

Université du Québec  
INRS-Eau

**TRAITEMENT SUBJECTIF DE L'INCERTITUDE  
PAR LA THÉORIE DES POSSIBILITÉS:  
APPLICATION À LA PRÉVISION ET AU SUIVI DES CRUES**

Par  
Stéphane Lapointe  
M.Sc. en informatique

Thèse présentée pour l'obtention  
du grade de Philosophiae doctorat (Ph.D.)  
en sciences de l'eau

Jury d'évaluation

Président du jury et examinateur externe	M. András Bárdossy, professeur Institut für Wasserbau Universität Stuttgart
Examineur externe	M. Didier Dubois, directeur de recherche Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (IRIT) - CNRS Université Paul Sabatier
Examineur externe	Mme Bernardette Bouchon-Meunier Laboratoire d'informatique de Paris 6 Université Pierre et Marie-Curie Paris VI CNRS
Directeur de recherche	M. Bernard Bobée, professeur INRS-Eau Institut national de la recherche scientifique Chaire industrielle en hydrologie statistique (INRS-Eau/CRSNG/Hydro-Québec)
Co-directeur de recherche	M. Peter Rasmussen, professeur sous octroi INRS-Eau Institut national de la recherche scientifique
Examineur interne	Daniel Cluis, professeur INRS-Eau Institut national de la recherche scientifique

Thèse soutenue le 22 janvier 1999

© Stéphane Lapointe, 1999



## REMERCIEMENTS

Je suis reconnaissant envers SÉCAL, le CRSNG, l'INRS-Eau, Hydro-Québec et le FCAR pour le soutien financier qui a été essentiel à la réalisation de ce projet. En effet, cette thèse de doctorat a été réalisée en collaboration avec la Société d'électrolyse et de chimie Alcan Ltée (SÉCAL) dans le cadre d'une bourse à incidence industrielle du CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada) et de la Chaire industrielle en Hydrologie statistique (INRS-Eau/CRSNG/Hydro-Québec) dont le titulaire est le professeur Bernard Bobée de l'INRS-Eau. J'ai aussi bénéficié, pendant un certain temps, d'une bourse du FCAR (Fonds pour la formation de chercheurs et l'aide à la recherche).

J'aimerais remercier mon superviseur de thèse, le professeur Bernard Bobée, qui m'a indiqué les directions appropriées au bon moment et pour l'intérêt qu'il a manifesté tout au long de la réalisation de ce projet. De plus, il est directement responsable de la mise sur pied de la collaboration avec SÉCAL.

Je remercie les membres du jury qui ont investi une bonne part de leur temps pour lire et évaluer ma thèse. J'aimerais plus particulièrement souligner le travail des examinateurs externes, M. Dubois, Mme Bernardette Bouchon-Meunier et M. Bárdossy qui ont produit des rapports détaillés sur ma thèse permettant d'améliorer la qualité de ce document. Au cours de mes travaux, j'ai profité également des commentaires et suggestions d'autres chercheurs: les professeurs Jacques Bernier, Lucien Duckstein, Roman Krzysztofowicz, M. Vincent Fortin et aussi d'autres membres de la Chaire industrielle en Hydrologie statistique à l'INRS-Eau.

Je désire souligner la contribution de M. Hau Ta Trung qui a agit en tant que responsable du projet pour l'entreprise participante, SÉCAL. Par sa participation, il a permis de cerner les besoins de SÉCAL et d'identifier un projet dont les retombées potentielles pour SÉCAL sont intéressantes. J'aimerais aussi remercier tous les membres du groupe Ressources hydriques de SÉCAL pour l'étonnante ouverture d'esprit dont ils ont fait preuve lorsqu'il furent exposés à des concepts inhabituels. L'attention qu'ils ont portée à ce travail est une bonne indication de sa pertinence pratique.

Je remercie Mme Martyne Charbonneau pour les nombreux services qu'elle m'a rendus. Il me fait aussi plaisir de souligner la qualité des services offerts par la bibliothèque de l'INRS-Eau sans lesquels certaines recherches de documents auraient été plus difficiles.

Je ne pourrais passer sous silence la contribution de ma conjointe, Josée, qui a fourni l'élément le plus important pour l'aboutissement de ce projet: un support moral constant. Sans elle, ce projet aurait à peine balbutié; je lui dois donc une bonne part de cette thèse. De plus, je la remercie du fond du coeur pour avoir pris soin de nos deux petits garçons, Guillaume et Philippe, qui ont contribué à leur manière en me divertissant et en me transmettant leur joie de vivre.



à mon épouse, Josée  
mes garçons, Guillaume et Philippe  
et bébé qui s'en vient bientôt ...



## RÉSUMÉ

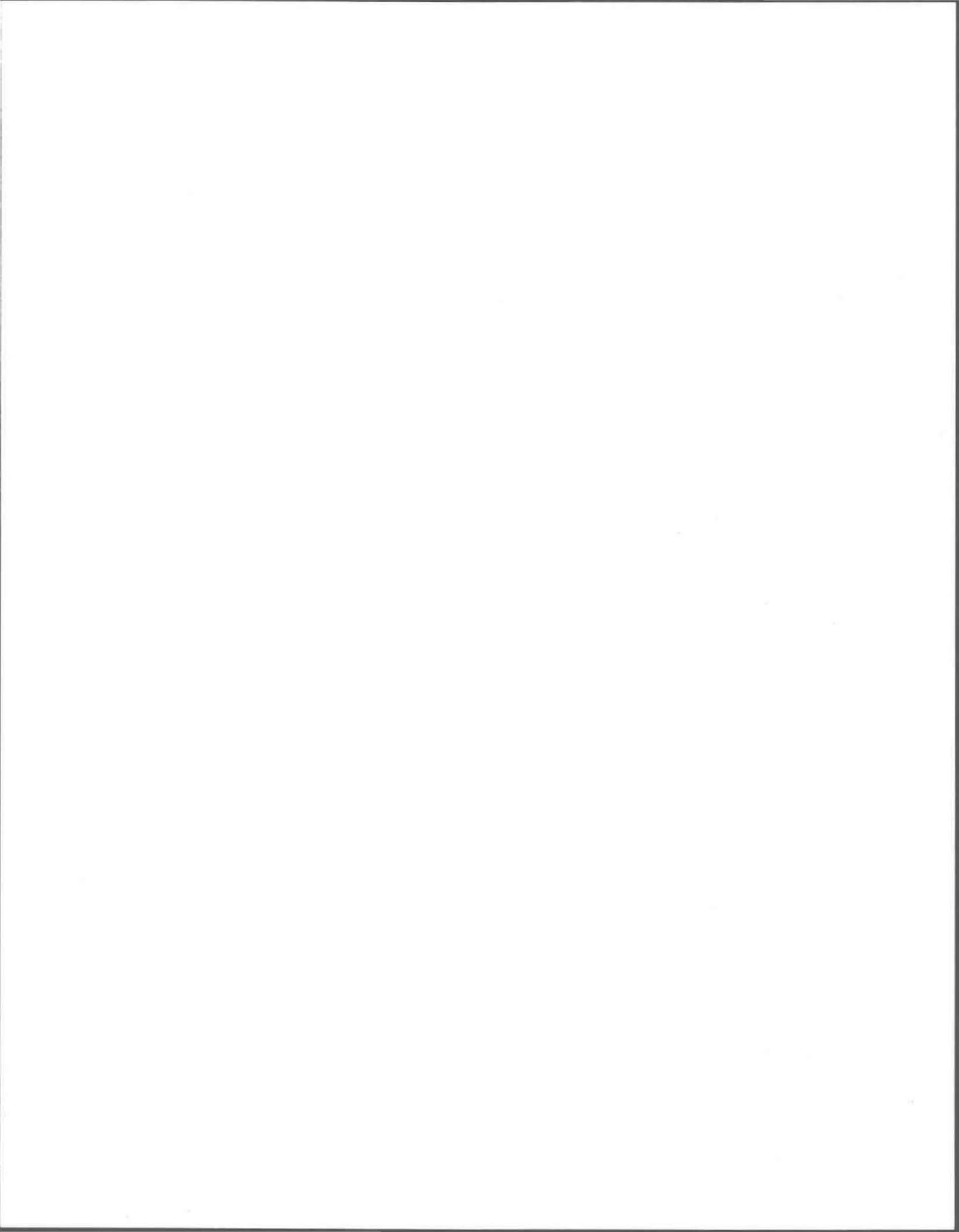
La gestion de l'eau qui alimente un réservoir hydrique en période de crue revêt une importance critique. L'hydrologue doit faire face à deux objectifs conflictuels; d'une part, minimiser le risque d'inondation et d'autre part maintenir le niveau d'eau suffisamment élevé pour que le réservoir puisse remplir ses fonctions (production hydroélectrique, utilisation par les riverains, préservation de la faune aquatique, etc.) Pour l'aider à planifier l'utilisation de la ressource eau, l'hydrologue utilise des systèmes de prévision qui fournissent des estimés imprécis des caractéristiques de la crue (des apports non contrôlés, principalement). Dans certains cas, en particulier celui qui a été étudié ici, ces systèmes de prévision sont peu performants en raison essentiellement de l'incertitude météorologique. L'hydrologue qui utilise de telles prévisions sans tenir compte de leur qualité prend des risques sans pouvoir en mesurer les conséquences.

Ce projet de recherche vise à proposer une solution pratique à ce problème. L'approche qui a été adoptée consiste à effectuer une meilleure gestion des systèmes de prévision. Ceci a conduit au développement d'une méthodologie se divisant en deux volets:

1. D'une part, on effectue un suivi continu de la crue en mettant à jour les prévisions des caractéristiques de cette crue en fonction de son stade actuel.
2. D'autre part, on prend directement en compte l'incertitude sur les prévisions dans le but de pondérer l'effet de ces prévisions sur la décision finale.

La prise en compte de l'incertitude est une question centrale dans ce projet de recherche. Le patron d'inférence bayésien a été adopté pour réviser des modèles d'incertitude suite à l'arrivée d'une nouvelle information (une prévision). Par contre, pour la modélisation de l'incertitude, la théorie des possibilités est proposée comme alternative à l'approche bayésienne classique; ceci permet de traiter subjectivement l'incertitude. Certains développements fondamentaux en théorie des possibilités ont été réalisés dans le cadre de ce travail pour pouvoir utiliser le patron d'inférence bayésien. Dans le but de proposer une solution applicable, on discute aussi du problème d'interprétation du terme « possibilité » et du problème de construction de distributions de possibilités.

Ce projet de recherche a été réalisé en collaboration entre l'INRS-Eau et la Société d'électrolyse et de chimie Alcan Ltée qui exploite un important réseau hydroélectrique au Saguenay-Lac-Saint-Jean. Par conséquent, la méthodologie développée a été appliquée sur les bassins d'Alcan dans le but d'aider la compagnie à la planification de la production en période de crue printanière. Les résultats obtenus avec la théorie des possibilités sont comparables à ceux obtenus avec l'approche bayésienne. Par contre, l'approche possibiliste offre une plus grande souplesse quant à l'intégration de l'information de nature subjective.





# TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX .....	xiii
LISTE DES FIGURES.....	xv
LISTE DES ABRÉVIATIONS.....	xix
<b>1 INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
1.1 Problématique.....	1
1.2 Approche adoptée .....	2
1.3 Motivation.....	2
1.4 Objectifs du projet de recherche .....	4
1.5 Application .....	4
1.6 Contenu et structure du rapport.....	5
<b>2 SYSTÈME DE SURVEILLANCE ET DE PRÉVISION DES CRUES (SSP) 7</b>	<b>7</b>
2.1 Structure fonctionnelle.....	7
2.2 Composants du SSP.....	8
2.2.1 Sous-système de surveillance des crues (SSC).....	8
2.2.1.1 Départ éventuel de la crue.....	9
2.2.1.2 Montée de la crue .....	10
2.2.1.3 Descente de la crue.....	10
2.2.1.4 Fin de la crue .....	11
2.2.2 Gestionnaire de systèmes de prévision (GSP).....	11
2.2.2.1 Systèmes de prévision.....	12
2.2.3 Module d'intégration des prévisions (MIP) .....	12
2.3 Suivi de l'évolution de la crue .....	13
2.3.1 Sous-stades de la crue.....	13
2.3.2 Séquences de prévisions.....	14
2.4 Types de crues.....	15
2.5 Étapes pour la construction d'un SSP .....	15
<b>3 LE TRAITEMENT DE L'INCERTITUDE DANS LES PRÉVISIONS .....</b>	<b>17</b>
3.1 Problématique.....	17
3.2 Solution bayésienne.....	18
3.3 Cadre d'inférence bayésien.....	18
<b>4 APPROCHE BAYESIENNE POUR LE TRAITEMENT DE L'INCERTITUDE.....</b>	<b>21</b>
4.1 Processeur bayésien de prévisions (PBP).....	21
4.1.1 Calcul de la f.d.p. <i>a posteriori</i> .....	21
4.1.2 Modèle normal-linéaire.....	22
4.1.2.1 F.d.p. <i>apriori</i> .....	23
4.1.2.2 Fonction de vraisemblance.....	23
4.1.2.3 Erreurs de prévision .....	23
4.1.2.4 Modèle <i>a posteriori</i> .....	24
4.1.3 Modèle méta-gaussien.....	24
4.2 Intérêt de l'approche bayésienne.....	26
4.3 Limites du Processeur bayésien de prévisions.....	26

<b>5 LA THÉORIE DES POSSIBILITÉS.....</b>	<b>29</b>
5.1 Les sous-ensembles flous .....	30
5.2 Concepts en théorie des possibilités.....	32
5.3 Normes et conormes triangulaires .....	34
5.4 Relations floues et leur composition.....	35
5.5 Inférence de base en théorie des possibilités .....	36
5.6 Équations de relations floues.....	37
5.7 Implication floue et modus ponens généralisé.....	40
<b>6 RÉVISION DE DISTRIBUTIONS DE POSSIBILITÉS.....</b>	<b>43</b>
6.1 Résultats préliminaires .....	44
6.2 Solution au cadre d'inférence bayésien .....	46
6.2.1 Propriétés de la solution retenue .....	50
6.3 Règles d'inférence.....	50
6.4 Processeur possibiliste de prévisions (PPP) .....	52
6.4.1 Propriétés du PPP .....	52
6.4.2 Exemple d'application du PPP.....	53
6.4.3 Discussion .....	63
6.5 Choix d'une norme triangulaire.....	64
6.6 Comparaison du PPP et du PBP.....	66
<b>7 INTERPRÉTATION DU TERME POSSIBILITÉ.....</b>	<b>69</b>
7.1 Revue des interprétations existantes.....	69
7.1.1 Interprétations fondées sur les probabilités .....	69
7.1.2 Interprétations subjectives .....	70
7.2 Interprétation adoptée .....	71
7.3 Implication sur le processus de décision.....	71
<b>8 MÉTHODOLOGIE POUR LA CONSTRUCTION DE DISTRIBUTIONS DE POSSIBILITÉS.....</b>	<b>73</b>
8.1 Distribution de possibilités marginale .....	73
8.2 Distribution de possibilités conditionnelle .....	82
<b>9 APPLICATION SUR LES BASSINS DE SÉCAL POUR LES CRUES PRINTANIÈRES .....</b>	<b>87</b>
9.1 Aperçu du système hydroélectrique de SÉCAL.....	87
9.2 Les crues printanières.....	88
9.2.1 Phénomène physique.....	88
9.2.2 Problématique de prévision.....	89
9.2.3 Données et statistiques .....	89
9.3 Modélisation du Système de surveillance et de prévision (SSP) des crues .....	92
9.3.1 Dates de départ, de pointe et de fin de la crue printanière .....	92
9.3.2 Stades et sous-stades .....	93
9.3.3 Périodes de prévision.....	94
9.3.4 Condition pour le départ éventuel de la crue printanière.....	94
9.3.5 Variables de prévision.....	97
9.4 Prévision des paramètres de la crue printanière .....	99
9.4.1 Système de prévision utilisé par SÉCAL.....	99
9.4.2 Systèmes de prévision utilisés dans le projet .....	99
9.4.3 Simulation des prévisions.....	100
9.4.4 Variables explicatives pour les prévisions .....	101
9.4.4.1 Prévision le 1 <sup>er</sup> avril.....	101
9.4.4.2 Prévision lorsque la condition pour le départ éventuel de la crue est satisfaite.....	102

9.4.4.3 Prévisions lors de la montée de la crue (sous-stades <i>ssm1</i> , <i>ssm2</i> , <i>ssm3</i> et <i>ssm4</i> ):	102
9.4.4.4 Prévisions lors de la descente de la crue (sous-stades <i>ssd1</i> , <i>ssd2</i> , <i>ssd3</i> et <i>ssd4</i> ):	103
9.4.4.5 Utilisation des paramètres d'autres bassins comme variables explicatives	103
9.4.4.5.1 Bassin amont	104
9.4.4.5.2 Bassin aval	104
9.4.4.5.3 Bassin total	104
9.4.5 Résultats des simulations des prévisions	104
9.4.6 Sélection des systèmes de prévision	107
9.5 Construction des distributions de possibilités	109
9.5.1 Sommaire de l'entrevue avec les hydrologues de SÉCAL	109
9.5.1.1 Interprétation de la notion de <i>possibilité</i>	109
9.5.1.2 Construction de distributions de possibilités	110
9.5.1.3 Choix d'une norme triangulaire	111
9.5.2 Distributions <i>a priori</i>	111
9.5.3 Distributions conditionnelles	112
9.6 Comparaison du PPP vs PBP	112
9.6.1 Années pour la comparaison	113
9.6.2 Application du PBP	113
9.6.3 Distributions <i>a posteriori</i> obtenus avec le PPP et le PBP	114
9.6.3.1 Volume de la crue au 1 <sup>er</sup> avril sur le bassin total ( <i>v_avr</i> )	114
9.6.3.2 Nombre de jours entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssm2</i> et la pointe de la crue sur le bassin amont ( <i>dp_ssm2</i> )	121
9.6.3.3 Apport non contrôlé journalier entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssd4</i> et la fin de la crue sur le bassin aval ( <i>v_ssd4</i> )	127
9.6.4 Sommaire de la comparaison	131
9.7 Discussion sur l'application	133
<b>10 CONCLUSION ET DISCUSSION</b>	<b>137</b>
10.1 Principales contributions de la recherche effectuée	137
10.2 Discussion	138
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>141</b>
<b>ANNEXE A: SYSTÈME HYDROÉLECTRIQUE DE SÉCAL</b>	<b>149</b>
<b>ANNEXE B: DESCRIPTION DES SYSTÈMES DE PRÉVISIONS UTILISÉS</b>	<b>159</b>
<b>ANNEXE C: DISTRIBUTIONS DE POSSIBILITÉS A PRIORI ET CONDITIONNELLES POUR LES BASSINS DE SÉCAL</b>	<b>163</b>



## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 6-1: Propriétés satisfaites pour les cinq t-normes étudiées.....	65
Tableau 9.1: Statistiques descriptives sur les crues printanières pour le bassin amont (1943-97).....	91
Tableau 9.2: Statistiques descriptives sur les crues printanières pour le bassin aval (1943-97).....	92
Tableau 9.3: Statistiques sur les crues printanières pour le bassin total (1943-97). ....	92
Tableau 9.4: Nombre d'années ayant les sous-stades pour chaque bassin. ....	94
Tableau 9.5: Pourcentage d'années pour lesquels la condition pour le départ éventuel de la crue est satisfaite pour différents délais avant le départ de la crue. ....	97
Tableau 9.6: Description des variables à estimer.....	98
Tableau 9.7: Résultats des simulations obtenues par la méthode jackknife sur le bassin amont: Coefficient de détermination de la régression linéaire ( $R^2$ ) entre les observations et les prévisions. ....	105
Tableau 9.8: Résultats des simulations obtenues par la méthode jackknife sur le bassin aval: Coefficient de détermination de la régression linéaire ( $R^2$ ) entre les observations et les prévisions.....	106
Tableau 9.9: Résultats des simulations obtenues par la méthode jackknife sur le bassin total: Coefficient de détermination de la régression linéaire ( $R^2$ ) entre les observations et les prévisions.....	107
Tableau 9.10: Meilleur(s) système(s) de prévision pour chaque variable de prévision et chacun des bassins. ....	108



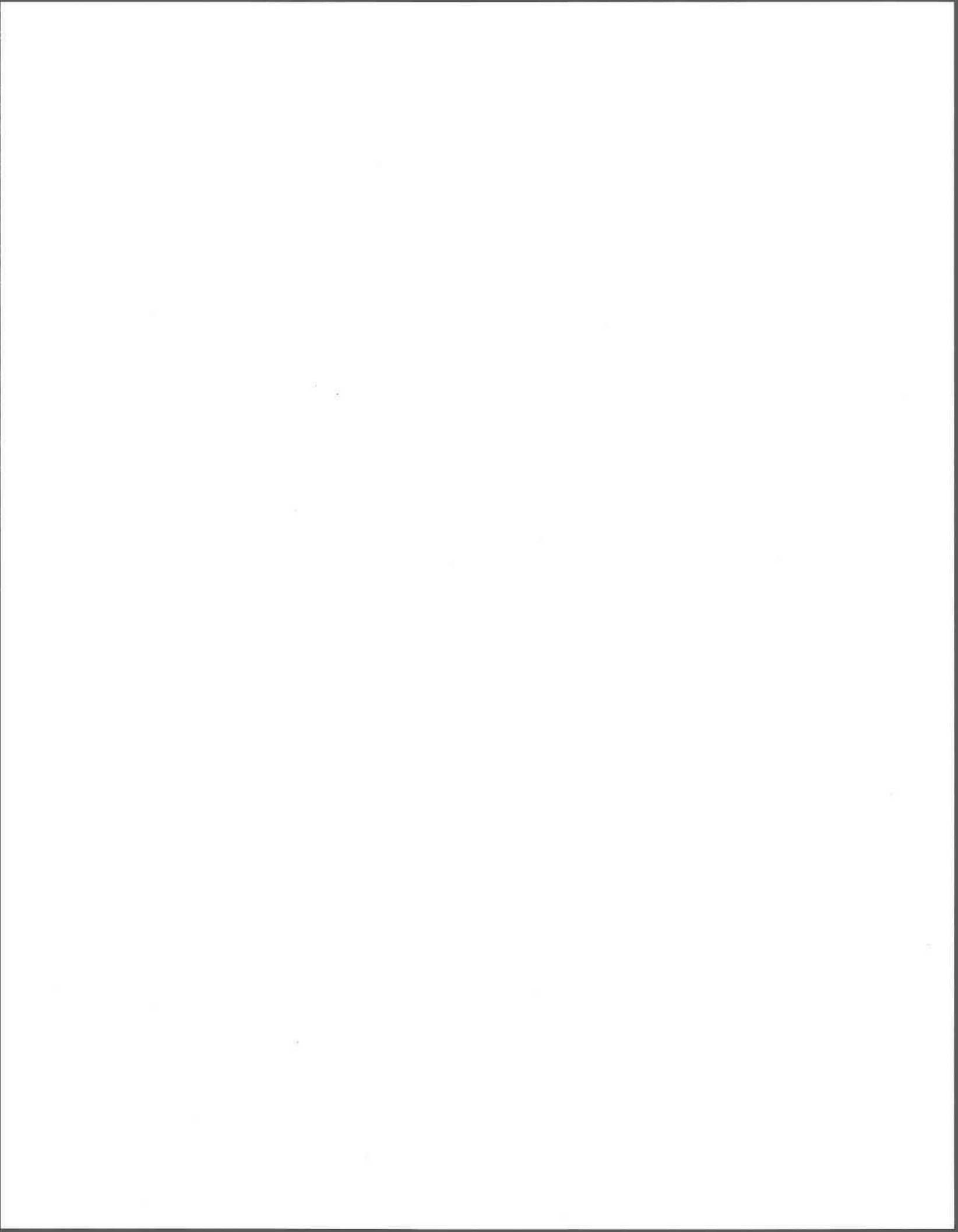
## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1: Structure fonctionnelle du SSP .....	7
Figure 2.2: Illustration des quatre stades d'une crue .....	8
Figure 4.1: Exemple de f.d.p. <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i> .....	22
Figure 5.1: Sous-ensemble flou des nombres réels près de 0. ....	30
Figure 5.2: Exemples de sous-ensembles flous triangulaire et trapézoïdal .....	32
Figure 6.1: Distribution de possibilités <i>a priori</i> $\pi(x)$ . ....	55
Figure 6.2: Prévisions $Y$ en fonction des valeurs observées $X$ . ....	56
Figure 6.3: Distribution de possibilités conditionnelle $\pi(y x)$ représentée pour $X = 4, 6$ et $8$ . . .....	57
Figure 6.4: Distribution $\pi(y x)$ vue comme une fonction de $X$ représentée pour $Y = 4, 6$ , et $8$ . ....	57
Figure 6.5: Distribution de possibilités <i>a posteriori</i> $\pi(x 4)$ avec la Règle 1.....	61
Figure 6.6: Distribution de possibilités <i>a posteriori</i> $\pi(x 4)$ avec la Règle 2.....	62
Figure 6.7: Distribution de possibilités <i>a posteriori</i> $\pi(x 4)$ avec la Règle 3.....	63
Figure 8.1: Les trois sections d'une distribution de possibilités. ....	74
Figure 8.2: Choix de fonction pour la section montante bornée à gauche. ....	77
Figure 8.3: Choix de fonction pour la section montante <u>non</u> bornée à gauche.....	78
Figure 8.4: Choix de fonction pour la section descendante bornée à droite. ....	80
Figure 8.5: Choix de fonction pour la section descendante <u>non</u> bornée à droite. ....	81
Figure 8.6: Amplitude de l'erreur constante (à gauche) et <u>non</u> constante (à droite).....	83
Figure 8.7: Exemples de distributions de possibilités conditionnelles avec amplitude de l'erreur constante: relation linéaire (à gauche) et relation logarithmique (à gauche).....	84
Figure 8.8: Transformation de l'erreur pour éliminer la dépendance sur $X$ : terme d'erreur initial (à gauche) et terme d'erreur transformé (à droite). ....	85
Figure 8.9: Exemple d'une distribution de possibilités conditionnelle avec amplitude de l'erreur <u>non</u> constante. ....	86
Figure 9.1: Volumes des crues printanières de 1943 à 1997 sur les bassins amont et aval ( $\text{hm}^3 = 10^6 \text{ m}^3$ ). ....	90
Figure 9.2: Pointes des crues printanières de 1943 à 1997 sur les bassins amont et aval ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).....	91
Figure 9.3: Distribution de possibilités <i>a posteriori</i> $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. <i>a posteriori</i> $\eta(x y)$ (en bas) du volume total de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au 1 <sup>er</sup> avril (v_avr) sur le bassin total et la prévision de 1967, soit $y = 22097 \text{ hm}^3$ ( <i>Observation</i> = $16523$ $\text{hm}^3$ ). ....	116
Figure 9.4: Distribution de possibilités <i>a posteriori</i> $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. <i>a posteriori</i> $\eta(x y)$ (en bas) du volume total de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au 1 <sup>er</sup> avril (v_avr) sur le bassin total et la prévision de 1974, soit $y = 23501 \text{ hm}^3$ ( <i>Observation</i> = $31114$ $\text{hm}^3$ ). ....	117

Figure 9.5: Distribution de possibilités a posteriori $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. a posteriori $\eta(x y)$ (en bas) du volume total de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au 1 <sup>er</sup> avril (v_avr) sur le bassin total et la prévision de 1975, soit $y = 23746 \text{ hm}^3$ (Observation = 19345 $\text{hm}^3$ ). .....	118
Figure 9.6: Distribution de possibilités a posteriori $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. a posteriori $\eta(x y)$ (en bas) du volume total de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au 1 <sup>er</sup> avril (v_avr) sur le bassin total et la prévision de 1993, soit $y = 16895 \text{ hm}^3$ (Observation = 22108 $\text{hm}^3$ ). .....	119
Figure 9.7: Distribution de possibilités a posteriori $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. a posteriori $\eta(x y)$ (en bas) du volume total de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au 1 <sup>er</sup> avril (v_avr) sur le bassin total et la prévision de 1997, soit $y = 22660 \text{ hm}^3$ (Observation = 23927 $\text{hm}^3$ ). .....	120
Figure 9.8: Distribution de possibilités a posteriori $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. a posteriori $\eta(x y)$ (en bas) du nombre de jours restant avant la pointe de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au début du sous-stade montée 2 (dp_ssm2) sur le bassin amont et la prévision de 1967, soit $y = 18.19$ (Observation = 26). .....	122
Figure 9.9: Distribution de possibilités a posteriori $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. a posteriori $\eta(x y)$ (en bas) du nombre de jours restant avant la pointe de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au début du sous-stade montée 2 (dp_ssm2) sur le bassin amont et la prévision de 1974, soit $y = 17.59$ (Observation = 19). .....	123
Figure 9.10: Distribution de possibilités a posteriori $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. a posteriori $\eta(x y)$ (en bas) du nombre de jours restant avant la pointe de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au début du sous-stade montée 2 (dp_ssm2) sur le bassin amont et la prévision de 1975, soit $y = 5.85$ (Observation = 10). .....	124
Figure 9.11: Distribution de possibilités a posteriori $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. a posteriori $\eta(x y)$ (en bas) du nombre de jours restant avant la pointe de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au début du sous-stade montée 2 (dp_ssm2) sur le bassin amont et la prévision de 1993, soit $y = 8.47$ (Observation = 7). .....	125
Figure 9.12: Distribution de possibilités a posteriori $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. a posteriori $\eta(x y)$ (en bas) du nombre de jours restant avant la pointe de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au début du sous-stade montée 2 (dp_ssm2) sur le bassin amont et la prévision de 1997, soit $y = 19.09$ (Observation = 18). .....	126
Figure 9.13: Distribution de possibilités a posteriori $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. a posteriori $\eta(x y)$ (en bas) du volume journalier de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 4 (v_ssd4) sur le bassin aval et la prévision de 1974, soit $y = 103.33 \text{ hm}^3$ (Observation = 95.69 $\text{hm}^3$ ). .....	128
Figure 9.14: Distribution de possibilités a posteriori $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. a posteriori $\eta(x y)$ (en bas) du volume journalier de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 4 (v_ssd4) sur le bassin aval et la prévision de 1975, soit $y = 127.17 \text{ hm}^3$ (Observation = 111.41 $\text{hm}^3$ ). .....	129



Figure 9.15: Distribution de possibilités <i>a posteriori</i> $\pi(x y)$ (en haut) et f.d.p. <i>a posteriori</i> $\eta(x y)$ (en bas) du volume journalier de la crue (en $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 4 ( $v\_ssd4$ ) sur le bassin aval et la prévision de 1993, soit $y = 87.69 \text{ hm}^3$ ( <i>Observation</i> = $70.27 \text{ hm}^3$ ).....	130
Figure 9.16: Comparaison du PPP et du PBP pour la variable de prévision $v\_avr$ sur le bassin total en utilisant la moyenne floue <i>a posteriori</i> et l'espérance statistique <i>a posteriori</i> .....	132
Figure 9.17: Comparaison du PPP et du PBP pour la variable de prévision $dp\_ssm2$ sur le bassin amont en utilisant la moyenne floue <i>a posteriori</i> et l'espérance statistique <i>a posteriori</i> .....	132
Figure 9.18: Comparaison du PPP et du PBP pour la variable de prévision $v\_ssd4$ sur le bassin aval en utilisant la moyenne floue <i>a posteriori</i> et l'espérance statistique <i>a posteriori</i> .....	133



## LISTE DES ABRÉVIATIONS

ANC	Apport non contrôlé
dd	Date de départ de la crue
dp	Date de pointe de la crue
f.d.p.	Fonction de densité de probabilité
GSP	Gestionnaire de systèmes de prévision
MIP	Module d'intégration des prévisions
NQT	<i>Normal quantile transform</i>
p	Apport non contrôlé de pointe
PBP	Processeur bayésien de prévisions
PPP	Processeur possibiliste de prévisions
RLM	Régression linéaire multiple
RNP	Régression non paramétrique (lissage par noyaux)
SÉCAL	Société d'électrolyse et de chimie Alcan Ltée
SSC	Sous-système de surveillance des crues
SSP	Système de surveillance et de prévision
v	Volume des apports non contrôlés durant la crue
VPP	Voisins les plus proches



# 1 INTRODUCTION

---

## 1.1 Problématique

En période de crue ou quelques temps avant cette période lorsque la crue est attendue (comme au printemps), la gestion de l'eau d'un réservoir est un problème très important. L'hydrologue doit établir un plan de gestion des ressources en eau dans un contexte où le niveau d'incertitude sur les apports naturels qui alimenteront le réservoir en période de crue est souvent très élevé. Il doit faire face à deux objectifs conflictuels en relation avec le niveau d'eau dans le réservoir:

1. Le niveau d'eau doit être suffisamment bas pour pouvoir accueillir la crue sans causer d'inondations. Pour bien des réservoirs, la capacité de décharge est inférieure au débit entrant durant une certaine période de la crue, d'où la nécessité de libérer un volume du réservoir pour pouvoir emmagasiner l'excédent.
2. Le niveau d'eau doit être maintenu à un niveau suffisamment élevé pour que le réservoir puisse remplir ses fonctions, telles que la production hydroélectrique, l'utilisation par les riverains, la préservation de la faune aquatique, etc. De plus, à la fin de la période de crue, le niveau d'eau devrait être rétabli à son niveau normal d'opération. Lorsque la fonction principale d'un réservoir est la production hydroélectrique, une hauteur de chute diminuée représente une perte importante d'énergie potentielle donc d'électricité produite. Notons aussi qu'un niveau d'eau trop élevé occasionne des pertes importantes lorsqu'une partie de l'eau doit être déversée au lieu d'être utilisée pour la production.

Pour établir un plan de gestion de l'eau, l'hydrologue utilise des systèmes de prévision qui fournissent des estimés des caractéristiques de la crue. Par contre, l'information fournie par ces systèmes de prévision peut être de nature très imprécise en raison principalement, mais non seulement, de l'incertitude associée aux facteurs météorologiques influant la crue (Lapointe, 1996). Étant donné la dominance de ce type d'incertitude sur les autres (imprécision des données, incertitude du modèle de prévision, incertitude d'échantillonnage, etc.), il n'est souvent pas possible d'améliorer la performance des systèmes de prévision. Ayant comme seules informations ces prévisions et son expérience personnelle, l'hydrologue doit tout de même planifier la gestion de l'eau. L'utilisation de telles prévisions sans tenir

compte explicitement de leur qualité, de leur imprécision, amène l'hydrologue à prendre des décisions sans pouvoir en mesurer le risque.

## 1.2 Approche adoptée

L'objet de ce travail est de proposer une méthodologie et de développer les outils nécessaires pour aider l'hydrologue à effectuer une bonne gestion des crues en prenant en compte le risque associé à ses décisions. L'approche générale qui a été adoptée consiste à effectuer une meilleure gestion des systèmes de prévision. Cette approche se divise en deux volets:

1. On effectue un suivi continu des crues en mettant à jour les prévisions des caractéristiques de la crue (telles le volume des apports non contrôlés, l'apport non contrôlé de pointe, la date de départ et la date de pointe) au fur et à mesure que la crue évolue et que l'incertitude (hydrologique et météorologique) diminue. Les périodes de prévision ne sont pas fixées à l'avance, mais plutôt fonction du stade actuel de la crue.
2. Les prévisions émises ne sont pas utilisées naïvement. Les performances historiques des systèmes de prévision sont analysées, et ce, dans le but de construire des modèles d'incertitude sur les prévisions en les mettant en relation avec les observations. Les systèmes de prévision relativement performants auront plus d'influence sur la décision finale que ceux qui sont moins performants. De plus, cette approche permet de corriger les biais (systématiques ou conditionnels) qui peuvent être présents dans les prévisions.

Le premier point est plutôt d'ordre procédural; en effet, il a trait à l'élaboration d'une méthodologie pour effectuer le suivi des crues et déterminer les périodes de prévision. Le deuxième point, par contre, est beaucoup plus technique. Il concerne les méthodes pour la modélisation des incertitudes et l'intégration des incertitudes de diverses natures; en particulier, il concerne la modélisation des erreurs de prévision. Notons que ce problème a déjà été étudié dans un contexte différent (Ouarda et al, 1998). Dans la section qui suit, on apporte les arguments nécessaires pour motiver les deux volets de l'approche retenue.

## 1.3 Motivation

Le premier point qui est discuté est la question du suivi continu des crues et de la mise à jour des prévisions en fonction du stade actuel de la crue. Une approche utilisée en hydrologie pour mettre à jour les prévisions consiste, lorsque les moyens le permettent, à effectuer des prévisions journalières, comme c'est le cas chez Hydro-Québec (Bisson, 1995; Rasmussen

et al, 1997; Ouarda et al, 1998). Une autre approche souvent utilisée consiste à effectuer des prévisions à des dates fixes comme c'est le cas chez SÉCAL (Gignac et al, 1990; Dupont, 1996) et chez les Services météorologiques américains (Krzysztofowicz et Watada, 1986). Cette dernière approche ne tient pas compte du décalage temporel entre les différents événements de crue. Si, par exemple, on prend le cas où l'on effectue systématiquement une prévision du volume de la crue printanière le 15 avril, et qu'on suppose qu'une certaine année X la crue débute seulement le 1<sup>er</sup> mai alors que l'année Y la crue débute tôt, soit le 1<sup>er</sup> avril. Il serait évidemment peu approprié de constituer un échantillon contenant ces deux années dans le but de construire un système de prévision pour le 15 avril. En effet, on pourrait s'attendre à ce que l'espérance de la prévision pour l'année Y soit meilleure que celle pour l'année X car la variabilité du phénomène étudié est inférieure (la variance du volume restant deux semaines après le début de la crue est inférieure à la variance du volume total). Dans ce travail, une alternative à l'approche classique est proposée; celle-ci consiste à tenir compte du décalage temporel entre les crues. Les prévisions sont effectuées à des dates qui ne sont pas fixes, mais plutôt dépendantes de l'évolution de la crue. Par exemple, au lieu d'effectuer une prévision le 15 avril, on peut effectuer une prévision le lendemain du départ de la crue ou un certain nombre de jours après le départ ou la pointe de la crue. Les échantillons constitués de cette manière sont beaucoup plus homogènes, et il est plus approprié de les utiliser dans le but de construire des systèmes de prévision. De plus, il devient possible de modéliser avec cohérence la performance d'un système de prévision à une telle période ayant la même signification pour chaque événement de crue.

Le deuxième volet de l'approche, soit la modélisation de l'incertitude dans les prévisions, est discuté ci-dessous. Avant de prendre une décision en se basant sur une prévision émise, l'hydrologue ne pourrait que bénéficier d'une information supplémentaire quantifiant la précision, c'est-à-dire, l'incertitude de cette prévision. Ceci lui permettrait de prendre une décision plus éclairée, d'être plus conscient du risque. De plus, les correctifs à apporter pour les tendances générales du système de prévision (comme sous-estimer de 10%) ou les tendances plus complexe qui peuvent être modélisées par une relation entre les prévisions et les observations devraient être effectués de manière automatique. Le patron d'inférence bayésien est un cadre permettant d'effectuer un tel traitement et est par conséquent la pierre angulaire des travaux réalisés dans le cadre de ce travail qui touchent au traitement de l'incertitude. Par contre, la théorie des possibilités a été retenue pour la modélisation des incertitudes car elle offre un cadre plus flexible pour l'intégration de l'information de nature subjective fournie par un expert.

