{k-1}) < x \right\} \\
 &= \begin{cases} F_{I_{k-1}}(x), & \text{si } x < I_{0,k-1}, \\ F_{I_{k-1}}(I_{0,k-1}) + \int_{I_{0,k-1}}^x F_{\gamma} \left(\frac{x-y}{\tilde{P}_k(y)} \right) \cdot p_{I_{k-1}}(y) dy, & \text{si } x > I_{0,k-1}. \end{cases} \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

$F_{I_k}(x)$ dépend aussi de la valeur du PDF $p_{I_{k-1}}(y)$ de I_{k-1} .

La dérivée de (3.32) donne la forme récursive de PDF suivante :

$$p_{I_k}(x) = \begin{cases} p_{I_{k-1}}(x), & \text{si } x < I_{0,k-1}, \\ \int_{I_{0,k}}^x \frac{1}{\tilde{P}_k(y)} p_{I_{k-1}}(y) \cdot p_\gamma\left(\frac{x-y}{\tilde{P}_k(y)}\right) dy, & \text{si } x > I_{0,k-1}, \end{cases} \quad (3.33)$$

avec $p_{I_1}(x)$ est reliée à $p_\gamma(x)$ par la formule suivante :

$$p_{I_1}(x) = \frac{1}{\tilde{P}_1} \cdot p_\gamma\left(\frac{x}{\tilde{P}_1}\right). \quad (3.34)$$

3.4 Allocation optimale de la puissance

Dans cette section, on considère le cas où le récepteur peut envoyer uniquement le bit conventionnel (ACK ou NACK) à l'aide du canal de retour. Ainsi, l'émetteur ajuste la puissance dans la transmission suivante en se basant sur les statistiques du canal.

3.4.1 Cadre général

On considère le problème d'allocation de la puissance optimale, c-à-d $P_k(\mathcal{CSI}_{k-1}) \equiv \hat{P}_k \cdot \mathbb{I}(I_{k-1} \leq I_{\text{th}})$. Donc, la fonction Lagrangienne L est définie (3.11) par :

$$L(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_K, \lambda) = f_K + \lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^K \hat{P}_k f_{k-1} - \sum_{k=0}^K f_k \right). \quad (3.35)$$

Afin de reformuler l'équation (3.35) en programmation dynamique, on doit trouver les états x_k tels que :

1. f_k peut être calculée à partir de x_k ;
2. L'état x_{k+1} peut être obtenu à partir de x_k et \hat{P}_{k+1} .

Comme introduit dans la section 2.3.3, on suppose que :

$$f_k = \frac{h_k}{\hat{P}_k^{m_k}} \cdot f_{k-1}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq K, \quad (3.36)$$

avec m_k est le paramètre de la distribution Nakagami- m et le paramètre h_k est indépendant de \hat{P}_k . En considérant que $f_0 = 1$, la fonction Lagrangienne (3.35) peut être reformulée selon la structure récursive suivante :

$$\begin{aligned} L(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_K, \lambda) &= J_1(f_0) \\ J_1(f_0) &= \lambda \cdot (\hat{P}_1 - 1) \cdot f_0 + J_2(f_1) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$J_2(f_1) = \lambda \cdot (\hat{P}_2 - 1) \cdot f_1 + J_3(f_2) \quad (3.38)$$

...

$$J_{K-1}(f_{K-1}) = \lambda \cdot (\hat{P}_K - 1) \cdot f_{K-1} + f_K. \quad (3.39)$$

En utilisant les conditions nécessaires KKT, et commençant par l'équation (3.39), on trouve l'expression exacte analytique de la puissance optimale \hat{P}_K :

$$\hat{P}_K = \min \left\{ \left(\frac{m_K \cdot h_K}{\lambda} \right)^{\frac{1}{m_K+1}}, P_{\max} \right\}, \quad (3.40)$$

et pour $1 \leq k \leq K - 1$:

$$\hat{P}_k = \min \left\{ \left(\frac{m_k \cdot g_{k+1} \cdot h_k}{\lambda} \right)^{\frac{1}{m_k+1}}, P_{\max} \right\}, \quad (3.41)$$

où

$$g_K = \lambda \cdot (\hat{P}_K - 1) + \frac{h_K}{\hat{P}_K^{m_K}}, \quad (3.42)$$

et finalement pour $1 \leq k \leq K - 1$:

$$g_k = \lambda \cdot (\hat{P}_k - 1) + \frac{g(\hat{P}_{k+1}) \cdot h_k}{\hat{P}_k^{m_k}}. \quad (3.43)$$

Dans les deux sections qui suivent, on va rappeler l'expression de h_k pour les deux protocoles IR-HARQ et CC-HARQ.

3.4.2 Cas de IR-HARQ

L'expression de h_k dans le cas IR-HARQ est déjà exprimée dans l'équation (2.30).

La figure 3.3 montre les valeurs optimales de la puissance \hat{P}_k pour $K = 4$. On remarque que la solution optimale suggère que $\hat{P}_k \geq \hat{P}_{k-1}$. De plus, les puissances optimales \hat{P}_3 et \hat{P}_4 accroissent d'une façon très rapide avec le SNR $\bar{\gamma}$. C'est pourquoi l'ajout de la contrainte sur la puissance maximale P_{\max} présente un intérêt pratique sans nuire aux performances optimales (voir la figure 3.5).