## 1.4 Objectifs du projet de recherche

L'objectif général du projet de recherche découle de la problématique énoncée précédemment et de l'approche retenue. Cet objectif est de développer et d'illustrer par une application une méthodologie pour la construction de Systèmes de surveillance et de prévision de crues tout en mettant l'accent sur le traitement des incertitudes de nature diverse. Plusieurs objectifs spécifiques dérivent de cet objectif général:

- Proposer une méthodologie pour la construction de Systèmes de surveillance et de prévision des crues. Le rôle d'un tel système est de faire un suivi continu des crues en estimant à différents stades de celles-ci leurs principales caractéristiques (volume, pointe, etc.)
- Proposer une approche originale concernant le traitement de l'incertitude dans les prévisions qui se prête bien à l'évaluation subjective de l'incertitude; démontrer la pertinence de la théorie des possibilités comme méthode de modélisation et de combinaison des incertitudes.
- Effectuer les développements théoriques nécessaires dans le cadre de la théorie des possibilités pour pouvoir utiliser le patron d'inférence bayésien qui permet de réviser un modèle d'incertitude *a priori* suite à l'arrivée de nouvelles informations telles des prévisions.
- Appliquer l'approche développée sur les bassins de SÉCAL.
- Développer et implanter des systèmes de prévision pour permettre la simulation de données nécessaires au développement de l'application.
- Comparer l'approche développée avec l'approche bayésienne dans le cadre de l'application étudiée.
- Démontrer l'applicabilité des méthodes bayésienne et possibilistique en hydrologie. Notons qu'il existe relativement peu d'études sur l'utilisation de méthodes floues en sciences de l'eau (Bárdossy, 1990; Bárdossy et al, 1990; Esogbue et al, 1992; Bárdossy et Duckstein, 1995; 1996; Chongfu, 1996).

## 1.5 Application

Le projet de recherche proposé a été réalisé dans le cadre d'une collaboration entre l'INRS-Eau et la Société d'électrolyse et de chimie Alcan Ltée (SÉCAL) située à Jonquière au Saguenay-Lac-Saint-Jean. SÉCAL exploite un important réseau hydroélectrique servant



principalement à alimenter en électricité leur usine d'aluminium et quelques autres compagnies régionales. La méthodologie développée a par conséquent été appliquée à trois bassins de la compagnie: bassin amont, bassin aval et bassin total. L'objectif principal de la compagnie est d'optimiser la production hydroélectrique en période de crue. La problématique spécifique qui concerne la compagnie en période de crue est celle énoncée précédemment (cf. 1.1) avec, par contre, une petite particularité: Il faut baisser suffisamment le niveau des réservoirs pour pouvoir accueillir la crue sans causer des inondations ou être dans la nécessité de déverser (i.e., gaspiller la ressource eau), mais sans perdre une hauteur de chute conduisant à une perte de production. La particularité dans le cas de SÉCAL est qu'il n'y pas vraiment de demande maximale car les surplus peuvent être vendus à Hydro-Québec, organisme gouvernemental desservant la majorité de la population québécoise; ceci a pour effet de simplifier quelque peu le travail de planification de l'hydrologue.

Les caractéristiques d'une crue qui intéressent les hydrologues de SÉCAL sont:

1. le volume total des apports naturels (aussi appelés, apports non contrôlés);
2. la date de départ de la crue;
3. la date de pointe de la crue, et;
4. l'apport non contrôlé de pointe.

Étant donné que les données nécessaires (prévisions historiques) ne sont pas disponibles, une technique de ré-échantillonnage (*jackknife*) a été utilisée pour les produire. Trois systèmes de prévision développés et implantés expressément pour le projet ont été utilisés pour générer ces prévisions. Cinq années n'ont pas été utilisées pour la calibration du système, mais plutôt pour des analyses de cas et une comparaison avec l'approche bayésienne.

## 1.6 Contenu et structure du rapport

Ce document est organisé comme suit: Le chapitre 2 fournit une description détaillée de la structure du Système de surveillance et de prévision des crues en mettant l'accent sur les processus impliqués. Le Chapitre 3 discute du problème de traitement de l'incertitude dans les prévisions. Dans le Chapitre 4, l'approche bayésienne existante pour le traitement de l'incertitude est présentée. Les concepts de la théorie des possibilités qui sont nécessaires à la compréhension des développements effectués sont revus dans le Chapitre 5. Le chapitre qui suit est consacré aux développements théoriques apportés à la théorie des possibilités.

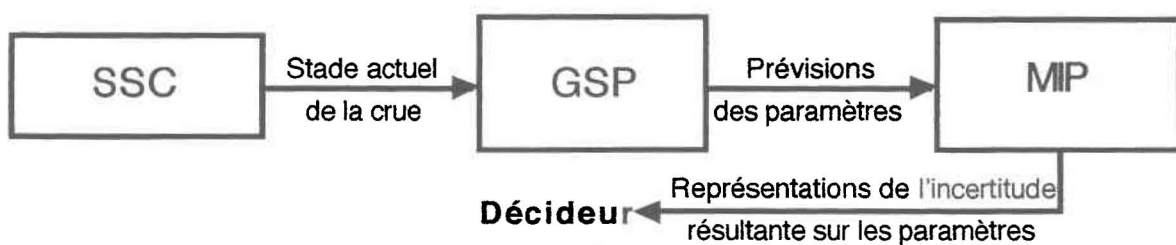
Dans le Chapitre 7, la question d'interprétation du terme « possibilité » est abordée, alors que dans le Chapitre 8, une méthodologie pour la construction de distributions de possibilités est proposée. L'application de l'approche développée sur les bassins de SÉCAL est détaillée dans le Chapitre 9. Finalement, le Chapitre 10 fournit une conclusion et une discussion sur les résultats présentés dans ce travail.

## 2 SYSTÈME DE SURVEILLANCE ET DE PRÉVISION DES CRUES (SSP)

---

### 2.1 Structure fonctionnelle

Dans ce qui suit, on utilisera le terme « paramètre » pour indiquer une caractéristique des crues, telle le volume ou la pointe. La structure fonctionnelle du Système de surveillance et de prévision (SSP) proposée ici est inspirée de celle utilisée pour la construction de systèmes d'avertissement de crues (Krzysztofowicz, 1993). Le SSP est constitué de trois composants organisés en cascade comme le montre la Figure 2.1. Le Sous-système de surveillance des crues (SSC) détecte le stade actuel de la crue et en informe le Gestionnaire de systèmes de prévision (GSP). À chaque période de prévision (fonction du stade de la crue), le GSP active le système de prévision approprié pour chaque paramètre de la crue. Les prévisions émises sont transmises au Module d'intégration des prévisions (MIP). Le MIP combine et intègre ces prévisions dans le but de produire une représentation de l'incertitude résultante sur chacun des paramètres (par exemple, une fonction de densité de probabilité (f.d.p.) *a posteriori*) qui peut être utilisée par le décideur pour obtenir une estimation ponctuelle ou un intervalle de confiance. Les détails de chaque composant sont donnés dans la section suivante.



**Figure 2.1: Structure fonctionnelle du SSP**

## 2.2 Composants du SSP

### 2.2.1 Sous-système de surveillance des crues (SSC)

Le rôle du SSC est d'analyser les données hydrologiques et les prévisions météorologiques dans le but de détecter les différents stades de la crue. Lorsqu'un changement de stade est détecté, le SSC en informe le GSP et lui fournit les données nécessaires à ses fonctions.

Quatre stades de la crue sont considérés:

1. Départ éventuel
2. Montée
3. Descente
4. Fin de la crue

La définition de ces différents stades est dépendante de l'application. La Figure 2.2 illustre les différents stades dans le cas où le départ et la fin de la crue sont définis par un seuil commun. Une fonction importante du SSC est de détecter les conditions propices à l'arrivée d'une crue (détection du stade *départ éventuel*). Il devrait permettre, par l'entremise du GSP, d'activer les systèmes de prévision quelques jours avant le départ éventuel d'une crue.

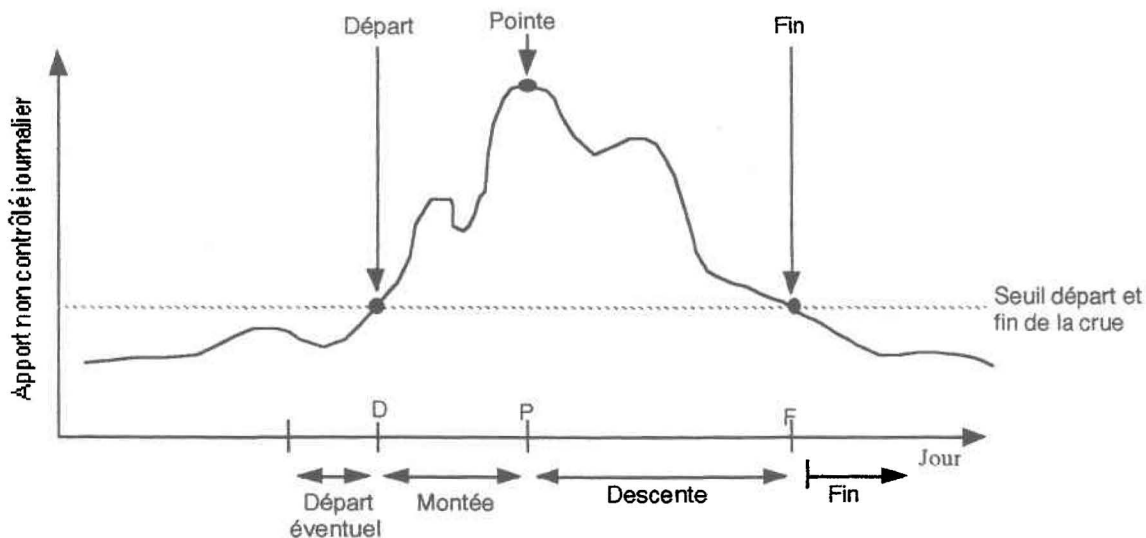


Figure 2.2: Illustration des quatre stades d'une crue

### 2.2.1.1 Départ éventuel de la crue

On peut définir le stade *départ éventuel* de la crue comme la période précédant d'un certain nombre de jours le départ effectif de la crue (par exemple, dix jours). Lors de la construction du SSC, on doit déterminer une condition qui lorsque elle est satisfaite permette d'envisager le départ de la crue à l'intérieur du délai fixé. Par exemple, pour les crues estivales/automnales, un exemple de condition est:

- Si on prévoit plus de 50 mm de pluie durant les 7 prochains jours;

OU

- Si une jauge indique un niveau supérieur à 3 m et si on prévoit plus de 20 mm de pluie durant les 2 prochains jours;

Pour les crues printanières, une condition pour le départ éventuel pourrait, par exemple, avoir la forme suivante:

- Si la fonte de la neige a débutée à un endroit X sur le bassin versant et que les températures moyennes prévues sont supérieures à 5 °C pour les 3 prochains jours.

OU

- Si plus de 30 mm de pluie sont tombés sur le bassin versant et que le niveau d'une jauge est supérieur à un certain niveau.

Une seule des deux parties de la condition (un des deux énoncé ci-dessus) a besoin d'être satisfaite pour considérer un départ éventuel. Il n'y a évidemment pas de limite sur la complexité de la condition quoique la parcimonie soit toujours préférable. La détermination de la condition doit être effectuée par essai-erreur en tentant de maximiser certains critères de performance. Krzysztofowicz (1993) a proposé dans un cadre légèrement différent de modéliser la performance d'un système de surveillance par sa *fiabilité*  $\rho$  et sa *capacité de diagnostic*  $\gamma$ . Soit la variable de Bernoulli  $C$ ;  $C = 1$  si les conditions pour l'identification du stade *départ éventuel* sont satisfaites,  $C = 0$  autrement. Soit la variable de Bernoulli  $\Theta$ ;  $\Theta = 1$  si le départ effectif de la crue a lieu à l'intérieur du délai fixé (signifiant que le stade actuel de la crue est *départ éventuel*),  $\Theta = 0$  autrement. On peut définir  $\rho$  et  $\gamma$  de la manière suivante:

$$\rho = P(C = 1 | \Theta = 1) \qquad \gamma = P(\Theta = 1 | C = 1) \qquad (2-1)$$

La fiabilité  $\rho$  correspond à la probabilité de détecter le stade *départ éventuel* de la crue un jour donné sachant que le départ effectif de la crue surviendra à l'intérieur du délai fixé. La capacité de diagnostic  $\gamma$  correspond à la probabilité que le départ effectif de la crue survienne à l'intérieur du délai fixé sachant que le stade *départ éventuel* de la crue a été détecté un jour donné. Pour chaque jour, on obtient une paire d'observations  $(C, \Theta)$  qui peut être utilisée pour estimer  $\rho$  et  $\gamma$  par simple analyse de fréquence.  $\rho = 1$  signifie que le stade *départ éventuel* est toujours détecté lorsqu'il y a lieu, et  $\gamma = 1$  signifie que le stade *départ éventuel* n'est jamais détecté à tort. Idéalement, on cherche à maximiser  $\rho$  et  $\gamma$ .

Notons que la condition pour le départ éventuel d'une crue est, en général, satisfaite plusieurs jours de suite lorsqu'une crue est effectivement attendue. Pour chacun de ces jours consécutifs, le SSC informe le GSP qui émettra de nouvelles prévisions.

#### **2.2.1.2 Montée de la crue**

Le stade *montée* de la crue est défini comme la période commençant le jour suivant le départ effectif de la crue et se terminant le jour de la pointe de la crue. Puisque la définition du départ effectif de la crue peut varier d'une application à l'autre, en fonction des besoins des gestionnaires, il en est de même pour le stade *montée*. Il y a donc un élément subjectif qui dépend du problème lors de la détermination de ce stade. Par exemple, dans certains cas, on peut considérer le départ effectif de la crue comme le jour où les apports non contrôlés sont supérieurs à un certain seuil et se maintiennent au-delà de ce seuil pour X jours, ou le jour où le taux d'augmentation des apports non contrôlés est supérieur à un certain seuil. L'identification de ce stade ne cause habituellement pas de problème car sa définition dépend simplement des observations hydrologiques, mais il y peut y avoir un retard dans l'identification du stade comme dans le cas du premier exemple ci-dessus (seuil maintenu pendant X jours).

#### **2.2.1.3 Descente de la crue**

Le stade *descente* de la crue est défini comme la période commençant le jour suivant la pointe de la crue et se terminant le jour de la fin de la crue. La définition de la pointe de la crue est évidemment fixé, ce qui n'est pas le cas pour la fin de la crue. Par conséquent, la signification de ce stade est dépendante de l'application, c'est-à-dire de ce qu'on entend par la fin de la crue. Notons qu'il peut y avoir un retard dans l'identification du stade car l'identification de la pointe est généralement fonction des observations les jours suivants la pointe.

#### 2.2.1.4 Fin de la crue

Le stade *fin* de la crue est simplement la période après la crue. Il est donc fonction de la définition de la fin de la crue. Ce stade est seulement utilisé pour informer le GSP que la crue est terminée et que les séquences de prévisions peuvent cesser.

### 2.2.2 Gestionnaire de systèmes de prévision (GSP)

Pour chaque stade de la crue et chaque paramètre de celle-ci, le GSP connaît le système de prévision qui doit être activé pour l'estimation de ce paramètre; le système de prévision utilisé varie en fonction du stade et du paramètre de la crue. Lorsque le SSC informe le GSP du stade actuel de la crue (ex.: stade montée de la crue), le GSP active pour chaque paramètre de la crue le système de prévision approprié. On obtient ainsi, pour chaque paramètre, une prévision qui est transmise au MIP pour intégration.

La sélection des systèmes de prévision fait partie de l'étape de construction du SSP. Dans le cas de l'application discutée plus loin, on propose d'évaluer, pour chaque stade et chaque paramètre de la crue, la performance de tous les systèmes de prévision dans le but de retenir le système de prévision ayant la meilleure performance. Pour évaluer la performance de chaque système, on propose de simuler les prévisions par ré-échantillonnage.

Les systèmes de prévision peuvent être vus comme des boîtes noires prenant en entrée certaines données hydrométéorologiques et prévisions météorologiques et fournissant à la sortie une prévision catégorique (une valeur) d'une variable d'intérêt. L'architecture interne des systèmes de prévision n'a pas d'incidence sur l'utilisation faite de ces prévisions par la suite car les systèmes de prévision sont vus comme des boîtes noires. Par contre, sur la période à l'étude, des changements ne doivent pas être apportés aux systèmes de prévision à moins qu'ils ne soient mineurs et sans conséquence sur la performance des systèmes de prévision; par exemple, le retrait d'une variable peu pertinente (c'est-à-dire, aidant très peu à expliquer le phénomène étudié) peut être acceptable. Un autre cas de changement mineur à un système de prévision survient lorsqu'on utilise la technique de ré-échantillonnage *jackknife* (simple) comme dans le cadre de ce travail pour la simulation des données (couples prévision/observation). Cette technique n'utilise pas exactement le même système de prévision d'une itération à l'autre, mais les changements sont peu importants d'une itération à l'autre si le nombre de données est suffisant. Ainsi, la performance du système de prévision (qui est calibré sur le même nombre de données à chaque itération) est à peu près constante. Ainsi la technique *jackknife* permet de collecter un échantillon homogène pouvant être utilisé pour évaluer la performance d'un système de prévision.

### 2.2.2.1 Systèmes de prévision

Étant donné que les systèmes de prévision sont vus comme des boîtes noires, n'importe quelle méthode peut être utilisée en autant qu'elle fournit une prévision catégorique (une valeur) du paramètre d'intérêt. Par contre, il est préférable que les systèmes de prévision utilisés se prêtent bien à des méthodes de ré-échantillonnage qui nécessitent un recalibrage constant des modèles de prévision. Dans le cadre de l'application considérée (cf. Chapitre 9), trois systèmes de prévision ont été utilisés. Ils sont basés sur les méthodes suivantes:

- Régression linéaire multiple de type pas à pas (RLM).
- Régression non paramétrique, lissage par noyaux (RNP).
- Méthode des voisins les plus proches (VPP).

La régression linéaire multiple (RLM) de type pas à pas (*forward*) est une méthode bien connue et très couramment utilisée en hydrologie. De plus, elle est présentement utilisée par la compagnie collaborant au projet (SÉCAL, 1982; Gignac et al, 1990; Dupont, 1996) pour la prévision des crues. Notons que la RLM est aussi utilisée par *The National Weather Service and the Soil Conservation Service* (aux États-Unis) pour la prévision du volume de la crue printanière (Krzysztofowicz et Watada, 1986). Les deux autres systèmes de prévision sont basés sur des méthodes non paramétriques (cf. Chapitre 9 et Annexe B).

### 2.2.3 Module d'intégration des prévisions (MIP)

La première étape de la construction du MIP consiste à modéliser les performances des systèmes de prévision. Ainsi, pour chaque stade de la crue et chaque paramètre, un modèle de l'incertitude sur les prévisions émises par ce système doit être obtenu. Dans le cadre bayésien, on utilisera une fonction de vraisemblance: fonction de densité de probabilité (f.d.p.) de la prévision conditionnelle à la valeur observée. De plus, pour chaque stade de la crue et chaque paramètre à estimer, une représentation de l'incertitude historique (telle une f.d.p. *a priori*, dans le cadre bayésien) doit être spécifiée.

Le MIP reçoit du GSP un ensemble de prévisions du même paramètre de crue dont il connaît les sources (i.e., les systèmes qui ont émis les prévisions). Son rôle est de combiner les différentes prévisions et de les intégrer avec l'incertitude historique sur le paramètre tout en tenant compte des performances passées des systèmes de prévision. Il fournit au décideur/utilisateur une représentation de l'incertitude (*a posteriori*) sur ce paramètre. Dans



le cadre bayésien, la sortie consiste en une f.d.p. *a posteriori* conditionnelle aux prévisions émises (Bernier, 1991).

Le MIP constitue, d'un point de vue théorique, le corps du projet proposé. Dans le cadre bayésien, une solution existe: le Processeur bayésien de prévisions (PBP) déjà développé pour ce problème (Krzysztofowicz et Watada, 1986; Krzysztofowicz, 1985; 1993). Dans le cadre de ce travail, on propose une solution différente basée sur la théorie des possibilités; on parlera alors du Processeur possibiliste de prévisions (PPP). Les Chapitres 4 et 6 sont consacrés à la description de ces méthodes.

## 2.3 Suivi de l'évolution de la crue

Jusqu'à présent, on a supposé que des prévisions étaient émises par le GSP seulement les jours où il y a un changement de stade (montée ou descente) ou bien les jours où la condition pour le départ éventuel de la crue est satisfaite. La durée du stade *montée* ou *descente* peut être assez longue dans certains cas. Par exemple dans la cas de SÉCAL, la durée de la montée de la crue printanière est en moyenne de quatre semaines. Puisque l'objectif est de faire un suivi continu des crues, il est important de pouvoir mettre à jour les prévisions émises au début des stades *montée* et *descente* au fur et à mesure que la crue progresse à l'intérieur de ces stades. À cette fin, il suffit de définir un pas de temps de mise à jour des prévisions. On peut par exemple utiliser (pour la crue printanière) un pas d'une semaine. Ainsi, une fois que la crue a débuté, une séquence de prévisions commence; la longueur de la séquence est de durée indéterminée (elle sera en moyenne de quatre dans l'exemple précédent). Lorsque le pas de temps entre les prévisions a été spécifié, on peut définir les sous-stades de la crue.

### 2.3.1 Sous-stades de la crue

Dans ce qui suit, on propose une manière de décomposer les stades *montée* et *descente* en plusieurs sous-stades de durée plus courte; à chaque début de sous-stade, on fait de nouvelles prévisions des paramètres de la crue. Soit  $L_M$  le pas de temps pour le stade *montée* de la crue et  $L_D$  le pas de temps pour le stade *descente* de la crue. Soit  $D$ ,  $P$  et  $F$  les points de référence temporelle pour le départ, la pointe et la fin de la crue, respectivement. On note les sous-stades de la crue pour le stade *montée* par  $SSM_i$  et pour le stade *descente* par  $SSD_i$ :

$$SSM_i = \left[ (D+1) + (i-1) * L_M, \text{Min} \left( (D + (i * L_M)), P \right) \right] \quad i = 1, \dots, N_1 \quad (2-2)$$

$$SSD_i = \left[ (P+1) + (i-1) * L_D, \text{Min} \left( (P + i * L_D), F \right) \right] \quad i = 1, \dots, N_2 \quad (2-3)$$

Un sous-stade correspond simplement à un intervalle spécifié par le premier jour et le dernier jour.  $N_1$  et  $N_2$  représentent les nombres de sous-stades pour les stades *montée* et *descente*, respectivement, et sont définis par (la fonction  $\text{arrondir}(x)$  donne le plus petit entier supérieur ou égal à  $x$ ):

$$N_1 = \text{arrondir} \left( \frac{P - D}{L_1} \right) \quad (2-4)$$

$$N_2 = \text{arrondir} \left( \frac{F - P}{L_2} \right) \quad (2-5)$$

Ainsi, le nombre de sous-stades varie d'une crue à l'autre en fonction des points de référence  $D$ ,  $P$  et  $F$ . Considérant une fois de plus un pas d'une semaine,  $SSM_2$  correspond à la deuxième semaine après le départ de la crue, et  $SSD_4$  correspond à la quatrième semaine après la pointe de la crue et n'est pas défini dans le cas d'une crue dont la durée du stade *descente* est inférieure ou égale à trois semaines. Notons que le dernier sous-stade peut être tronqué, i.e., que sa durée peut être inférieure au pas de temps utilisé. Par exemple, si  $D = 0$ ,  $P = 25$  et  $L_1 = 7$ , on obtient les  $N_1 = 4$  sous-stades suivants pour la montée de la crue:

$$SSM_1 = [1,7] \quad SSM_2 = [8,14] \quad SSM_3 = [15,21] \quad SSM_4 = [22,25]$$

Si on fait le changement suivant:  $P = 21$ , les trois premiers sous-stades seulement sont conservés.

### 2.3.2 Séquences de prévisions

Maintenant que les sous-stades (pour les stades *montée* et *descente*) ont été définis, on peut apporter une précision quant au fonctionnement du GSP. Lorsque le GSP est informé par le SSC que le stade actuel de la crue est *montée*, une séquence de prévisions commence. À chaque début de sous-stade, de nouvelles prévisions sont émises et transmises au MIP pour intégration. Une séquence de prévisions est définie de la même façon pour le stade *descente*.

## 2.4 Types de crues

Dans les régions nordiques, on peut distinguer deux types de crue: (1) les crues printanières causées essentiellement par la fonte de la neige et (2) les crues estivales/automnales causées par les événements de pluie. Dans un contexte opérationnel, les systèmes de prévision utilisés dans les deux cas peuvent être totalement différents car traitant de phénomènes différents; en particulier les variables d'entrée ne sont pas les mêmes. Pour les crues printanières, la majorité des variables sont définies en fonction des observations hivernales (telles que les précipitations solides et l'équivalent d'eau de la neige). Pour les crues estivales/automnales, les variables principales sont définies en fonction des précipitations antérieures et celles prévues pour les prochains jours. On peut se demander si une telle différence peut avoir des implications au niveau de la structure fonctionnelle du SSP des crues. En fait, il n'y en a pas car la démarche méthodologique est la même; par contre, l'application est différente.

## 2.5 Étapes pour la construction d'un SSP

Dans cette section, la séquence d'étapes nécessaires à la construction d'un SSP pour une application particulière est présentée:

1. Définition des dates de départ, de pointe et de la fin de la crue.
2. Sélection des pas de temps pour les sous-stades du stade *montée* et les sous-stades du stade *descente*.
3. Détermination de la condition pour la détection du stade *départ éventuel*.
4. Sélection et développement d'un ensemble de systèmes de prévision.
5. Pour chaque paramètre et chaque stade (sous-stade):
  6. Évaluation de la performance de chaque système de prévision par ré-échantillonnage. Dans chacun des cas, sélection du meilleur système de prévision.
  7. Construction des modèles d'incertitude pour les systèmes de prévision sélectionnés.
  8. Construction des modèles d'incertitude historiques (*a priori*).



## 3 LE TRAITEMENT DE L'INCERTITUDE DANS LES PRÉVISIONS

---

### 3.1 Problématique

Dans ce chapitre, la méthode utilisée pour le traitement de l'incertitude présente dans les prévisions est discutée. Commençons par donner une description générale du problème. Un décideur doit choisir une action qui dépend d'une variable critique  $X$  dont la valeur exacte ne sera connue que dans le futur. Par exemple, un hydrologue doit établir un plan de gestion de l'eau d'un réservoir en fonction des apports naturels qui alimenteront le réservoir durant la crue. L'information dont il dispose est la suivante:

- Une prévision imprécise  $Y$  de la variable  $X$  fournie par un certain système de prévision pour l'événement actuel à une date donnée.
- Les données historiques concernant les observations  $X$  et les prévisions correspondantes  $Y$  émises par ce même système de prévision.

Étant donné l'incertitude (potentiellement élevée) sur la prévision  $Y$  pour l'événement actuel, cette information à elle seule n'est pas suffisante pour pouvoir prendre une décision adéquate. Les données historiques fournissent de l'information sur les performances passées du système de prévision et sur la variabilité naturelle (l'incertitude) de la variable  $X$ ; elles constituent donc une source d'information importante. D'autre part, la prévision  $Y$  fournit de l'information sur l'événement actuel. L'objectif du décideur est de modéliser l'incertitude résultante sur la variable  $X$  une fois la prévision émise pour l'événement actuel en tenant compte de toute l'information dont il dispose. À cette fin, les étapes suivantes doivent être considérées:

1. Modéliser l'incertitude *a priori* (historique) sur  $X$ .
2. Modéliser l'incertitude sur les prévisions  $Y$  en les mettant en relation avec les observations correspondantes  $X$ . Il en résulte un modèle de la performance du système de prévision.
3. Combiner la prévision actuelle  $Y$  avec les deux modèles d'incertitude précédents.

### 3.2 Solution bayésienne

Dans le cadre probabiliste, l'approche bayésienne permet de réaliser la tâche décrite précédemment de manière élégante. Les trois étapes ci-dessus deviennent effectivement:

1. Construire  $g(x)$ , la fonction de densité de probabilité (f.d.p.) *a priori* de  $X$ .
2. Construire  $f(y|x)$ , la f.d.p. de  $Y$  conditionnelle à  $X$ , en utilisant les données historiques;  $f(y|x)$  est aussi appelée fonction de vraisemblance de  $X$  pour une valeur donnée de  $Y$ .
3. Appliquer la règle de Bayes pour obtenir  $\eta(x|y)$ , la f.d.p. de  $X$  conditionnelle à la prévision émise  $Y$ .

La règle de Bayes s'énonce comme suit (DeGroot, 1975; Berger, 1985, chapitre 4):

$$\eta(x|y) = \frac{f(y|x)g(x)}{\int f(y|x)g(x)dx} \quad (3-1)$$

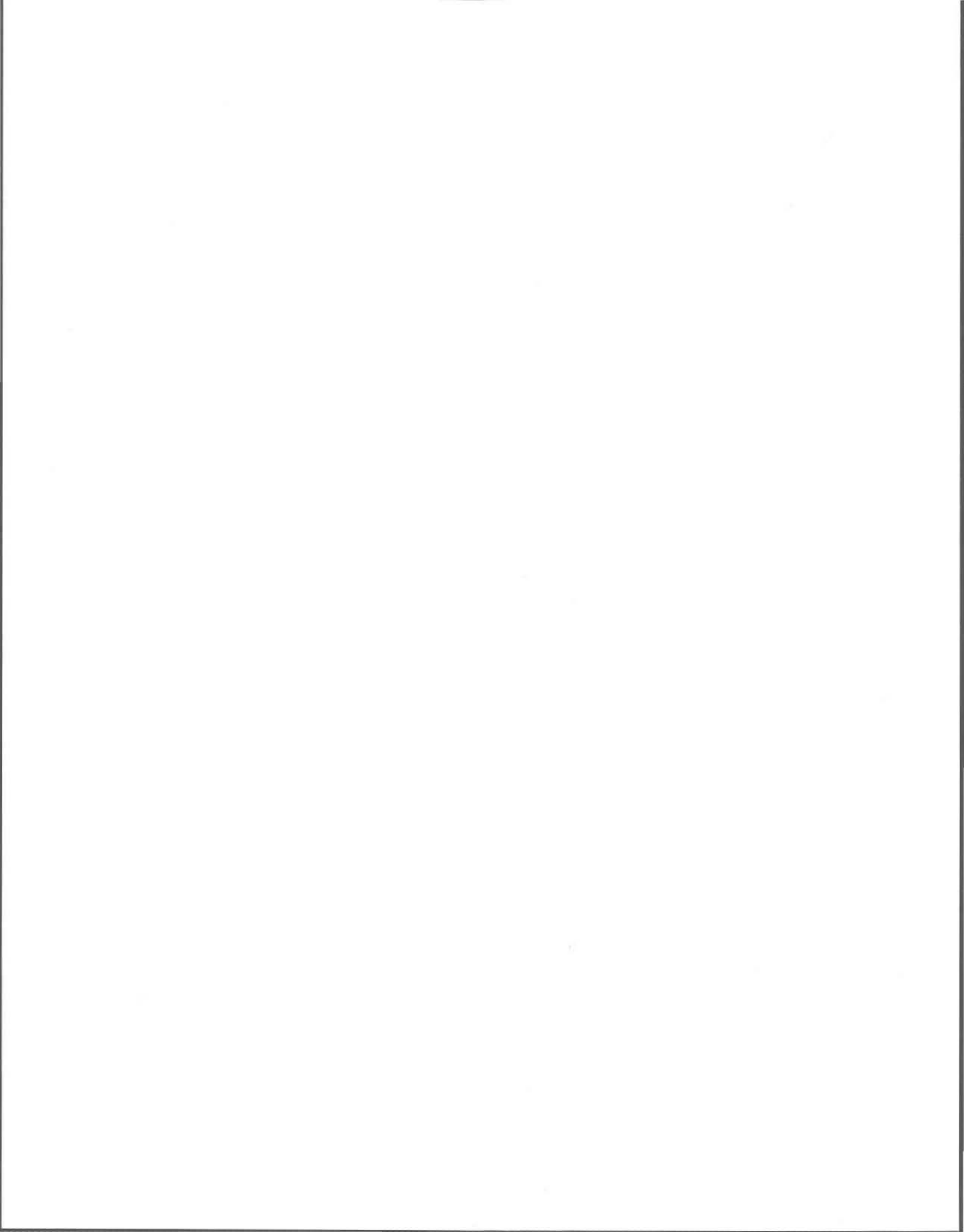
L'objectif de la règle de Bayes est de réviser la f.d.p. *a priori*  $g(x)$  lorsque qu'on reçoit de l'information supplémentaire concernant une variable liée  $Y$ . La f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  combine l'information *a priori*  $g(x)$  avec l'information reçue représentée par  $f(y|x)$  qui modélise la relation entre  $X$  et  $Y$ . Dans notre contexte,  $\eta(x|y)$  représente la probabilité d'observer  $x$  lorsque la prévision  $y$  est effectuée. Notons que si les prévisions  $Y$  sont aléatoires (donc inutiles), on devrait avoir  $\eta(x|y) = g(x)$ .

### 3.3 Cadre d'inférence bayésien

Le cadre d'inférence bayésien découle directement de la règle de Bayes. Son objectif est donc de réviser une f.d.p. *a priori* à la lumière de nouvelles informations. Ce cadre d'inférence se résume comme suit:

$$\left. \begin{array}{l} g(x) \\ f(y|x) \end{array} \right\} \rightarrow \eta(x|y)$$

À partir de  $g(x)$  et de  $f(y|x)$ , on construit  $\eta(x/y)$ . Dans ce travail, le cadre d'inférence bayésien a été adapté à la théorie des possibilités. À cette fin, on doit changer la signification de  $g$ ,  $f$  et  $\eta$  et construire une équation pour  $\eta(x/y)$  qui sera fondée sur les opérations de base de la théorie des possibilités.





## 4 APPROCHE BAYESIENNE POUR LE TRAITEMENT DE L'INCERTITUDE

---

Ce chapitre fournit une description détaillée de l'approche bayésienne telle qu'elle est utilisée pour le traitement de l'incertitude dans les prévisions. De plus, les avantages et limites de cette approche sont aussi indiqués. L'utilisation de l'approche bayésienne pour ce problème a conduit au développement de ce qui est appelé le *Processeur bayésien de prévisions* (PBP).

### 4.1 Processeur bayésien de prévisions (PBP)

Krzysztofowicz a proposé d'utiliser la théorie de Bayes (analyse *a posteriori*, voir Berger, 1985, chapitre 4) pour représenter et combiner l'incertitude pour les problèmes de prévision (Krzysztofowicz et Watada, 1986; Krzysztofowicz, 1985; 1987; 1992; 1993; Krzysztofowicz et Reese, 1991). L'approche bayésienne est en effet particulièrement bien adaptée à ce problème et permet de faire un usage optimal des prévisions en tenant compte de l'incertitude sur ces prévisions (Krzysztofowicz, 1983). Dans le cadre bayésien, les prévisions sont vues comme des observations dépendantes de l'état de la nature qui correspond ici à la variable à prédire. La règle de Bayes (basée sur les probabilités conditionnelles) permet d'obtenir la distribution *a posteriori* de la variable à prédire conditionnelle à la prévision.

#### 4.1.1 Calcul de la f.d.p. *a posteriori*

Dans cette section, on déduit la f.d.p. *a posteriori* de la variable à prédire  $X$  (Krzysztofowicz et Watada, 1986). On possède une série d'observations  $x_i$  de longueur quelconque de la variable  $X$  qu'on utilise pour estimer la f.d.p. *a priori* de  $X$  notée  $g(x)$ . On dispose aussi d'une série de données  $y_i$  représentant des prévisions de  $x_i$ . Notons que la longueur de la série  $y_i$  peut être (et sera bien souvent, en pratique) inférieure à celle de la série  $x_i$ . L'incertitude sur la variable  $Y$  est représentée par une famille de f.d.p. conditionnelles de  $Y$   $\{f(.|x) \mid \text{pour tout } x\}$  qui est estimée à partir d'une série de données  $\{y_i, x_i\}$ .  $f(.|x)$  peut être vu comme la fonction de vraisemblance de  $X$ . La f.d.p. prédictive de  $Y$  est définie par

$$k(y) = \int f(y|x)g(x)dx \quad (4-1)$$

Pour une prévision donnée  $y$ , la f.d.p. *a posteriori* de  $X$  est obtenue par le théorème de Bayes:

$$\eta(x|y) = \frac{f(y|x)g(x)}{k(y)} \quad (4-2)$$

Cette équation définit le *Processeur bayésien de prévisions* (PBP). La f.d.p. *a posteriori* permet, contrairement à la f.d.p. *a priori*, de tenir compte des conditions actuelles car elle intègre l'information contenue dans la prévision. De plus, la variance *a posteriori* est inférieure à la variance *a priori*; la différence entre ces deux variances étant fonction de l'aptitude du système de prévision: meilleur est le système de prévision, plus grande sera cette diminution de variance. La Figure 4.1 illustre un cas où la prévision est supérieure à la moyenne et où la variance *a posteriori* se trouve réduite significativement.

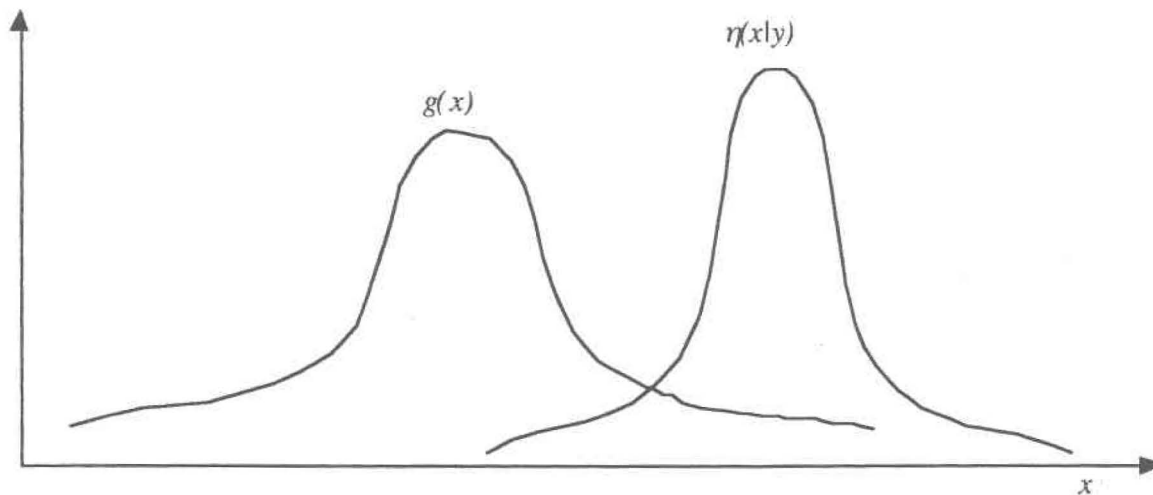


Figure 4.1: Exemple de f.d.p. *a priori* et *a posteriori*

#### 4.1.2 Modèle normal-linéaire

Pour faire la liaison entre les prévisions et les observations, le modèle normal-linéaire a été proposé; ceci permet d'estimer la fonction de vraisemblance  $f(y|x)$  et d'utiliser les résultats sur les familles conjuguées de distributions (DeGroot, 1975) pour calculer la distribution *a posteriori*. Le modèle consiste à définir la variable aléatoire  $Y$  comme une fonction linéaire de la variable aléatoire  $X$ .

#### 4.1.2.1 F.d.p. *a priori*

La f.d.p. *a priori* de  $X$  est supposée normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma_1^2$ :

$$g(x) = N(\mu, \sigma_1^2) \quad (4-3)$$

Les paramètres  $\mu$  et  $\sigma_1^2$  peuvent être estimés par  $M$  et  $S^2$ , respectivement, si l'on dispose d'un échantillon de taille suffisante. Il faut aussi vérifier l'hypothèse de normalité en utilisant, par exemple, le test de Shapiro-Wilk (Shapiro et Wilk, 1965).

#### 4.1.2.2 Fonction de vraisemblance

Pour l'estimation de la fonction de vraisemblance, on suppose l'existence d'une dépendance linéaire entre les variables  $Y$  et  $X$ :

$$y_i = a' x_i + b + \theta_i \quad (4-4)$$

où  $a'$  et  $b$  sont les paramètres, et où les  $\theta_i$  sont les résidus suivant une loi normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  ( $N(0, \sigma^2)$ ). Les paramètres de la régression sont généralement estimés par la méthode des moindres carrés. La fonction de vraisemblance prend donc la forme suivante (Krzysztofowicz, 1986):

$$f(y|x) = N(a' x + b, \sigma^2) \quad (4-5)$$

La f.d.p. prédictive donnée par (4-1) peut être déduite directement de l'équation (4-4) puisque  $X$  et  $\theta$  suivent des distributions normales:

$$k(y) = N(a' M + b, \sigma^2) \quad (4-6)$$

#### 4.1.2.3 Erreurs de prévision

Il est aussi intéressant d'analyser les erreurs de prévision  $\varepsilon_i = y_i - x_i$  qui sont aussi une fonction linéaire de  $X$ :

$$\varepsilon_i = a x_i + b + \theta_i \quad a = a' - 1 \quad (4-7)$$

La f.d.p. conditionnelle de l'erreur est donc:

$$\varepsilon(y|x) = N(ax + b, \sigma^2) \quad (4-8)$$

Le système de prévision est donc parfait lorsque  $a=0$  ( $a'=1$ ),  $b=0$  et  $\sigma^2=0$ . De plus, il est non biaisé conditionnellement lorsque  $a=0$  ( $a'=1$ ) et  $b=0$ ; la variance n'est pas nécessairement nulle dans ce cas.

#### 4.1.2.4 Modèle *a posteriori*

En utilisant les résultats sur les familles conjuguées de distributions (DeGroot, 1975), on peut en déduire que la f.d.p. *a posteriori*, telle que définie par l'équation (4-2), suit une loi normale. Les équations pour la moyenne et la variance sont données par Krzysztofowicz et Watada (1986):

$$E(X|y) = A y + B \quad (4-9)$$

$$\text{avec} \quad A = \frac{(a+1)S^2}{\sigma^2 + (a+1)^2 S^2} \quad B = \frac{M\sigma^2 - (a+1)bS^2}{\sigma^2 + (a+1)^2 S^2} \quad (4-10)$$

$$\text{Var}(X|y) = \frac{\sigma^2 S^2}{\sigma^2 + (a+1)S^2} \quad (4-11)$$

Il est intéressant d'analyser certains cas limites. Lorsque  $(a+1) = 0$  (i.e.,  $a'=0$ ,  $y$  est indépendant de  $x$ ), la variance *a posteriori* ne diminue pas ( $\text{Var}(X|Y) = \text{Var}(X) = S^2$ ) et la moyenne *a posteriori* demeure  $M$ ; ainsi, la densité *a posteriori* est donc identique à la f.d.p. *a priori*, la prévision  $y$  n'a aucun effet. Lorsque  $\sigma^2=0$ , la variance *a posteriori* est nulle et on obtient une valeur précise pour  $x$  en enlevant le biais défini par la relation linéaire:  $x = (y - b)/a'$ . En analysant l'équation (4-11), on peut montrer que la variance *a posteriori* n'est jamais plus grande que celle *a priori*. Ainsi, l'approche bayésienne fournit une protection contre les mauvais systèmes de prévision.

#### 4.1.3 Modèle méta-gaussien

Le modèle normal-linéaire est assez restrictif puisqu'il impose que la f.d.p. *a priori*  $g(x)$  soit normale. Des travaux récents sur le PBP (Kelly et Krzysztofowicz, 1994; 1995; 1996b) ont montré comment il est possible de résoudre ce problème et d'utiliser n'importe quelle f.d.p. *a priori*  $g(w)$  quelle soit paramétrique ou non paramétrique. L'approche consiste à se ramener au modèle normal-linéaire par transformation des variables (modèle méta-gaussien). Les

variables non normales  $X$  et  $Y$  sont tout d'abord transformées par la méthode *Normal quantile transform* (NQT):

$$V = Q^{-1} ( G(X) ) \quad Z = Q^{-1} ( K(Y) ) \quad (4-12)$$

où  $G$  est la distribution de  $X$ ,  $K$  un estimé initial de la distribution prédictive de  $Y$  et  $Q$  la distribution de la loi normale centrée réduite. La variable  $V$  est distribuée selon une loi normale centrée réduite mais pas nécessairement la variable  $Z$  puisque  $K$  est seulement un estimé de la variable distribution prédictive de  $Y$ . Pour comprendre pourquoi  $V$  est distribuée selon une loi normale centrée réduite, il suffit de voir que  $G(X)$  est distribuée selon une loi uniforme (DeGroot, 1975). Puisque  $Q(V) = G(X)$ ,  $Q(V)$  doit être distribuée selon une loi uniforme; par conséquent,  $V$  est distribuée selon une loi normale centrée réduite puisque  $Q$  est la distribution de cette loi.

Une fois les transformations effectuées, les variables  $V$  et  $Z$  sont utilisées pour estimer la fonction de vraisemblance dans l'espace transformé par le modèle normal-linéaire:

$$z_i = a' v_i + b + \theta_i \quad (4-13)$$

$$f(z|v) = N(a' v + b, \sigma^2) \quad (4-14)$$

$z_i$  et  $v_i$  représentent les observations transformées. La f.d.p. *a posteriori* de  $V$  est normale et peut facilement être obtenue à l'aide des équations (4-9)-(4-11). Finalement, on revient à l'espace original en effectuant les transformations inverses. On obtient une f.d.p. *a posteriori* pour  $X$  qui, généralement, n'est pas normale. Ainsi, par l'entremise de la méthode NQT, il est possible d'utiliser n'importe quelle f.d.p. *a priori* en autant que la relation (4-13) soit satisfaite dans l'espace transformé.

Il est important de noter que la relation entre  $Y$  et  $X$  n'est pas nécessairement linéaire et que la variance des résidus n'est pas non plus constante dans tous les cas (voir Figure 1, Kelly et Krzysztofowicz, 1995). Ceci semble indiquer qu'il est possible de spécifier une relation arbitraire entre  $Y$  et  $X$ , mais tel n'est point le cas. En effet, la forme de la relation entre  $Y$  et  $X$  est induite par les distributions  $G(X)$  et  $K(Y)$ ; elle est par conséquent totalement dépendante de celles-ci. Le seul moyen de spécifier cette relation serait par l'entremise de ces deux distributions; ce qui peut être très ardu, voire impossible. De toute façon, les distributions  $G(X)$  et  $K(Y)$  sont en général déterminées indépendamment l'une de l'autre; ce

travail ne vise donc pas à spécifier des distributions correspondant à une quelconque relation entre  $X$  et  $Y$ . Le but est simplement d'utiliser les distributions *a priori* s'ajustant le mieux possible aux données. Ainsi, le modèle méta-gaussien n'impose pas de restriction sur la f.d.p. *a priori*, mais impose indirectement la forme de la relation entre  $Y$  et  $X$  dans l'espace original et impose directement la linéarité de la relation entre  $Z$  et  $V$  dans l'espace transformé.

## 4.2 Intérêt de l'approche bayésienne

L'approche bayésienne constitue une méthode intéressante pour le traitement de l'incertitude pour deux raisons principales:

- D'une part, l'approche bayésienne est basée sur le calcul des probabilités dont l'interprétation fréquentiste (la plus utilisée) est généralement bien comprise et bien acceptée. Ce qui implique que n'importe quel décideur (familier avec le concept de probabilité) peut comprendre la signification d'une f.d.p. sans se soucier de la manière dont elle a été obtenue. Cependant, cet argument ne tient pas si on utilise une interprétation subjective des probabilités car les experts ne sont pas toujours à même de comprendre cette interprétation. Notons aussi que l'approche probabiliste constitue un choix naturel puisque c'est la méthode de traitement de l'incertitude la plus classique.
- D'autre part, le cadre théorique en probabilité est très rigoureux; il n'est pas fondé sur des règles arbitraires mais plutôt sur des axiomes. Ceci garantit que les processus d'inférence n'altéreront pas la signification des données.

Ces deux avantages justifient dans la plupart des cas l'utilisation de l'approche bayésienne. Par contre, cet approche possède aussi sa part d'inconvénients comme on le verra dans la section qui suit.

## 4.3 Limites du Processeur bayésien de prévisions

Dans cette section, les limites ou désavantages du Processeur bayésien de prévisions (PBP) sont discutés. Premièrement, les limites qui s'appliquent d'un point de vue général à toute approche bayésienne ou probabiliste sont énumérées. Par la suite, les limites particulières aux modèles normal-linéaire et méta-gaussien sont analysées.

Limites de l'approche bayésienne (probabiliste):

1. Il peut s'avérer difficile de modéliser l'incertitude avec des distributions de probabilités lorsqu'il y a peu de données sur le phénomène étudié ou lorsque celui-ci est relativement complexe.
2. L'utilisation de modèles probabilistes ne correspond pas toujours à la manière de penser des décideurs; d'où le manque d'intérêt de certains d'entre eux pour une telle approche.
3. L'estimation de f.d.p. conditionnelles est un problème généralement difficile à résoudre à moins de disposer d'une très grande quantité de données.
4. L'utilisation de la règle de Bayes ne permet d'obtenir une solution analytique que dans des cas bien particuliers (familles conjuguées de distributions). On doit donc souvent se tourner vers des solutions numériques qui ne sont pas toujours appréciées des décideurs.
5. Il est plutôt difficile voir impossible d'intégrer dans des modèles probabilistes les connaissances d'un expert ou toute information qu'il peut fournir.
6. Une valeur singulière peut avoir une influence beaucoup trop importante lors de l'estimation des paramètres d'un modèle probabiliste.

Limites des modèles normal-linéaire et méta-gaussien:

1. La relation entre les variables  $X$  et  $Y$  (dans l'espace original/modèle normal-linéaire) ou  $V$  et  $Z$  (dans l'espace transformé/modèle méta-gaussien) n'est pas nécessairement linéaire. Ceci représente une limitation importante du PBP.
2. Lorsque la relation est linéaire, les hypothèses classiques du modèle linéaire peuvent ne pas être satisfaites (Weisberg, 1985):
  - Les résidus  $\theta_i$  ne suivent pas une loi normale.
  - La variance des résidus n'est pas constante; par exemple, dans le cas relativement commun où l'erreur de prévision augmente avec  $X$ .

Ces cas limitent l'utilisation des modèles normal-linéaire et méta-gaussien car il n'est alors pas possible d'estimer la fonction de vraisemblance de  $X$ . Cette limitation est rencontrée, par exemple, dans la situation suivante: lorsque la distribution *a priori* de  $X$  n'est pas normale et

que la relation est linéaire entre  $X$  et  $Y$ . L'application du modèle méta-gaussien (comme suggéré) va forcer l'utilisation d'un modèle linéaire liant  $V$  et  $Z$  dans l'espace transformé alors que ce modèle n'est généralement pas approprié étant donné la transformation (non linéaire) effectuée sur les variables  $X$  et  $Y$ .



## 5 LA THÉORIE DES POSSIBILITÉS

---

Ce chapitre est consacré à la présentation des concepts existants en théorie des possibilités (ou liés à ce domaine) qui sont nécessaires à la compréhension des développements théoriques effectués dans le cadre du projet de recherche et exposés dans le Chapitre 6. On y présente certains résultats existant sur les sujets suivants: les sous-ensembles flous, les concepts de base en théorie des possibilités et l'inférence, les normes et conormes triangulaires, la résolution d'équations floues et l'implication floue.

L'idée générale de la théorie des possibilités (Dubois et Prade, 1985a) est de permettre de représenter l'incertitude sur un événement par un degré de possibilité; plus le degré de possibilité est élevé plus la possibilité de l'événement est grande. Le degré 0 signifie l'impossibilité de l'événement alors que le degré 1 signifie que l'événement est totalement possible. Notons que le degré 1 ne veut pas dire que l'événement est vrai ou va nécessairement se produire (ce qui est le cas avec la notion de probabilité); on peut avoir plusieurs événements exclusifs (ne pouvant être tous vrais en même temps) ayant simultanément des degrés de possibilité 1. On constate ainsi que la notion de possibilité n'est pas additive (c'est-à-dire, que la somme des possibilités des différents événements n'est généralement pas égale à 1) contrairement à la notion de probabilité qui exige l'additivité. L'absence de la contrainte d'additivité constitue un avantage de la théorie des possibilités sur la théorie des probabilités; ceci a pour effet de faciliter la construction et la manipulation des distributions de possibilités. Du point de vue de l'interprétation à la notion de possibilité, il en n'existe pas qu'une seule; plusieurs interprétations sont possibles sans toutefois être antagonistes (Dubois et Prade, 1998). Certains voient la diversité des interprétations possibles comme un avantage, une richesse de la théorie. Par contre, pour d'autres ce point constitue un désavantage de la théorie des possibilités; la théorie serait plus simple à comprendre et à accepter si tous s'entendaient sur une interprétation unique.

Dans le but de présenter une solution complète au problème abordé dans ce travail, on discute de la question de la manipulation des distributions de possibilités au Chapitre 6; de l'interprétation de la notion de possibilité qui a été adoptée dans le cadre de l'application au Chapitre 7; et de la méthodologie utilisée pour la construction des distributions de possibilités au Chapitre 8. Le Chapitre 9 présente l'application en tant que telle.

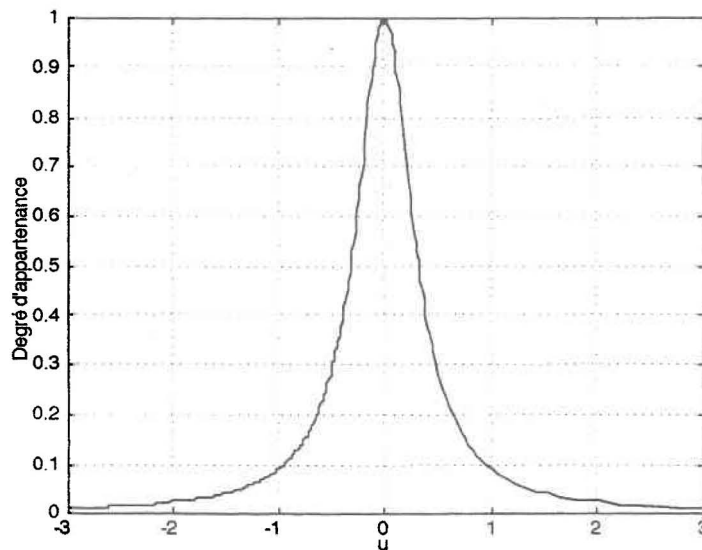
## 5.1 Les sous-ensembles flous

On rappelle ici quelques notions sur les ensembles flous (Zadeh, 1965; Kaufmann et Gupta, 1991; Kaufmann, 1973; Bárdossy et Duckstein, 1995). On définit un *sous-ensemble flou*  $A$  de  $U$  comme l'ensemble des couples  $\{u/\mu_A(u)\}$  pour tout  $u \in U$ , où  $\mu_A(u)$  est la *fonction d'appartenance* de  $A$ , prenant ses valeurs dans  $[0,1]$ . Par exemple, soit  $U = \{a, b, c, d\}$  alors

$$A = \{ a/0.3, b/1, c/0.7, d/0 \}$$

est un sous-ensemble flou de  $U$ . Dans le cas continu, le sous-ensemble flou  $A$  est non dénombrable puisque que  $U$  est non dénombrable. Un exemple classique d'un sous-ensemble flou dans le cas continu (Klir et Folger, 1988) est le sous-ensemble flou  $A$  des nombres réels près de 0 ayant comme fonction d'appartenance (voir Figure 5.1):

$$\mu_A(u) = \frac{1}{1 + 10u^2}$$



**Figure 5.1: Sous-ensemble flou des nombres réels près de 0.**

En utilisant cette fonction, on peut déterminer le degré d'appartenance de chaque nombre réel dans le sous-ensemble flou  $A$ ; ce degré représente dans quelle mesure un nombre réel est près du nombre 0. Par exemple, on a  $\mu_A(0) = 1$ ,  $\mu_A(0.25) = 0.62$  et  $\mu_A(1) = 0.09$ .

On peut aussi définir un sous-ensemble flou sur le produit cartésien de  $U$  et  $V$ : un *sous-ensemble flou*  $B$  de  $U \times V$  est l'ensemble des couples  $\{(u,v)/\mu_B(u,v)\}$  pour tout  $u \in U$  et  $v \in V$ , où  $\mu_B(u,v)$  est la *fonction d'appartenance* de  $B$ , prenant ses valeurs dans  $[0,1]$ .

La fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou (dans le cas continu) peut avoir une forme quelconque. Notons tout de même deux cas de sous-ensembles flous rencontrés fréquemment:

- Un *sous-ensemble flou triangulaire*  $A$  est défini par le 3-tuple  $\langle a1, b1, c1 \rangle$ , où  $a1 \leq b1 \leq c1$  avec comme fonction d'appartenance:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} \frac{u - a1}{b1 - a1} & a1 < u \leq b1 \\ \frac{c1 - u}{c1 - b1} & b1 < u \leq c1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (5-1)$$

- Un *sous-ensemble flou trapézoïdal*  $A$  est défini par le 4-tuple  $\langle a2, b2, c2, d2 \rangle$ , où  $a2 \leq b2 \leq c2 \leq d2$  avec comme fonction d'appartenance:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} \frac{u - a2}{b2 - a2} & a2 < u \leq b2 \\ 1 & b2 < u \leq c2 \\ \frac{d2 - u}{d2 - c2} & c2 < u \leq d2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (5-2)$$

La Figure 5.2 illustre ces deux sous-ensembles flous dans un cas d'asymétrie. À gauche, on y retrouve un sous-ensemble flou triangulaire  $\langle a1, b1, c1 \rangle$  alors qu'à droite il s'agit d'un sous-ensemble flou trapézoïdal  $\langle a2, b2, c2, d2 \rangle$ .

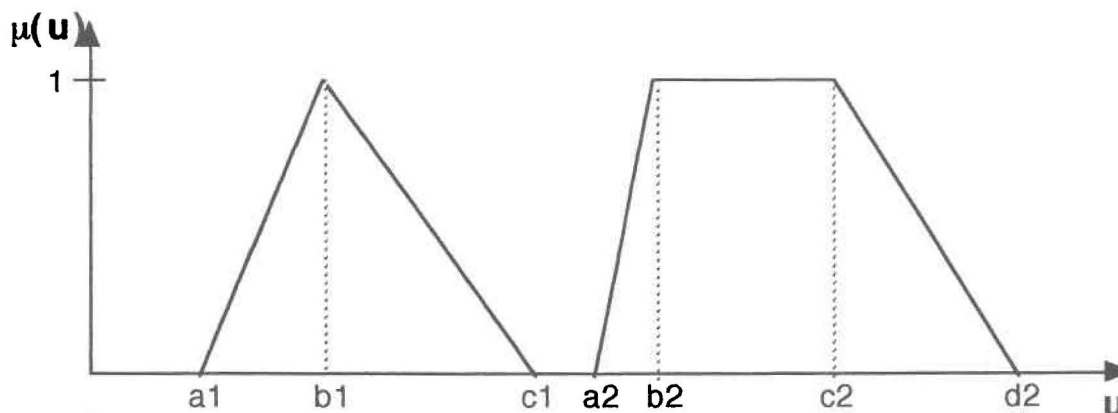


Figure 5.2: Exemples de sous-ensembles flous triangulaire et trapézoïdal

## 5.2 Concepts en théorie des possibilités

Le concept de distribution de possibilités et tout ce qui s'y rattache est introduit dans cette section. Pour faciliter la présentation, il est utile de faire une analogie avec une distribution de probabilités. La *distribution de possibilités* (Zadeh, 1978, Dubois et Prade, 1988b) d'une variable  $X$  prenant ses valeurs dans  $U$  est une fonction de  $U$  vers  $[0,1]$  et est notée  $\pi_X(u)$ .

Pour tout  $u \in U$ ,  $\pi_X(u)$  représente la *possibilité* que  $X=u$ .  $\pi_X(u) = 0$  signifie que l'événement  $X=u$  est impossible, alors que  $\pi_X(u) = 1$  signifie que l'événement  $X=u$  est totalement possible ou qu'aucune information ne permet de contredire cet événement (ignorance). Lorsqu'il n'y a aucune incertitude quant à l'événement qui va se produire, c'est-à-dire lorsqu'on sait que  $X=u_0$  est vrai, on doit nécessairement avoir  $\pi_X(u_0) = 1$  et  $\pi_X(u) = 0$ ,  $\forall u \neq u_0$ .

La distribution  $\pi_X(u)$  est aussi appelé la *distribution de possibilités marginale* de  $X$ . La *distribution de possibilités jointe* d'une variable  $X$  (prenant ses valeurs dans  $U$ ) et d'une variable  $Y$  (prenant ses valeurs dans  $V$ ) est notée  $\pi_{(X,Y)}(u,v)$  et représente la possibilité que  $X=u$  et  $Y=v$ , simultanément. La *distribution de possibilités conditionnelle* de  $Y$  étant donné  $X$  est notée  $\pi_{Y|X}(v|u)$  et représente la possibilité que  $Y=v$  lorsque  $X=u$  (Zadeh, 1978; Hisdal, 1978).

On dit qu'une distribution de possibilités  $\pi_X(u)$  est *normale* si et seulement si  $\exists u_0 \in U$  tel que  $\pi_X(u_0) = 1$ . Une distribution de possibilités conditionnelle  $\pi_{Y|X}(v|u)$  est *normale* si et seulement si  $\forall u \in U, \exists v_0 \in V$  tel que  $\pi_{Y|X}(v_0|u) = 1$ . Une distribution de possibilités  $\pi_X(u)$  est dite *moins spécifique* qu'un autre distribution de possibilités  $\pi'_X(u)$  (ou  $\pi'_X(u)$  est dite *plus spécifique* que  $\pi_X(u)$ ) si et seulement si  $\pi_X(u) \geq \pi'_X(u), \forall u \in U$ . Selon le *principe de spécificité minimum* (Dubois et Prade, 1991a), la distribution de possibilités la moins spécifique doit être choisie lorsqu'il y a plusieurs choix. En particulier, lorsqu'il y a ignorance totale la distribution  $\pi_X(u) = 1, \forall u \in U$ , doit être choisie. Notons aussi que plus une distribution de possibilités est spécifique, plus elle est informative, i.e., moins l'incertitude est grande. Comme exemple d'application du principe de spécificité minimum, supposons que  $\pi_X(u_1) = 0.5$  et  $\pi_X(u_2) = 0.8$ . Maintenant si on est informé que l'événement  $X=u_3$  est autant possible que l'événement  $X=u_1$  mais pas plus possible que l'événement  $X=u_2$ , alors selon le principe de spécificité minimum, on devrait prendre  $\pi_X(u_3) = 0.8$ .

Soit  $Y = f(X)$  et  $\pi_X(u)$ , la distribution de possibilités de  $X$ , en utilisant le *principe d'extension*, on peut déterminer la distribution de possibilités de  $Y$ :

$$\pi_Y(v) = \text{Sup}_{u \in U} \{ \pi_X(u) : v = f(u) \} \quad (5-3)$$

Il est important de bien faire la distinction entre la théorie des possibilités et la logique floue qui sont toutes deux fondées sur la théorie des sous-ensembles flous (Zadeh, 1965). L'objectif de la théorie des possibilités est de modéliser l'incertitude découlant de connaissances incomplètes (l'incertain) alors que celui de la logique floue est plutôt de modéliser le caractère vague (l'imprécis) de propriétés graduelles (Dubois et Prade, 1985a). Par exemple, en théorie des possibilités on s'intéresse à la question suivante: « Quelle est la possibilité que Jean mesure 6 pieds? ». Par ailleurs, en logique floue on s'intéresse plutôt au problème de représenter la signification du concept « grande personne » en utilisant des sous-ensembles flous. Zadeh (1978) a montré comment une restriction floue sur une variable  $X$  (représentée par un sous-ensemble flou) induit une distribution de possibilités pour  $X$ . Par exemple, la restriction floue « Jean est une grande personne » induit une distribution de possibilités pour la variable  $X$  représentant la taille de Jean. Bien que les

deux concepts soient intimement liés on ne traitera pas ici de la logique floue car la notion de restrictions floues n'est pas utilisée dans ce travail pour générer des distributions de possibilités (la méthode utilisée sera discutée au Chapitre 8).

### 5.3 Normes et conormes triangulaires

Les normes et conormes triangulaires (Menger, 1942) sont utilisées pour définir les opérateurs sur les sous-ensembles flous et sur les distributions de possibilités (Weber, 1983; Dubois et Prade, 1985b; Kaufmann et Gupta, 1988; Yager, 1991). Une norme triangulaire (appelée t-norme) est une fonction  $T$  de  $[0,1] \times [0,1]$  vers  $[0,1]$  qui satisfait les conditions suivantes:

$$\forall a, b, a', b', c \in [0,1]$$

- (i)  $T(a,b) = T(b,a)$ , commutativité.
- (ii) Si  $a \leq a'$  et  $b \leq b'$  alors  $T(a,b) \leq T(a',b')$ , monotonie.
- (iii)  $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$ , associativité.
- (iv)  $T(a,1) = a$ .

Une conorme triangulaire (appelée t-conorme) est une fonction  $S$  de  $[0,1] \times [0,1]$  vers  $[0,1]$  qui satisfait les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus en plus de la suivante:

$$(v) \quad S(a,0) = a.$$

Les propriétés suivantes sont très utiles et peuvent être déduites des conditions ci-dessus:

- (vi)  $T(0,0) = S(0,0) = 0$  (à partir de ii, iv et v)
- (vii)  $T(1,1) = S(1,1) = 1$  (à partir de ii, iv et v)
- (viii)  $T(a,b) \leq \text{Min}(a,b)$ ,  $S(a,b) \geq \text{Max}(a,b)$  (à partir de i, ii, iv et v)
- (ix)  $T(a,0) = 0$ ,  $S(a,1) = 1$  (à partir de i, ii, iv et v)

L'interprétation adoptée des t-normes et t-conormes dépend de l'usage qu'on en fait car elles ne sont rien de plus que des fonctions. En particulier, lorsqu'on utilise un t-norme pour calculer la possibilité jointe de deux événements, on constate que si un des deux événements est impossible (degré de possibilité 0), alors la possibilité jointe est de 0 (propriété ix); d'autre part, si un des deux événements est totalement possible (degré de possibilité 1), la possibilité jointe est celle de l'autre événement (propriété iv). Notons aussi que la possibilité

jointe est toujours inférieure ou égale à la plus petite des possibilités des deux événements (propriété viii).

Il est aussi utile de définir une t-conorme pour un nombre quelconque d'arguments et non seulement deux comme précédemment. Soit  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  un ensemble (fini ou infini) de valeurs dans  $[0,1]$ , on définit récursivement le résultat de l'application d'une t-conorme  $S$  sur cet ensemble:

$$S(\{a_1, a_2, a_3, \dots\}) = S(a_1, S(\{a_2, a_3, \dots\}))$$

$$S(\{a_{n-1}, a_n\}) = S(a_{n-1}, a_n)$$

On utilisera aussi la notation suivante:  $S_U [f(u)] = S(\{f(u) : u \in U\})$  où  $f$  est une fonction de  $U$  vers  $[0,1]$ . Pour n'importe quelle t-norme  $T$ , il existe une t-conorme duale  $S$  définie par:

$$S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$$

Voici quelques t-normes intéressantes avec leur t-conorme duale:

$$T_1(a,b) = \text{Min}(a,b)$$

$$S_1(a,b) = \text{Max}(a,b) \text{ ou } \text{Sup}(a,b)$$

$$T_2(a,b) = \text{Max}(0, a+b-1)$$

$$S_2(a,b) = \text{Min}(1, a+b)$$

$$T_3(a,b) = ab \text{ (Produit)}$$

$$S_3(a,b) = a + b - ab \text{ (Somme algébrique)}$$

$$T_4(a,b) = \frac{ab}{1 + (1-a)(1-b)}$$

$$S_4(a,b) = \frac{a+b}{1+ab}$$

$$T_5(a,b) = \frac{ab}{a+b-ab}$$

$$S_5(a,b) = \frac{a+b-2ab}{1-ab}$$

Une t-norme est continue si pour tout  $a \in [0,1]$ ,  $T(a, \bullet)$  est continu; par conséquent,  $T(\bullet, a)$  l'est aussi. On peut facilement vérifier que les t-normes citées ci-dessus sont continues.

## 5.4 Relations floues et leur composition

Soit  $L(U)$  l'ensemble de tous les sous-ensembles flous de  $U$ . Un sous-ensemble flou  $A \in L(U)$  est défini par sa fonction d'appartenance  $\mu_A: U \rightarrow [0,1]$ . Une relation floue (binaire) entre les ensembles  $U$  et  $V$  est un sous-ensemble flou de  $U \times V$  (le produit cartésien de  $U$  et  $V$ ), i.e., un élément de  $L(U \times V)$ . Soient  $Q \in L(U \times V)$  et  $R \in L(V \times W)$  deux relations floues,

la composition de  $Q$  et  $R$  est la relation floue  $P = Q \circ R \in L(U \times W)$  ayant comme fonction d'appartenance:

$$\mu_P(u, w) = S_V \left[ T(\mu_Q(u, v), \mu_R(v, w)) \right] \quad (5-4)$$

où  $T$  est une quelconque t-norme et  $S$  une quelconque t-conorme. Zadeh (1965, 1973) a été le premier auteur à proposer cette règle pour la composition de relations floues mais dans un cas bien particulier, soit avec  $T = \text{Min}$  et  $S = \text{Sup}$  (voir aussi (Kaufmann, 1973)). La généralisation de la règle de Zadeh pour n'importe quelle t-norme  $T$  a par la suite été suggérée. Cependant, à l'exception de très peu de travaux (Bouchon, 1987), on se limite toujours au cas  $S = \text{Sup}$ . Ici on ne se limitera pas à ce cas particulier; on s'intéressera à la forme la plus générale donnée par l'équation (5-4).

Considérons maintenant la composition d'une relation floue avec un sous-ensemble flou. Soient  $R \in L(U \times V)$  une relation floue et  $A \in L(U)$  un sous-ensemble flou, la composition de  $R$  et  $A$  est le sous-ensemble flou  $B = A \circ R \in L(V)$  ayant comme fonction d'appartenance:

$$\mu_B(v) = S_V \left[ T(\mu_A(u), \mu_R(u, v)) \right] \quad (5-5)$$

où  $T$  est une quelconque t-norme et  $S$  une quelconque t-conorme. Selon Zadeh (1973; 1975; 1989), l'équation (5-5) définit la *règle d'inférence de composition* (du terme anglais « *compositional rule of inference* »). Encore une fois ici, Zadeh a seulement considéré le cas où  $T = \text{Min}$  et  $S = \text{Sup}$ . Il est important de pouvoir rattacher une signification au sous-ensemble flou obtenu de cette manière; autrement l'application de la règle d'inférence de composition est d'un intérêt limité. Par exemple, la composition de «  $u$  est légèrement supérieur à  $v$  » et de «  $v$  est petit » peut être interprétée comme «  $u$  est plus ou moins petit ». Cependant, la composition de «  $u$  est plus petit que  $v$  » et de «  $v$  est pair » est sans signification.

## 5.5 Inférence de base en théorie des possibilités

La règle d'inférence de composition peut être utilisée avec des distributions de possibilités et possède dans ce cas une signification très particulière. Elle permet d'inférer la distribution de



possibilités marginale d'une variable à partir de sa distribution de possibilités conditionnelle (Dubois et Prade, 1991a). Si  $\pi_{Y|X}(v|u)$  et  $\pi_X(u)$  sont connues, alors  $\pi_Y(v)$  est définie par:

$$\pi_Y(v) = S_U \left[ T(\pi_X(u), \pi_{Y|X}(v|u)) \right] \quad (5-6)$$

Dans le but d'alléger l'écriture, la notation suivante sera utilisée pour représenter l'équation (5-6):

$$\pi_Y(v) = \pi_X(u) \circ \pi_{Y|X}(v|u) \quad (5-7)$$

Il est important de noter que la notation «  $\circ$  » sous-entend l'utilisation d'une t-norme. La distribution de possibilités jointe de  $X$  et  $Y$  est simplement obtenue en combinant une des distributions de possibilités conditionnelles avec la distribution de possibilités marginale de l'autre variable (Hisdal, 1978). On peut l'obtenir de deux manières différentes:

$$\pi_{(X,Y)}(u,v) = T(\pi_X(u), \pi_{Y|X}(v|u)) \quad (5-8)$$

$$\pi_{(X,Y)}(u,v) = T(\pi_Y(v), \pi_{X|Y}(u|v)) \quad (5-9)$$

La distribution de possibilités marginale de  $Y$  comme donnée par l'équation (5-7) peut être vue comme la projection sur  $V$  (en utilisant la t-conorme  $S$ ) de la distribution de possibilités jointe de  $X$  et  $Y$  qui est donnée par l'équation (5-8); on a donc:

$$\pi_Y(v) = S_U \left[ \pi_{(X,Y)}(u,v) \right] \quad (5-10)$$

Les équations (5-8) et (5-10), ainsi que l'équation (5-6) qui en résulte, représentent les processus d'inférence qui sont à la base des développements théoriques de ce projet de recherche. Ces équations sont bien connues et généralement acceptées en théorie des possibilités, en particulier lorsque  $S = Sup$ .

## 5.6 Équations de relations floues

Dans le domaine des équations de relations floues, on s'intéresse au problème suivant (Sanchez, 1974; 1976; 1977; Kaufmann, 1977; Dubois et Prade, 1980; Di Nola et al, 1989):

Soient  $P \in L(U \times W)$ ,  $Q \in L(U \times V)$  et  $R \in L(V \times W)$  des relations floues binaires telles que:

$$Q \circ R = P \quad (5-11)$$

où l'opérateur «  $\circ$  » représente la composition de relations floues. Connaissant  $Q$  et  $R$ , on peut facilement calculer  $P$ ; cependant, connaissant  $P$  et  $Q$  ( $P$  et  $R$ , respectivement), il est beaucoup plus difficile d'obtenir  $R$  ( $Q$ , respectivement) qui satisfait l'équation (5-11). Ce problème a été pour la première fois soulevé par Sanchez (1974; 1976; 1977) dans le cas particulier où  $S = Sup$  et  $T = Min$ . Par la suite, certains travaux ont porté sur le cas où  $T$  est une quelconque t-norme continue (Pedrycz, 1982; Di Nola et al, 1982; 1989; 1993; Wu, 1986). Ces auteurs ont aussi étudié le cas plus simple où  $A \in L(U)$  et  $B \in L(V)$  sont des sous-ensembles flous connus et  $R \in L(U \times V)$  est une relation floue binaire inconnue satisfaisant:

$$A \circ R = B \quad (5-12)$$

Dans le présent travail, on a seulement besoin de considérer ce cas plus simple. De plus, on ne s'intéresse qu'au cas où  $T$  est une quelconque t-norme et  $S = Sup$ . Finalement, on est seulement concerné par la plus grande solution pour  $R$ , i.e., la moins spécifique selon le principe de spécificité minimum (Pedrycz, 1982, Di Nola et al, 1993). Soit  $T$ , une t-norme continue utilisée dans la règle d'inférence de composition et soit  $I_T(a,c)$  défini comme:

$$I_T(a,c) = \{x \in [0,1] : T(a,x) \leq c\} \quad (5-13)$$

Maintenant, définissons l'opérateur  $\psi_T$  comme suit:

$$\psi_T(a,c) = Sup\{x \in I_T(a,c)\} \quad (5-14)$$

Notons que la continuité de  $T$  est requise pour garantir que  $\psi_T(a,c)$  appartient à l'ensemble  $I_T(a,c)$ . Voici la liste des opérateurs qu'il est possible de générer à partir des t-normes citées dans la Section 5.3:

$$\psi_{T_1}(a,c) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq c \\ c & \text{si } a > c \end{cases} \quad T_1(a,b) = Min(a,b)$$

$$\psi_{T_2}(a,c) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < c \\ 1+c-a & \text{si } a \geq c \end{cases} \quad T_2(a,b) = \text{Max}(0, a+b-1)$$

$$\psi_{T_3}(a,c) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < c \\ \frac{c}{a} & \text{si } a \geq c \end{cases} \quad T_3(a,b) = ab$$

$$\psi_{T_4}(a,c) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < c \\ \frac{2c-ac}{a+c-ac} & \text{si } a \geq c \end{cases} \quad T_4(a,b) = \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$$

$$\psi_{T_5}(a,c) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < c \\ \frac{ac}{a-c+ac} & \text{si } a \geq c \end{cases} \quad T_5(a,b) = \frac{ab}{a+b-ab}$$

Le cas spécial suivant n'a pas été spécifié ci-dessus pour les opérateurs  $\psi_{T_3}$ ,  $\psi_{T_4}$  et  $\psi_{T_5}$ : Si  $a = c = 0$ , alors  $\psi_T(a,c) = 1$ . On peut remarquer que  $\psi_{T_1}$  n'est pas continu pour aucun de ses arguments; tous les autres opérateurs sont continus. La *composition- $\psi_T$*  du sous-ensemble flou  $A \in L(U)$  et  $B \in L(V)$  est la relation floue  $A\psi_TB \in L(U \times V)$  ayant comme fonction d'appartenance:

$$\mu_{A\psi_TB}(u,v) = \psi_T(\mu_A(u), \mu_B(v)) \quad (5-15)$$

Si une solution de l'équation (5-12) existe, Pedrycz (1982) a montré que  $R = A\psi_TB$  est la plus grande solution, i.e., la moins spécifique. De plus, on peut facilement identifier les cas pour lesquels une solution existe: Il y a une solution à l'équation (5-12) si et seulement si  $\forall v \in V, \exists u_0 \in U$  tel que  $\mu_A(u_0) \geq \mu_B(v)$ . On peut facilement voir que si le sous-ensemble flou  $A$  est normal (i.e.,  $\exists u_0 \in U$  tel que  $\mu_A(u_0) = 1$ ), alors il y a une solution à l'équation (5-12). Si l'équation (5-12) n'a pas de solution, alors  $R' = A\psi_TB$  est la plus grande relation floue (la moins spécifique) qui satisfait:

$$A \circ R' = B' \subset B \quad (5-16)$$

C'est à dire,  $\forall u \in U, \mu_{B'}(u) \leq \mu_B(u)$  et il y a au moins un  $v_0 \in V$  tel que  $\mu_{B'}(v_0) < \mu_B(v_0)$ .  $R'$  est considérée comme la meilleure solution approximative; cependant, cette solution n'est pas très intéressante car elle permet d'inférer un sous-ensemble flou plus spécifique ( $B'$ ) que celui qu'on avait initialement ( $B$ ). Comme on le verra plus loin, cette solution approximative ne sera pas nécessaire dans ce travail car il sera toujours possible de trouver une solution exacte. Notons finalement que les résultats dans le domaine des équations de relations floues sont à la base des développements effectués dans le cadre de ce travail.