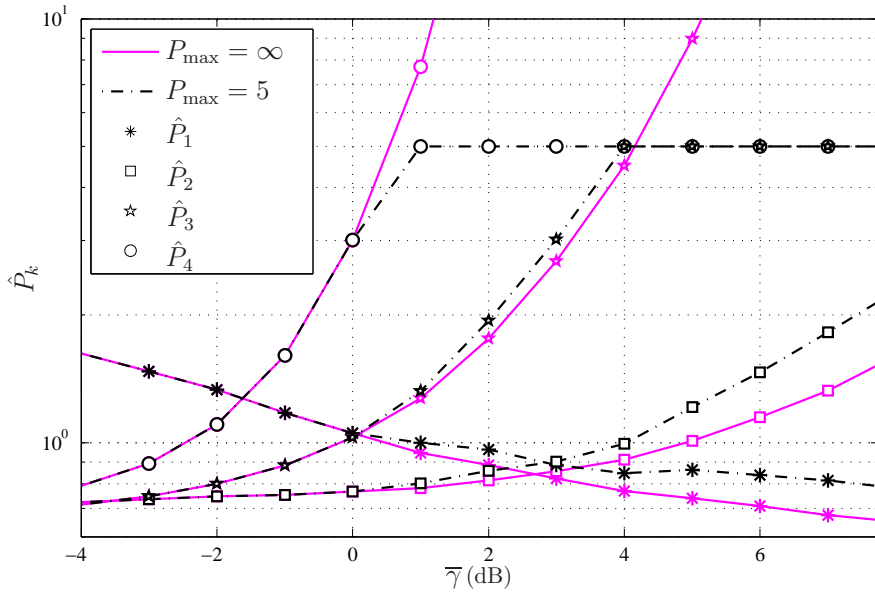


FIGURE 3.3 – Les puissances optimales de l'allocation \hat{P}_k dans le cas de IR-HARQ dans un canal Nakagami- m où $K = 4$, $m = 2$ et $R = 1.5$. Les deux cas sans bornes (c-à-d, $P_{\max} = \infty$) et avec bornes (c-à-d, $P_{\max} = 5$) sont montrés pour la comparaison.

3.4.3 Cas de CC-HARQ

L'expression de h_k dans le cas CC-HARQ est déjà exprimée dans l'équation (2.33).

Dans la même optique du cas précédent (cas de IR-HARQ), La figure 3.4 montre les valeurs optimales de la puissance \hat{P}_k pour $K = 4$. Ainsi, la solution optimale propose que $\hat{P}_k \geq \hat{P}_{k-1}$. Aussi, les puissances optimales \hat{P}_3 et \hat{P}_4 augmentent rapidement avec le SNR $\bar{\gamma}$. Comme le cas qui précède, l'ajout

de la contrainte sur la puissance maximale P_{\max} présente un intérêt pratique sans nuire aux performances optimales (voir la figure 3.6).

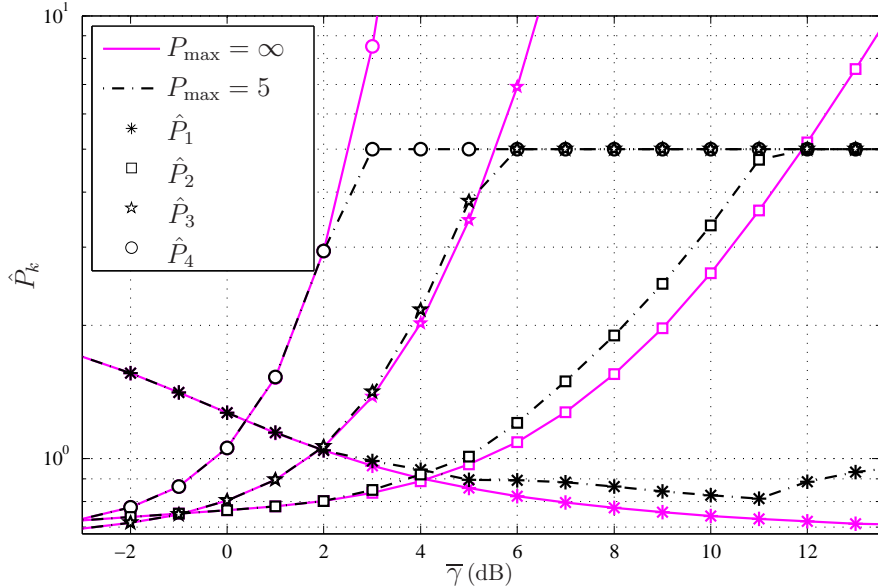


FIGURE 3.4 – Les puissances optimales de l’allocation \hat{P}_k dans le cas de CC-HARQ dans un canal Nakagami- m où $K = 4$, $m = 2$ et $R = 1.5$. Les deux cas sans bornes (c-à-d, $P_{\max} = \infty$) et avec bornes (c-à-d, $P_{\max} = 5$) sont montrés pour la comparaison.

3.5 Exemples numériques

Dans cette section, on adoptera les notations suivantes :

- $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ la probabilité de coupure lors de l’adaptation optimale de la puissance, obtenue en utilisant la programmation dynamique, (section 3.3).
- $P_{\text{out}}^{\text{al}}$ la probabilité de coupure lors de l’allocation optimale de la puissance, obtenue en utilisant la programmation dynamique, (section 3.4).
- $P_{\text{out}}^{\text{c}}$ la probabilité de coupure lorsqu’on utilise une puissance constante dans toutes les transmissions, c-à-d : $P_k(\mathcal{CSI}_{k-1}) \equiv \bar{P} = 1$ pour $k = 1, \dots, K$.

- P_{\max} est la valeur maximale permise de la puissance pour toutes les transmissions, c-à-d : $0 \leq \tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)}) \leq P_{\max}, \forall k \in \{1, \dots, K\}$.