Quoique les résultats de cette section aient été démontrés dans le cas de sous-ensembles flous, il peuvent être directement utilisés avec des distributions de possibilités en utilisant l'équation (5-7) où la distribution  $\pi_{Y|X}(v|u)$  est l'inconnue et la t-norme  $T$  est utilisée. La solution à cette équation est très similaire à l'équation (5-15):

$$\pi_{Y|X}(v|u) = \psi_T(\pi_X(u), \pi_Y(v)) \quad (5-17)$$

## 5.7 Implication floue et modus ponens généralisé

Le cadre d'inférence le mieux connu en théorie des possibilités est fondé sur *modus ponens généralisé* qui a été introduit par Zadeh (Zadeh, 1973; 1975; 1979) et étudié par d'autres chercheurs (Dubois et Prade, 1985a; 1988a; 1991a; Trillas et Valverde, 1985a; 1985b; López de Mántaras, 1990). Supposons que l'on dispose d'un énoncé de la forme suivante « Si  $X$  est  $A$  alors  $Y$  est  $B$  » où  $A \in L(U)$  et  $B \in L(V)$  sont des sous-ensembles flous. Un tel énoncé est appelé une *règle floue* et peut être représenté par une distribution de possibilités conditionnelle ayant la forme suivante:

$$\pi_{Y|X}(v|u) = I(\mu_A(u), \mu_B(v)) \quad (5-18)$$

La fonction  $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  est appelé une *fonction d'implication* (voir (Dubois et Prade, 1991a) pour une revue de ce type de fonctions). Considérons maintenant un fait de la forme suivante "X est  $A'$ " où  $A' \in L(U)$ . La *règle d'inférence modus ponens généralisé* prend la forme suivante:

$$\begin{array}{l} X \text{ est } A' \\ \hline \text{Si } X \text{ est } A \text{ alors } Y \text{ est } B \\ \hline Y \text{ est } B' \end{array}$$

où  $B' \in L(V)$  est le sous-ensemble flou ayant comme fonction d'appartenance:

$$\mu_{B'}(v) = \text{Sup}_U [T(\mu_{A'}(u), \pi_{YX}(v|u))] \quad (5-19)$$

qui induit une distribution de possibilités marginale pour la variable  $Y$ :  $\pi_Y(v) = \mu_{B'}(v)$ . On utilisera la notation suivante:  $A' \circ I(A,B) = B'$ . On peut remarquer que modus ponens généralisé est la même chose que la règle d'inférence de composition une fois que la distribution de possibilités conditionnelle  $\pi_{YX}(v|u)$  a été déterminée par la fonction d'implication  $I$ .

Le choix de la fonction d'implication  $I$  est très important. Généralement, ce choix est motivé par les propriétés qui sont satisfaites par les diverses fonctions d'implication. Plusieurs auteurs ont étudiés de telles propriétés (Fukami et al, 1980; Trillas et Valverde, 1985a; 1985b; Magrez et Smets, 1989; Dubois et Prade, 1991a). Une propriété fondamentale qui a beaucoup été analysée est de pouvoir retrouver la règle modus ponens classique, i.e.,  $A \circ I(A,B) = B$ . Dans le cadre de ce travail, on adopte (en plus du principe de spécificité minimum) cette propriété car elle correspond à un des processus d'inférence élémentaire qui est à la base des développements effectués (cf. 5.5). Ceci nous amène à restreindre notre attention à un cas particulier de fonctions d'implication, soit celles appelées *fonctions de R-implication* et définies par:

$$I(\mu_A(u), \mu_B(v)) = \text{Sup}\{b \in [0,1] : T(\mu_A(u), b) \leq \mu_B(v)\} \quad (5-20)$$

où  $T$  est une quelconque t-norme qui doit être aussi utilisée dans l'équation (5-19). Les fonctions de R-implication sont équivalentes aux opérateurs  $\psi_T$  définis dans la section précédente traitant des équations de relations floues. Les résultats dans le domaine de l'implication floue n'apportent aucun élément nouveau, par rapport à ceux sur la résolution d'équations de relations floues (voir section 5.6), susceptible d'être utile dans la suite de ce travail. Il était tout de même important de situer les présents travaux par rapport au domaine de l'implication floue qui constitue peut-être le sujet de plus grand intérêt lorsqu'on parle d'inférence avec une approche floue.



## 6 RÉVISION DE DISTRIBUTIONS DE POSSIBILITÉS

---

L'objectif de ce chapitre est d'exposer en détail les développements théoriques que l'on a effectués en théorie des possibilités dans le cadre de ce travail. On y montre comment on peut utiliser le cadre d'inférence bayésien avec des distributions de possibilités dans le but de réviser (mettre à jour) une distribution de possibilités suite à l'arrivée d'une nouvelle information (Lapointe et Bobée, 1999). Différentes règles d'inférence, fonctions du choix de la t-norme, sont proposées. Ces règles peuvent être vues comme l'équivalent possibiliste de la règle de Bayes.

Quoique la règle de Bayes joue un rôle très important dans le traitement de l'incertitude et qu'elle a conduit à maintes applications, son équivalent possibiliste n'a pas été étudié en profondeur et il ne semble pas y avoir eu d'applications. Dubois et Prade (1990; 1992a; 1992b) sont les seuls auteurs (à notre connaissance) à avoir étudié la règle de Bayes dans la cadre possibiliste sans toutefois l'avoir appliquée. Ces auteurs ont présenté des équivalences avec deux choix particuliers de norme triangulaire (le minimum et le produit) et dans des contextes particuliers. Dans le cadre de ce travail, on va au-delà de ces résultats à plusieurs égards:

1. On considère l'utilisation de n'importe quelle norme triangulaire.
2. On présente une manière formelle pour arriver à une solution en partant de deux axiomes élémentaires de la théorie des possibilités.
3. On fait le lien avec les autres domaines de la théorie des sous-ensembles flous.
4. Certaines propriétés de la solution présentée sont étudiées en détail.
5. Finalement, on montre comment la solution possibiliste est appropriée au problème de traitement de l'incertitude dans les prévisions, et on en présente une application en hydrologie.

D'autres travaux passés sont liés à la règle de Bayes, mais aucun autre ne peut être considéré comme l'équivalent de cette règle. Sugeno a proposé le concept d'intégrales flous qui permet de définir des mesures floues conditionnelles (Sugeno, 1974; 1977; Terano et Sugeno, 1975) lesquelles sont à la base d'une égalité ayant la forme de la règle de Bayes. Quoiqu'il semble possible de réviser des mesures de possibilités dans ce cadre de travail non familier,

aucune règle d'inférence n'a pourtant été proposée. Smets (1982) a été un des premiers auteurs à étudier une version possibiliste de la règle de Bayes; cependant, la règle qu'il propose à un parfum probabiliste puisqu'elle implique une distribution de probabilités conditionnelle. Si on voit une mesure de possibilité comme étant un cas particulier d'une fonction de croyance (Dubois et Prade, 1988c), on peut appliquer le conditionnement bayésien à des mesures de possibilités (Dubois et Prade, 1997); ce qui permet de construire une règle d'inférence en utilisant les opérateurs traditionnels (*Maximum* et *Minimum*). Cependant, cette règle est de peu d'intérêt lorsqu'elle est utilisée avec des distributions de possibilités au lieu des mesures de possibilités. Il existe d'autres travaux intéressants traitant du conditionnement en théorie des possibilités (Dubois et Prade; 1991b; Studeny, 1993; de Campos et al, 1995; Fonck, 1997)

## 6.1 Résultats préliminaires

Avant de présenter les résultats principaux, on se doit de démontrer certains résultats préliminaires. Dans ce qui suit,  $T$  représente une quelconque t-norme et  $S$  une quelconque t-conorme. Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, la notation utilisée pour les distributions de possibilités sera simplifiée: les distributions de possibilités  $\pi_x(u)$ ,  $\pi_y(v)$ ,  $\pi_{y|x}(v|u)$  et  $\pi_{(x,y)}(u,v)$  seront représentées par  $\pi(u)$ ,  $\pi(v)$ ,  $\pi(v|u)$  et  $\pi(u,v)$ , respectivement.

**Théorème 6-1:** Si  $\pi(u)$  et  $\pi(v|u)$  sont normales, alors  $\pi(u,v)$  et  $\pi(v)$  définies par

$$\pi(u,v) = T(\pi(v|u), \pi(u)) \quad \pi(v) = S_U [T(\pi(v|u), \pi(u))] = S_U [\pi(u,v)] \quad (6-1)$$

sont aussi normales.

**Démonstration:** Puisque  $\pi(u)$  est normale,  $\exists u_0 \in U$  tel que  $\pi(u_0) = 1$ . Puisque  $\pi(v|u)$  est normale,  $\exists v_0 \in V$  tel que  $\pi(v_0|u_0) = 1$ . Ainsi,  $\pi(u_0, v_0) = T(\pi(v_0|u_0), \pi(u_0)) = T(1,1) = 1$  ce qui signifie que  $\pi(u,v)$  est normale.  $\pi(v_0) = S_U [\pi(u, v_0)] = S(\pi(u_0, v_0), S_{U-\{u_0\}} [\pi(u, v_0)]) = S(1, S_{U-\{u_0\}} [\pi(u, v_0)]) = 1$  ce qui signifie que  $\pi(v)$  est normale. QED

**Théorème 6-2:** Si  $\pi(v|u)$  est normale, alors l'inégalité suivante est respectée:

$$\pi(u) \leq S_V [T(\pi(v|u), \pi(u))] = S_V [\pi(u,v)], \quad \forall u \in U \quad (6-2)$$

**Démonstration:** Puisque  $\pi(v|u)$  est normale,  $\forall u \in U$ ,  $\exists v_0 \in V$  tel que  $\pi(v_0|u) = 1$ , ainsi  $\pi(u, v_0) = T(\pi(v_0|u), \pi(u)) = T(1, \pi(u)) = \pi(u)$ . De plus,  $\forall u \in U$ ,  $S_V [\pi(u,v)] = S(\pi(u, v_0), S_{V-\{v_0\}} [\pi(u,v)]) = S(\pi(u), S_{V-\{v_0\}} [\pi(u,v)]) \geq \pi(u)$ . QED



Le Théorème 6-2 signifie qu'on peut obtenir une distribution de possibilités moins spécifique que celle qu'on avait initialement par l'application des processus d'inférence de base de la théorie des possibilités. Cette situation est loin d'être désirable car il y a alors perte d'information et augmentation de l'incertitude. On est donc en droit de se demander dans quelles circonstances cette perte d'information peut être évitée, i.e., le signe d'inégalité dans l'équation (6-2) peut être remplacé par un signe d'égalité.

**Théorème 6-3:** L'égalité suivante est respectée pour n'importe quelle  $\pi(v|u)$  normale, n'importe quelle  $\pi(u)$  (pas nécessairement normale) et pour n'importe quelle t-norme  $T$  si et seulement si  $S = Sup$ :

$$\pi(u) = S_V [T(\pi(v|u), \pi(u))] = S_V [\pi(u,v)], \quad \forall u \in U \quad (6-3)$$

Démonstration: Premièrement, supposons que  $S = Sup$ .  $\forall u \in U, \exists v_0 \in V$ , tel que  $\pi(u, v_0) = \pi(u)$  (voir la démonstration du Théorème 6-2). Ainsi,  $\forall u \in U$ , on a

$$Sup_V [\pi(u,v)] = Sup(\pi(u, v_0), Sup_{V-\{v_0\}} [\pi(u,v)]) = Sup(\pi(u), Sup_{V-\{v_0\}} [\pi(u,v)]) = \pi(u)$$

puisque  $\forall u \in U, \forall v \in V, \pi(u) \geq T(\pi(v|u), \pi(u)) = \pi(u,v)$ . Ceci termine la première partie de la démonstration. Maintenant, supposons que  $S \neq Sup$ , on doit démontrer qu'il existe  $\pi(v|u)$  normale,  $\pi(u)$  et une t-norme  $T$  telles que l'équation (6-3) n'est pas satisfaite. Puisque  $S \neq Sup$ , il existe  $a, b \in ]0, 1[$ , tel que  $S(a,b) > Sup(a,b)$  and  $a \geq b$ . Prenons  $T = Min$  et n'importe quelles  $\pi(v|u)$  normale et  $\pi(u)$  satisfaisant:

$$\begin{aligned} \pi(u_0) &= a && \text{pour un certain } u_0 \in U \\ \pi(v_0|u_0) &= 1 && \text{pour un certain } v_0 \in V \\ \pi(v_1|u_0) &= b && \text{pour un certain } v_1 \in V \end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} \pi(u_0, v_0) &= Min(\pi(v_0|u_0), \pi(u_0)) = Min(1, a) = a \\ \pi(u_0, v_1) &= Min(\pi(v_1|u_0), \pi(u_0)) = Min(b, a) = b \end{aligned}$$

On en déduit que

$$S_V [\pi(u_0, v)] \geq S(\pi(u_0, v_0), \pi(u_0, v_1)) = S(a, b) > Sup(a, b) = a = \pi(u_0)$$

Ceci permet de conclure que  $S_V [\pi(u_0, v)] > \pi(u_0)$ ; ce qui contredit l'égalité ci-dessus et termine la deuxième partie de la démonstration. QED

Quoique l'on ait utilisé  $T = Min$  dans la démonstration, il se peut que l'équation (6-3) ne soit pas satisfaite pour d'autres t-normes  $T$  lorsque  $S \neq Sup$ . Pour  $T$  et  $S$  donné, on dit que le

couple  $\langle T, S \rangle$  satisfait le *Principe de la conservation de l'information* (PCI) lorsque l'équation (6-3) est satisfaite pour n'importe quelle  $\pi(v|u)$  normale et n'importe quelle  $\pi(u)$ . Notons que rien n'exclut l'existence de couples  $\langle T, S \rangle$  avec  $S \neq Sup$  qui satisfont le PCI. Par contre, si on désire faire varier  $T$  sans devoir changer  $S$  pour satisfaire le PCI, alors on doit prendre  $S = Sup$ , selon le Théorème 6-3. Un résultat similaire a déjà été obtenu par Bouchon (1987) dans un contexte un peu différent où l'analogie du PCI est appelé la *Propriété d'additivité*. Étant donné que l'on désire respecter le PCI tout en permettant de varier le choix de la t-norme  $T$ , on doit choisir (en accord avec le Théorème 6-3)  $Sup$  comme t-conorme. Ainsi, à partir de maintenant, on se limite à ce cas particulier qui est habituellement pris pour acquis dans les travaux en théorie des possibilités.

## 6.2 Solution au cadre d'inférence bayésien

Le cadre d'inférence bayésien a déjà été présenté dans le Chapitre 3. Voyons maintenant comment on peut l'adapter pour la théorie des possibilités. À cette fin, il suffit simplement de remplacer les distributions de probabilités par des distributions de possibilités; on obtient donc:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_X(u) \\ \pi_{YX}(v|u) \end{array} \right\} \rightarrow \pi_{XY}(u|v)$$

C'est-à-dire, à partir de  $\pi_X(u)$  (la distribution de possibilités *a priori* de  $X$ ) et  $\pi_{YX}(v|u)$  (la distribution de possibilités conditionnelle de  $Y$ ), on calcule  $\pi_{XY}(u|v)$  (la distribution de possibilités *a posteriori* de  $X$ ). Le problème maintenant est de trouver une expression pour  $\pi_{XY}(u|v)$ . Notons que plusieurs auteurs ont étudié un problème plus simple que celui discuté ici, mais fortement lié à celui-ci, i.e., le calcul de  $\pi_{YX}(v|u)$  à partir de la distribution de possibilités jointe  $\pi_{(X,Y)}(u,v)$  et la distribution de possibilités marginale  $\pi_X(u)$  (Zadeh, 1978; Hisdal, 1978; Nguyen, 1978; Dubois et Prade, 1986a; 1991a; Ramer, 1989). Dans ce qui suit, on étudie trois manières différentes de poser le problème conduisant dans chacun des cas à une équation impliquant le terme inconnue, soit  $\pi(u/v)$ . Par la suite, on montre que seulement une de ces manières conduit à une solution intéressante. Dans ce qui suit,  $T$  est une quelconque t-norme; la notation «  $\circ$  » sous-entend l'utilisation de  $T$ . La première manière de poser le problème est inspirée de celle utilisée pour générer la règle de Bayes (le terme inconnu est souligné):

Identité initiale:  $\pi(u, v) = \pi(u, v)$   
 Eqs. (5-8) et (5-9):  $T(\pi(v), \underline{\pi(u/v)}) = T(\pi(u), \pi(v/u))$   
 Eq. (5-6):  $T(\pi(u) \circ \pi(v|u), \underline{\pi(u/v)}) = T(\pi(u), \pi(v/u))$  (6-4)

La deuxième manière de poser le problème consiste à effectuer les opérations suivantes:

Identité initiale:  $\pi(u) = \pi(u)$   
 Eq. (5-6):  $\pi(v) \circ \underline{\pi(u/v)} = \pi(u)$   
 Eq. (5-6) encore:  $(\pi(u) \circ \pi(v|u)) \circ \underline{\pi(u/v)} = \pi(u)$  (6-5)

Maintenant, si on suppose que la distribution inconnue  $\pi(u/v)$  est normale, on peut poser le problème d'une troisième manière:

Identité initiale:  $\pi(v) = \pi(v)$   
 Eq. (6-3) (Théorème 6-3) et Eq. (5-6):  
 $Sup_U [T(\pi(v), \underline{\pi(u/v)})] = \pi(u) \circ \pi(v|u)$   
 Eq. (5-6):  $Sup_U [T(\pi(u) \circ \pi(v|u), \underline{\pi(u/v)})] = \pi(u) \circ \pi(v|u)$  (6-6)

Puisque  $\pi(v)$  et  $\pi(u, v)$  peuvent facilement être obtenues à partir des équations (5-6) et (5-8), on peut simplifier les trois équations que l'on a obtenues:

Équation 1:  $T(\pi(v), \underline{\pi_1(u/v)}) = \pi(u, v)$  (6-7)

Équation 2:  $\pi(v) \circ \underline{\pi_2(u/v)} = \pi(u)$  (6-8)

Équation 3:  $Sup_U [T(\pi(v), \underline{\pi_3(u/v)})] = \pi(v)$  (6-9)

Ci-dessus,  $\pi_i(u/v)$  représente la solution à l'équation  $i$ . Il faut être prudent sur l'interprétation de ces trois équations; il ne s'agit pas d'axiomes de base, contrairement à ce que l'on pourrait penser, car ces équations ne font intervenir que les termes connus soient,  $\pi_x(u)$  et  $\pi_{yx}(v|u)$ , une fois les simplifications retirées. Puisqu'on adhère au Principe de spécificité minimum, on ne s'intéresse qu'aux solutions les moins spécifiques possibles. Ainsi, on peut facilement voir que  $\pi_3(u/v) = 1, \forall u \in U, \forall v \in V$ , est la solution la moins spécifique à l'Équation 3. Cette solution représente une perte complète d'information puisqu'elle représente l'ignorance totale. Notons cependant que cette solution n'est pas inconsistante, mais plutôt non informative. Étant donné l'inutilité de cette solution, on se doit de rejeter la troisième manière de poser le problème conduisant à l'Équation 3. Pour

résoudre l'Équation 2, il suffit d'utiliser les résultats sur la résolution d'équations de relations floues (Section 5.6). En utilisant les opérateurs  $\psi_T$ , on obtient directement une expression pour la solution la moins spécifique à l'Équation 2, soit  $\pi_2(u/v) = \psi_T(\pi(v), \pi(u))$ . Notons que si  $\pi(v|u)$  et  $\pi(u)$  sont normales alors  $\pi(v)$  l'est aussi (Théorème 6-1); conséquemment, la solution la moins spécifique à l'Équation 2 existe toujours sous cette hypothèse.

Pour trouver la solution à l'Équation 1, on doit premièrement définir l'opérateur  $\lambda_T$ :

$$\lambda_T(a, c) = \text{Sup}\{x \in [0, 1] : T(a, x) = c\} \quad (6-10)$$

Le lemme suivant sera aussi nécessaire:

**Lemme 6-1:** Si  $T$  est une t-norme continue et que  $a \geq c$  ( $a, c \in [0, 1]$ ), alors  $\exists b \in [0, 1]$  tel que  $T(a, b) = c$ .

Démonstration: On a:  $T(a, 1) = a \geq c$  et  $T(a, 0) = 0 \leq c$ . Puisque  $T$  est continue, il doit exister un  $b \in [0, 1]$  tel que  $T(a, b) = c$ . QED

**Théorème 6-4:** La solution la moins spécifique à l'Equation 1 existe toujours et est définie par:

$$\pi_1(u|v) = \lambda_T(\pi(v), \pi(u, v)) \quad (6-11)$$

Démonstration:  $\forall u \in U, \forall v \in V, \pi(v) \geq \pi(u, v)$ ; ainsi  $\{x \in [0, 1] : T(\pi(v), x) = \pi(u, v)\} \neq \emptyset$  (Lemme 6-1); ceci implique qu'il y a toujours une solution. Par construction, cette solution est la moins spécifique possible. QED

Puisque les t-normes sont non décroissantes (propriété de monotonie), on peut aussi exprimer la solution à l'Équation 1 en fonction des opérateurs  $\psi_T$  (cf. 5.6):

$$\pi_1(u|v) = \psi_T(\pi(v), \pi(u, v)) \quad (6-12)$$

**Lemme 6-2:** Si  $c \leq c'$  ( $c, c' \in [0, 1]$ ), alors  $\forall a \in [0, 1], \psi_T(a, c) \leq \psi_T(a, c')$ .

Démonstration: Il suffit de voir la relation suivante:  $\{x \in [0, 1] : T(a, x) \in [0, c]\} \subseteq \{x \in [0, 1] : T(a, x) \in [0, c']\}$ . QED

**Théorème 6-5:** Si la solution (la moins spécifique) à l'Équation 2 existe ( $\pi_2(u/v)$ ), alors elle est moins spécifique que la solution (la moins spécifique) à l'Équation 1 ( $\pi_1(u|v)$ ); en d'autres termes,  $\forall u \in U, \forall v \in V, \pi_2(u/v) \geq \pi_1(u|v)$ .

**Démonstration:** On a selon le Lemme 6-2:  $\pi_2(u/v) = \psi_7(\pi(v), \pi(u)) \geq \psi_7(\pi(v), \pi(u, v)) = \pi_1(u/v)$  puisque  $\pi(u) \geq \pi(u, v)$ ,  $\forall u \in U$ ,  $\forall v \in V$ . QED

Le Théorème 6-5 demande quelques explications. Il ne faut surtout pas conclure de ce résultat en se basant sur le Principe de spécificité minimum que la solution  $\pi_2(u/v)$  est meilleure que la solution  $\pi_1(u/v)$ . Au contraire, il faut plutôt conclure que  $\pi_2(u/v)$  n'inclut pas toute l'information pertinente concernant la relation entre les variables impliquées; il y a en fait une perte d'information. Notons aussi, qu'en général,  $\pi_2(u/v)$  n'est pas une solution à l'Équation 1. La solution  $\pi_1(u/v)$  est donc plus informative que la solution  $\pi_2(u/v)$ . Pour cette raison, on ne s'intéressera qu'à la solution  $\pi_1(u/v)$  à partir de maintenant et on enlèvera l'indice pour simplement la notée  $\pi(u/v)$ . Ci-dessous, on utilise les indices dans un tout autre but.

Le théorème qui suit apporte de nouveaux arguments en faveur de la solution retenue, soit celle satisfaisant l'Équation 1.

**Théorème 6-6:** Soit les distributions de possibilités  $\pi(v|u)$ ,  $\pi(u)$  et  $\pi(u/v)$  où  $\pi(v|u)$  est normale et  $\pi(u/v)$  est une quelconque solution à l'Équation 1; définissons les termes suivants:

$$\pi_1(u, v) = T(\pi(u), \pi(v|u))$$

$$\pi_1(v) = \text{Sup}_U [\pi_1(u, v)]$$

$$\pi_1(u) = \text{Sup}_V [\pi_1(u, v)]$$

$$\pi_2(u, v) = T(\pi_1(v), \pi(u/v))$$

$$\pi_2(v) = \text{Sup}_U [\pi_2(u, v)]$$

$$\pi_2(u) = \text{Sup}_V [\pi_2(u, v)]$$

Les égalités suivantes sont respectées:

$$(i) \pi_1(u, v) = \pi_2(u, v)$$

$$(ii) \pi_1(v) = \pi_2(v)$$

$$(iii) \pi(u) = \pi_1(u) = \pi_2(u)$$

**Démonstration:** Par construction, (i) est vrai (voir Équation (6-7)).  $\pi_1(v)$  et  $\pi_2(v)$  sont simplement la projection sur  $V$  de  $\pi_1(u, v)$  et  $\pi_2(u, v)$ , respectivement; l'égalité (ii) est vraie puisque (i) est respectée. Puisque  $\pi(v|u)$  est normale,  $\pi(u) = \pi_1(u)$  selon le Théorème 6-3. Finalement, on a  $\pi_1(u) = \pi_2(u)$  puisque l'égalité (i) est vraie. QED

Le Théorème 6-6 exprime une propriété très intéressante des solutions satisfaisants l'Équation 1: il n'existe aucune manière d'inférer deux distributions de possibilités différentes (ayant la même signification) par l'application des opérateurs de la théorie des possibilités sur  $\pi(v|u)$ ,  $\pi(u)$ , and  $\pi(u|v)$ . Ceci signifie que n'importe quelle solution à l'Équation 1,  $\pi(u|v)$ , inclut toute l'information concernant les variables impliquées; il n'y a pas de perte d'information. Ce résultat est accord avec le Principe de conservation de l'information (PCI). Si on accepte le PCI et le Principe de spécificité minimum, alors la solution la moins spécifique à l'Équation 1 doit être considérée comme la meilleure des solutions possibles.

**Théorème 6-7:** La solution la moins spécifique à l'Équation 1,  $\pi(u|v)$ , est normale.

Démonstration:  $\forall v \in V, \exists u_0 \in U$  tel que  $\pi(v) = \pi(u_0, v)$  puisque  $\pi(v) = \text{Sup}_U [\pi(u, v)]$ . Ainsi,  $\pi(u_0|v) = \text{Sup}\{x \in [0, 1] : T(\pi(v), x) = \pi(v)\} = 1$ . QED

Ce théorème garantit que la normalité est préservée ou induite lors du processus d'inférence.

### 6.2.1 Propriétés de la solution retenue

La solution retenue au cadre d'inférence bayésien, soit  $\pi(u|v)$  satisfaisant l'Équation 1, est très intéressante car elle possède cinq propriétés importantes:

1. Elle respecte le Principe de spécificité minimum;
2. Elle respecte le Principe de conservation de l'information (PCI);
3. Elle existe toujours;
4. Elle préserve ou induit la normalité;
5. Finalement, n'importe quelle t-norme  $T$  peut être utilisée.

## 6.3 Règles d'inférence

La solution qui a été retenue est valide pour n'importe quelle t-norme  $T$  continue; ceci permet de construire une règle d'inférence différente pour chaque t-norme  $T$ . Dans le but de simplifier les règles d'inférence, on utilise les termes  $\pi(u, v)$  et  $\pi(v)$  définis comme précédemment par:

$$\pi(u, v) = T(\pi(u), \pi(v|u)) \quad (6-13)$$

$$\pi(v) = \pi(u) \circ \pi(v|u) \quad (6-14)$$

où  $\pi(v) \geq \pi(u, v)$ . En utilisant l'équation (6-12) et les opérateurs  $\psi_T$  définis dans le Section 5.6, on obtient les cinq règles d'inférence correspondant aux cinq t-normes  $T$  qui ont été étudiées jusqu'à présent:

$$\text{R\`egle 1: } T_1(a, b) = \text{Min}(a, b) \quad \pi(u|v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(v) = \pi(u, v) \\ \pi(u, v) & \text{si } \pi(v) > \pi(u, v) \end{cases} \quad (6-15)$$

$$\text{R\`egle 2: } T_2(a, b) = \text{Max}(0, a+b-1) \quad \pi(u|v) = 1 + \pi(u, v) - \pi(v) \quad (6-16)$$

$$\text{R\`egle 3: } T_3(a, b) = ab \quad \pi(u|v) = \frac{\pi(u, v)}{\pi(v)} \quad (6-17)$$

$$\text{R\`egle 4: } T_4(a, b) = \frac{ab}{1 + (1-a)(1-b)} \quad \pi(u|v) = \frac{2\pi(u, v) - \pi(v)\pi(u, v)}{\pi(v) + \pi(u, v) - \pi(v)\pi(u, v)} \quad (6-18)$$

$$\text{R\`egle 5: } T_5(a, b) = \frac{ab}{a + b - ab} \quad \pi(u|v) = \frac{\pi(v)\pi(u, v)}{\pi(v) - \pi(u, v) + \pi(v)\pi(u, v)} \quad (6-19)$$

Le cas spécial suivant n'a pas été spécifié ci-dessus pour les Règles 3, 4 et 5: Si  $\pi(v) = \pi(u, v) = 0$ , alors  $\pi(u|v) = 1$ . La Règle 1 a déjà été obtenue par Dubois et Prade (1990, 1992a). La Règle 3 a déjà été obtenue dans le même contexte qu'ici (Dubois et Prade, 1990) et dans le contexte où il y a deux sources d'information non interactives (Dubois et Prade, 1992b). Remarquez, pour l'instant, que la distribution  $\pi(u|v)$  que l'on obtient avec la Règle 1 ( $T = \text{Min}$ ) n'est pas continue. Ainsi, un changement mineur à une des distributions de possibilités en entrée peut conduire à une transformation importante de la distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(u|v)$ . Pour cette raison, la Règle 1 (i.e.,  $T = \text{Min}$ ) apparaît comme un choix peu intéressant. Les quatre autres règles sont continues. Notons que les Règles 4 et 5 sont simplement des variantes de la Règle 3 et peuvent être obtenues à partir de cette dernière par transformation bijective; elles sont étudiées ici car les t-normes correspondantes sont rencontrées dans la littérature.

## 6.4 Processeur possibiliste de prévisions (PPP)

Par analogie avec le Processeur bayésien de prévisions (PBP) de Krzysztofowicz, on utilise le terme *Processeur possibiliste de prévisions* (PPP) pour signifier l'application des règles d'inférences construites dans la section précédente au problème de traitement de l'incertitude dans les prévisions. Dans ce contexte,  $X$  représente la variable d'intérêt et  $Y$  la prévision de cette variable. Les performances passées du système de prévision sont modélisées par la distribution de possibilités conditionnelle de  $Y$  étant donné  $X$ , soit  $\pi_{Y|X}(v|u)$ .  $\pi_X(u)$  représente la distribution de possibilités *a priori* de  $X$ . Finalement,  $\pi_{X|Y}(u|v)$  est la distribution de possibilités *a posteriori* de la variable d'intérêt  $X$  une fois que la prévision  $Y$  a été émise. Les variables  $X$  et  $Y$  étant définies sur le même domaine, i.e.,  $U = V$ , on utilise une notation plus simple et plus proche de celle utilisée en probabilités:  $\pi(x)$ ,  $\pi(y)$ ,  $\pi(x,y)$ ,  $\pi(y|x)$  et  $\pi(x|y)$  remplace  $\pi_X(u)$ ,  $\pi_Y(v)$ ,  $\pi_{(X,Y)}(u,v)$ ,  $\pi_{Y|X}(v|u)$  et  $\pi_{X|Y}(u|v)$ , respectivement.

### 6.4.1 Propriétés du PPP

On démontre ci-dessous que le PPP satisfait deux propriétés importantes correspondant à des situations extrêmes: (1) le cas où les prévisions ne fournissent aucune information pertinente, et (2) le cas où les prévisions sont toujours parfaites. Dans ce qui suit, on supposera que les distributions de possibilités sont normales. La première propriété est satisfaite pour toutes les règles d'inférence alors que la deuxième en exclut certaines.

**Propriété 1:**  $\forall x, \forall y$ , si  $\pi(y|x) = 1$  (prévisions inutiles/ignorance), alors  $\pi(x|y) = \pi(x)$ , i.e., les prévisions n'ont aucun effet et la distribution de possibilités *a priori* de  $X$  n'est pas modifiée suite à l'arrivée de la prévision.

Démonstration:  $\forall x, \forall y$ ,  $\pi(x,y) = T(1, \pi(x)) = \pi(x)$ . Puisque  $\pi(x)$  est normale, on a  $\pi(y) = \text{Sup}_X[\pi(x,y)] = \text{Sup}_X[\pi(x)] = 1$ . Ainsi,  $\pi(x|y) = \lambda_T(\pi(y), \pi(x,y)) = \text{Sup}\{z \in [0,1]: T(1, z) = \pi(x)\} = \pi(x)$ . QED

**Propriété 2:** Soit  $T$  une t-norme telle que  $T(a,b) = 0$  si et seulement si  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Si les prévisions sont parfaites, c'est-à-dire que:

$$\pi(y|x) = 1 \text{ lorsque } y=x$$

$$\pi(y|x) = 0 \text{ lorsque } y \neq x$$

alors, les prévisions éliminent toute l'incertitude *a posteriori*:



$$\pi(x|y) = 1 \text{ lorsque } x=y \text{ ou } \pi(y) = 0$$

$$\pi(x|y) = 0 \text{ lorsque } x \neq y \text{ et } \pi(y) \neq 0$$

**Démonstration:**  $\forall x, \forall y, \pi(x,y) = \pi(x)$  lorsque  $x=y$  et  $\pi(x,y) = 0$  lorsque  $x \neq y$ . Ainsi,  $\pi(y) = \text{Sup}_x [\pi(x,y)] = \pi(x)$ . Maintenant,  $\pi(x|y) = \lambda_{\tau}(\pi(y), \pi(x,y)) = \text{Sup}\{z \in [0,1] : T(\pi(x), z) = \pi(x,y)\}$ . Deux cas doivent être distingués:

Cas 1,  $x=y$ : Ceci implique que  $\pi(x|y) = \text{Sup}\{z \in [0,1] : T(\pi(x), z) = \pi(x)\} = 1$ .

Cas 2,  $x \neq y$ : On a  $\pi(x|y) = \text{Sup}\{z \in [0,1] : T(\pi(x), z) = 0\}$ . De là, on déduit que  $\pi(x|y) = 0$  lorsque  $\pi(x) \neq 0$  étant donné la condition supplémentaire sur la t-norme  $T$  (voir énoncé de la proposition). De plus,  $\pi(x|y) = 1$  lorsque  $\pi(x) = 0$ . QED

Le cas spécial  $\pi(y) = 0$  n'a pas de conséquence en pratique et n'a donc pas besoin d'être plus approfondi; remarquons tout de même que ce cas est aussi problématique d'un point de vue théorique avec la règle de Bayes. La Propriété 2 n'est pas satisfaite avec la Règle 2 qui utilise la t-norme  $T(a,b) = \text{Max}(0, a+b-1)$  puisque la condition supplémentaire sur la t-norme n'est pas satisfaite (par exemple,  $T(0.2, 0.3) = 0$ ). Ceci signifie que malgré le fait que les prévisions soient toujours parfaites, une certaine part de l'incertitude *a posteriori* demeure. Ceci représente une faiblesse importante de cette règle d'inférence pour le problème de traitement de l'incertitude dans les prévisions.

#### 6.4.2 Exemple d'application du PPP

Dans cette section, on présente un exemple fictif qui va permettre de mieux comprendre comment le PPP (processus de révision) fonctionne et comment le choix de la t-norme influe sur la distribution de possibilités *a posteriori*. Pour appliquer le PPP, on doit réaliser les cinq étapes suivantes:

1. Construire la distribution de possibilités de  $X$ , soit  $\pi(x)$ ;
2. Construire la distribution de possibilités conditionnelle de  $Y$ , soit  $\pi(y|x)$ ;
3. Choisir une t-norme  $T$  et indirectement une règle d'inférence.
4. Calculer  $\pi(x,y)$  et  $\pi(y)$  en utilisant les équations (6-13) et (6-14);
5. Calculer  $\pi(x|y)$  en utilisant les règles d'inférence ou l'équation (6-12)

Dans le Chapitre 8, une méthodologie est proposée pour construire les distributions de possibilités  $\pi(x)$  et  $\pi(y|x)$ . Dans l'exemple suivant, on s'abstiendra de traiter de ce point et on proposera directement des distributions de possibilités qui ont un sens.

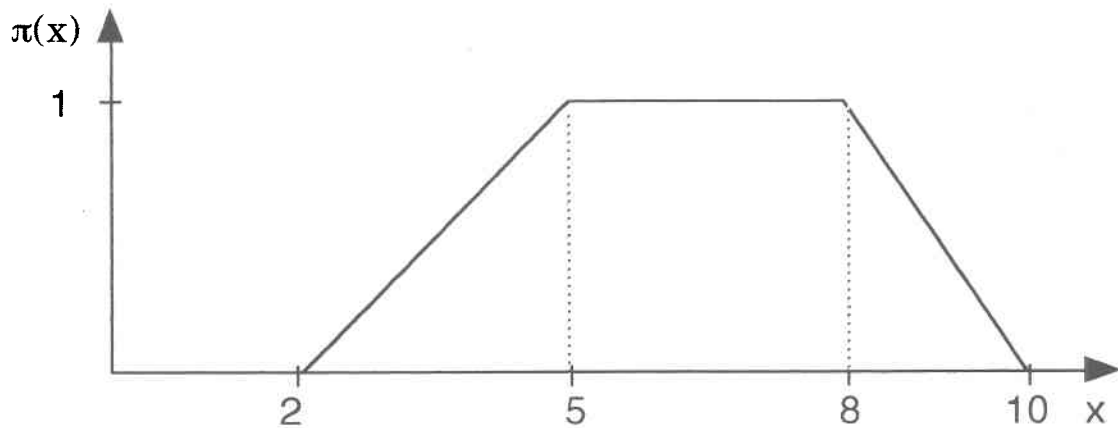
**Étape 1:  $\pi(x)$**

Supposons qu'un expert du domaine concerné nous fournisse l'information suivante concernant la valeur de la variable d'intérêt  $X$ :

- Elle se situe habituellement entre 5 et 8;
- Dans certain cas, cette valeur peut être inférieure à 5, mais jamais à 2;
- Dans certain cas, cette valeur peut être supérieure à 8, mais jamais à 10.

Il serait approprié dans ce cas d'utiliser la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou trapézoïdal pour modéliser la distribution de possibilités *a priori* de  $X$  (voir Figure 6.1):

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)}{3} & \text{si } 2 < x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leq x \leq 8 \\ \frac{(10-x)}{2} & \text{si } 8 < x < 10 \\ 0 & \text{Autrement} \end{cases} \quad (6-20)$$

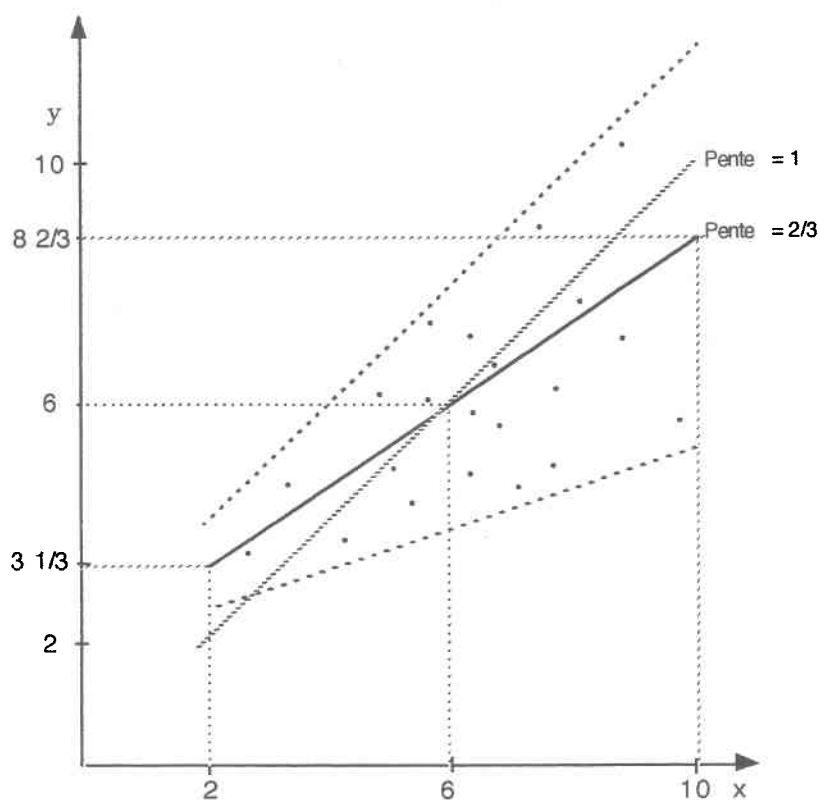


**Figure 6.1:** Distribution de possibilités *a priori*  $\pi(x)$ .

**Étape 2:**  $\pi(y|x)$

Un graphique de  $Y$  en fonction de  $X$  est un élément clé dans la construction de  $\pi(y|x)$  (voir Figure 6.2). L'examen de ce graphique permet de faire ressortir les points suivants:

1. La relation entre  $X$  et  $Y$  est linéaire, mais la pente est plus petite que 1, i.e., les prévisions sont généralement trop élevées pour les petites valeurs de  $X$  (soient celles inférieures à 6), et les prévisions sont trop faibles pour les grandes valeurs de  $X$  (soient celles supérieures à 6).
2. La variance de l'erreur de prévision n'est pas constante (hétéroscédacité); elle augmente avec  $X$ .

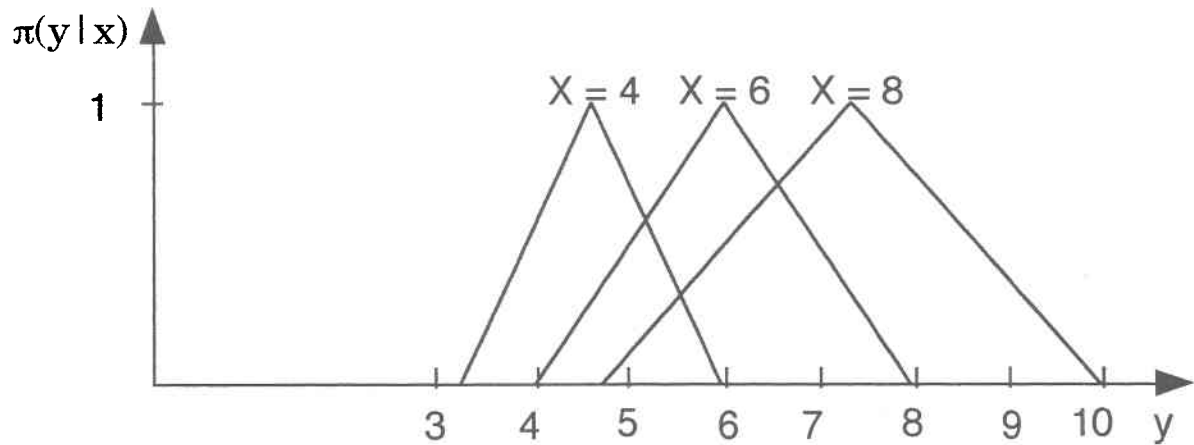


**Figure 6.2: Prévisions  $Y$  en fonction des valeurs observées  $X$ .**

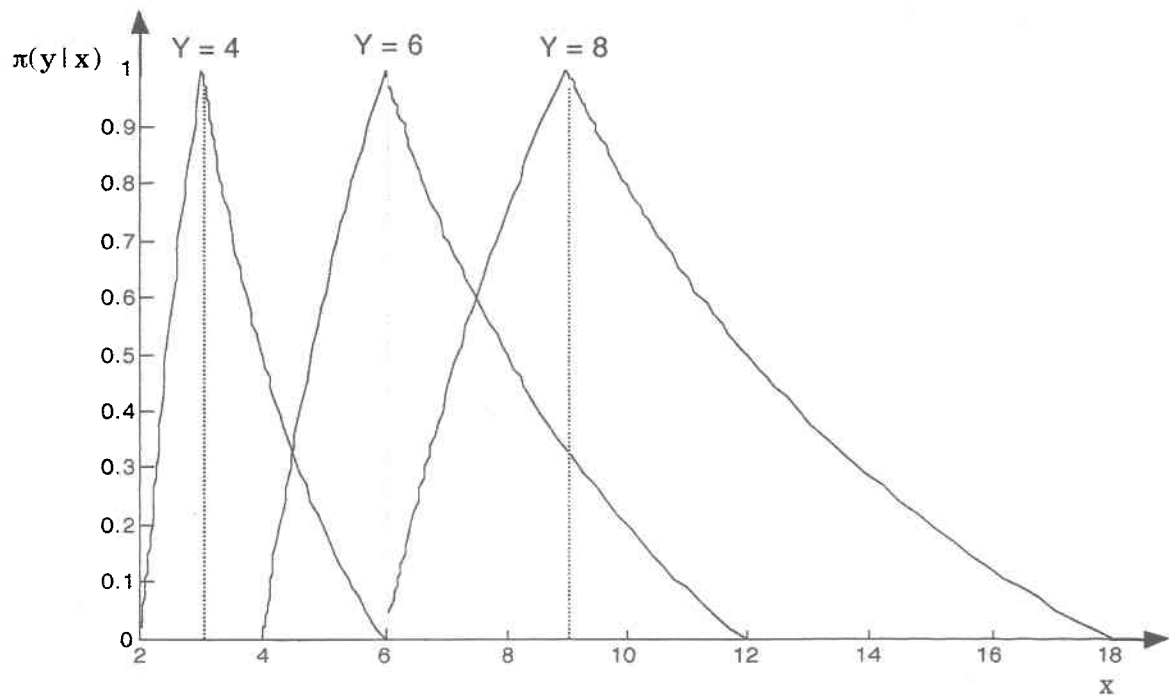
Pour représenter la distribution  $\pi(y|x)$ , on utilise la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou triangulaire qui s'élargit avec  $X$  pour tenir compte de l'erreur de prévision qui croît avec  $X$ :

$$\pi(y|x) = \begin{cases} \left| \frac{(3y-6)}{x} - 1 \right| & \text{si } \frac{x}{3} + 2 < y \leq \frac{2x}{3} + 2 \\ \left| \frac{(6-3y)}{x} + 3 \right| & \text{si } \frac{2x}{3} + 2 < y < x + 2 \\ 0 & \text{Autrement} \end{cases} \quad (6-21)$$

À la Figure 6.3, la distribution  $\pi(y|x)$  est représentée pour trois valeurs de  $X$ , soient 4, 6 et 8. Tandis qu'à la Figure 6.4, la distribution  $\pi(y|x)$  est vue comme une fonction de  $X$  et représentée pour trois valeurs de  $Y$ , soient 4, 6 et 8.



**Figure 6.3:** Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  représentée pour  $X = 4, 6$  et  $8$ .



**Figure 6.4:** Distribution  $\pi(y|x)$  vue comme une fonction de  $X$  représentée pour  $Y = 4, 6$ , et  $8$ .

**Étape 3: Choix d'une t-norme**

On discutera un peu plus loin du choix de la t-norme. Dans le but de démontrer l'influence de ce choix, on considérera dans le cadre de cet exemple trois des cinq t-normes utilisées jusqu'à présent, soient:

1.  $T_1(a,b) = \text{Min}(a,b)$
2.  $T_2(a,b) = \text{Max}(0,a+b-1)$
3.  $T_3(a,b) = ab$

Les trois premières règles d'inférence qui ont été présentées dans la Section 6.3 (voir les équations (6-15), (6-16) et (6-17)) correspondent à ces t-normes.

**Étape 4: Calcul de  $\pi(x,y)$  et  $\pi(y)$** 

Pour simplifier les équations, considérons un cas particulier où la prévision émise est faible: prenons  $Y=4$ . Si on voit  $\pi(y|x)$  comme une fonction de  $X$ , avec  $Y=4$ , on obtient (voir Figure 6.4):

$$\pi(4|x) = \begin{cases} \frac{-6}{x} + 3 & \text{si } 2 < x < 3 \\ \frac{6}{x} - 1 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{Autrement} \end{cases} \quad (6-22)$$

On est maintenant en mesure d'exprimer  $\pi(x,y)$  et  $\pi(y)$  pour chacune des trois t-normes en utilisant les équations (6-13) et (6-14).

Cas 1:  $T_1(a,b) = \text{Min}(a,b)$

$$\pi(x,4) = \begin{cases} \frac{(x-2)}{3} & \text{si } 2 < x \leq 3.77 \\ \frac{6}{x} - 1 & \text{si } 3.77 < x < 6 \\ 0 & \text{Autrement} \end{cases} \quad (6-23)$$

$$\pi(y=4) = 0.59 \quad (6-24)$$

Cas 2:  $T_2(a,b) = \text{Max}(0,a+b-1)$

$$\pi(x,4) = \begin{cases} \frac{(x^2 + 4x - 18)}{3x} & \text{si } 2.69 < x < 3 \\ \frac{(x^2 - 8x + 18)}{3x} & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ \frac{6}{x} - 1 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 0 & \text{Autrement} \end{cases} \quad (6-25)$$

$$\pi(y=4) = 1/3 \quad (6-26)$$

Cas 3:  $T_3(a,b) = ab$

$$\pi(x,4) = \begin{cases} \frac{(x^2 - 4x + 4)}{x} & \text{si } 2 < x < 3 \\ \frac{(-x^2 + 8x - 12)}{3x} & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ \frac{6}{x} - 1 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 0 & \text{Autrement} \end{cases} \quad (6-27)$$

$$\pi(y=4) = 0.36 \quad (6-28)$$

Pour obtenir (6-27), on doit multiplier pour chaque intervalle les fonctions qu'on retrouve en (6-20) et (6-22). Par exemple, pour l'intervalle ]2,3[ on doit multiplier la fonction  $(x-2)/3$  par la fonction  $(-6/x+3)$ ; ce qui donne la fonction  $(x^2-4x+4)/x$ . Pour obtenir (6-28), il suffit de trouver le maximum de la fonction en (6-27); ce maximum est atteint au point  $X=3.46$  et vaut 0.36.

**Étape 5: Calcul de  $\pi(x|y)$** 

En utilisant les résultats de l'étape précédente et les règles d'inférence vues précédemment (c.f. (6-15)-(6-17)), on peut calculer  $\pi(x|y)$  pour chacun des cas. Les trois figures suivantes illustrent les distributions de possibilités *a posteriori* que l'on obtient.

Cas 1:  $T_1(a,b) = \text{Min}(a,b)$

$$\pi(x|4) = \begin{cases} \frac{(x-2)}{3} & \text{si } 2 < x < 3.77 \\ 1 & \text{si } x = 3.77 \\ \frac{6}{x} - 1 & \text{si } 3.77 < x < 6 \\ 0 & \text{Autrement} \end{cases} \quad (6-29)$$

Cas 2:  $T_2(a,b) = \text{Max}(0, a+b-1)$

$$\pi(x|4) = \begin{cases} \frac{(x^2 + 6x - 18)}{3x} & \text{si } 2.69 < x < 3 \\ \frac{(x^2 - 6x + 18)}{3x} & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ \frac{6}{x} - \frac{1}{3} & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ \frac{2}{3} & \text{Autrement} \end{cases} \quad (6-30)$$



Cas 3:  $T_3(a,b) = ab$

$$\pi(x|4) = \begin{cases} \frac{3(x^2 - 4x + 4)}{x} & \text{si } 2 < x < 3 \\ \frac{(-x^2 + 8x - 12)}{x} & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ \frac{18}{x} - 3 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 0 & \text{Autrement} \end{cases} \quad (6-31)$$

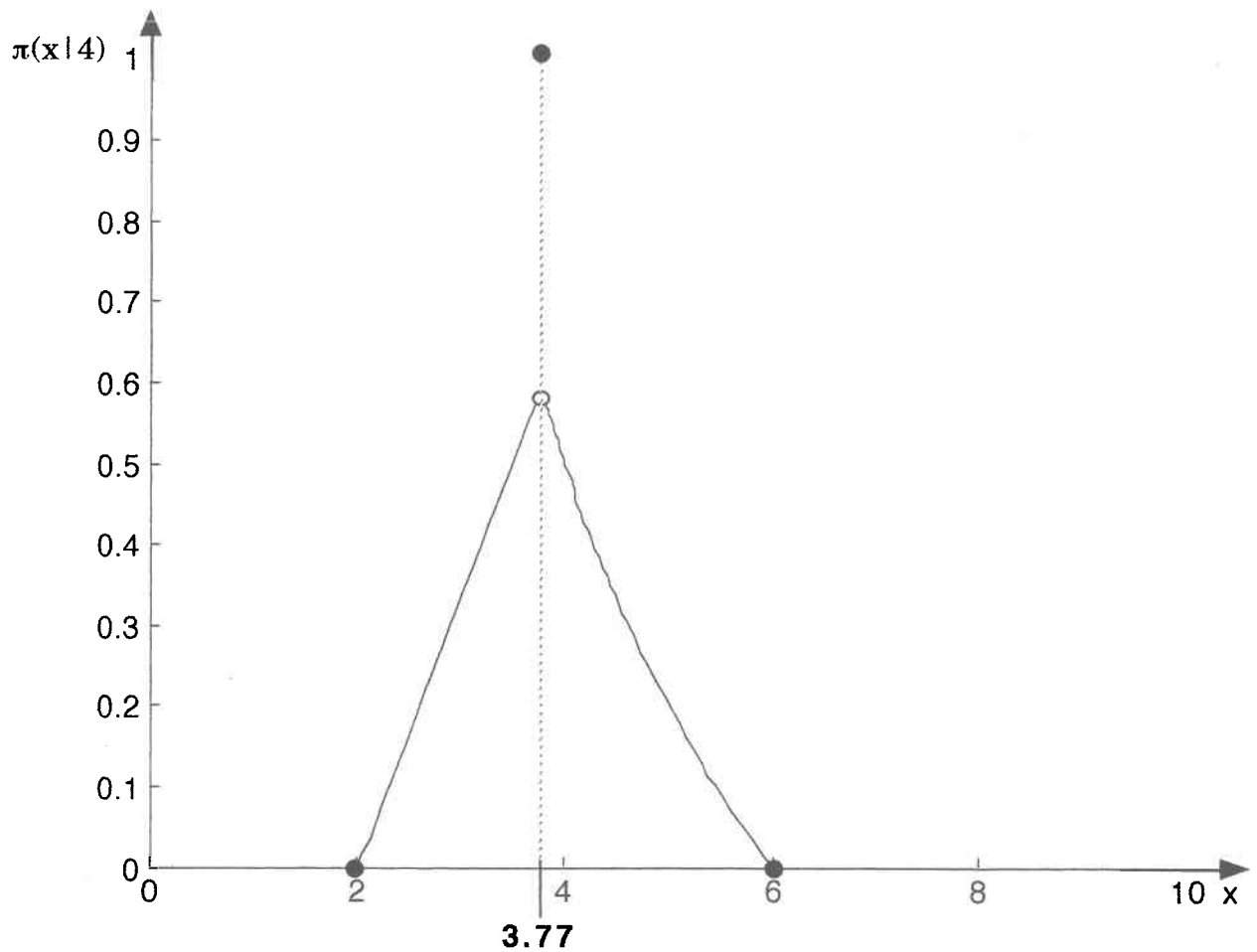


Figure 6.5: Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|4)$  avec la Règle 1.

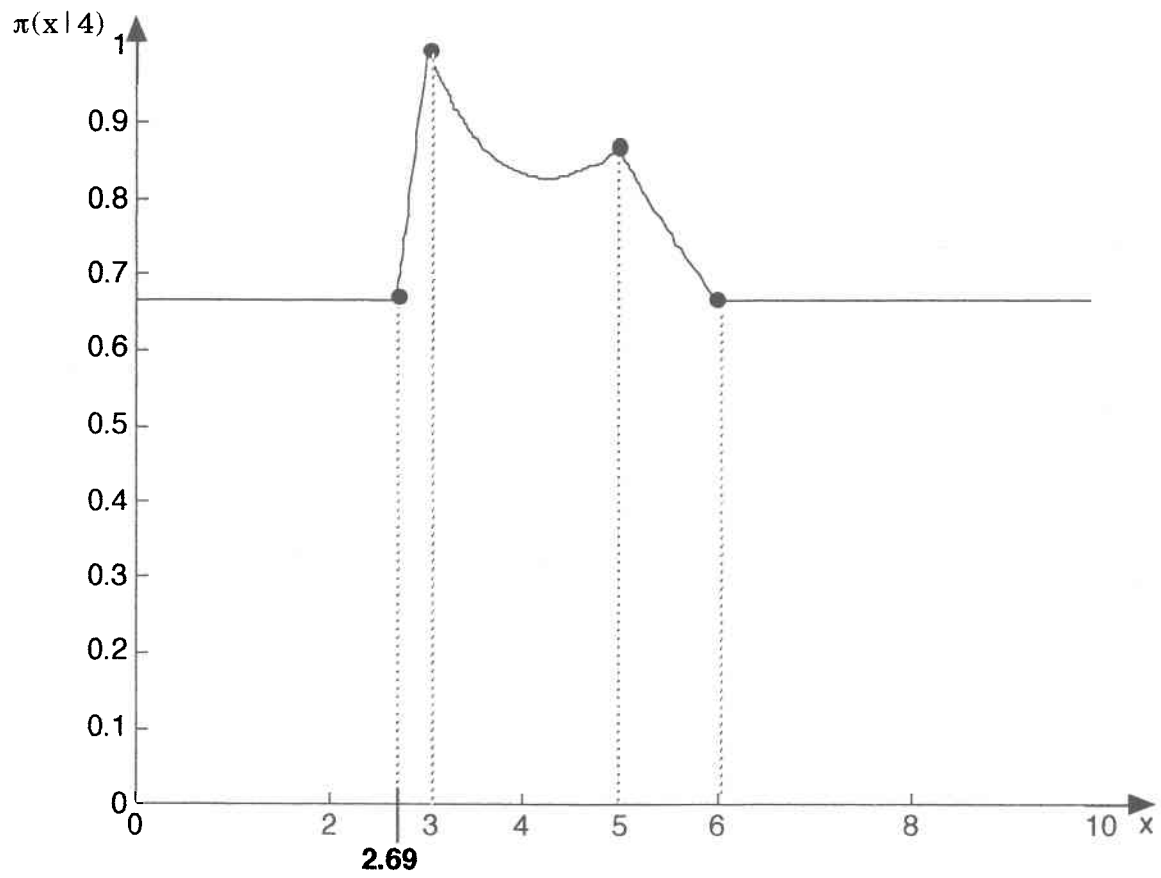
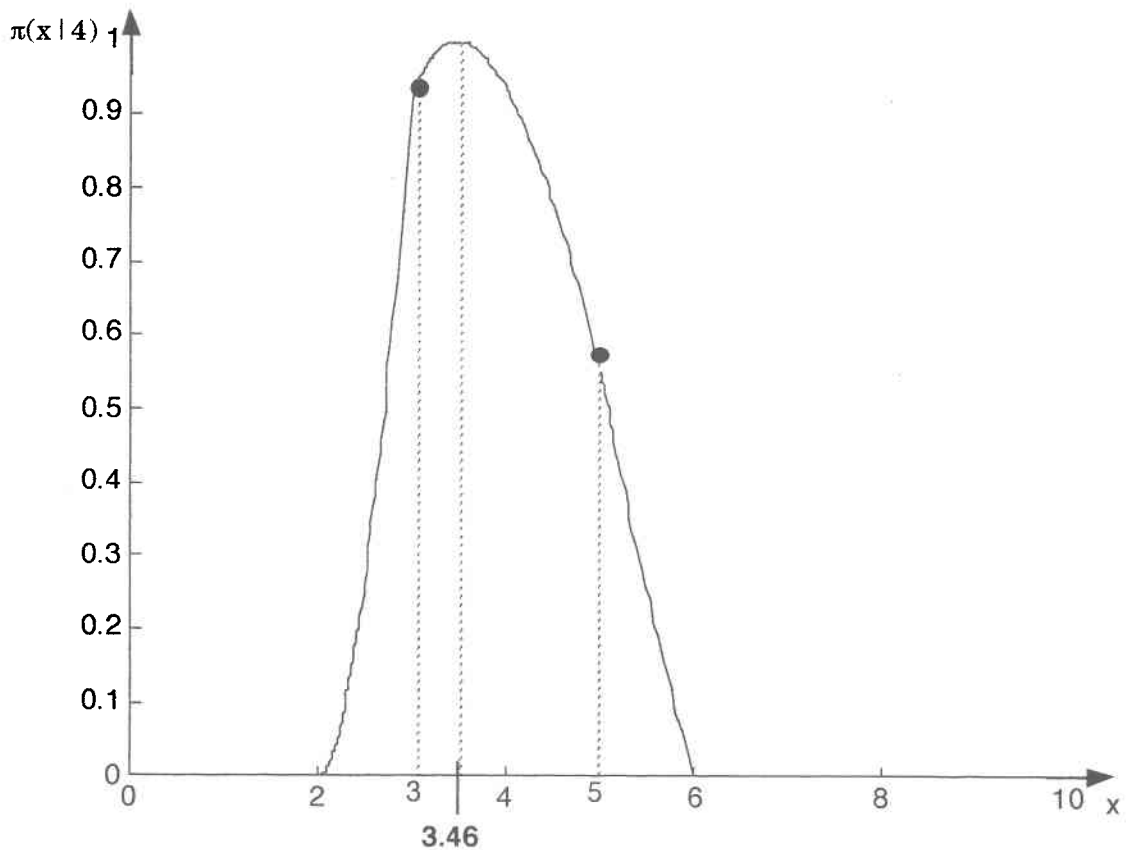


Figure 6.6: Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|4)$  avec la Règle 2.



**Figure 6.7:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|4)$  avec la Règle 3.

### 6.4.3 Discussion

Avec la Règle 1 (Figure 6.5), on ne s'étonnera pas de constater que la distribution *a posteriori*  $\pi(x|4)$  n'est pas continue. On a pour  $X = 3.77$  un degré de possibilité de 1 ce qui apparaît comme étant le meilleur choix pour une prise de décision si on considère que toutes les autres valeurs de  $X$  ont un degré de possibilité inférieur 0.59. Notons aussi que la distribution est légèrement asymétrique.

Avec la Règle 2 (Figure 6.6), la distribution  $\pi(x|4)$  possède deux maximums locaux: le premier a un degré de possibilité de 1 au point  $X = 3$  et le deuxième a un degré de possibilité

d'environ 0.87 au point  $X = 5$ . Ce qui est étonnant et plutôt embarrassant avec cette distribution c'est que pour n'importe quelle valeur de  $X$  le degré de possibilité est d'au moins  $2/3$ . Ainsi, la distribution *a posteriori* semble en contradiction avec la distribution *a priori* car cette dernière stipule que la valeur de  $X$  ne peut pas être plus petite que 2 ou plus grande que 10; le degré de possibilité étant 0 pour ces intervalles. Ce comportement contre-intuitif survient avec la Règle 2 lorsque la possibilité de la prévision,  $\pi(y)$ , est inférieure à 1. Il faut donc, avant d'utiliser la Règle 2, être conscient de ce comportement particulier et l'accepter.

Finalement, la Règle 3 conduit à une distribution *a posteriori* qui est très lisse malgré le fait qu'elle soit constituée de trois parties. Elle atteint son maximum (degré de possibilité de 1) pour  $X = 3.46$ . Notons aussi que cette distribution est asymétrique; ce qui est logique si on considère les faits suivants:

- La prévision  $Y$  est inférieure aux valeurs de  $X$  habituellement observées (entre 5 et 8); ce qui implique que le maximum est atteint pour une valeur inférieure à 5.
- L'erreur de prévision peut être importante pour de grandes valeurs de  $X$  ce qui rend ces grandes valeurs de  $X$  possibles même pour de faibles prévisions.

## 6.5 Choix d'une norme triangulaire

Le choix d'une norme triangulaire (t-norme) n'est pas nécessairement facile puisque ce choix dépend de l'application concernée et par conséquent de l'interprétation qu'on fait d'une distribution de possibilités (voir le chapitre suivant). Dans le but d'aider à faire un choix, on étudie dans cette section quelques propriétés des t-normes.

La Propriété 1 du PPP (cas où les prévisions sont inutiles) est satisfaite pour toutes les t-normes et ne constitue donc pas un élément clé pour effectuer un choix. La Propriété 2 du PPP (cas où les prévisions sont parfaites) n'est pas satisfaite par la t-norme  $T_2(a,b) = \text{Max}(0, a+b-1)$ , mais elle l'est pour les quatre autres t-normes étudiées.

Un autre propriété intéressante est d'obtenir une distribution *a posteriori* qui soit continue lorsque celles fournies en entrée ( $\pi(x)$  et  $\pi(y|x)$ ) le sont. Le respect de cette propriété garantit qu'une petite modification aux distributions initiales ne causera pas un changement important dans la distribution *a posteriori* et par conséquent dans la prise de décision. La t-norme  $T_1(a,b) = \text{Min}(a,b)$  ne respecte pas cette propriété alors que les quatre autres la respectent.

Finalement, comme dernière propriété on peut exiger que:

Si pour un  $x_0$  donné  $\pi(x_0) = 0$ , alors  $\pi(x_0|y) = 0$  pour tout  $y$  tel que  $\pi(y) \neq 0$ .

Ce revient à dire que les degrés de possibilité nuls sont préservés lors du processus de révision (à moins que la prévision soit impossible). Cette propriété est importante car autrement le processus de révision pourrait induire une distribution *a posteriori* selon laquelle certaines valeurs seraient possibles (degrés de possibilité non nuls) alors qu'elles étaient impossibles selon la distribution *a priori*; ce qui peut apparaître comme étant contradictoire. Seule la t-norme  $T_2(a,b) = \text{Max}(0, a+b-1)$  ne respecte pas cette propriété parmi les cinq t-normes étudiées.

**Tableau 6-1: Propriétés satisfaites pour les cinq t-normes étudiées.**

t-normes	Propriété 1 du PPP	Propriété 2 du PPP	Continuité	Préservation des degrés 0
$T_1(a,b) = \text{Min}(a,b)$	Oui	Oui	Non	Oui
$T_2(a,b) = \text{Max}(0, a+b-1)$	Oui	Non	Oui	Non
$T_3 = ab$	Oui	Oui	Oui	Oui
$T_4(a,b) = \frac{ab}{1 + (1-a)(1-b)}$	Oui	Oui	Oui	Oui
$T_5(a,b) = \frac{ab}{a+b-ab}$	Oui	Oui	Oui	Oui

Le tableau ci-dessus fait un résumé des propriétés qui sont satisfaites par chacune des t-normes étudiées. Les deux premières t-normes sont moins intéressantes que les autres puisqu'elles ne satisfont pas toutes les propriétés. En général, les t-normes qui sont définies à l'aide de fonctions telles *Min* et *Max* ne respectent pas toutes les propriétés désirées du processus de révision; elles ne constituent donc pas des choix très intéressants. Quoique la t-norme  $T_1$  semble ne pas constitué un bon choix pour des domaines infinis (continus), elle est pourtant très utile dans le cas ordinal fini où la propriété de continuité ne s'applique pas.

Les t-normes  $T_3$ ,  $T_4$  et  $T_5$  satisfont toutes les propriétés du processus de révision; il n'est pas étonnant qu'elles donnent les mêmes résultats car elles sont isomorphes. Elles constituent donc des choix très intéressants. Ces t-normes proviennent de la famille de t-normes définie par (Hamacher, 1975):

$$\frac{ab}{\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab)} \quad \gamma \in [0, \infty) \quad (6-32)$$

où  $\gamma = 1, 2$  et  $0$  donne  $T_3, T_4$  et  $T_5$ , respectivement. D'autres valeurs de  $\gamma$  devraient conduire à d'autres t-normes intéressantes, mais celles-ci seraient trop complexes inutilement.

Le choix d'une t-norme représente une difficulté apparemment importante lors de l'application du PPP; cependant, l'expérience nous a montré que le produit (t-norme  $T_3$ ) représente un choix significatif pour les experts du domaine concerné, d'autant plus que cette t-norme est relativement peu complexe.

## 6.6 Comparaison du PPP et du PBP

Dans cette section, on compare le Processeur possibiliste de prévisions (PPP) et le Processeur bayésien de prévisions (PBP) en présentant leurs avantages respectifs. Ceci devrait aider à choisir l'approche la plus appropriée pour un problème donné. Énumérons tout d'abord les principaux avantages du PPP (approche possibiliste) sur le PBP (approche probabiliste):

1. Avec l'approche possibiliste, il est relativement facile de modéliser l'incertitude car, selon le Principe de spécificité minimum, lorsqu'on a peu d'information il suffit de prendre des degrés de possibilités plus élevés. Par contre, avec l'approche bayésienne, la modélisation de l'incertitude avec des distributions de probabilités peu s'avérer difficile lorsqu'il y a peu d'information ou que le phénomène étudié est complexe. Le problème vient du fait qu'un modèle probabiliste est trop spécifique dans certain cas.
2. Avec le PPP, une solution analytique existe toujours alors qu'avec le PBP l'existence d'une solution analytique est limitée à des cas bien spécifiques (familles conjuguées de distributions). Pour remédier à ce problème avec le PBP, on doit avoir recours à des solutions numériques; ces solutions numériques sont beaucoup moins intéressantes d'un point de vue pratique que les solutions

analytiques, malgré les récents développements dans ce domaine qui réduisent cet inconvénient (Chib et Greenberg, 1995).

3. La cas où l'erreur de prévision varie en fonction des valeurs observées peut être traité directement avec le PPP (dans l'étape de construction de  $\pi(y|x)$ ; voir l'exemple précédent). Ce cas est problématique avec le PBP; on doit effectuer des transformations ou espérer que le modèle méta-gaussien (si utilisé) en tienne compte indirectement.
4. L'influence d'une valeur singulière (i.e., une observation qui se distingue des autres sans être nécessairement aberrante; en France, on utilise le terme « horsain » et en anglais le terme « outlier ») peut être très importante lors de l'estimation des paramètres d'une distribution de probabilités; la distribution résultante peut ainsi perdre une bonne part de sa signification. Avec l'approche possibiliste, l'influence d'une valeur singulière peut être limitée directement.
5. Un expert du domaine concerné peut être impliqué dans la phase de construction des distributions de possibilités; ce qui permet d'intégrer les connaissances de l'expert dans les modèles d'incertitude. Ceci est plus difficile à envisager avec l'approche bayésienne car il faudrait utiliser des probabilités subjectives, lesquelles sont difficiles à estimer par un expert; certaines méthodes permettent tout de même d'accomplir cette tâche (Cooke, 1991).

Discutons maintenant des désavantages du PPP (approche possibiliste) par rapport au PBP (approche probabiliste):

1. L'utilisateur doit choisir la t-norme qu'il trouve la plus appropriée pour un problème donné. Ce choix subjectif constitue un paramètre du PPP. Par contre, on peut guider ce choix en utilisant le Tableau 6-1 qui résume certaines caractéristiques de certaines t-normes. Évidemment, n'importe quelle autre t-norme peut être utilisée.
2. La signification du terme « possibilité » n'est pas universelle; ce terme possède une saveur subjective. Ainsi, il peut s'avérer difficile de travailler avec différents utilisateurs car l'interprétation d'un degré de possibilité peut varier d'une personne à l'autre. Pour palier à ce problème, on peut cependant utiliser une des

nombreuses méthodes d'agrégation de distributions de possibilités qui permettent de construire des distributions consensuelles. Notons que si on utilise les probabilités subjectives avec le PBP, on hérite aussi de ce désavantage.

3. Il n'existe pas de méthode systématique pour construire les distributions de possibilités avec le PPP. Avec le PBP, l'estimation des paramètres est relativement simple une fois que la forme de la distribution de probabilités a été choisie.
4. L'approche possibiliste est beaucoup moins connue que l'approche probabiliste. Ceci peut nuire considérablement à son acceptation par les experts du domaine concerné.

Notons qu'une tentative de solution au point 2 sera présentée dans le prochain chapitre où on proposera une interprétation particulière pour un degré de possibilité. D'autre part, dans le Chapitre 8, une méthodologie est proposée pour la construction de distributions de possibilités; ceci résout en partie le point 3 énoncé ci-dessus.



## **7 INTERPRÉTATION DU TERME *POSSIBILITÉ***

---

Jusqu'à présent on a effectué des traitements analytiques sur des distributions de possibilités sans se soucier de leur sémantique, de leur signification, de l'interprétation qu'on peut leur attribuer. Pour ce faire, on doit s'interroger sur la signification d'un *degré de possibilité*. Ce point est essentiel pour la mise en oeuvre d'applications en utilisant le PPP, car il sera alors nécessaire de construire des distributions de possibilités. L'objet de ce chapitre est de faire une revue sommaire des interprétations existantes du terme *possibilité* et d'en proposer une qui soit adéquate pour le traitement de l'incertitude dans les prévisions. Le Chapitre 8 est consacré à la présentation d'une méthodologie pour la construction des distributions de possibilités en tenant compte de l'interprétation adoptée.

Mentionnons qu'il n'existe pas en théorie des possibilités et, plus généralement, en théorie des sous-ensembles flous une interprétation qui soit acceptée universellement; plusieurs interprétations semblent coexister sans être contradictoires (Dubois et Prade, 1998). Ce point constitue une des principales faiblesses des méthodes basées sur les sous-ensembles flous, et c'est souvent sur ce point que ces méthodes sont attaquées (peut-être avec raison) par leurs détracteurs. Certains prétendent aussi que les méthodes basées sur la théorie des sous-ensembles flous ne constituent qu'une forme masquée de probabilité avec des règles de calcul simplifiées et injustifiées (Cheeseman, 1986; Cooke, 1991).

### **7.1 Revue des interprétations existantes**

On peut diviser en deux catégories les interprétations existantes du terme *possibilité*. D'une part, il y a celles qui sont fondées sur les probabilités et d'autre part, celle qu'on peut qualifier de purement subjectives. Une revue de diverses interprétations existantes est présentée par Dubois et Prade (1986b).

#### **7.1.1 Interprétations fondées sur les probabilités**

Dans certains cas, il peut y avoir plusieurs mesures de probabilité qui satisfont les contraintes d'un problème donné. Ainsi, il n'est pas possible d'en choisir une objectivement parmi cette famille de probabilités. Dubois et Prade (1992c) suggèrent alors de prendre le supremum de cette famille et de considérer le résultat comme une mesure de possibilité.

Certains auteurs perçoivent les fonctions de vraisemblance comme étant des distributions/mesure de possibilité (Natvig, 1983; Dubois et Prade, 1997). Dans cette perspective, il est difficile de voir quel est l'élément nouveau apporté par la théorie des possibilités et quel est son intérêt par rapport à la théorie des probabilités.

Hisdal propose une interprétation pour les degrés d'appartenance à un sous-ensemble flou (Hisdal, 1988a; 1988b; 1994). Cette interprétation est basée sur les probabilités fréquentistes. Pour la construction des modèles flous, on doit réaliser une série d'expériences qui consistent à interroger des gens.

Puisqu'une mesure de possibilité est un cas particulier des fonctions de croyance, on peut utiliser l'interprétation classique des fonctions de croyance en tenant compte de cette particularité (Dubois et Prade, 1985a).

### **7.1.2 Interprétations subjectives**

Discutons maintenant de quelques interprétations de nature subjective. La première peut être considérée comme étant physique: le terme *possibilité* est associé à la difficulté d'effectuer une certaine action ou à la facilité d'occurrence d'un événement. Par exemple, "Il est possible pour Jean de manger 12 oeufs".

Une autre interprétation consiste à considérer un événement comme étant possible s'il n'y a pas d'inconsistance. Par exemple, "Il est possible qu'il pleuve demain" ou "Il est possible que Jean aille à la pêche demain puisqu'il ne travaille pas".

On peut aussi voir la possibilité comme le degré d'incertitude d'une proposition induite par une imprécision dans le langage (Zadeh, 1965; 1978). Par exemple, la proposition "Jean est grand" induit un degré de possibilité pour chaque valeur possible pouvant être prise par la variable représentant la taille de Jean.

Finalement, la dernière interprétation consiste à voir la possibilité d'un événement comme le *degré de surprise potentielle* associé à cet événement (Shackle, 1969). C'est le degré de surprise auquel une personne aura à faire face si l'événement survient. En d'autres mots, cette interprétation purement subjective consiste à évaluer dans quel état se retrouvera une personne si l'événement survient effectivement. Une possibilité de 1 indique aucune surprise alors qu'une possibilité de 0 indique la surprise totale ou l'impossibilité.

## 7.2 Interprétation adoptée

Les événements qui nous concernent ici sont du type "la variable  $X$  prend la valeur  $x_0$ ". L'interprétation que l'on va adopter doit permettre de représenter la possibilité de tels événements. De plus, on ne s'intéresse pas aux interprétations basées sur les probabilités car elles ne sont généralement pas de nature subjective mais plutôt fréquentiste. L'interprétation que l'on adopte est celle du degré de surprise potentielle. Cette interprétation permet de traiter de manière subjective l'incertitude. Notons que la qualité des applications basées sur cette interprétation dépend de la bonne compréhension par les utilisateurs.

Il y a un aspect de l'interprétation retenue qui est particulièrement important: si on ne dispose d'aucune information sur un événement, alors rien concernant cet événement ne devrait nous surprendre (degré de possibilité de 1). Ceci est en accord avec le principe de spécificité minimum qui est à la base des présents travaux.