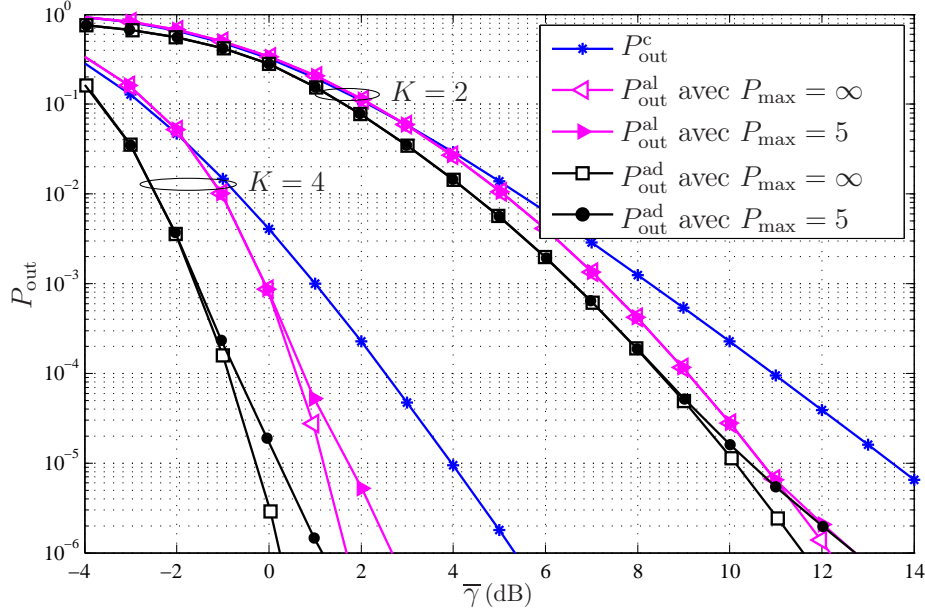


FIGURE 3.5 – Valeur optimale de la probabilité de coupure (dans le cas de l’adaptation $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et de l’allocation $P_{\text{out}}^{\text{al}}$) comparée avec la probabilité de coupure lors de l’utilisation d’une puissance constante $P_{\text{out}}^{\text{c}}$ (c-à-d $P_k = \bar{P} = 1, \forall k$). Les deux cas avec bornes (c-à-d, $P_{\max} = 5$) et sans bornes (c-à-d, $P_{\max} = \infty$) sont montrés dans le but de comparer. Cas de IR-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 2$, $R = 1.5$ et $K = 2, 4$.

Les figures 3.5 et 3.6 présentent les résultats optimaux de la probabilité de coupure $P_{\text{out}}^{\text{al}}$ et $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ pour CC-HARQ et IR-HARQ respectivement. On présente les deux cas $P_{\max} = 5$ et $P_{\max} = \infty$. Les résultats de $P_{\text{out}}^{\text{c}}$ sont montrés afin de comparer. On peut constater clairement que les résultats optimaux sont meilleurs par rapport à $P_{\text{out}}^{\text{c}}$. Pour IR-HARQ avec $K=4$, $P_{\max} = \infty$ et pour une valeur de la probabilité de coupure égale à 10^{-6} , $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ présente un gain de 5 dB par rapport à $P_{\text{out}}^{\text{c}}$, alors que $P_{\text{out}}^{\text{al}}$ présente un gain de 2.5 dB par rapport à $P_{\text{out}}^{\text{c}}$.

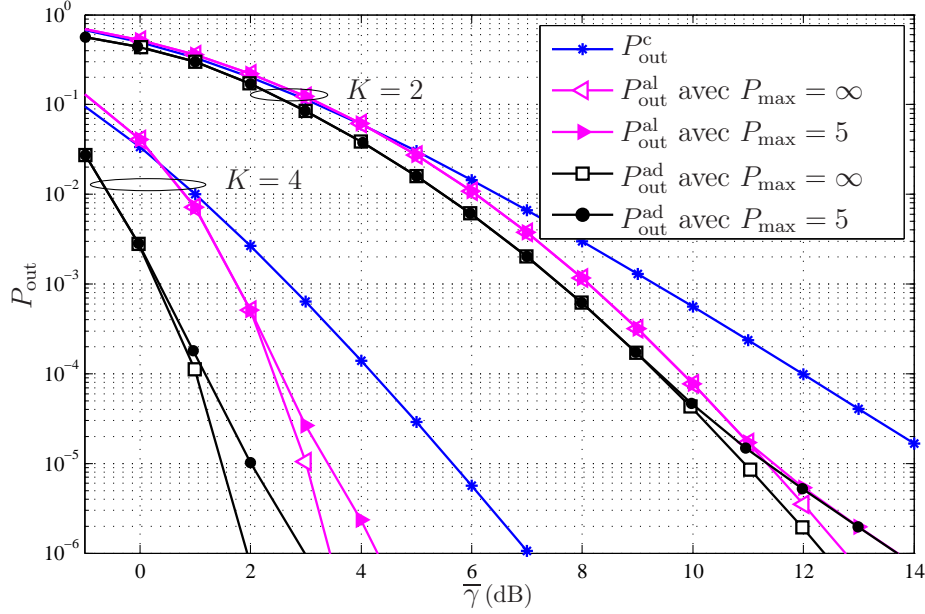


FIGURE 3.6 – Valeur optimale de la probabilité de coupure (dans le cas de l’adaptation $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et de l’allocation $P_{\text{out}}^{\text{al}}$) comparée avec la probabilité de coupure lors de l’utilisation d’une puissance constante P_{out}^c (c-à-d $P_k = \bar{P} = 1, \forall k$). Les deux cas avec bornes (c-à-d, $P_{\text{max}} = 5$) et sans bornes (c-à-d, $P_{\text{max}} = \infty$) sont montrés dans le but de comparer. Cas de CC-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 2$, $R = 1.5$ et $K = 2, 4$.

Pour CC-HARQ avec $K=4$, $P_{\text{max}} = \infty$ et pour une valeur de la probabilité de coupure égale à 10^{-6} , $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ présente un gain de 5 dB par rapport à P_{out}^c , alors que $P_{\text{out}}^{\text{al}}$ présente un gain de 3.5 dB par rapport à P_{out}^c .

En prenant $P_{\text{max}} = 5$ au lieu de $P_{\text{max}} = \infty$, le gain des solutions optimales par rapport à P_{out}^c commence à décroître après une valeur particulière $\bar{\gamma}_{th}$ de SNR moyen $\bar{\gamma}$.

Par exemple, pour l’allocation $P_{\text{out}}^{\text{al}}$ avec $K = 4$: $\bar{\gamma}_{th} = 0$ dB dans le cas de IR-HARQ et $\bar{\gamma}_{th} = 2$ dB dans le cas de CC-HARQ. Ceci est justifié par le fait que la contrainte $P_{\text{max}} = 5$ devient active pour $\bar{\gamma} \geq \bar{\gamma}_{th}$, comme on peut le remarquer dans les figures 3.3 et 3.4 .