## 7.3 Implication sur le processus de décision

Le fait d'utiliser une interprétation subjective a des conséquences au niveau de la méthodologie adoptée pour traiter l'incertitude. Avec les méthodes statistiques classiques et en particulier avec l'approche bayésienne fréquentiste, l'utilisateur n'est pas impliqué dans la phase de construction des modèles d'incertitude; il n'en voit que le résultat final. Il ne peut pas porter un jugement critique sur les modèles d'incertitude dans le but de les modifier selon sa convenance. Avec l'approche proposée dans ce travail et l'interprétation retenue, l'utilisateur est impliqué du début à la fin lors du développement de l'application. Il doit participer activement à la phase de construction des modèles d'incertitude. Ces modèles doivent nécessairement représenter sa vision subjective de l'incertitude. Il est clair que l'utilisateur doit prendre une grande part de responsabilité car c'est son jugement qui est exprimé dans les modèles d'incertitude. À l'opposé, avec les méthodes objectives, ce sont les données observées qui dictent la construction des modèles d'incertitude; la responsabilité de l'utilisateur est limitée à la bonne utilisation des modèles d'incertitude *a posteriori*.

Étant donné le haut niveau de subjectivité impliquée, il est évident que la personne ou le groupe de personnes ayant construit les modèles *a priori* et dont la vision est exprimée dans ces modèles, sont les seules qui peuvent interpréter adéquatement les modèles *a posteriori*; il n'est pas possible de faire intervenir différentes personnes ayant une vision différente au début et à la fin du processus. Un avantage de l'approche proposée est que l'utilisateur est

obligé d'analyser et de modéliser l'information ainsi que son expertise; ceci peut lui permettre de mieux comprendre les modèles d'incertitude *a posteriori*.

En sommaire, l'approche proposée dans le présent travail nécessite pour sa mise en oeuvre une bonne communication, un bon dialogue entre l'hydrologue et le scientifique.

## 8 MÉTHODOLOGIE POUR LA CONSTRUCTION DE DISTRIBUTIONS DE POSSIBILITÉS

---

L'objet de ce chapitre est de proposer une méthodologie qui va permettre de construire les distributions de possibilités nécessaires à l'application du PPP, soient la distribution marginale  $\pi(x)$  et la distribution conditionnelle  $\pi(y|x)$ . Cette méthodologie est en accord avec l'interprétation retenue du terme *possibilité*, soit *degré de surprise potentielle*. L'approche proposée consiste à interagir avec l'utilisateur dans le but de construire étape par étape la distribution de possibilités qui est découpée en trois sections, soient la section montante, la section de niveau 1 (pas de surprise potentielle) et la section descendante. Étant donné que l'interprétation retenue du terme *possibilité* est de nature subjective, on ne s'étonnera pas de constater que l'approche proposée donne une part importante au jugement de l'utilisateur.

Certains auteurs ont proposé des méthodes permettant de construire des distributions de possibilités marginales (Dubois et Prade, 1980; Civanlar et Trussell, 1986; Duckstein et Heidel, 1988; Turksen, 1991), mais aucune de celles-ci n'est appropriée au présent contexte et n'est en accord avec l'interprétation retenue. De plus, le problème de construction d'une distribution de possibilités conditionnelle n'a pas été abordé dans ces travaux. En utilisant les résultats obtenus dans le domaine de la régression floue (Bárdossy et al, 1990; Bárdossy, 1990), il serait possible de construire des distributions de possibilités conditionnelles; cependant, cette approche ne permet pas d'interagir avec l'utilisateur et n'est donc pas compatible avec l'interprétation adoptée. Pour ces raisons, on propose dans ce qui suit une nouvelle méthode plus directe et transparente qui peut être utilisée avec le PPP.

### 8.1 Distribution de possibilités marginale

Le premier problème auquel on doit s'attaquer est la construction de distributions de possibilités marginales. La méthode proposée consiste à découper la distribution en trois sections distinctes (la section montante, la section de niveau 1 et la section descendante) et à interagir avec l'utilisateur pour la construction de chacune de ces sections (voir Figure 8.1). À cette fin, quatre étapes sont nécessaires. Les observations historiques ainsi que des statistiques descriptives sur celles-ci sont utilisées pour aider à la construction de chacune des sections.

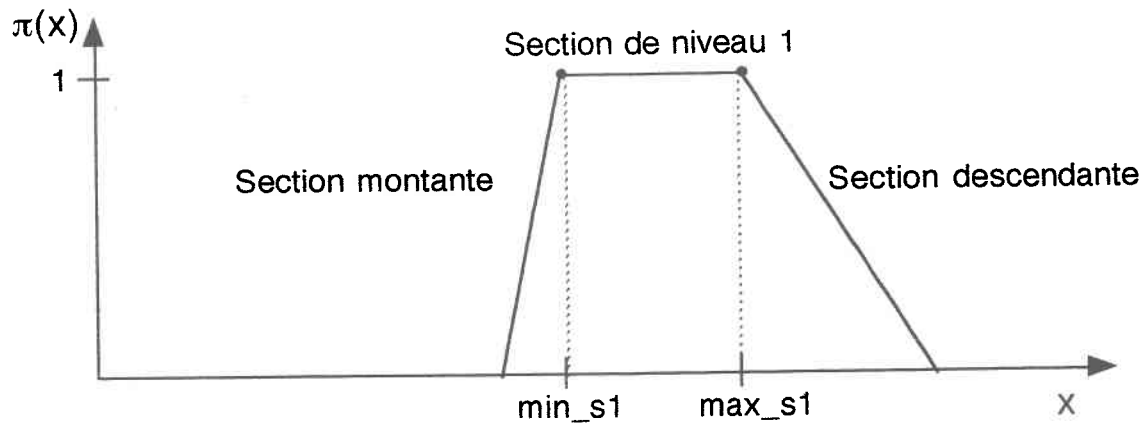


Figure 8.1: Les trois sections d'une distribution de possibilités.

### Étape 1: Section de niveau 1 (pas de surprise potentielle)

La section de niveau 1 correspond à l'intervalle ou au point où le niveau de surprise est nul, i.e., où le degré de possibilité est 1. Pour construire cette section, on fournit à l'utilisateur des statistiques descriptives sur la variable d'intérêt  $X$ . On peut par exemple fournir les statistiques suivantes:

1. Nombre d'observations historiques:  $N$
2. Maximum:  $Max$
3. Minimum:  $Min$
4. Moyenne:  $Moy$
5. Écart type:  $ET$

6. Écart moyen en valeur absolue:  $EMVA = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - Moy|}{N}$

7. Écart moyen pour les valeurs supérieures à la moyenne:  $EMSup = \frac{\sum_{x_i > Moy} (x_i - Moy)}{\sum_{x_i > Moy} 1}$

8. Écart moyen pour les valeurs inférieures à la moyenne:  $EMInf = \frac{\sum_{x_i < Moy} (Moy - x_i)}{\sum_{x_i < Moy} 1}$

9. Médiane:  $Med$

10. Écart moyen à la médiane en valeur absolue:  $EMMedVA = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - Med|}{N}$

11. Écart moyen à la médiane pour les valeurs supérieures à la médiane:

$$EMMedSup = \frac{\sum_{x_i > Med} (x_i - Med)}{\sum_{x_i > Med} 1}$$

12. Écart moyen à la médiane pour les valeurs inférieures à la médiane:

$$EMMedInf = \frac{\sum_{x_i < Med} (Med - x_i)}{\sum_{x_i < Med} 1}$$

Une fois que ces statistiques ont été présentées à l'utilisateur, on peut lui fournir aussi quelques suggestions d'intervalle. Si on ne désire pas tenir compte de l'asymétrie, alors des choix intéressants pour d'intervalle seraient:

1.  $[Min, Max]$  (Attitude très prudente)
2.  $[Moy-ET, Moy+ET]$
3.  $[Moy-EMVA, Moy+EMVA]$
4.  $[Med-EMMedVA, Med +EMMedVA]$

Par contre, si on désire tenir compte de l'asymétrie, alors des choix intéressants d'intervalle seraient:

1.  $[Moy-EMInf, Moy+EMSup]$
2.  $[Med-EMMedInf, Med +EMMedSup]$

En utilisant l'information ci-dessus en plus de certains représentations graphiques des observations historiques, l'utilisateur doit faire un choix. On utilisera la notation suivante pour l'intervalle qu'il choisit:  $[min\_sl, max\_sl]$ .

## **Étape 2: Section montante**

La section montante correspond à la partie de la distribution où le degré de possibilité passe de 0 à 1. Pour construire cette section, on fournit encore une fois à l'utilisateur des statistiques descriptives en utilisant cette fois seulement les valeurs de X qui sont inférieures à  $min\_s1$  qui a été déterminé à l'étape précédente:

1. Nombre d'observations historiques inférieures à  $min\_s1$ :  $N$

2. Minimum:  $Min$

3. Moyenne:  $Moy$

4. Écart type:  $ET$

5. Écart moyen en valeur absolue:  $EMVA = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - Moy|}{N}$

6. Médiane:  $Med$

7. Écart moyen à la médiane en valeur absolue:  $EMMedVA = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - Med|}{N}$

8. Écart moyen de  $min\_s1$ :  $EMSI = \frac{\sum_{i=1}^N (min\_s1 - x_i)}{N}$

Par la suite, on demande à l'utilisateur si la section montante doit être bornée à gauche ou non. Si tel est le cas (voir par exemple Figure 8.1), l'utilisateur doit fournir la borne à gauche que l'on notera  $borne\_inf$ , le degré de possibilité est 0 pour les valeurs inférieures ou égales à  $borne\_inf$ . On doit maintenant sélectionner une fonction pour représenter la section montante. Les deux situations suivantes doivent être considérées: (1) section montante bornée à gauche et (2) section montante non bornée à gauche.

### **Situation 1: Section montante bornée à gauche**

On propose ci-dessous quatre choix de fonction représentant les principales courbures possibles de la section montante (voir Figure 8.2). Notons qu'il existe d'autres fonctions intéressantes:

1. Fonction linéaire:  $y = ax + b$

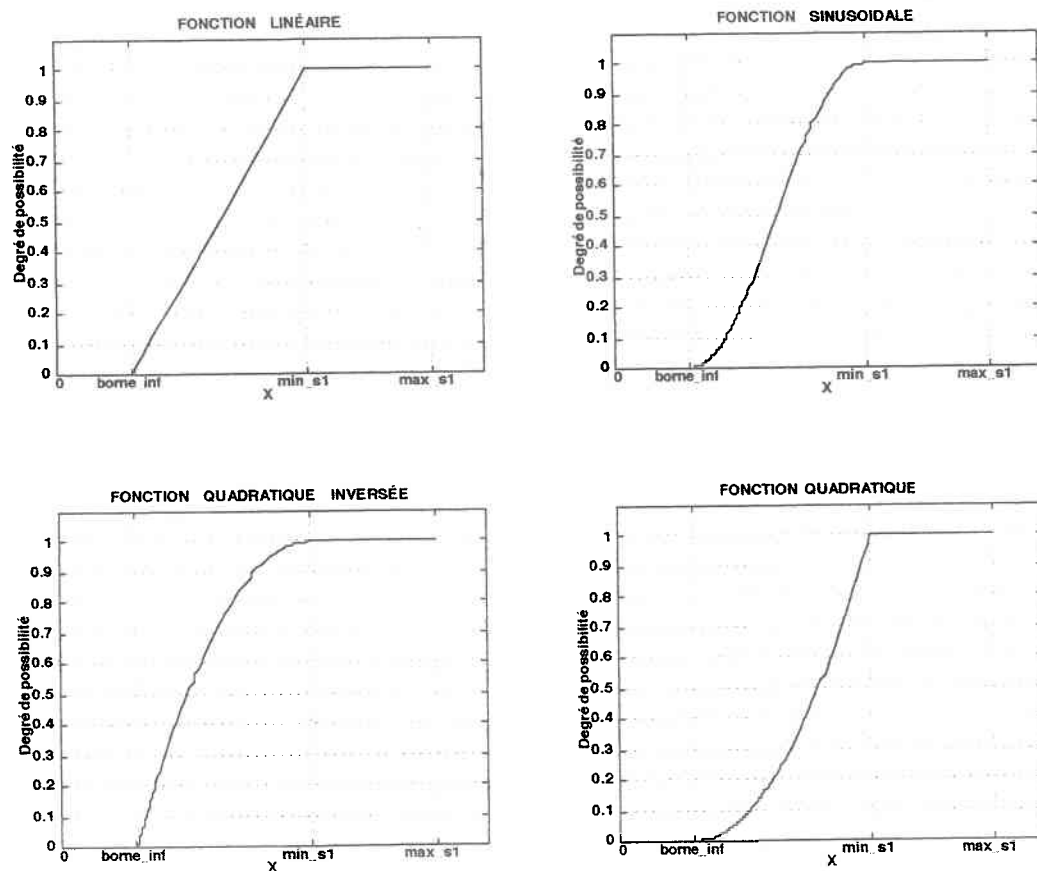
2. Fonction sinusoïdale:  $y = 1/2 + 1/2 \sin(ax + b)$

3. Fonction quadratique inversée:  $y = -a(x-b)^2 + 1 \quad a > 0$



4. Fonction quadratique:  $y = a(x-b)^2$   $a > 0$

Pour la fonction quadratique inversée (3<sup>e</sup> choix), le maximum de la fonction est atteint au point  $min\_s1$  et prend la valeur 1. De même, pour la fonction quadratique (4<sup>e</sup> choix), le minimum de la fonction est atteint au point  $borne\_inf$  et prend la valeur 0. Un fois que l'utilisateur a choisi la fonction qu'il considère la plus appropriée, tous les paramètres de la fonction choisie sont complètement déterminés (si son choix correspond à un des quatre choix suggérés ci-dessus).



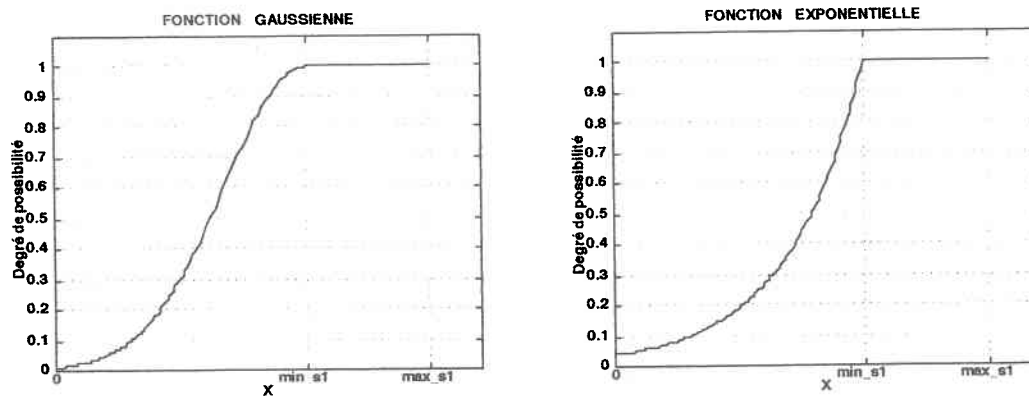
**Figure 8.2: Choix de fonction pour la section montante bornée à gauche.**

**Situation 2: Section montante non bornée à gauche**

On propose ici deux choix de fonction représentant deux courbures intéressantes lorsque la section montante n'est pas bornée à gauche (voir Figure 8.3):

1. Fonction Gaussienne:  $y = \exp(-a(x-b)^2)$   $a > 0$
2. Fonction exponentielle:  $y = \exp(a(x-b))$   $a > 0$

Un fois que l'utilisateur a choisi la fonction qu'il considère la plus appropriée, il doit par la suite (et contrairement à la situation précédente) choisir un point pivot par lequel passe la section montante. Ceci est nécessaire pour pouvoir déterminer les paramètres de la fonction. Par exemple, l'utilisateur peut spécifier la valeur de  $X$  correspondant à un degré de possibilité de 0.5. Une fois que ce point a été choisi les paramètres de la fonction peuvent être calculés.



**Figure 8.3: Choix de fonction pour la section montante non bornée à gauche.**

### Étape 3: Section descendante

La section descendante correspond à la partie de la distribution où le degré de possibilité passe de 1 à 0. Pour construire cette section, on fournit encore une fois à l'utilisateur des statistiques descriptives en utilisant cette fois seulement les valeurs de  $X$  qui sont supérieures à  $max\_sl$  qui a été déterminé à l'étape 1. Les statistiques proposées ici sont les mêmes que celles fournies lors de la construction de la section montante (étape 2); pour éviter la répétition, elle ne sont pas énumérées ici; il suffit de prendre les mêmes que pour l'étape 2 en remplaçant, par contre,  $min\_sl$  par  $max\_sl$ .

Une fois les statistiques présentées, on demande à l'utilisateur, comme à l'étape précédente, si la section descendante doit être bornée à gauche ou non. Si tel est le cas (voir par exemple Figure 8.1), l'utilisateur doit fournir la borne à droite que l'on notera  $borne\_sup$ ; le degré de

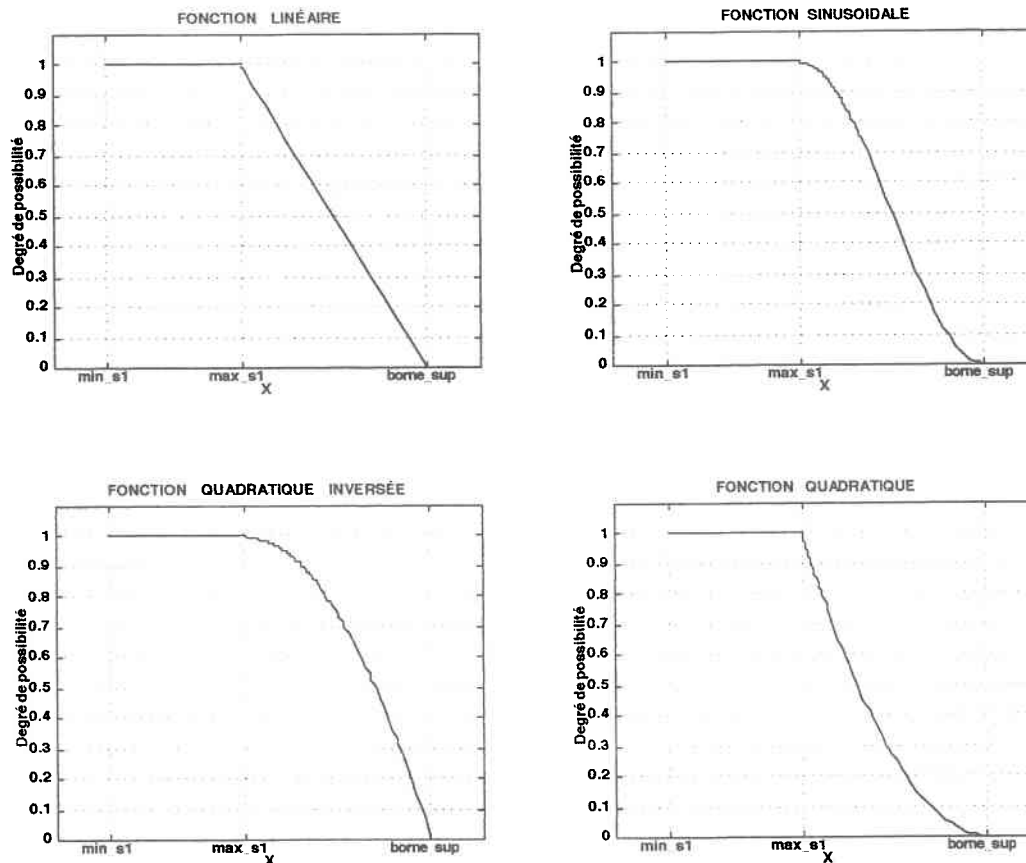
possibilité est 0 pour les valeurs supérieures ou égales à *borne\_sup*. On doit maintenant sélectionner une fonction pour représenter la section descendante. Les deux situations suivantes doivent donc être considérées: (1) section descendante bornée à droite et (2) section descendante non bornée à droite.

### **Situation 1: Section descendante bornée à droite**

On propose quatre choix de fonction représentant les principales courbures possibles de la section descendante (voir Figure 8.4). Ce sont les quatre mêmes choix que pour la section montante:

1. Fonction linéaire:  $y = ax + b$
2. Fonction sinusoïdale:  $y = 1/2 + 1/2 \sin(ax + b)$
3. Fonction quadratique inversée:  $y = -a(x-b)^2 + 1 \quad a > 0$
4. Fonction quadratique:  $y = a(x-b)^2 \quad a > 0$

Pour la fonction quadratique inversée (3<sup>e</sup> choix), le maximum de la fonction est atteint au point *max\_sl* et prend la valeur 1. De même, pour la fonction quadratique (4<sup>e</sup> choix), le minimum de la fonction est atteint au point *borne\_sup* et prend la valeur 0. Un fois que l'utilisateur a choisi la fonction qu'il considère la plus appropriée, tous les paramètres de la fonction choisie sont complètement déterminés (si son choix correspond à un des quatre choix suggérés ci-dessus).



**Figure 8.4: Choix de fonction pour la section descendante bornée à droite.**

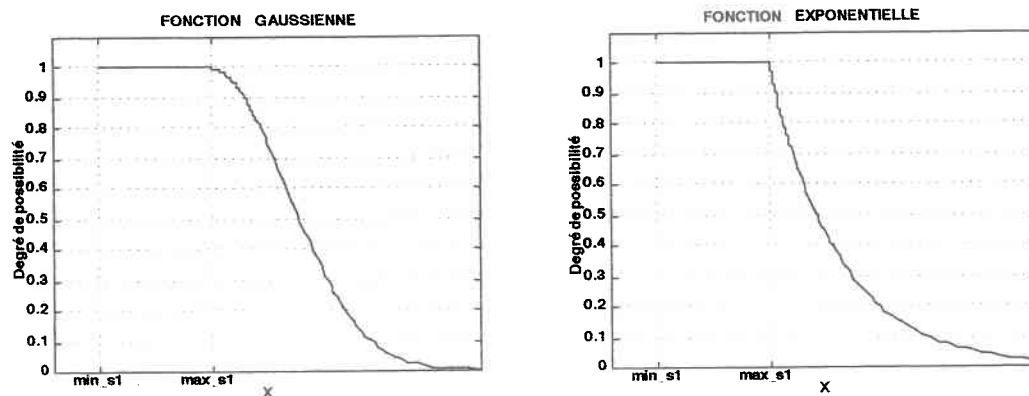
### **Situation 2: Section descendante non bornée à droite**

On propose ici deux choix de fonction (les mêmes que précédemment) représentant deux courbures intéressantes lorsque la section descendante n'est pas bornée à droite (voir Figure 8.5):

1. Fonction Gaussienne:  $y = \exp(-a(x-b)^2)$   $a > 0$
2. Fonction exponentielle:  $y = \exp(-a(x-b))$   $a > 0$

Un fois que l'utilisateur a choisi la fonction qu'il considère la plus appropriée, il doit par la suite choisir un point pivot par lequel passe la section descendante (comme dans le cas de la section montante). Ceci est nécessaire pour pouvoir déterminer les paramètres de la

fonction. Une fois que ce point a été choisi les paramètres de la fonction peuvent être calculés.



**Figure 8.5: Choix de fonction pour la section descendante non bornée à droite.**

#### **Étape 4: Validation**

La dernière phase de la méthodologie proposée pour construire des distributions de possibilités marginales consiste à valider la distribution obtenue jusqu'à présent, et ce, dans le but d'y apporter d'éventuelles modifications. Pour ce faire, on pose des questions à l'utilisateur pour vérifier si la distribution qui a été construite reflète bien les connaissances qu'il possède du phénomène étudié. Les questions que l'on peut poser à l'utilisateur peuvent prendre, par exemple, la forme suivante:

1. Soient  $x_1 < \min\_s1$  et  $x_2 > \max\_s1$  tels que  $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ . Est-il acceptable que ces deux valeurs de  $X$  ( $x_1$  et  $x_2$ ) aient le même degré de surprise potentielle (degré de possibilité)?
2. Soient  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $\pi(x_1) = 1$  et  $\pi(x_2) = 1/2$ . Est-il acceptable de dire que l'événement  $X = x_2$  est deux fois plus surprenant que l'événement  $X = x_1$ ?

Si l'utilisateur répond positivement à toutes les questions de ce type, alors aucun changement n'est nécessaire à la distribution construite aux étapes précédentes. Par contre, s'il répond négativement à une de ces questions, on doit retourner aux étapes précédentes et forcer

l'utilisateur à changer les choix qu'il a fait jusqu'à présent de sorte à pouvoir passer l'étape de validation. Les modifications éventuelles concerneraient:

1. Les bornes à gauche et à droite.
2. Les fonctions pour la section montante et descendante.
3. Les points par lesquels passent les fonctions si elles ne sont pas bornées.

Si après avoir changé la distribution on ne peut toujours pas passer l'étape de validation, alors il faut faire de nouveaux changements, et ce, jusqu'au temps où l'étape de validation peut être passée avec succès.

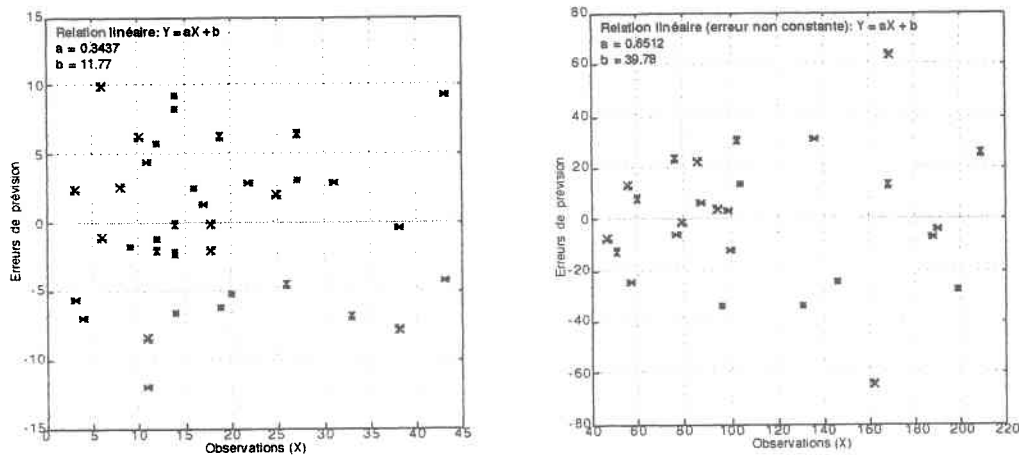
## 8.2 Distribution de possibilités conditionnelle

La construction de distributions de possibilités conditionnelles,  $\pi(y|x)$ , n'est pas une tâche facile tout comme dans le cadre probabiliste avec l'estimation de distributions de probabilités conditionnelles. On doit pour chaque valeur possible de  $X$  trouver une distribution pour  $Y$ ; ce qui représente une tâche à toute fin pratique impossible à réaliser directement. L'approche proposée ici consiste à effectuer une ou deux transformations (selon le cas) de sorte à pouvoir utiliser la méthode proposée dans la section précédente pour la construction de distributions marginales. Une fois que la distribution marginale a été obtenue dans l'espace transformé, on effectue les transformations inverses pour finalement obtenir la distribution conditionnelle dans l'espace original.

La première étape de l'approche proposée consiste à trouver une fonction quelconque, mais de préférence monotone, liant les variables  $X$  (l'observation) et  $Y$  (la prévision). À cette fin, des techniques classiques peuvent être utilisées telles la régression linéaire, la régression non paramétrique et l'ajustement de fonctions. Notons que cette fonction n'est pas nécessairement linéaire comme dans le cas du PBP. La décision finale quant au choix de la fonction revient à l'utilisateur. Appelons  $f(x)$  la fonction liant  $X$  et  $Y$ . Une fois que la fonction a été déterminée, on calcule pour chaque couple  $(x_i, y_i)$  les termes d'erreurs  $\varepsilon_i$  donnés par:

$$\varepsilon_i = y_i - f(x_i) \quad (8-1)$$

L'étape suivante consiste à vérifier si l'amplitude de l'erreur est constante ou plutôt fonction de  $X$ . Notons que l'amplitude de l'erreur peut être vue comme la variance de l'erreur; par contre, on utilisera pas cette terminologie pour éviter toute confusion possible avec la théorie des probabilités. Tout dépendant si l'amplitude de l'erreur est constante ou non, deux situations doivent être considérées (voir Figure 8.6 où les deux situations sont illustrées).



**Figure 8.6: Amplitude de l'erreur constante (à gauche) et non constante (à droite).**

**Situation 1: Amplitude de l'erreur constante**

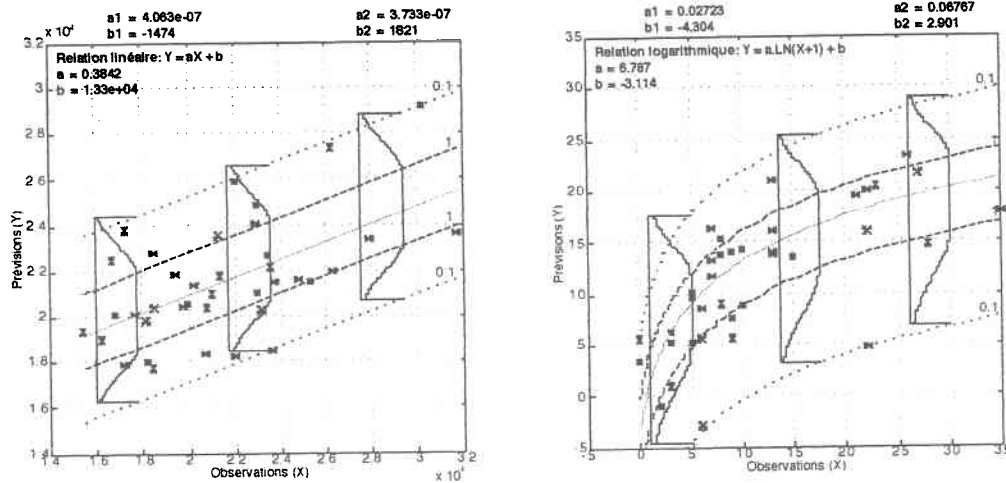
Lorsque l'amplitude de l'erreur est constante, on applique la méthode proposée précédemment pour construire des distributions de possibilités marginales (voir section précédente) sur le terme d'erreur  $\varepsilon$ . On obtient ainsi une distribution marginale pour  $\varepsilon$  que l'on note  $\pi_\varepsilon(\varepsilon)$ . Par la suite, on peut déterminer la distribution conditionnelle à l'aide du principe d'extension (cf. 5.2) de la théorie des possibilités:

$$\pi(y | x) = \text{Sup}_{\varepsilon} \{ \pi_\varepsilon(\varepsilon) | y = f(x) + \varepsilon \} \tag{8-2}$$

On obtient donc:

$$\pi(y | x) = \pi_\varepsilon(y - f(x)) \tag{8-3}$$

À la Figure 8.7, deux exemples de distributions de possibilités conditionnelles sont présentés. Dans ces exemples, l'amplitude de l'erreur est constante et la fonction Gaussienne (non bornée) a été utilisée pour les sections montante et descendante; à gauche, la relation entre  $X$  et  $Y$  est linéaire, alors qu'elle est logarithmique à droite.



**Figure 8.7: Exemples de distributions de possibilités conditionnelles avec amplitude de l'erreur constante: relation linéaire (à gauche) et relation logarithmique (à gauche).**

### **Situation 2: Amplitude de l'erreur non constante**

Si l'amplitude de l'erreur n'est pas constante, on doit effectuer une transformation sur le terme d'erreur pour éliminer la dépendance de  $X$ , i.e., pour faire en sorte que le terme d'erreur transformé ne soit plus dépendant de  $X$ . À cette fin, on divise l'ensemble des  $\varepsilon_i$  en deux parties:

- $\varepsilon_+$  pour les valeurs supérieures (ou égales) à zéro;
- $\varepsilon_-$  pour les valeurs inférieures à zéro.

Pour chacun de ces sous-ensembles on doit quantifier le taux de variation de l'amplitude de l'erreur. On permet que ce taux de variation soit différent pour les erreurs positives et pour les erreurs négatives. À cette fin, on détermine pour chaque ensemble une droite (fonction



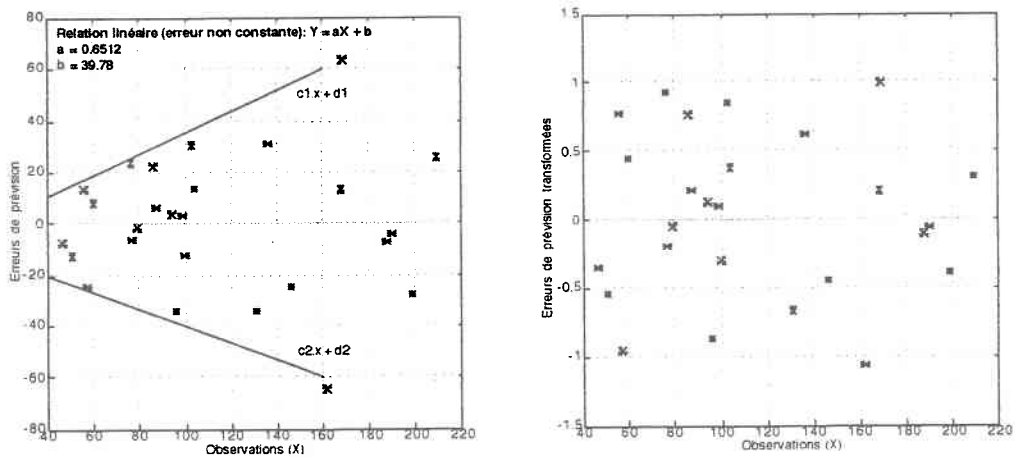
de  $X$ ) représentant le taux de variation de l'amplitude de l'erreur. On note les droites de la manière suivante:

- $c_1x + d_1$  pour les valeurs supérieures (ou égales) à zéro (sous-ensemble  $\varepsilon_+$ ).
- $c_2x + d_2$  pour les valeurs inférieures à zéro (sous-ensemble  $\varepsilon_-$ ).

Pour déterminer en pratique ces droites, on peut prendre les deux droites qui enveloppent le mieux possible les termes d'erreur (cf. Figure 8.8). Par la suite, on calcule l'ensemble des termes d'erreur transformés  $\varepsilon_T$  qui est donné par:

$$\varepsilon_T = \left\{ \frac{\varepsilon_+}{(c_1x + d_1)} \right\} \cup \left\{ \frac{\varepsilon_-}{-(c_2x + d_2)} \right\} \quad (8-4)$$

La Figure 8.8 illustre le processus utilisé pour transformer le terme d'erreur.



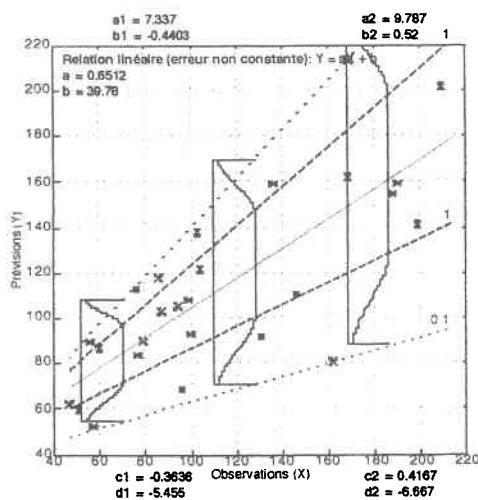
**Figure 8.8: Transformation de l'erreur pour éliminer la dépendance sur  $X$ : terme d'erreur initial (à gauche) et terme d'erreur transformé (à droite).**

Un fois que l'on a obtenu  $\varepsilon_T$  qui est indépendant de  $X$ , on applique la méthode proposée pour construire des distributions de possibilités marginales (voir section précédente) sur ce terme d'erreur transformé. On obtient ainsi une distribution marginale pour  $\varepsilon_T$  que l'on note

$\pi_{\varepsilon_T}(\varepsilon_T)$ . On peut alors déterminer la distribution conditionnelle en appliquant à deux reprises le principe d'extension de la théorie des possibilités; on obtient ainsi:

$$\pi(y|x) = \begin{cases} \pi_{\varepsilon_T}\left(\frac{y-f(x)}{c_1x+d_1}\right) & \text{si } y-f(x) \geq 0 \\ \pi_{\varepsilon_T}\left(\frac{y-f(x)}{-(c_2x+d_2)}\right) & \text{si } y-f(x) < 0 \end{cases} \quad (8-5)$$

À la Figure 8.9, un exemple d'une distribution de possibilités conditionnelle avec amplitude de l'erreur non constante est présenté. Dans cet exemple, la relation entre  $X$  et  $Y$  est linéaire et la fonction Gaussienne (non bornée) a été utilisée pour les sections montante et descendante.



**Figure 8.9: Exemple d'une distribution de possibilités conditionnelle avec amplitude de l'erreur non constante.**

## **9 APPLICATION SUR LES BASSINS DE SÉCAL POUR LES CRUES PRINTANIÈRES**

---

Le projet de recherche proposé est réalisé dans le cadre d'une collaboration entre l'INRS-Eau et la Société d'électrolyse et de chimie Alcan Ltée (SÉCAL) située à Jonquière au Saguenay-Lac-Saint-Jean. C'est pourquoi la méthodologie développée dans ce travail pour la construction de Systèmes de surveillance et de prévision des crues est illustrée par une application sur les bassins versants de cette compagnie. SÉCAL exploite sur ses bassins un important système hydroélectrique (capacité totale de 2687 MW) servant principalement à alimenter en électricité leur usine d'aluminium et quelques autres compagnies régionales. La compagnie a collaboré étroitement au projet car l'approche proposée est susceptible de retombées concrètes pour l'optimisation de la planification de la production hydroélectrique en période de crue printanière où les pertes sont actuellement importantes. Pour cette raison, on ne s'intéresse qu'aux crues printanières dans le cadre de cette application.

Les caractéristiques des crues (paramètres) qui intéressent particulièrement les hydrologues de SÉCAL et qui ont été étudiées dans le cadre du projet sont:

1. le volume total des apports non contrôlés (V);
2. la date de départ de la crue (DD);
3. la date de pointe de la crue (DP), et;
4. l'apport non contrôlé de pointe (P).

La méthodologie développée pour la construction de Systèmes de surveillance et de prévision des crues incluant le traitement de l'incertitude dans les prévisions par la théorie des possibilités (le PPP) a été appliquée à trois bassins de la compagnie, soient le bassin amont, le bassin aval et le bassin total. Trois cas particuliers ont été retenus pour une comparaison avec le Processeur bayésien de prévisions.

### **9.1 Aperçu du système hydroélectrique de SÉCAL**

Le système hydroélectrique de SÉCAL est composé de plusieurs bassins versants, réservoirs et centrales; les données sont obtenues par des réseaux hydro-météorologiques et nivométrique (SÉCAL, 1982). La superficie totale du bassin opéré par SÉCAL est de 73

000 km<sup>2</sup>. Ce bassin est découpé en plusieurs sous-bassins formant deux groupes: (1) le bassin amont (16 000 km<sup>2</sup>) situé plus au nord et (2) le bassin aval (57 000 km<sup>2</sup>) situé plus au sud. Le bassin total correspond à la somme des bassins amont et aval. Ces trois bassins sont considérés dans le cadre de ce travail. L'Annexe A fournit une description sommaire du système hydroélectrique de SÉCAL. La période printanière telle que définie par SÉCAL s'étend du 1<sup>er</sup> avril au 30 juin, alors que la période hivernale s'étend du 1<sup>er</sup> décembre au 31 mars.