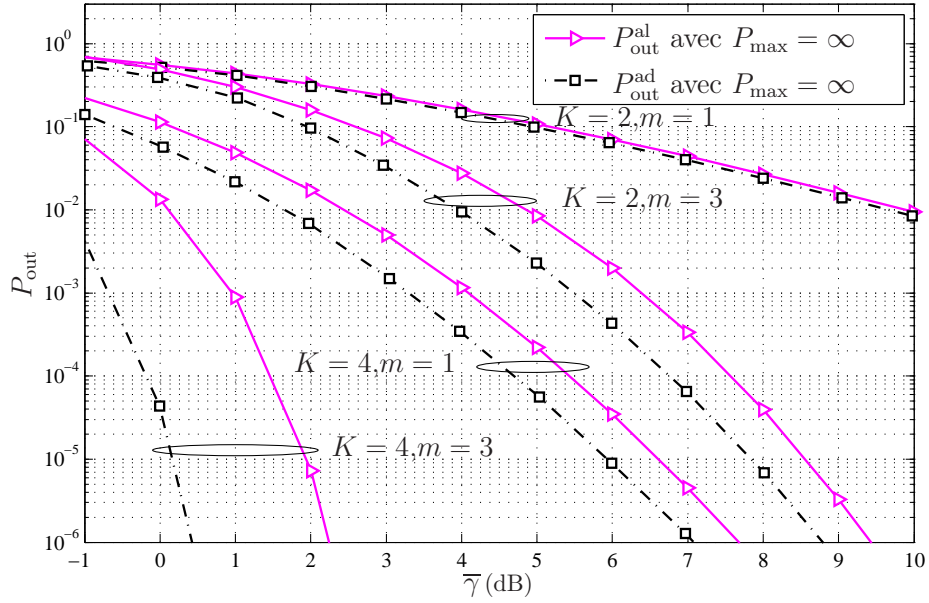


FIGURE 3.7 – Valeur optimale de la probabilité de coupure dans le cas de l’adaptation $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ comparée avec le cas de l’allocation $P_{\text{out}}^{\text{al}}$. Cas de CC-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 1, 3$, $R = 1.5$, $K = 2, 4$ et $P_{\text{max}} = \infty$.

Dans la figure 3.7 on peut voir une sorte de ‘parallélisme’ entre la courbe de $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et la courbe de $P_{\text{out}}^{\text{al}}$. De plus, il est clair que le gain de $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ par rapport à $P_{\text{out}}^{\text{al}}$ n’est pas en fonction du nombre maximal de transmissions K . En effet, le gain varie avec le paramètre m de la distribution du canal Nakagami- m .

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons montré comment utiliser la programmation dynamique pour résoudre le problème d’adaptation et d’allocation de la puissance dans le but de minimiser la probabilité de coupure sous contrainte sur la puissance moyenne à long terme. À travers des exemples numériques, nous avons constaté que le gain entre l’adaptation et l’allocation optimales est une fonction du paramètre m de la distribution du canal Nakagami- m . Caractériser ce gain est l’objectif du chapitre suivant.

Chapitre 4

Allocation vs Adaptation : gain du feedback

Dans ce chapitre, nous tentons de caractériser le gain dû au feedback et nous trouverons l'expression analytique de la diversité. Pour ce faire, nous présenterons d'abord une politique d'adaptation sous optimale, ensuite, nous utiliserons la programmation géométrique pour trouver l'expression analytique de la probabilité de coupure dans le cas de l'adaptation linéaire et de l'allocation pour CC-HARQ.

4.1 Problème d'optimisation

4.1.1 Cas de l'adaptation linéaire de la puissance

Les résultats de l'optimisation dans la Fig.3.2 indiquent que $P_k(I_{k-1}^{\text{CC}})$ décroît, d'une façon monotone, avec I_{k-1}^{CC} . L'explication intuitive est que lorsque I_{k-1}^{CC} s'approche de γ_{th} , alors la puissance $P_k(I_{k-1}^{\text{CC}})$ devient de plus en plus faible. Ceci supporte le choix heuristique de la fonction d'adaptation suivante $P_k(I_{k-1}^{\text{CC}})$:

$$P_k(I_{k-1}^{\text{CC}}) = (\gamma_{\text{th}} - I_{k-1}^{\text{CC}}) \cdot \check{P}_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (4.1)$$

où le paramètre \check{P}_k définit la fonction d'adaptation $P_k(I_{k-1}^{\text{CC}})$. Ainsi, un seul paramètre \check{P}_k doit être gardé au niveau de l'émetteur, au lieu d'avoir toutes les valeurs discrétisées de la fonction $P_k(I_{k-1}^{\text{CC}})$.

En utilisant la fonction d'adaptation (4.1) dans l'expression de f_k définie dans l'équation (3.4) on obtient :

$$\begin{aligned}
f_k = F_{I_k^{\text{CC}}}(\gamma_{\text{th}}) &= F_\gamma(1/\check{P}_k) \int_0^{\gamma_{\text{th}}} p_{I_{k-1}^{\text{CC}}}(x) dx \\
&= F_\gamma(1/\check{P}_k) F_{I_{k-1}^{\text{CC}}}(\gamma_{\text{th}}) \\
&= \prod_{l=1}^k F_\gamma(1/\check{P}_l) \\
&= \prod_{l=1}^k \nu(\check{P}_l), \tag{4.2}
\end{aligned}$$

où $\nu(\check{P})$ est la probabilité de coupure définie par $\nu(\check{P}) = \Pr \left\{ \gamma < \frac{1}{\check{P}} \right\} = F_\gamma\left(\frac{1}{\check{P}}\right)$.

On utilise l'approximation (2.32) pour simplifier l'expression de $\nu(\check{P})$, ainsi on pourra approximer la probabilité de coupure f_K :

$$f_K \approx A_K \cdot \prod_{k=1}^K \check{P}_k^{-m}, \tag{4.3}$$

avec :

$$A_K = \left(\left(\frac{\exp(1)}{\bar{\gamma}} \right)^m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \right)^K. \tag{4.4}$$

En utilisant la fonction d'adaptation (4.1), l'expression de l'énergie moyenne (3.5) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{P_k\} &= \check{P}_k \int_0^{\gamma_{\text{th}}} (\gamma_{\text{th}} - x) p_{I_{k-1}^{\text{CC}}}(x) dx \\
&= \check{P}_k \int_0^{\gamma_{\text{th}}} F_{I_{k-1}^{\text{CC}}}(x) dx. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

On procède à un changement de variables afin de calculer l'intégrale définie dans (4.5) :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\gamma_{\text{th}}} F_{I_{k-1}^{\text{CC}}}(x) dx &= \int_0^{\gamma_{\text{th}}} p_{I_{k-2}^{\text{CC}}}(y) dy \int_0^{\gamma_{\text{th}}} F_\gamma \left(\frac{x-y}{\check{P}_{k-1} \cdot (\gamma_{\text{th}} - y)} \right) dx \\
&= \xi(\check{P}_{k-1}) \int_0^{\gamma_{\text{th}}} p_{I_{k-2}^{\text{CC}}}(x) (\gamma_{\text{th}} - x) dx, \tag{4.6}
\end{aligned}$$

où on définit $\xi(\check{P})$ par :

$$\xi(\check{P}) = \check{P} \cdot \int_0^{1/\check{P}} F_\gamma(x) dx. \quad (4.7)$$

D'une manière récursive on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{P_k\} &= \check{P}_k \cdot \mathbb{E}\{P_{k-1}\} \cdot \xi(\check{P}_{k-1})/\check{P}_{k-1} \\ &= \gamma_{\text{th}} \cdot \check{P}_k \cdot \prod_{l=1}^{k-1} \xi(\check{P}_l), \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (4.8)$$

En remplaçant $F_\gamma(x)$ par l'équation (2.32), on obtient une approximation de (4.7) comme suit :

$$\xi(\check{P}) \approx \left(\frac{\exp(1)}{\bar{\gamma} \cdot P} \right)^m \cdot \frac{1}{(m+1) \cdot \sqrt{2\pi m}}. \quad (4.9)$$

Par conséquent, $\forall k \in \{1, \dots, K\}$:

$$\mathbb{E}\{P_k\} \approx A_{k-1} \cdot \check{P}_k \prod_{l=1}^{k-1} \check{P}_l^{-m}, \quad (4.10)$$

avec A_{k-1} est donné par :

$$A_{k-1} = \gamma_{\text{th}} \cdot \left(\left(\frac{\exp(1)}{\bar{\gamma}} \right)^m \cdot \frac{1}{(m+1) \cdot \sqrt{2\pi m}} \right)^{k-1}. \quad (4.11)$$

4.1.2 Cas de l'allocation de la puissance

A partir de l'approximation (2.32), la probabilité de coupure f_K et l'énergie moyenne $\mathbb{E}[P_k]$ peuvent être exprimées comme suit :

$$f_K \approx A_K \cdot \prod_{k=1}^K \check{P}_k^{-m}, \quad (4.12)$$

et

$$\mathbb{E}[P_k] \approx A_{k-1} \cdot \check{P}_k \prod_{l=1}^{k-1} \check{P}_l^{-m}, \quad (4.13)$$

où $A_0 = 1$ et A_k est donné par :

$$A_k = \left(\frac{\exp(1) \cdot \gamma_{\text{th}}}{k^{\bar{\gamma}}} \right)^{mk} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi mk}}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}. \quad (4.14)$$

En guise de conclusion, la probabilité de coupure et l'énergie moyenne dans le cas de l'adaptation linéaire et de l'allocation de la puissance peuvent être écrites de la manière générale suivante :

$$f_K \approx A_K \cdot \prod_{k=1}^K P_k^{-m}, \quad (4.15)$$

et

$$\mathbb{E}[P] \approx \sum_{k=1}^K A_{k-1} \cdot P_k \prod_{l=1}^{k-1} P_l^{-m}, \quad (4.16)$$

où A_k est une fonction indépendante des puissances $\{P_k\}_{k=1}^K$.

4.1.3 Cadre général

Dans cette section, on vise les grandes valeurs de SNR. À ce niveau : $f_k \xrightarrow{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} 0$ pour $k \in \{1, \dots, K\}$. Ainsi, la puissance moyenne à long terme peut être approximée comme suit :

Dans le cas de l'adaptation :

$$\bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{I_{k-1}^{(*)}} [\tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)})]}{\sum_{k=0}^{K-1} f_k} \approx \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{I_{k-1}^{(*)}} [\tilde{P}_k(I_{k-1}^{(*)})]. \quad (4.17)$$

Dans le cas de l'allocation :

$$\bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^K \hat{P}_k f_{k-1}}{\sum_{k=0}^{K-1} f_k} \approx \sum_{k=1}^K \hat{P}_k f_{k-1}. \quad (4.18)$$

Par conséquent, le problème de l'adaptation (3.1) peut être reformulé de la façon suivante pour les grandes valeurs de SNR :

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2(I_1), \dots, \tilde{P}_K(I_{K-1})} f_K, & \quad (4.19) \\ \text{sujet à : } \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{I_{k-1}} \{\tilde{P}_k(I_{k-1})\} \leq 1. & \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, on se focalisera sur le cas de l'adaptation linéaire de la puissance. Donc, le problème d'optimisation (4.19) peut être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}} = \min_{\check{P}_1, \check{P}_2, \dots, \check{P}_K} A_K \cdot \prod_{k=1}^K \check{P}_k^{-m}, & \quad (4.20) \\ \text{sujet à : } \sum_{k=1}^K A_{k-1} \cdot \check{P}_k \prod_{l=1}^{k-1} \check{P}_l^{-m} \leq 1, & \end{aligned}$$

où A_k est définie dans les équations (4.4) et (4.11).

Le problème de l'allocation (3.8) peut être réexprimé, pour les grandes valeurs de SNR, comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\text{out}}^{\text{al}} = \min_{\check{P}_1, \check{P}_2, \dots, \check{P}_K} A_K \cdot \prod_{k=1}^K \check{P}_k^{-m}, & \quad (4.21) \\ \text{sujet à : } \sum_{k=1}^K A_{k-1} \cdot \check{P}_k \prod_{l=1}^{k-1} \check{P}_l^{-m} \leq 1, & \end{aligned}$$

où A_k est définie dans les équations (4.14).

Donc, l'objectif des approximations (4.10) et (4.3) (ou (4.12) et (4.13)), introduites lors des deux sous sections précédentes, consistait à écrire le problème d'optimisation (4.20) (ou (4.21)) sous la forme standard de la programmation géométrique introduite dans la section 2.4.2.