## 9.2 Les crues printanières

### 9.2.1 Phénomène physique

Dans les régions septentrionales, la neige s'accumule au sol durant la saison hivernale et se compacte graduellement. La densité de la neige lors d'une précipitation est, en général, de l'ordre de 10%, tandis que vers la fin du mois de mars, elle se situe autour de 20-30%. Cette neige va mûrir et fondre au printemps lors de la période de dégel libérant ainsi une grande quantité d'eau dans un laps de temps relativement court pour donner la crue printanière.

Quoique les processus impliqués avant et lors de la crue printanière soient relativement complexes, tentons tout de même d'en tracer les grandes lignes. Avant que la crue ne puisse débiter proprement dit, il faut que le stock de neige au sol mûrisse. À cette fin, il doit accumuler de l'énergie en utilisant les moyens suivants: (1) la radiation solaire, (2) le réchauffement par l'air lorsque la température de l'air est au dessus du point de congélation (phénomène accentué par le vent) et (3) l'absorption des précipitations liquides. Le processus de mûrissement de la neige implique une transformation importante au niveau de la structure de la neige et une augmentation importante de sa densité. Après un certain temps, la quantité d'eau dans le stock de neige sera suffisante pour que ce dernier commence à en libérer. La première part d'eau qui est libérée est généralement absorbée par le sol. Une fois que le sol est saturé en surface, les ruissellements commencent et la crue débute si les conditions demeurent propices (pas de gel). Une fois que la crue est effectivement débutée, les apports non contrôlés augmentent très rapidement jusqu'à la pointe de la crue; il est alors presque impossible d'interrompre la crue, tout au plus, l'augmentation des apports non contrôlés peut être ralentie par un gel tardif.

La quantité d'eau qui est libérée dans les lacs et réservoirs durant la crue (appelée volume de la crue) dépend de plusieurs facteurs, en particulier, du stock de neige au sol; il est donc très

important d'en tenir compte lors de l'étude des crues printanières. L'information généralement la plus importante est l'équivalent en eau du stock de neige. Pour déterminer l'équivalent en eau de la neige sur un bassin, on mesure l'équivalent en eau à différents points sur le bassin et par interpolation on calcule une valeur moyenne sur tout le bassin. De cette valeur on peut déduire la quantité d'eau qui peut potentiellement s'écouler dans les rivières, lacs et réservoirs lors de la fonte. Bien sûr, une proportion importante de cette eau (tout dépendant des conditions météorologiques et des caractéristiques physiographiques du bassin versant) ne s'écoulera pas dans les rivières durant la période de crue en raison de l'absorption par le sol, l'infiltration souterraine et de l'évapotranspiration. Le rapport entre l'eau qui s'écoule et l'eau disponible durant la crue printanière (incluant l'équivalent en eau de la neige et les précipitations durant la saison printanière) peut varier énormément d'une année à l'autre. Par exemple, pour le bassin aval de SÉCAL, entre 1955 et 1994, ce rapport a varié de 49% à 90%, d'où la difficulté de prévoir le volume de la crue car aucune information ne permet d'estimer ce rapport. Deux années, pour lesquelles les observations hivernales sont similaires et pour lesquelles il est tombé la même quantité de pluie durant la crue, peuvent avoir des volumes de crue tout à fait différents. Ainsi, même si on était informé de la quantité d'eau qui va tomber sur le réservoir durant la période printanière, il ne serait pas possible d'estimer avec précision l'ampleur de la crue printanière.

### **9.2.2 Problématique de prévision**

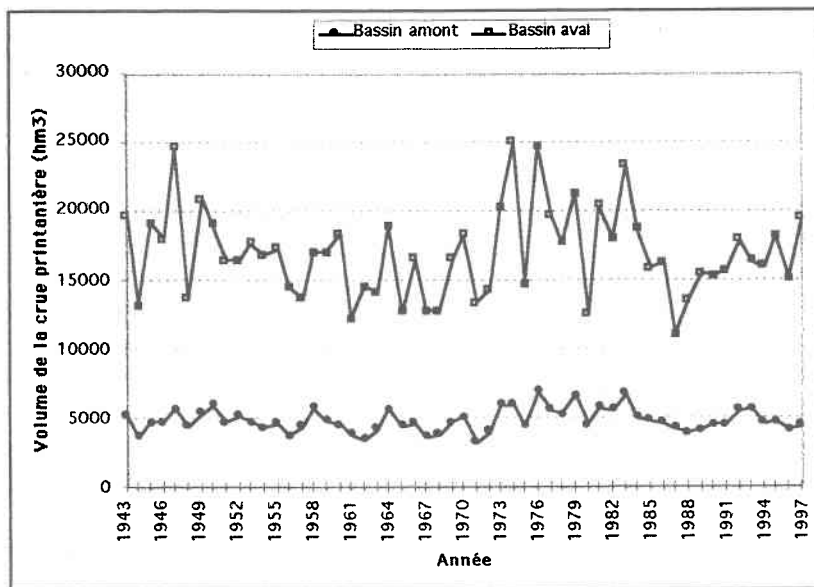
Le problème de prévision des crues printanière est complexe car les seules données disponibles pour effectuer les prévisions sont les observations hydro-météorologiques obtenues durant l'hiver et les relevés de neige. Le volume des précipitations durant la crue qui a une importance critique pour la détermination du volume de la crue n'est évidemment pas disponible. Notons aussi que les autres conditions météorologiques ont aussi une grande importance car elles influent directement sur l'évaporation et indirectement sur le taux d'absorption par le sol. On ne s'étonnera donc pas de constater que les systèmes de prévision utilisés pour les bassins de SÉCAL soient peu performants, d'où l'importance de tenir compte de l'incertitude présente dans les prévisions.

### **9.2.3 Données et statistiques**

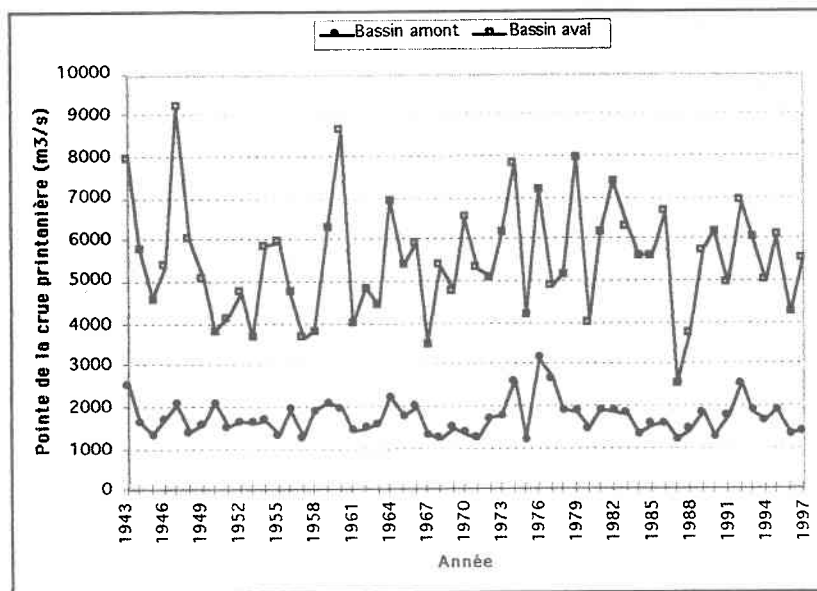
Cinquante-cinq (55) années de données sont disponibles sur les crues printanières, soit de 1943 à 1997. Par contre, le réseau météorologique n'est en place que depuis 1953 et le réseau nivométrique depuis 1955. On ne peut donc considérer que la période 1955 à 1997

(quarante-trois années (43) de données) pour les prévisions car les variables météorologiques et nivométriques sont requises.

Les Figures 9-1 et 9-2 illustrent graphiquement la variabilité des crues printanières d'une année à l'autre. La première figure présente les volumes des crues et la seconde les pointes des crues printanières.



**Figure 9.1:** Volumes des crues printanières de 1943 à 1997 sur les bassins amont et aval ( $\text{hm}^3 = 10^6 \text{ m}^3$ ).



**Figure 9.2: Pointes des crues printanières de 1943 à 1997 sur les bassins amont et aval ( $m^3/s$ ).**

Les Tableaux 9.1, 9.2 et 9.3 présentent quelques statistiques sur les crues printanières pour les trois bassins étudiés (de 1943 à 1997). On y retrouve l'apport non contrôlé (ANC) de pointe, le volume de la crue, la date de départ et la date de pointe. On comprendra l'importance de la variabilité du volume de la crue d'une année à l'autre puisque le maximum est plus du double du minimum pour les trois bassins. Notons aussi que la différence entre le maximum et le minimum pour le bassin aval seulement ( $13.9 \times 10^9 m^3$ ) est supérieure à la capacité totale d'emmagasinement utile du système, soit  $13.31 \times 10^9 m^3$ , d'où l'importance de bien gérer le système en période de crue.

**Tableau 9.1: Statistiques descriptives sur les crues printanières pour le bassin amont (1943-97).**

	<i>ANC de pointe</i> ( $m^3/s$ )	<i>Volume</i> ( $10^6 m^3$ )	<i>Date de départ</i>	<i>Date de pointe</i>
<i>Moyenne</i>	1741	4912	30 avril	21 mai
<i>Écart Type</i>	413	818	9 jours	11 jours
<i>Minimum</i>	1215	3392	31 mars	24 avril
<i>Maximum</i>	3177	6953	17 mai	14 juin

**Tableau 9.2: Statistiques descriptives sur les crues printanières pour le bassin aval (1943-97).**

	<i>ANC de pointe (m<sup>3</sup>/s)</i>	<i>Volume (10<sup>6</sup> m<sup>3</sup>)</i>	<i>Date de départ</i>	<i>Date de pointe</i>
<i>Moyenne</i>	5537	16699	17 avril	13 mai
<i>Écart Type</i>	1375	3219	8 jours	13 jours
<i>Minimum</i>	2558	11146	27 mars	13 avril
<i>Maximum</i>	9235	25043	4 mai	26 juin

**Tableau 9.3: Statistiques sur les crues printanières pour le bassin total (1943-97).**

	<i>ANC de pointe (m<sup>3</sup>/s)</i>	<i>Volume (10<sup>6</sup> m<sup>3</sup>)</i>	<i>Date de départ</i>	<i>Date de pointe</i>
<i>Moyenne</i>	7001	21909	17 avril	15 mai
<i>Écart Type</i>	1643	3921	8 jours	12 jours
<i>Minimum</i>	3716	15414	27 mars	16 avril
<i>Maximum</i>	11042	31666	4 mai	9 juin

### 9.3 Modélisation du Système de surveillance et de prévision (SSP) des crues

Dans cette section, on présente les choix qui ont été faits pour la construction du Système de surveillance et de prévision des crues sur les bassins de SÉCAL.

#### 9.3.1 Dates de départ, de pointe et de fin de la crue printanière

La date de départ (DD) de la crue printanière pour le bassin total est définie par SÉCAL comme le jour où la moyenne des apports non contrôlés (ANC) sur trois jours (hier,



aujourd'hui et demain) est supérieure au seuil de  $1000 \text{ m}^3/\text{s}$  et se maintient au-delà de ce seuil pour les trente (30) jours suivants. Pour les bassins amont et aval, la date de départ n'est habituellement pas considérée. Pour les besoins de l'étude, il a été décidé d'utiliser (après avoir effectué une analyse graphique) un seuil de  $280 \text{ m}^3/\text{s}$  pour le bassin amont. La date de départ sur le bassin aval est la même que celle pour le bassin total puisque c'est le bassin aval (situé plus au sud) qui est toujours responsable du départ de la crue sur le bassin total. On ne considérera donc pas la date de départ sur le bassin aval. Notons que le départ de la crue sur le bassin amont est toujours plus tardif que sur le bassin aval étant donné qu'il est situé beaucoup plus au nord.

La date de pointe de la crue correspond au jour où la moyenne des apports non contrôlés sur trois (3) jours (hier, aujourd'hui et demain) est la plus grande de toute la saison printanière. En ce qui concerne la date de fin de la crue printanière, on utilise tout comme SÉCAL une date fixe soit le 30 juin. Cette date peut paraître tardive mais ceci est justifié par le fait que le bassin amont est situé dans une région nordique où la fonte peut s'étaler jusqu'à la saison estivale. Il est important de mentionner que le choix de la date de fin de la crue n'a pas d'influence sur la méthodologie utilisée.

### 9.3.2 Stades et sous-stades

La durée du stade *montée* (période entre les dates de pointe et de départ) de la crue est en moyenne d'environ 3 semaines pour le bassin amont et un mois pour les bassins aval et total (voir tableaux précédents). Le départ de la crue étant plus tardif sur le bassin amont, on ne s'étonnera pas de constater que le stade *montée* est moins long pour le bassin amont que pour les autres bassins. Comme conséquence, il y a moins de sous-stades, en général, pour le bassin amont que pour les autres bassins. Le pas de temps choisi pour la détermination des sous-stades à l'intérieur du stade *montée* est d'une semaine (7 jours). On utilise 4 sous-stades à l'intérieur du stade *montée*. Ces sous-stades sont appelés *ssm1*, *ssm2*, *ssm3* et *ssm4*. Notons qu'il se peut qu'une année donnée il y ait moins de 4 sous-stades (lorsque la durée du stade *montée* est de moins de 21 jours); dans ce cas, on ne considère tout simplement pas une telle année pour la période de prévision correspondant au sous-stade. À l'inverse, si pour une année donnée, on peut obtenir plus de 4 sous-stades, on ne considère tout simplement pas les sous-stades supplémentaires. Notons aussi que le dernier sous-stade peut être incomplet, i.e., qu'il peut comporter moins de 7 jours.

La durée du stade *descente* (période entre la pointe de la crue et le 30 juin choisi comme date de fin de la crue) est en moyenne d'environ un mois et demi (voir tableaux précédents). Le

pas de temps utilisé pour la détermination des sous-stades à l'intérieur du stade *descente* est de deux semaines (14 jours). On utilise 4 sous-stades à l'intérieur du stade *descente*. Ces sous-stades sont appelés *ssd1*, *ssd2*, *ssd3* et *ssd4*.

La Figure 9.2 donne le nombre d'années (sur un total de 43) ayant les sous-stades pour chaque bassin. Notons que plusieurs années possèdent moins de 4 sous-stades en particulier pour le bassin amont puisque les stades *montée* et *descente* sont souvent de durées inférieures à 22 ( $= 3 \times 7 + 1$ ) jours et 43 ( $= 3 \times 14 + 1$ ) jours, respectivement.

**Tableau 9.4: Nombre d'années ayant les sous-stades pour chaque bassin.**

<i>Sous-stade</i>	<i>Bassin amont</i>	<i>Bassin aval</i>	<i>Bassin total</i>
<i>ssm1</i>	43	43	43
<i>ssm2</i>	42	43	43
<i>ssm3</i>	30	38	40
<i>ssm4</i>	13	28	32
<i>ssd1</i>	43	43	43
<i>ssd2</i>	43	43	43
<i>ssd3</i>	35	41	40
<i>ssd4</i>	15	29	26

### 9.3.3 Périodes de prévision

Le premier jour de chaque sous-stade, on effectue des prévisions des paramètres de la crue. Ainsi, à chaque sous-stade va correspondre une période de prévision; on utilise la même notation pour ces périodes: *ssm1*, *ssm2*, *ssm3*, *ssm4*, *ssd1*, *ssd2*, *ssd3* et *ssd4*. De plus, avant le départ de la crue, on effectue des prévisions chaque jour pour lequel la condition pour le départ éventuel de la crue est satisfaite (cf. 2.3.2). Tous ces jours correspondent à la même période de prévision que l'on note *cond*.

Pour des raisons opérationnelles, SÉCAL requiert des prévisions de la crue printanière le 1<sup>er</sup> avril de chaque année. Par conséquent, cette période de prévision a aussi été considérée dans le cadre de cette application; elle est appelée *avr*.

### 9.3.4 Condition pour le départ éventuel de la crue printanière

L'objectif ici est de déterminer pour les bassins amont et total des conditions qui permettent lorsqu'elles sont satisfaites d'envisager le départ de la crue à l'intérieur d'un certain délai; par

exemple, on pourrait considérer un délai d'environ 5 jours. Ces conditions sont définies en fonction des variables hydro-météorologiques et des prévisions météorologiques pour les prochains jours. Étant donné que les prévisions météorologiques historiques ne sont pas disponibles, on doit les remplacer par les observations historiques. Pour la variable température, on a pris les observations historiques des 5 prochains jours pour remplacer les prévisions car on peut assez bien prédire sur cet horizon. Par contre, pour la variable précipitation, on a pris les observations historiques des 3 prochains jours seulement car au-delà de cet horizon, les prévisions sont imprécises. Pour construire les deux conditions nécessaires (une pour chacun des bassins), on a procédé à une analyse graphique de toutes les données, et on a effectué plusieurs essais jusqu'au temps où l'on parvienne à trouver une condition qui fonctionne bien et qui a un sens physique.

Pour le bassin amont, le condition suivante a été retenue:

*Température moyenne prévue pour les 5 prochains jours  $\geq 3^\circ$  Celsius*

*ET Apport non contrôlé  $\geq 160$  m<sup>3</sup>/s*

OU

*Apport non contrôlé  $\geq 200$  m<sup>3</sup>/s ET Jour  $\geq 110$  (19 avril)*

*ET Température moyenne prévue pour les 3 prochains jours  $\geq 0^\circ$  Celsius*

OU

*Total des précipitations de pluie d'hier, d'aujourd'hui et des prévisions pour les 3 prochains jours  $\geq 12$  mm ET Jour  $\geq 110$  (19 avril)*

*ET Température moyenne prévue pour les 3 prochains jours  $\geq 0^\circ$  Celsius*

La première partie de la condition représente le cas où la fonte a déjà débutée (légère augmentation des apports non contrôlés par rapport à l'hiver) et où les températures chaudes des prochains jours vont provoquer le départ effectif. La deuxième partie de la condition représente le cas où le départ de la crue est causé par des apports non contrôlés relativement élevés après le 19 avril (110<sup>e</sup> jour de l'année), donc pas trop tôt dans la saison printanière, combinés à l'absence de gel pour les prochains jours. Finalement, la troisième partie de la condition représente le cas où le départ de la crue est causé par des précipitations importantes après le 19 avril combinées à l'absence de gel pour les prochains jours.

Pour le bassin total, le condition suivante a été retenue:

*Température moyenne prévue pour les 5 prochains jours  $\geq 0^\circ$  Celsius*

*ET Apport non contrôlé  $\geq 600$  m<sup>3</sup>/s*

OU

*Apport non contrôlé  $\geq 700$  m<sup>3</sup>/s ET Jour  $\geq 100$  (9 avril)*

OU

*Total des précipitations de pluie d'hier, d'aujourd'hui et des prévisions pour les 3 prochains jours  $\geq 12$  mm ET Jour  $\geq 100$  (9 avril)*

La première partie de la condition représente le cas où le départ est causé par un début de fonte (augmentation des apports non contrôlés par rapport à l'hiver) combiné à l'absence de gel pour les prochains jours. La deuxième partie de la condition représente le cas où le départ de la crue est causé par des apports non contrôlés relativement élevés après le 9 avril. Finalement, la troisième partie de la condition représente le cas où le départ de la crue est causé par des précipitations importantes après le 9 avril.

Pour les bassins amont et total, ces conditions traduisent les causes principales du départ de la crue:

1. Des températures élevées;
2. Un seuil d'apport non contrôlé dépassé (signifiant que la fonte est déjà entamée),  
et;
3. Des précipitations liquides importantes.

Les causes 1 et 3 sont directement responsable du mûrissement du stock de neige (cf. 9.2.1). Le Tableau 9.5 permet d'analyser la fiabilité des conditions retenues pour différents délais avant le départ de la crue. Par exemple, pour un très court délai, soit 1 jour, la condition pour le bassin total est fiable à 100% et pour le bassin amont à 93%. Par contre, pour un délai plus long, soit 5 jours, ces niveaux de fiabilité sont de 56% et 53% seulement. Ces conditions sont intéressantes car dans la plupart des cas elles nous informent des départs des crues dans un délai raisonnable. Dans seulement 16% des cas (= 100 - 84), on est informé du départ dans un délai inférieur à 3 jours; c'est-à-dire pour seulement 7 années sur 43 (16% = 7/43). Rappelons que les prévisions météorologiques historiques n'étant pas disponibles, elle furent remplacées par les observations historiques; ainsi, les résultats présentés ici peuvent être meilleurs que ceux qu'on obtiendraient en réalité, c'est-à-dire en utilisant les prévisions si elles étaient disponibles.

**Tableau 9.5: Pourcentage d'années pour lesquels la condition pour le départ éventuel de la crue est satisfaite pour différents délais avant le départ de la crue.**

<i>Délai avant départ de la crue</i>	<i>Pourcentage d'années condition satisfaite Bassin amont</i>	<i>Pourcentage d'années condition satisfaite Bassin total</i>
<i>1 jour</i>	93%	100 %
<i>2 jours</i>	91%	98 %
<i>3 jours</i>	84%	84 %
<i>4 jours</i>	74%	67 %
<i>5 jours</i>	56%	53%
<i>6 jours</i>	37%	33%
<i>7 jours</i>	26%	28%
<i>8 jours</i>	14%	26%
<i>9 jours</i>	9%	16%
<i>10 jours</i>	2%	14%

### 9.3.5 Variables de prévision

À chaque période de prévision, on doit obtenir des prévisions des 4 paramètres de la crue. Il y a cependant quelques exceptions:

- Pour le stade départ éventuel, on effectue seulement des prévisions de la date de départ (pas des autres paramètres).
- Évidemment, n'on effectue plus de prévisions de la date de départ une fois qu'on a atteint le sous-stade *montée*.
- De plus, on n'effectue plus de prévisions de la date de pointe et de l'ANC de pointe une fois que le sous-stade *descente* a débuté.

On utilise la notation suivante pour les paramètres de la crue:

- *dd* = date de départ de la crue
- *dp* = date de pointe de la crue
- *p* = ANC de pointe de la crue

- $v$  = volume de la crue

Le Tableau 9.6 fournit une description des vingt et une (21) variables de prévision utilisées pour chaque bassin. Pour le bassin aval, il n'y a que dix-neuf (19) variables; en effet, les variables *dd\_cond* et *dd\_avr* ne sont pas considérées (cf. 9.3.1).

**Tableau 9.6: Description des variables à estimer.**

<i>Variable de prévision</i>	<i>Description</i>
<i>dd_cond</i>	Nombre de jours restants avant le départ de la crue lorsque la condition pour le départ éventuel de la crue est satisfaite.
<i>dd_avr</i>	Date de départ de la crue (jour julien). Prévision le 1 <sup>er</sup> avril.
<i>dp_avr</i>	Date de pointe de la crue (jour julien). Prévision le 1 <sup>er</sup> avril.
<i>p_avr</i>	Pointe de la crue (m <sup>3</sup> /s) = Apport non contrôlé de pointe (moyenne sur 3 jours). Prévision le 1 <sup>er</sup> avril.
<i>v_avr</i>	Volume de la crue (hm <sup>3</sup> /s). Prévision le 1 <sup>er</sup> avril.
<i>dp_ssm1</i>	Nombre de jours entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssm1</i> et la pointe de la crue.
<i>dp_ssm2</i>	Nombre de jours entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssm2</i> et la pointe de la crue.
<i>dp_ssm3</i>	Nombre de jours entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssm3</i> et la pointe de la crue.
<i>dp_ssm4</i>	Nombre de jours entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssm4</i> et la pointe de la crue.
<i>p_ssm1</i>	Pointe de la crue (m <sup>3</sup> /s) = Apport non contrôlé de pointe (moyenne sur 3 jours).
<i>p_ssm2</i>	Pointe de la crue (m <sup>3</sup> /s) = Apport non contrôlé de pointe (moyenne sur 3 jours).
<i>p_ssm3</i>	Pointe de la crue (m <sup>3</sup> /s) = Apport non contrôlé de pointe (moyenne sur 3 jours)
<i>p_ssm4</i>	Pointe de la crue (m <sup>3</sup> /s) = Apport non contrôlé de pointe (moyenne sur 3 jours).
<i>v_ssm1</i>	Apport non contrôlé journalier moyen entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssm1</i> et la fin de la crue.
<i>v_ssm2</i>	Apport non contrôlé journalier moyen entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssm2</i> et la fin de la crue.
<i>v_ssm3</i>	Apport non contrôlé journalier moyen entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssm3</i> et la fin de la crue.
<i>v_ssm4</i>	Apport non contrôlé journalier moyen entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssm4</i> et la fin de la crue.
<i>v_ssd1</i>	Apport non contrôlé journalier moyen entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssd1</i> et la fin de la crue.
<i>v_ssd2</i>	Apport non contrôlé journalier moyen entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssd2</i> et la fin de la crue.
<i>v_ssd3</i>	Apport non contrôlé journalier moyen entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssd3</i> et la fin de la crue.
<i>v_ssd4</i>	Apport non contrôlé journalier moyen entre le 1 <sup>er</sup> jour du sous-stade <i>ssd4</i> et la fin de la crue.

## 9.4 Prédiction des paramètres de la crue printanière

Cette section est consacrée à la présentation des systèmes de prédiction considérés dans le cadre du projet et à la sélection du meilleur système de prédiction pour chaque variable et chaque bassin.

### 9.4.1 Système de prédiction utilisé par SÉCAL

SÉCAL utilise actuellement et depuis plusieurs années des modèles de prédiction basés sur la régression linéaire multiple de type pas à pas (*forward*) pour l'estimation du volume, de la date de départ et de la pointe de la crue printanière (Gignac et al, 1990). Ces prévisions sont obtenues à des dates fixes, soient le 1<sup>er</sup> mars et le 1<sup>er</sup> avril. Plusieurs variables explicatives sont utilisées dans les modèles; elle sont définies en fonction des données météorologiques et hydrologiques hivernales et des relevés nivométriques de neige. Ces modèles sont occasionnellement mis à jour pour tenir compte des années récentes. Ainsi, il n'est pas possible d'obtenir une série de prévisions suffisamment longue pour permettre la modélisation des performances du modèle de prédiction actuellement utilisé. De plus, ces prévisions sont incomplètes car elle n'ont pas été émises aux périodes de prédiction requises dans le cadre de ce travail. Les prévisions historiques produites par SÉCAL ne peuvent donc pas être utilisées dans le cadre de ce travail.

Notons que des travaux plus récents ont été effectués par SÉCAL pour évaluer la méthode de régression linéaire multiple pour le problème de prédiction des crues estivales/automnales (Dupont, 1996).

### 9.4.2 Systèmes de prédiction utilisés dans le projet

Trois systèmes de prédiction ont été développés et implantés dans ce projet ont été utilisés pour générer les prévisions requises. Ils sont basés sur les méthodes suivantes:

- Régression linéaire multiple de type pas à pas (RLM).
- Régression non paramétrique, lissage par noyaux (RNP).
- Méthode des voisins les plus proches (VPP).

La régression linéaire multiple (RLM) de type pas à pas (*forward*) est une méthode classique et couramment utilisée en hydrologie. De plus, elle est présentement utilisée par la compagnie collaborant au projet (SÉCAL, 1982; Gignac et al, 1990; Dupont, 1996) pour la prédiction des crues. Notons que la RLM est aussi utilisée par *The National Weather Service*

and the Soil Conservation Service (aux États-Unis) pour la prévision du volume de la crue printanière (Krzysztofowicz et Watada, 1986).

Les deux autres systèmes de prévision sont basés sur des méthodes non paramétriques (Härdle, 1990). La régression non paramétrique (RNP) est une approche alternative à la RLM de plus en plus considérée en hydrologie. On utilise ici une variante de la méthode (cf. Annexe B) qui facilite son utilisation lorsqu'il y a plusieurs variables explicatives pouvant être corrélées entre elles. L'approche consiste à se projeter dans un espace de distances qui sert d'entrée à la RNP unidimensionnelle. Étant donné l'absence d'hypothèses conditionnant son utilisation, cette version de la RNP a été retenue.

La méthode des voisins les plus proches (cf. Annexe B) consiste à considérer seulement les  $K$  voisins qui sont les plus proches pour effectuer une prévision pour l'année courante. Elle nécessite une mesure de distance et un paramètre  $K$  représentant le nombre de voisins considérés; on a choisi  $K=3$  dans ce travail. Les détails sur cette méthode et sur la variante de la RNP utilisée sont données à l'Annexe B.

Les trois systèmes de prévision ont été implantés dans le langage MATLAB<sup>MD</sup> (Mathworks, 1995) qui a aussi été utilisé pour la simulation des prévisions (voir ci-dessous). Il est important de noter que l'architecture du SSP des crues est suffisamment générale pour permettre l'ajout de nouveaux systèmes de prévision au fur et à mesure qu'ils sont développés; aucune modification n'est nécessaire à la méthodologie proposée puisque les systèmes de prévision sont vus comme des boîtes noires.

Notons aussi que l'objectif primaire du projet de recherche n'est pas de développer le meilleur système de prévision possible mais plutôt de faire un usage optimal des prévisions émises par les systèmes de prévision. Il a été nécessaire de développer deux nouveaux systèmes de prévision (ceux basés sur les méthodes RNP et VPP) car ils étaient requis pour la simulation des prévisions. On a choisi ces deux méthodes (RNP et VPP) dans le but de vérifier leur valeur pour le problème de prévision des crues.

### 9.4.3 Simulation des prévisions

Étant donné que les prévisions historiques ne sont pas disponibles, la technique de ré-échantillonnage *jackknife* simple a été utilisée pour simuler les prévisions à partir de données observées. Cette technique consiste, pour un échantillon de  $N$  valeurs, à retirer une observation, à calibrer le système de prévision sur les  $(N-1)$  observations restantes et à



effectuer une prévision pour l'observation retirée. En répétant ce processus pour chaque observation, on obtient autant de prévisions qu'il y a d'observations historiques. La précision des prévisions obtenues de cette façon est représentative de la précision des prévisions émises par le système calibré sur toutes les données et utilisé en mode opérationnel. À partir de ces couples prévision-observation, on peut construire un modèle d'incertitude sur les prévisions.

La méthodologie proposée pour la surveillance et le suivi des crues sur les bassins de SÉCAL requiert une très grande quantité de prévisions car il y a plusieurs paramètres de la crue à prévoir à plusieurs périodes et il y a trois bassins. Pour les bassins amont, aval et total, il y a 21, 19 et 21 variables de prévision, respectivement. Ce qui fait un total de 61 types de prévision que l'on doit multiplier par le nombre de systèmes de prévision (3) pour ainsi obtenir 183 simulations de type *jackknife*. Cinq (5) années n'ont pas été utilisées pour la simulation des prévisions, mais plutôt pour des analyses de cas et une comparaison avec l'approche bayésienne; on dispose donc de 38 données historiques pour la calibration des systèmes de prévision.

#### **9.4.4 Variables explicatives pour les prévisions**

Dans cette section, on énumère, pour chaque période de prévision, les variables explicatives qui ont été utilisées pour construire les modèles de prévision. Ces variables sont définies d'après les données hydro-météorologiques hivernales, les relevés de neige et les prévisions météorologiques pour les 3 prochains jours seulement. Notons une fois de plus que les prévisions météorologiques n'étant pas disponibles, on a dû les remplacer par les données météorologiques observées. Ceci justifie le fait qu'on considère seulement les prévisions sur 3 jours alors qu'elles sont disponibles sur 7 jours; en effet, la fiabilité des prévisions au-delà de 3 jours est faible. Le choix des variables explicatives est basé sur l'expérience passée acquise en construisant des modèles de prévision pour les bassins de SÉCAL (Lapointe, 1996). L'expérience des hydrologues de SÉCAL a aussi été mise à profit.

##### **9.4.4.1 Prévision le 1<sup>er</sup> avril**

1. ANC total entre le 1<sup>er</sup> janvier et le 31 mars ( $\text{hm}^3$ ).
2. Précipitations de pluie entre le 1<sup>er</sup> décembre et le 31 mars (mm).
3. Précipitations totales entre le 1<sup>er</sup> décembre et le 31 mars (mm).
4. Équivalent en eau de la neige à la fin mars (cm).

#### 9.4.4.2 Prévision lorsque la condition pour le départ éventuel de la crue est satisfaite

1. ANC total entre le 1<sup>er</sup> janvier et le 31 mars (hm<sup>3</sup>).
2. Précipitations de pluie entre le 1<sup>er</sup> décembre et le 31 mars (mm).
3. Précipitations totales entre le 1<sup>er</sup> décembre et le 31 mars (mm).
4. Équivalent en eau de la neige à la fin mars (cm).
5. Degrés-jour cumulés (seuil=0) depuis le 1<sup>er</sup> mars (degrés Celsius).
6. Précipitations de pluie depuis le 1<sup>er</sup> mars (mm).
7. ANC total depuis le 1<sup>er</sup> avril (hm<sup>3</sup>).
8. ANC actuel (m<sup>3</sup>/s).
9. Température moyenne observée, moyenne sur les 3 derniers jours (degrés Celsius).
10. Précipitations de pluie observées les 3 derniers jours (mm).
11. Température moyenne prévue, moyenne sur les 3 prochains jours (degrés Celsius).
12. Précipitations de pluie prévues pour les 3 prochains jours (mm).

#### 9.4.4.3 Prévisions lors de la montée de la crue (sous-stades *ssm1*, *ssm2*, *ssm3* et *ssm4*):

1. ANC total entre le 1<sup>er</sup> janvier et le 31 mars (hm<sup>3</sup>).
2. Précipitations de pluie entre le 1<sup>er</sup> décembre et le 31 mars (mm).
3. Précipitations totales entre le 1<sup>er</sup> décembre et le 31 mars (mm).
4. Équivalent en eau de la neige à la fin mars (cm).
5. Degrés-jour cumulés (seuil=0) depuis le 1<sup>er</sup> mars (degrés Celsius).
6. Précipitations de pluie depuis le 1<sup>er</sup> avril (mm).
7. ANC total depuis le 1<sup>er</sup> avril (hm<sup>3</sup>).
8. Température moyenne prévue, moyenne sur les 3 prochains jours (degrés Celsius).
9. Précipitations de pluie prévues pour les 3 prochains jours (mm).
10. Date de départ de la crue (*dd*) (jour julien).

Pour tous les sous-stades du stade *montée* de la crue à l'exception du sous-stade *ssm1* (puisque'il n'y pas de jour écoulé depuis le départ) on utilise aussi les variables explicatives suivantes:

11. ANC actuel ( $m^3/s$ ).
12. ANC total depuis départ de la crue ( $hm^3$ ).
13. Précipitations de pluie depuis le départ de la crue (mm).
14. Température moyenne depuis le départ de la crue (degrés Celsius).

**9.4.4.4 Prévisions lors de la descente de la crue (sous-stades *ssd1*, *ssd2*, *ssd3* et *ssd4*):**

1. ANC total entre le 1<sup>er</sup> janvier et le 31 mars ( $hm^3$ ).
2. Précipitations de pluie entre le 1<sup>er</sup> décembre et le 31 mars (mm).
3. Précipitations totales entre le 1<sup>er</sup> décembre et le 31 mars (mm).
4. Équivalent en eau de la neige à la fin mars (cm).
5. Degrés-jour cumulés (seuil=0) depuis le 1<sup>er</sup> mars (degrés Celsius).
6. Précipitations de pluie depuis le 1<sup>er</sup> avril (mm).
7. ANC total depuis le 1<sup>er</sup> avril ( $hm^3$ ).
8. Température moyenne prévue, moyenne sur les 3 prochains jours (degrés Celsius).
9. Précipitations de pluie prévues pour les 3 prochains jours (mm).
10. ANC total depuis départ de la crue ( $hm^3$ ).
11. Précipitations de pluie depuis le départ de la crue (mm).
12. Température moyenne depuis le départ de la crue (degrés Celsius).
13. Date de départ de la crue (*dd*) (jour julien).
14. Date de pointe de la crue (*dp*) (jour julien).
15. Pointe de la crue (*p*) ( $m^3/s$ ).
16.  $dp - dd =$  nb de jours entre la date de départ et la date de pointe.

Pour tous les sous-stades du stade *descente* de la crue à l'exception du sous-stade *ssd1*, on utilise aussi la variable explicative suivante:

17. ANC actuel ( $m^3/s$ ).

**9.4.4.5 Utilisation des paramètres d'autres bassins comme variables explicatives**

Étant donné la corrélation qui existe entre les paramètres des différents bassins, il peut être avantageux d'utiliser comme variable explicative certains paramètres des autres bassins lorsque ceux-ci sont disponibles au moment de la prévision.

#### 9.4.4.5.1 Bassin amont

Pour les variables de prévision  $dp\_ssm1$ ,  $dp\_ssm2$ ,  $dp\_ssm3$  et  $dp\_ssm4$  sur le bassin amont, on utilise aussi comme variable explicative le paramètre suivant:

- Date de départ de la crue ( $dd$ ) sur le bassin total.

Pour les variables de prévision  $v\_ssd2$ ,  $v\_ssd3$  et  $v\_ssd4$  sur le bassin amont, on utilise aussi comme variable explicative le paramètre suivant (noter que l'on n'a pas  $v\_ssd1$  car la valeur de la variable explicative ci-dessous n'est pas toujours disponible au sous-stade  $ssd1$ ):

- ANC de pointe ( $p$ ) sur le bassin total.

#### 9.4.4.5.2 Bassin aval

Pour la variable de prévision  $v\_ssd4$  sur le bassin aval, on utilise aussi comme variable explicative le paramètre suivant (on ne peut pas utiliser cette variable pour les autres sous-stades car la valeur de cette variable n'est pas toujours connue au début de ces sous-stades):

- ANC de pointe ( $p$ ) sur le bassin amont.

#### 9.4.4.5.3 Bassin total

Pour la variable de prévision  $v\_ssd4$  sur le bassin total, on utilise aussi comme variable explicative le paramètre suivant:

- ANC de pointe ( $p$ ) sur le bassin amont.

### **9.4.5 Résultats des simulations des prévisions**

Pour chacun des trois bassins, on a simulé par la méthode *jackknife* les prévisions pour chacune des variables de prévision et avec chacun des trois systèmes de prévision. Pour présenter les résultats obtenus, on utilise comme indicateur de performance le coefficient de détermination de la régression linéaire ( $R^2$ ) entre les observations et les prévisions. Évidemment, plus ce coefficient est élevé, meilleur devrait être la performance du système de prévision. Les trois tableaux suivants présentent respectivement les résultats obtenus pour les bassins amont, aval et total. Il est important de noter que les  $R^2$  marqué d'un « \* » représentent un effet de bord de la méthode RNP utilisée avec la méthode *jackknife* lorsque le système de prévision est inutile; dans ce cas, la prévision émise est la moyenne des données. Ceci résulte en une relation très linéaire entre les observations et les prévisions mais avec une

pente très faible. Il ne faut donc pas considérer les valeurs marquées d'un « \* » comme étant bonnes, mais plutôt très mauvaises; seule une analyse graphique permet d'identifier cet effet de bord. Dans ces tableaux, certaines données ont été mises en gras pour indiquer les systèmes de prévision qui ont été retenus pour chacune des variables de prévision.