Donc pour les deux cas de l'adaptation linéaire et de l'allocation, on peut

écrire le problème d'optimisation (4.20) sous la forme :

$$\begin{aligned} \min_{\underline{x}} g_0(\underline{x}) &= A_K \cdot \prod_{k=1}^K x_k^{-m} & (4.22) \\ \text{sujet à : } g_1(\underline{x}) &= \sum_{k=1}^K A_{k-1} \cdot x_k \prod_{l=1}^{k-1} x_l^{-m} \leq 1 \end{aligned}$$

où le vecteur $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_K)$ est défini comme :

$$x_k \triangleq \begin{cases} \check{P}_k & \text{pour l'adaptation linéaire,} \\ \check{P}_k & \text{pour l'allocation.} \end{cases} \quad (4.23)$$

Le problème dual [15] , [14] , [12] du (4.22) est défini par :

$$\max_{\underline{\delta}} v(\underline{\delta}) = \lambda(\underline{\delta}) \prod_{i=1}^{K+1} \left(\frac{A_{i-2}}{\delta_i} \right)^{\delta_i}, \quad (4.24)$$

$$\text{sujet à : } \begin{cases} \delta_i \leq 0, & \forall i \in \{1, \dots, K+1\}, \\ -m \cdot \delta_1 + \delta_j - m \cdot \sum_{i=j+1}^{K+1} \delta_i = 0, & \forall j \in \{2, \dots, K+1\}, \\ \delta_1 = 1, \end{cases} \quad (4.25)$$

où, par définition $A_{-1} = A_K$ et $\lambda(\underline{\delta}) = \sum_{i=2}^{K+1} \delta_i$.

C'est une programmation géométrique à zéro degré de difficulté, ce qui implique que la solution unique $\underline{\delta}^*$ des contraintes duales (4.25) est aussi la solution de (4.24). On détermine $\underline{\delta}^*$ en résolvant facilement le système des contraintes duales linéaires (4.25), on trouve alors la solution suivante :

$$\delta_i^* = \begin{cases} 1, & \text{pour } i = 1, \\ m \cdot (m+1)^{(K+1-i)}, & \text{pour } i \in \{2, \dots, K+1\}. \end{cases} \quad (4.26)$$

Soit \underline{x}^* l'argument qui maximise (4.22), le Théorème 2 permet de conclure que la solution optimale de (4.20) est la suivante :

$$g_1(\underline{x}^*) = v(\underline{\delta}^*) = \lambda(\underline{\delta}^*) \prod_{i=1}^{K+1} \left(\frac{A_{i-2}}{\delta_i^*} \right)^{\delta_i^*}, \quad (4.27)$$

si et seulement si,

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{\delta_2^*}{\lambda(\underline{\delta}^*) \cdot A_0}, \\ x_i^* = \frac{\delta_{i+1}^*}{\lambda(\underline{\delta}^*) \cdot A_{i-1} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} (x_j^*)^{-m}}, \quad \forall i \in \{2, \dots, K\}, \end{cases} \quad (4.28)$$

avec :

$$\lambda(\underline{\delta}^*) = (m + 1)^K - 1. \quad (4.29)$$

En d'autres termes, la solution optimale du problème (4.20) est $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}} = g_1(\underline{x}^*)$ si les fonctions A_i sont définies comme dans (4.4) et (4.11). La solution optimale du problème (4.21) est $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{al}} = g_1(\underline{x}^*)$ si les fonctions A_i sont définies comme dans (4.14).

4.2 Diversité et gain du feedback

Après avoir dérivé en forme analytique la probabilité de coupure optimale dans les deux cas de l'adaptation linéaire et de l'allocation, nous déterminons l'expression de la diversité et du gain du feedback.

4.2.1 Diversité

La diversité est définie par [22] :

$$D = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{-\log(P_{\text{out}})}{\log(\bar{\gamma})}. \quad (4.30)$$

Donc, la diversité est égale à l'exposant de $\bar{\gamma}$ dans l'expression analytique de la probabilité de coupure P_{out} lorsque $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$.

Soit d_i l'exposant de $\bar{\gamma}$ dans l'expression des fonctions A_i . L'expression analytique (4.27) des solutions optimales $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{al}}$ permet de conclure que :

$$D = \sum_{i=1}^{K+1} d_i \cdot \delta_i^*. \quad (4.31)$$

Or, pour les deux cas d'adaptation linéaire et d'allocation, l'exposant de $\bar{\gamma}$ dans l'expression de A_k est égal à mk . Par conséquent, en utilisant (4.27), la valeur maximale de la diversité D est :

$$\begin{aligned}
D &= K \cdot m\delta_1^* + 0 \cdot m\delta_2^* + 1 \cdot m\delta_3^* + \dots + (K-1) \cdot m\delta_{K+1}^* \\
&= Km + m^2[(m+1)^{K-2} + 2(m+1)^{K-3} + \\
&\quad + \dots + (K-2)(m+1) + (K-1)] \\
&= Km + m^2 \cdot K \cdot (1 + (m+1) + \dots + (m+1)^{K-2}) \\
&\quad - 1 - 2 \cdot (m+2) - \dots - (K-1) \cdot (m+1)^{K-2} \\
&= (m+1)^K - 1.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

La diversité est la même pour les deux cas de l'adaptation (multiples bits de feedback) et de l'allocation (un bit de feedback). C'est la même valeur maximale obtenue dans [21] pour le cas où la dimension de la constellation tend vers ∞ .

Dès alors, augmenter le nombre de feedback n'accroît pas la diversité mais translate la courbe de la probabilité de coupure.

4.2.2 Gain du feedback

La diversité est la même pour les cas de l'adaptation linéaire et de l'allocation, ainsi, la probabilité de coupure optimale peut être exprimée comme suit :

$$\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}} = B_K^{\text{ad}} \cdot \bar{\gamma}^{-D}, \tag{4.33}$$

et

$$\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{al}} = B_K^{\text{al}} \cdot \bar{\gamma}^{-D}, \tag{4.34}$$

où B_K^{ad} et B_K^{al} sont des fonctions indépendantes du SNR. on définit le gain du feedback G_K comme suit :

$$\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}} = B_K^{\text{al}} \cdot (G_K \cdot \bar{\gamma})^{-D}, \tag{4.35}$$

Alors,

$$G_K = \left(\frac{\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{al}}}{\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}}} \right)^{\frac{1}{D}}. \tag{4.36}$$

En utilisant la solution analytique (4.27) de $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{al}}$, on obtient une approximation \tilde{G}_K de G_K pour les grandes valeurs de SNR :

$$(G_K)^{-D} = \frac{K^{(mK+0.5)} \cdot (2\pi m)^{\frac{1-(m+1)^{K-1}}{2m}}}{(m+1)^{D/m-K}} \cdot \prod_{k=3}^{K+1} (k-2)^{m(m+1)^{(K+1-k)}[m(k-2)+0.5]} \quad (4.37)$$

4.3 Exemples numériques

On adoptera les notations suivantes :

- $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}}$ la probabilité de coupure lors de l’adaptation linéaire et optimale de la puissance, obtenue en utilisant la programmation géométrique, (section 4.1.3).
- $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{al}}$ la probabilité de coupure lors de l’allocation optimale de la puissance, obtenue en utilisant la programmation géométrique, (section 4.1.3).

$K \backslash m$	1	2	3
2	-0.1749	0.1865	0.3248
4	0.1471	0.6092	0.6884

TABLE 4.1 – Valeurs de G_K en dB pour Nakagami- m où $m = 1, 2, 3$ et $K = 2, 4$.

La figure 4.1 représente les valeurs de $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}}$, $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{al}}$, $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et $P_{\text{out}}^{\text{al}}$ pour $K = 2$ et pour de différentes valeurs du paramètre du canal $m = 1, 2$ et 3 . Lorsque $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$ on a $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{al}} - P_{\text{out}}^{\text{al}} \rightarrow 0$, alors que $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}} - P_{\text{out}}^{\text{ad}} \rightarrow \epsilon$ où ϵ est un nombre proche de zéro. Cela peut être justifié par le fait que même si le problème (4.20) est équivalent à (3.1), la fonction d’adaptation linéaire n’est pas optimale pour (3.1).

Le tableau 4.1 montre la valeur de G_K pour différentes valeurs de K et de m . G_K est une fonction croissante de m et de K . La valeur négative de G_K pour $m = 1$ et $K = 2$ montre que l’allocation est meilleure que l’adaptation

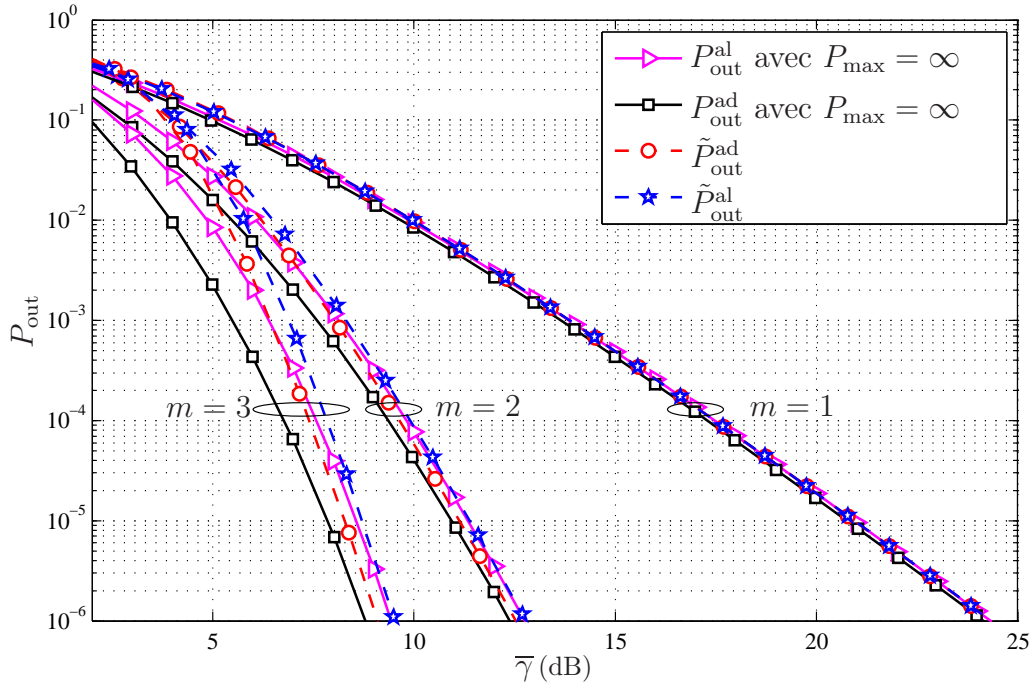


FIGURE 4.1 – Valeur optimale de la probabilité de coupure, trouvée en utilisant la programmation dynamique (dans le cas de l’adaptation $P_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et de l’allocation $P_{\text{out}}^{\text{al}}$), comparée avec celle trouvée à l’aide de la programmation géométrique. (dans le cas de l’adaptation linéaire $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{ad}}$ et de l’allocation $\tilde{P}_{\text{out}}^{\text{al}}$). Cas de CC-HARQ dans un canal Nakagami- m où $m = 1, 2, 3$, $K = 2$, $R = 1.5$ et $P_{\text{max}} = \infty$.

linéaire pour ce cas. C’est ce qu’on peut voir clairement dans la figure 4.1. En effet, l’adaptation de la puissance donne “presque” le même gain que l’allocation pour $m = 1$ et $K = 2$. D’autre part, on sait que l’adaptation linéaire est sous optimale dans le cas général, ce que explique pourquoi l’allocation est plus optimale que l’adaptation linéaire pour $m = 1$ et $K = 2$.

Chapitre 5

Conclusion

Notre travail consistait à développer et à évaluer des schémas optimaux d'adaptation et d'allocation de la puissance, en terme de la probabilité de coupure sous contrainte sur la puissance moyenne à long terme. Nous nous sommes notamment intéressés à l'étude des deux cas IR-HARQ et CC-HARQ dans le cas général du canal Nakagami- m .

Dans un premier temps, nous avons introduit plusieurs notions préliminaires nécessaires pour la compréhension de ce document. Ainsi, nous avons défini, dans le deuxième chapitre, le modèle du canal à évanouissements par blocs adopté le long de notre travail. Ensuite, nous avons montré, lors du chapitre 3, comment utiliser la programmation dynamique pour résoudre le problème d'optimisation de la puissance. Le but étant tout d'abord d'utiliser le CSI retardé pour trouver la politique d'adaptation optimale afin de minimiser la probabilité de coupure sous contrainte sur la puissance moyenne à long terme. L'utilisation de la programmation dynamique nous a permise de réduire la dimension du problème d'optimisation. Dans la section 2.3.3, nous avons défini des approximations de la probabilité de coupure, ceci dans le but de trouver les puissances d'allocation optimales sous forme d'expression exacte.

Les différents exemples numériques montrent que le gain de l'adaptation de la puissance par rapport à la transmission avec puissance constante est important. Par exemple, le gain atteint 5 dB pour une valeur de la probabilité de coupure égale à 10^{-6} dans le cas de IR-HARQ avec 4 transmissions. Les résultats numériques obtenus nous ont poussé aussi à définir et à caractériser le gain dû à l'utilisation de plusieurs bits dans le canal de retour pour

HARQ. C'est pour cette fin que nous avons introduit une fonction simple de l'adaptation de la puissance. Ensuite, nous avons simplifié le problème d'optimisation pour les grandes valeurs de SNR. Nous avons besoin des expressions exactes et analytiques des valeurs optimales de la probabilité de coupure, ce qui explique le recours à la programmation géométrique lors du dernier chapitre.

Plusieurs aspects peuvent être explorés pour compléter ou étendre ce travail. L'étude de l'influence de la discrétisation du CSI retardé sur les résultats obtenus s'avère importante. Considérer des constellations non infinies (16QAM par exemple) est un horizon possible à analyser.

La capacité effective est une métrique qui caractérise les performances des réseaux de communication en prenant en compte la qualité de service. Il s'avère intéressant d'étudier l'influence de l'optimisation de la puissance sur la capacité effective.

Bibliographie

- [1] L. Shu, J. D. J. Costello et M. Miller, “Automatic-repeat-request error-control schemes,” *IEEE Commun. Mag.*, vol. 22, no. 12, pp. 5–17, Déc. 1984.
- [2] E. Malkamaki et H. Leib, “Performance of truncated type-II hybrid ARQ schemes with noisy feedback over block fading channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, no. 9, pp. 1477–1487, Sept. 2000.
- [3] Q. Liu, S. Zhou et G. B. Giannakis, “Cross-layer combining of adaptive modulation and coding with truncated ARQ over wireless links,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 3, no. 5, pp. 1746–1755, Sept. 2004.
- [4] D. Tuninetti, “On the benefits of partial channel state information for repetition protocols in block fading channels,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 8, pp. 5036–5053, Août. 2011.
- [5] M. Zorzi et R. Rao, “On the use of renewal theory in the analysis of ARQ protocols,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 9, pp. 1077–1081, Sept 1996.
- [6] G. Caire et D. Tuninetti, “The throughput of hybrid-ARQ protocols for the Gaussian collision channel,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, no. 5, pp. 1971–1988, Juil. 2001.
- [7] S. Lee, W. Su, S. Batalama et J. Matyjas, “Cooperative decode-and-forward ARQ relaying : Performance analysis and power optimization,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 9, no. 8, pp. 2632–2642, Août. 2010.
- [8] P. Wu et N. Jindal, “Performance of hybrid-ARQ in block-fading channels : A fixed outage probability analysis,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 4, pp. 1129–1141, Avril. 2010.

- [9] R. Lugannani et S. O. Rice, “Saddlepoint approximations for the distribution of the sum of independent random variables,” *Advances in Applied Probability*, vol. 12, pp. 475–490, 1980.
- [10] A. Martinez, A. Guillén i Fàbregas et G. Caire, “Error probability analysis of bit-interleaved coded modulation,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 1, pp. 262–271, Jan. 2006.
- [11] M. Jabi, L. Szczecinski et M. Benjillali, “Accurate outage approximation of MRC receivers in arbitrarily fading channels,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 16, no. 6, pp. 789–792, Juin 2012.
- [12] S. Boyd et L. Vardenberghe, *Convex Optimization*, 1st ed. Cambridge University Press, 2004.
- [13] A. Ribeiro et G. Giannakis, “Separation principles in wireless networking,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 56, no. 9, pp. 4488–4505, Sep. 2010.
- [14] M. Luptáčík, “Geometric programming,” *Operations-Research-Spektrum*, vol. 2, no. 3, pp. 129–143, 1981.
- [15] Richard James Duffin, C. Zener et Elmor L. Peterson, *Geometric programming : theory and application*. John Wiley & Sons, 1967.
- [16] D. P. Bertsekas, *Dynamic Programming and Optimal Control*, 3rd ed. Athena Scientific, 2005, vol. 1.
- [17] H. Gamal, G. Caire et M. Damen, “The MIMO ARQ channel : Diversity–multiplexing–delay tradeoff,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 8, pp. 3601–3621, Août. 2006.
- [18] W. Su, S. Lee, D. Pados et J. Matyjas, “Optimal power assignment for minimizing the average total transmission power in hybrid-ARQ Rayleigh fading links,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 59, no. 7, pp. 1867–1877, Juil. 2011.
- [19] T. Chaitanya et E. Larsson, “Optimal power allocation for hybrid ARQ with chase combining in i.i.d. Rayleigh fading channels,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 61, no. 5, pp. 1835–1846, Mai 2013.
- [20] T. Chaitanya et E. Larsson, “Outage-optimal power allocation for hybrid ARQ with incremental redundancy,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 10, no. 7, pp. 2069–2074, Juil. 2011.
- [21] K. Nguyen, L. Rasmussen, A. Guillen i Fabregas et N. Letzepis, “MIMO ARQ with multibit feedback : Outage analysis,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 58, no. 2, pp. 765–779, Fév. 2012.

- [22] L. Zheng et D. Tse, “Diversity and multiplexing : a fundamental tradeoff in multiple-antenna channels,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 49, no. 5, pp. 1073 – 1096, Mai 2003.