**Tableau 9.7: Résultats des simulations obtenues par la méthode jackknife sur le bassin amont: Coefficient de détermination de la régression linéaire ( $R^2$ ) entre les observations et les prévisions.**

<i>Variable de prévision</i>	<i>RLM</i>	<i>VPP</i>	<i>RNP</i>
<i>dd_cond</i>	0.42	0.56	<b>0.83</b>
<i>dd_avr</i>	0.12	0.02	0.08
<i>dp_avr</i>	0.07	0.00	0.02
<i>p_avr</i>	0.00	0.02	0.01
<i>v_avr</i>	<b>0.22</b>	0.06	0.14
<i>dp_ssm1</i>	0.16	0.10	0.04
<i>dp_ssm2</i>	<b>0.49</b>	0.41	0.46
<i>dp_ssm3</i>	<b>0.53</b>	0.38	0.48
<i>dp_ssm4</i>	<b>0.16</b>	0.00	0.72*
<i>p_ssm1</i>	0.06	0.02	0.01
<i>p_ssm2</i>	<b>0.16</b>	<b>0.18</b>	0.11
<i>p_ssm3</i>	0.13	0.08	<b>0.14</b>
<i>p_ssm4</i>	0.35	<b>0.32</b>	0.38
<i>v_ssm1</i>	<b>0.17</b>	0.02	0.01
<i>v_ssm2</i>	<b>0.05</b>	0.00	0.00
<i>v_ssm3</i>	<b>0.32</b>	0.03	<b>0.24</b>
<i>v_ssm4</i>	<b>0.61</b>	0.13	0.10
<i>v_ssd1</i>	<b>0.27</b>	0.26	0.29
<i>v_ssd2</i>	<b>0.40</b>	0.21	0.26
<i>v_ssd3</i>	<b>0.38</b>	0.19	0.28
<i>v_ssd4</i>	<b>0.98</b>	0.78	0.89

**Tableau 9.8: Résultats des simulations obtenues par la méthode jackknife sur le bassin aval: Coefficient de détermination de la régression linéaire ( $R^2$ ) entre les observations et les prévisions.**

<i>Variable de prévision</i>	<i>RLM</i>	<i>VPP</i>	<i>RNP</i>
<i>dd_cond</i>	n/a <sup>1</sup>	n/a	n/a
<i>dd_avr</i>	n/a	n/a	n/a
<i>dp_avr</i>	0.05	0.03	0.98*
<i>p_avr</i>	0.10	0.10	0.11
<i>v_avr</i>	<b>0.37</b>	0.20	<b>0.34</b>
<i>dp_ssm1</i>	0.10	0.04	0.03
<i>dp_ssm2</i>	<b>0.31</b>	0.13	0.18
<i>dp_ssm3</i>	<b>0.50</b>	0.32	0.45
<i>dp_ssm4</i>	0.61	0.56	<b>0.67</b>
<i>p_ssm1</i>	0.10	0.10	0.11
<i>p_ssm2</i>	<b>0.10</b>	0.10	0.11
<i>p_ssm3</i>	<b>0.37</b>	0.25	0.20
<i>p_ssm4</i>	<b>0.71</b>	0.52	0.60
<i>v_ssm1</i>	<b>0.29</b>	0.28	0.32
<i>v_ssm2</i>	<b>0.36</b>	0.17	0.23
<i>v_ssm3</i>	<b>0.31</b>	0.29	<b>0.38</b>
<i>v_ssm4</i>	0.14	0.18	<b>0.35</b>
<i>v_ssd1</i>	<b>0.36</b>	0.24	0.29
<i>v_ssd2</i>	<b>0.39</b>	0.08	0.25
<i>v_ssd3</i>	<b>0.64</b>	0.54	0.60
<i>v_ssd4</i>	<b>0.60</b>	0.40	0.48

<sup>1</sup> ne s'applique pas

**Tableau 9.9: Résultats des simulations obtenues par la méthode *jackknife* sur le bassin total: Coefficient de détermination de la régression linéaire ( $R^2$ ) entre les observations et les prévisions.**

<i>Variable de prévision</i>	<i>RLM</i>	<i>VPP</i>	<i>RNP</i>
<i>dd_cond</i>	0.37	0.59	<b>0.64</b>
<i>dd_avr</i>	0.04	0.00	0.00
<i>dp_avr</i>	0.08	0.10	0.10
<i>p_avr</i>	0.08	0.10	0.12
<i>v_avr</i>	<b>0.33</b>	0.09	0.18
<i>dp_ssm1</i>	0.09	0.05	0.01
<i>dp_ssm2</i>	<b>0.45</b>	0.36	0.33
<i>dp_ssm3</i>	<b>0.50</b>	0.33	0.48
<i>dp_ssm4</i>	<b>0.58</b>	0.26	0.34
<i>p_ssm1</i>	0.08	0.10	0.12
<i>p_ssm2</i>	0.08	0.10	<b>0.12</b>
<i>p_ssm3</i>	0.24	0.26	<b>0.28</b>
<i>p_ssm4</i>	<b>0.49</b>	0.29	<b>0.34</b>
<i>v_ssm1</i>	<b>0.27</b>	0.15	0.16
<i>v_ssm2</i>	<b>0.28</b>	0.03	0.14
<i>v_ssm3</i>	<b>0.32</b>	0.13	0.16
<i>v_ssm4</i>	<b>0.36</b>	0.09	0.23
<i>v_ssd1</i>	<b>0.29</b>	0.28	0.23
<i>v_ssd2</i>	<b>0.41</b>	<b>0.46</b>	0.41
<i>v_ssd3</i>	<b>0.64</b>	0.48	0.47
<i>v_ssd4</i>	<b>0.74</b>	0.64	0.60

#### 9.4.6 Sélection des systèmes de prévision

Pour chaque paramètre de la crue et variable de prévision, on doit sélectionner le meilleur système de prévision. À cette fin, on a analysé graphiquement (dans chacun des cas) les observations en fonction des prévisions tout en considérant le coefficient de détermination ( $R^2$ ). Une telle analyse graphique permet d'évaluer qualitativement la qualité de la relation entre les observations et les prévisions. D'autre part, sous l'hypothèse de linéarité, le  $R^2$  exprime la force de la relation linéaire; il est donc un bon indicateur de la qualité de la relation. On a pu ainsi identifier les systèmes de prévision dont les performances sont les meilleures. Le Tableau 9.10 présente les systèmes de prévision qui ont été sélectionnés pour

chacun des bassins. Pour certaines variables de prévision, plus d'un système de prévision offrent des performances intéressantes. Par contre, seulement le premier système de prévision indiqué dans ce tableau a été considéré dans le cadre de la présente étude.

**Tableau 9.10: Meilleur(s) système(s) de prévision pour chaque variable de prévision et chacun des bassins.**

<i>Variable de prévision</i>	<i>Bassin amont</i>	<i>Bassin aval</i>	<i>Bassin total</i>
<i>dd_cond</i>	RNP	n/a	RNP (AENC)
<i>dd_avr</i>	Aucun	n/a	Aucun
<i>dp_avr</i>	Aucun	Aucun	Aucun
<i>p_avr</i>	Aucun	Aucun	Aucun
<i>v_avr</i>	RLM	RLM-RNP	RLM
<i>dp_ssm1</i>	Aucun	Aucun	Aucun
<i>dp_ssm2</i>	RLM (LOG)	RLM	RLM (LOG)
<i>dp_ssm3</i>	RLM	RLM (LOG)	RLM (LOG)
<i>dp_ssm4</i>	RLM	RNP	RLM
<i>p_ssm1</i>	Aucun	Aucun	Aucun
<i>p_ssm2</i>	VPP-RLM	RLM	RNP
<i>p_ssm3</i>	RNP	RLM	RNP
<i>p_ssm4</i>	VPP (AENC)	RLM	RLM-RNP
<i>v_ssm1</i>	RLM (AENC)	RLM (AENC)	RLM
<i>v_ssm2</i>	RLM	RLM	RLM
<i>v_ssm3</i>	RLM-RNP	RNP-RLM	RLM
<i>v_ssm4</i>	RLM	RNP	RLM
<i>v_ssd1</i>	RLM (AENC)	RLM	RLM
<i>v_ssd2</i>	RLM (AENC)	RLM	VPP-RLM
<i>v_ssd3</i>	RLM (AENC)	RLM (AENC)	RLM
<i>v_ssd4</i>	RLM	RLM (AENC)	RLM

Pour les variables de prévision *dd\_avr*, *dp\_avr*, *p\_avr*, *dp\_ssm1* et *p\_ssm1*, aucun des trois systèmes de prévision n'offre des performances supérieures à la moyenne historique. Ainsi, le 1<sup>er</sup> avril, il n'est pas possible d'obtenir des prévisions acceptables de la date de départ, de la date de pointe et de la pointe de la crue. Le même argument s'applique pour la date de pointe et la pointe de la crue pour la période de prévision *ssm1*. C'est pourquoi ces variables de prévision ne sont plus considérées dans la suite de l'étude.



Dans le Tableau 9.10, les relations entre les observations et les prévisions qui ne sont pas linéaire ou dont l'amplitude de l'erreur n'est pas constante sont indiquées de la manière suivante:

- LOG signifie que la relation est logarithmique.
- AENC signifie que la relation est linéaire, mais que l'amplitude de l'erreur n'est pas constante.

Cette information sera utilisée pour construire les distributions de possibilités conditionnelles.

## 9.5 Construction des distributions de possibilités

### 9.5.1 Sommaire de l'entrevue avec les hydrologues de SÉCAL

Avant de procéder à la construction des distributions de possibilités, on a rencontré les hydrologues de SÉCAL afin de discuter de trois points:

1. Leur compréhension de l'interprétation adoptée du terme *possibilité*, soit *degré de surprise potentielle*.
2. La mise au point d'une méthode systématique pour construire les distributions de possibilités. Étant donné le nombre très élevé de distributions de possibilités à construire, il était préférable d'adopter une méthode systématique et de l'appliquer à tous les cas.
3. Le choix d'une norme triangulaire pour la combinaison des incertitudes.

#### 9.5.1.1 Interprétation de la notion de *possibilité*

La première étape de l'entrevue a été de discuter de l'interprétation *degré de surprise potentielle* et d'expliquer aux hydrologues de SÉCAL (un groupe constituée de quatre personnes) qu'il s'agit d'un concept subjectif et non objectif comme dans le cas des probabilités fréquentistes. Conséquemment, leur contribution dans la construction des modèles d'incertitudes est essentielle. On leur a expliqué qu'un degré de 0 signifie « la surprise totale » et qu'un degré de 1 signifie « pas de surprise du tout ». L'équipe SÉCAL a trouvé cette nouvelle approche intéressante et pertinente, et s'est montré très disposée à utiliser ce concept en vue de son application à leur système. Ils ont mentionné que cette approche ressemblait jusqu'à un certain point à leur vision de l'incertitude, en particulier en

ce qui concerne la possibilité d'avoir un ensemble de valeurs pour lesquelles il n'y pas de surprise du tout (degré de possibilité 1).

### 9.5.1.2 Construction de distributions de possibilités

La méthodologie proposée au Chapitre 8 pour la construction de distributions de possibilités marginales a été utilisée pour construire les distributions de possibilités *a priori*. Les hydrologues de SÉCAL ont fait les choix suivants:

1. Pour la construction de la section de niveau 1, ils ont voulu tenir compte de l'asymétrie et ont choisi pour  $[min_{s1}, max_{s1}]$  l'intervalle  $[Med-EMMedInf, Med+EMMedSup]$  (cf. 8.1). Cet intervalle a été utilisé dans tous les cas à l'exception des variables de prévision pour le nombre de jours avant le départ de la crue ( $dd_{cond}$ ) et le nombre de jours avant la pointe de la crue ( $dp_{ssm2}$ ,  $dp_{ssm3}$  et  $dp_{ssm4}$ ) pour lesquelles on a considéré l'intervalle  $[0, Med+EMedMSup]$ .
2. Pour la construction de la section montante, ils ont décidé de la prendre non bornée à gauche, et ils ont choisi la fonction Gaussienne. Par la suite, ils devaient déterminer un point par lequel la section montante passe. Ils ont choisi le point pivot ( $Min, 0.1$ ), i.e., qu'ils considéraient que le degré de surprise attaché au minimum historique était de 0.1; ce qui signifie que dans leur esprit, il serait très surprenant mais pas impossible (d'où le degré 0.1) de revoir le minimum historique un jour. Notons qu'il n'y a pas de section montante pour les variables de prévision  $dp_{ssm2}$ ,  $dp_{ssm3}$ ,  $dp_{ssm4}$  et  $dd_{cond}$  puisque la section de niveau 1 débute au point 0.
3. Pour la construction de la section descendante, ils ont décidé de la prendre non bornée à droite, et ils ont choisi une fois de plus la fonction Gaussienne. Par la suite, ils devaient déterminer un point par lequel la section descendante passe. Ils ont choisi le point pivot ( $Max, 0.2$ ), ce qui revient à dire que le degré de surprise attaché au maximum historique était de 0.2; ceci signifie qu'il considérerait assez surprenant (d'où le degré 0.2) de revoir le maximum historique un jour mais beaucoup moins surprenant que de revoir le minimum historique.

Pour la construction des distributions de possibilités conditionnelles, ils ont accepté le fait d'appliquer la même procédure sur le terme d'erreur (transformé au besoin).

### 9.5.1.3 Choix d'une norme triangulaire

Dans la dernière partie de l'entrevue, on a procédé à la sélection d'une norme triangulaire qui corresponde à la perception de l'équipe SÉCAL au sujet de la combinaison de l'incertitude représentée par des degrés de surprise. À cette fin, on a fait la petite mise en situation suivante: Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux événements non liés ensemble (ou indépendants) et soient  $\pi(E_1)$  et  $\pi(E_2)$  connus, i.e., les degrés de surprise de ces événements, on a demandé à l'équipe SÉCAL de fournir le degré de surprise associé à la conjonction des deux événements selon leur perception. On leur a présenté en premier lieu les cas limites des normes triangulaires, soient:

- $\pi(E_1, E_2) = \pi(E_2)$  si  $\pi(E_1) = 1$ .
- $\pi(E_1, E_2) = 0$  si  $\pi(E_1) = 0$ .

Ils ont aisément accepté ces règles fondamentales. Par la suite, on a vérifié s'ils acceptaient le fait que  $\pi(E_1, E_2) \leq \text{Min}(\pi(E_1), \pi(E_2))$ ; ce qui a été unanimement confirmé. Finalement, on leur a demandé de fournir le degré de surprise pour des valeurs intermédiaires de  $\pi(E_1)$  et  $\pi(E_2)$ ; ils ont rapidement adopté la règle multiplicative, i.e., le produit des deux degrés de surprise. On a donc choisi le produit comme norme triangulaire ( $T_3$ ); on se rappellera que cette norme triangulaire possède toutes les propriétés intéressantes qui ont été étudiées précédemment (Tableau 6-1).

### 9.5.2 Distributions *a priori*

On a procédé à la construction des distributions de possibilités *a priori* en utilisant la méthodologie adoptée lors de l'entrevue avec les hydrologues de SÉCAL. L'Annexe C fournit une représentation graphique des quarante et une (41) distributions de possibilités obtenues (14 pour chacun des bassins à l'exception du bassin aval qui en a 13). Notons que pour les variables de prévision  $p\_ssm2$ ,  $p\_ssm3$  et  $p\_ssm4$  la distribution *a priori* est la même. Sur ces graphiques,  $a_1$  et  $b_1$  sont les paramètres de la fonction Gaussienne pour la section montante et  $a_2$  et  $b_2$  sont les paramètres de la même fonction pour la section descendante. On a aussi indiqué le nombre d'observations historiques dans chacune des sections des distributions de possibilités.

### 9.5.3 Distributions conditionnelles

Pour la construction distributions de possibilités conditionnelles, on a utilisé la méthode décrite à la section 8.2. L'Annexe C fournit une représentation graphique des quarante sept (47) distributions conditionnelles obtenues (16 pour les bassins amont et total et 15 pour le bassin aval). On a eu besoin que de deux types de fonction pour exprimer la relation entre les observations et les prévisions, soient:

1. Fonction linéaire:  $Y = aX + b$
2. Fonction logarithmique:  $Y = a \ln(X+1) + b$

De plus, les cas où l'amplitude de l'erreur n'est pas constante correspondaient toujours à une relation linéaire. Ainsi, trois modèles pour les distributions de possibilités conditionnelles ont été nécessaires:

1. Linéaire avec amplitude de l'erreur constante.
2. Linéaire avec amplitude de l'erreur non constante.
3. Logarithmique amplitude de l'erreur constante.

Lorsque l'amplitude de l'erreur n'est pas constante, on fournit aussi sur les graphiques à l'Annexe C les paramètres des fonctions représentant le taux de variation de l'amplitude de l'erreur, soient  $c_1$  et  $d_1$  pour les erreurs négatives et  $c_2$  et  $d_2$  pour les erreurs positives (cf. 8.2).

## 9.6 Comparaison du PPP vs PBP

Dans cette section, on compare les distributions de possibilités *a posteriori* obtenues avec le Processeur possibiliste de prévisions (PPP) aux f.d.p. *a posteriori* obtenues avec le Processeur bayésien de prévisions (PBP). Pour les fins de la comparaison, on a utilisé trois variables de prévision nécessitant les trois types de modèle pour la distribution conditionnelle:

1. Le volume de la crue au 1<sup>er</sup> avril ( $v_{avr}$ ) sur le bassin total dont le modèle pour la distribution conditionnelle est linéaire avec l'amplitude de l'erreur constante.

2. Le nombre de jours entre le 1<sup>er</sup> jour du sous-stade *ssm2* et la pointe de la crue (*dp\_ssm2*) sur le bassin amont dont le modèle pour la distribution conditionnelle est logarithmique avec l'amplitude de l'erreur constante.
3. Le volume d'apport non contrôlé journalier entre le 1<sup>er</sup> jour du sous-stade *ssd4* et la fin de la crue (*v\_ssd4*) sur le bassin aval dont le modèle pour la distribution conditionnelle est linéaire avec l'amplitude de l'erreur non constante.

Ces variables de prévision ont été choisies pour les raisons suivantes:

- Les trois types de modèle pour la distribution conditionnelle sont utilisés.
- Il y a une variable de prévision pour chacun des trois bassins.
- Le système de prévision sélectionné dans chacun des cas a une performance acceptable.
- La variable de prévision *v\_avr* sur le bassin total est d'un grand intérêt pour SÉCAL.

### 9.6.1 Années pour la comparaison

Cinq années, soient 1967, 1974, 1975, 1993 et 1997, n'ont pas été utilisées pour évaluer la performance des systèmes de prévision par simulation de type *jackknife*. Ces années vont maintenant servir pour la comparaison du PPP et du PBP. Notons que ces années représentent assez bien les différents types de crues qui peuvent survenir (volume faible, moyen ou fort; départ lent ou rapide, etc.) Pour la variable de prévision *v\_ssd4*, seulement trois de ces cinq années (1974, 1975 et 1993) possèdent le sous-stade *ssd4*; ainsi, seulement trois cas au lieu de cinq pourront être analysés. Pour chacune des variables de prévision et chacune des années, on a obtenu une prévision en utilisant le système de prévision sélectionné. Cette prévision permet d'obtenir une distribution de possibilités *a posteriori* en utilisant le PPP et une f.d.p. *a posteriori* en utilisant le PBP. Les distributions de possibilités *a priori* utilisées pour cette comparaison sont présentées à l'Annexe C (cf. Figures C.11, C.23 et C.28) ainsi que les distributions de possibilités conditionnelles (cf. Figures C.52, C.66 et C.73).

### 9.6.2 Application du PBP

Pour appliquer le PBP, on doit déterminer la distribution *a priori* de la variable de prévision. Une étude précédente a montré que la loi log-normale à 2 paramètres représentait assez bien

le volume et la pointe des crues printanières pour les bassins de SÉCAL (Perreault et al, 1996). Pour confirmer ces résultats et trouver les distributions de probabilités pour les autres variables non étudiées dans le cadre de l'étude antérieure, on a utilisé le logiciel HYFRAN (Perron et al, 1997) développé dans le cadre de la Chaire industrielle en hydrologie statistique à l'INRS-Eau. Les distributions retenues sont:

- Pour  $v_{avr}$  sur le bassin total: Loi log-normale à 2 paramètres.
- Pour  $dp_{ssm2}$  sur le bassin amont: Loi log-normale à 3 paramètres.
- Pour  $v_{ssd4}$  sur le bassin aval: Loi log-normale à 2 paramètres.

Puisque les distributions *a priori* ne sont pas normales, on doit utiliser le modèle méta-gaussien (Kelly et Krzysztofowicz, 1994; 1995; 1996) pour l'application du PBP. Ce qui nécessite un estimé initial de la distribution des prévisions. En utilisant une fois de plus le logiciel HYFRAN, on a déterminé les distributions s'ajustant le mieux aux prévisions:

- Pour la prévision de  $v_{avr}$  sur le bassin total: Loi log-normale à 3 paramètres.
- Pour la prévision de  $dp_{ssm2}$  sur le bassin amont: Loi log-normale à 2 paramètres.
- Pour la prévision de  $v_{ssd4}$  sur le bassin aval: Loi log-normale à 2 paramètres.

### 9.6.3 Distributions *a posteriori* obtenus avec le PPP et le PBP

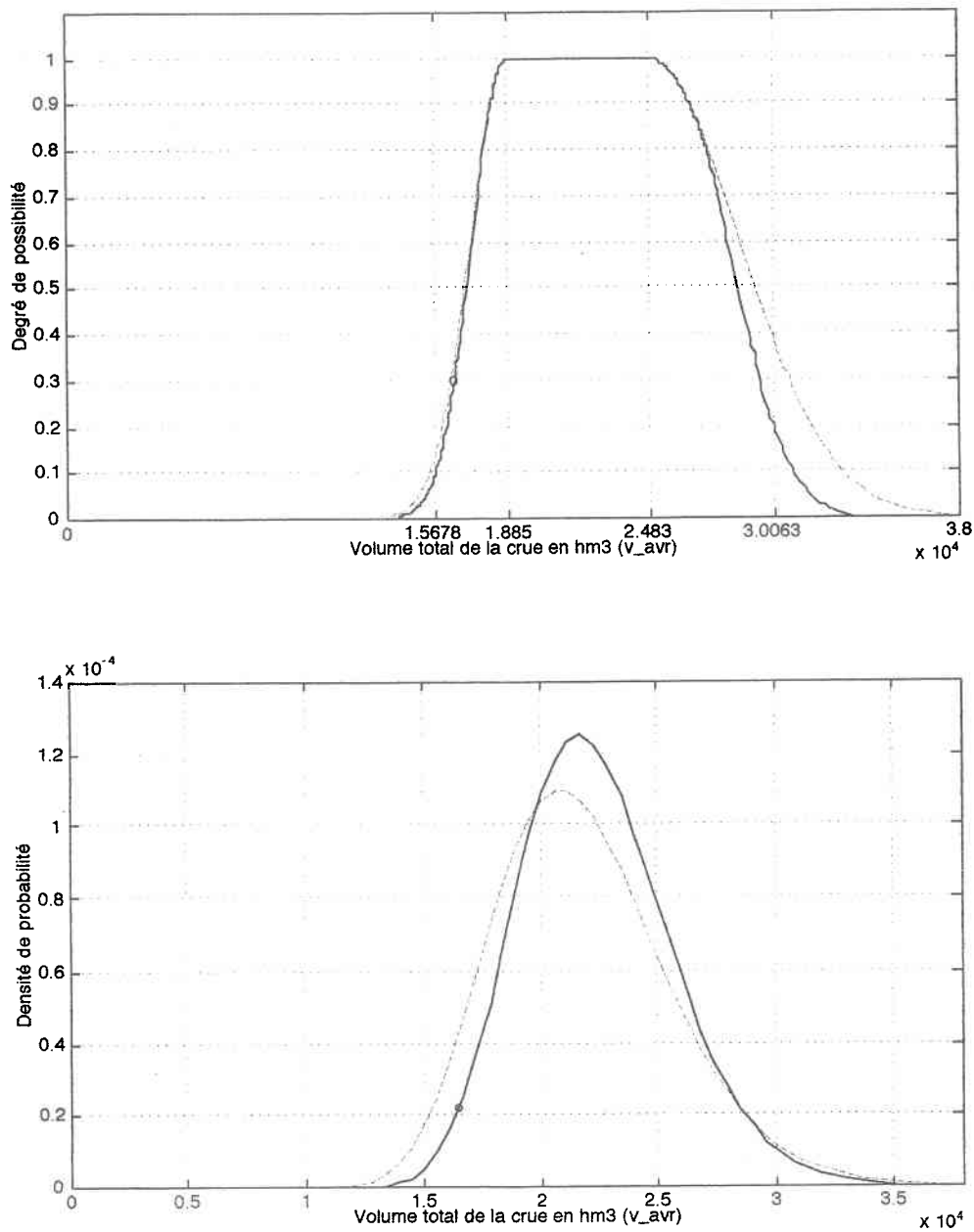
Pour chacune des trois variables de prévision considérées, on a comparé la distribution de possibilités *a posteriori* avec la f.d.p. *a posteriori*. De plus, on a comparé avec chacune des 2 approches les modèles *a priori* avec les modèles *a posteriori* pour voir dans quelle mesure la prévision permettait de diminuer l'incertitude.

#### 9.6.3.1 Volume de la crue au 1<sup>er</sup> avril sur le bassin total ( $v_{avr}$ )

Les distributions de possibilités et de probabilités *a posteriori* obtenues dans le cas du volume de la crue au 1<sup>er</sup> avril ( $v_{avr}$ ) sur le bassin total sont présentées sur les cinq figures qui suivent; chaque figure correspond à l'une des 5 années retenues pour fin de comparaison. Sur ces figures, les courbes pointillées représentent les modèles *a priori*. De plus, l'observation de l'année de la prévision est indiquée par un cercle. Pour l'année 1967 (Figure 9.3), le PPP a permis de diminuer que très légèrement l'incertitude, mais de façon appropriée; par contre, le PBP de prévision n'a pas diminué l'incertitude correctement

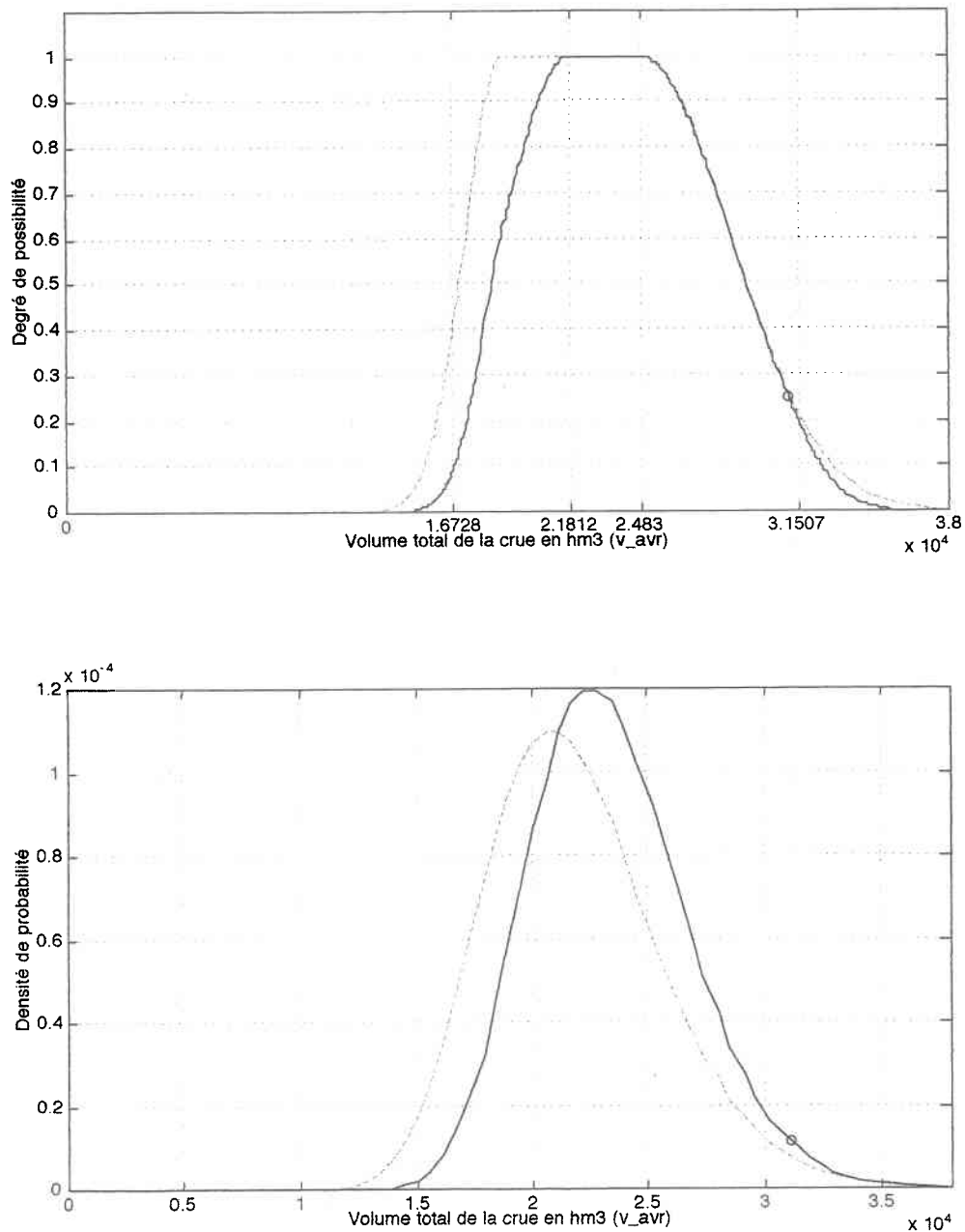
puisque'il a augmenté la probabilité pour les valeurs élevées alors que l'observation était faible. Pour l'année 1974 (Figure 9.4), les deux méthodes ont donné des résultats similaires et se sont comportés correctement en diminuant la possibilité/probabilité pour les valeurs faibles. Pour l'année 1975 (Figure 9.5), le comportement des deux méthodes paraît incorrect car la possibilité/probabilité pour les faibles valeurs diminue alors que l'observation est inférieure à la moyenne; ceci est dû au fait que la prévision émise est mauvaise par rapport à la performance passée du système de prévision; le reproche ne doit donc pas être attribué au PPP et au PBP mais plutôt au système de prévision. L'année 1993 (Figure 9.6) représente un cas très intéressant; la prévision est très faible ce qui a pour effet de diminuer beaucoup l'incertitude et même trop puisque l'observation tombe dans une zone où la possibilité (ou la f.d.p.) est faible. Finalement, on enregistre la meilleure performance du PPP pour l'année 1997 (Figure 9.7) puisque la possibilité de l'observation est de 1. Le PBP donne aussi un bon résultat pour cette année-là.

En sommaire, les deux méthodes (PPP et PBP) donnent des résultats assez voisins. Ce qui est notable c'est que l'incertitude n'a pas beaucoup diminué en général (à l'exception de l'année 1993); ceci est dû au fait que le système de prévision n'est pas très performant pour la variable de prévision  $v_{avr}$  sur le bassin total.

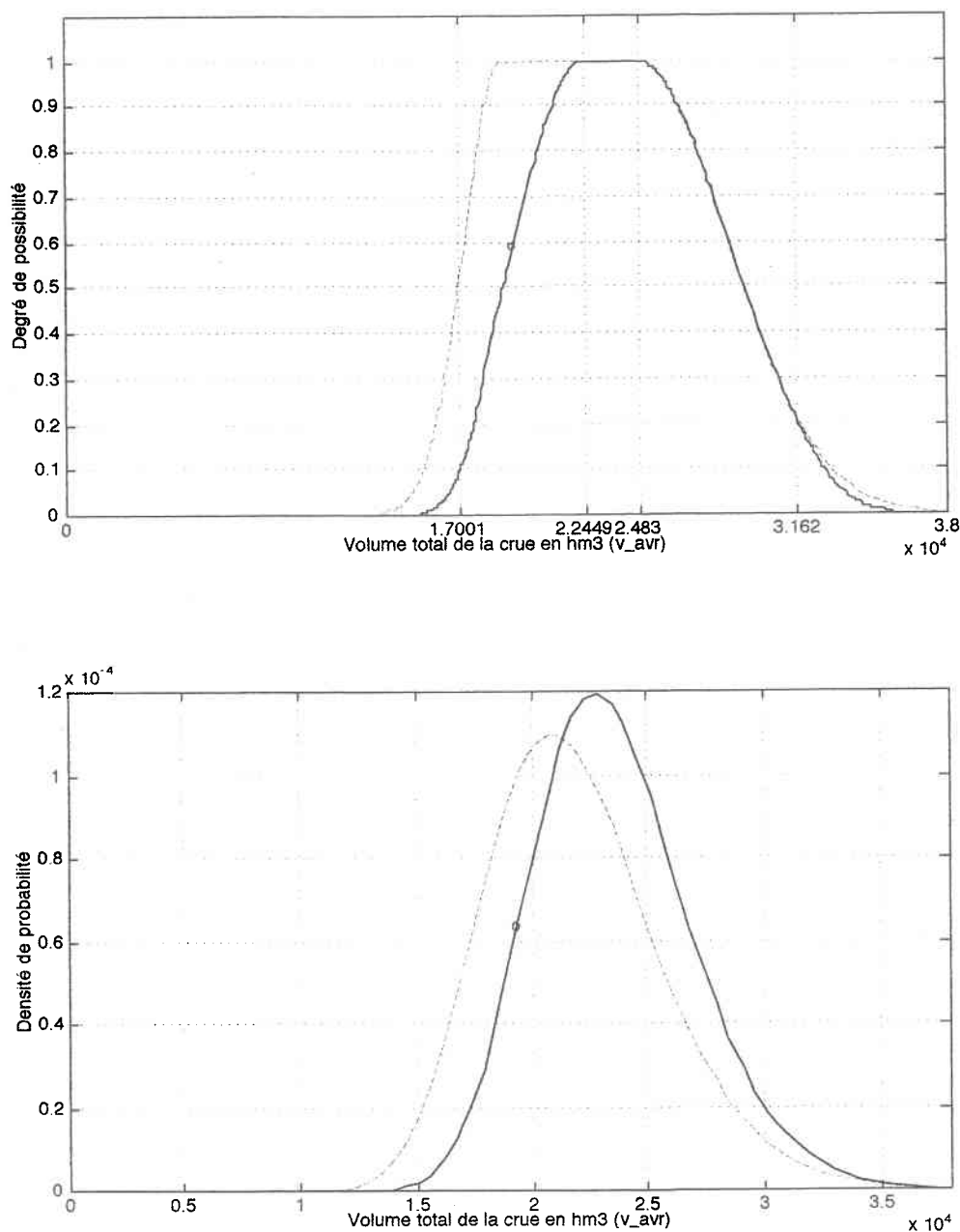


**Figure 9.3:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du volume total de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au 1<sup>er</sup> avril ( $v_{avr}$ ) sur le bassin total et la prévision de 1967, soit  $y = 22097 \text{ hm}^3$  (Observation =  $16523 \text{ hm}^3$ ).

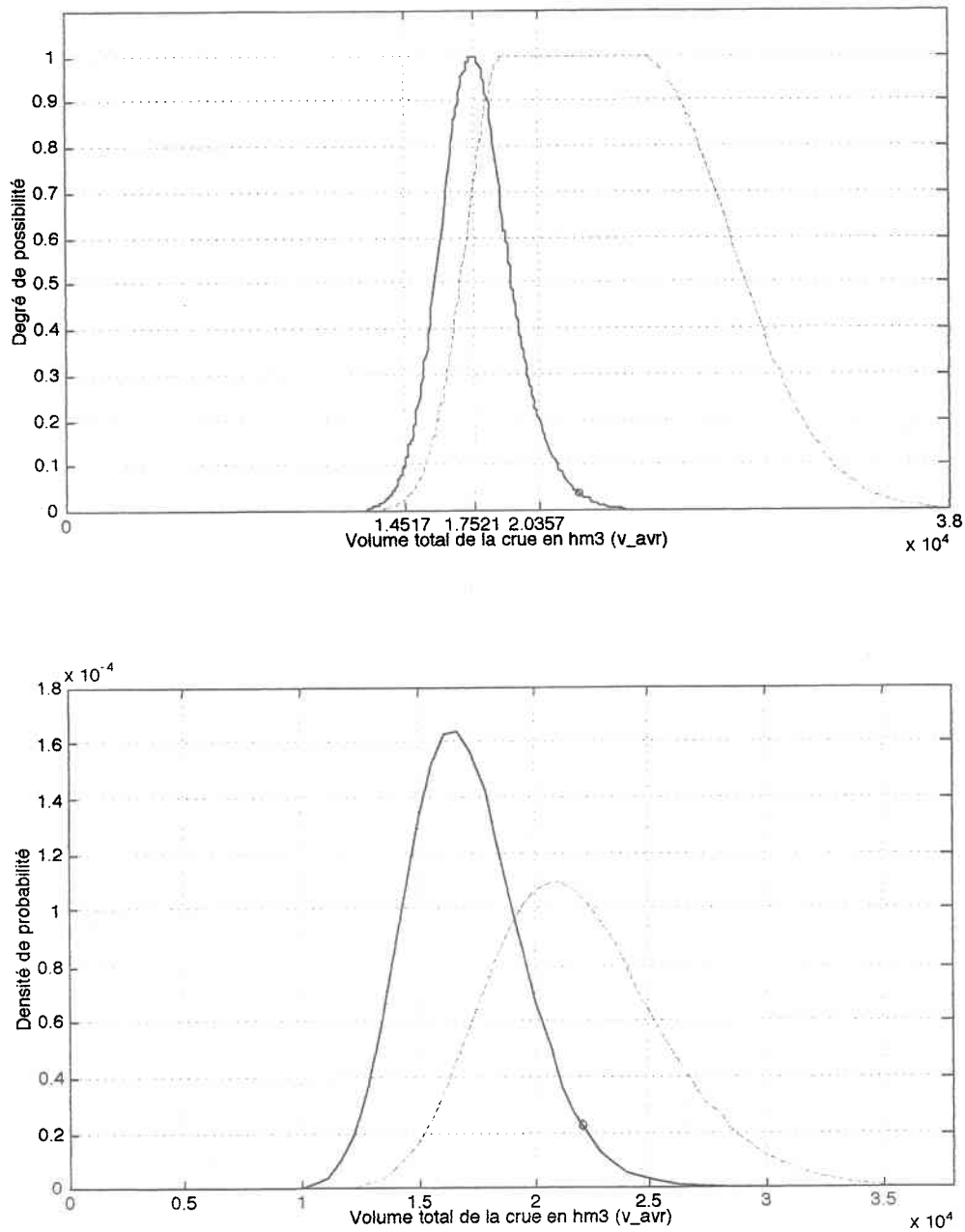




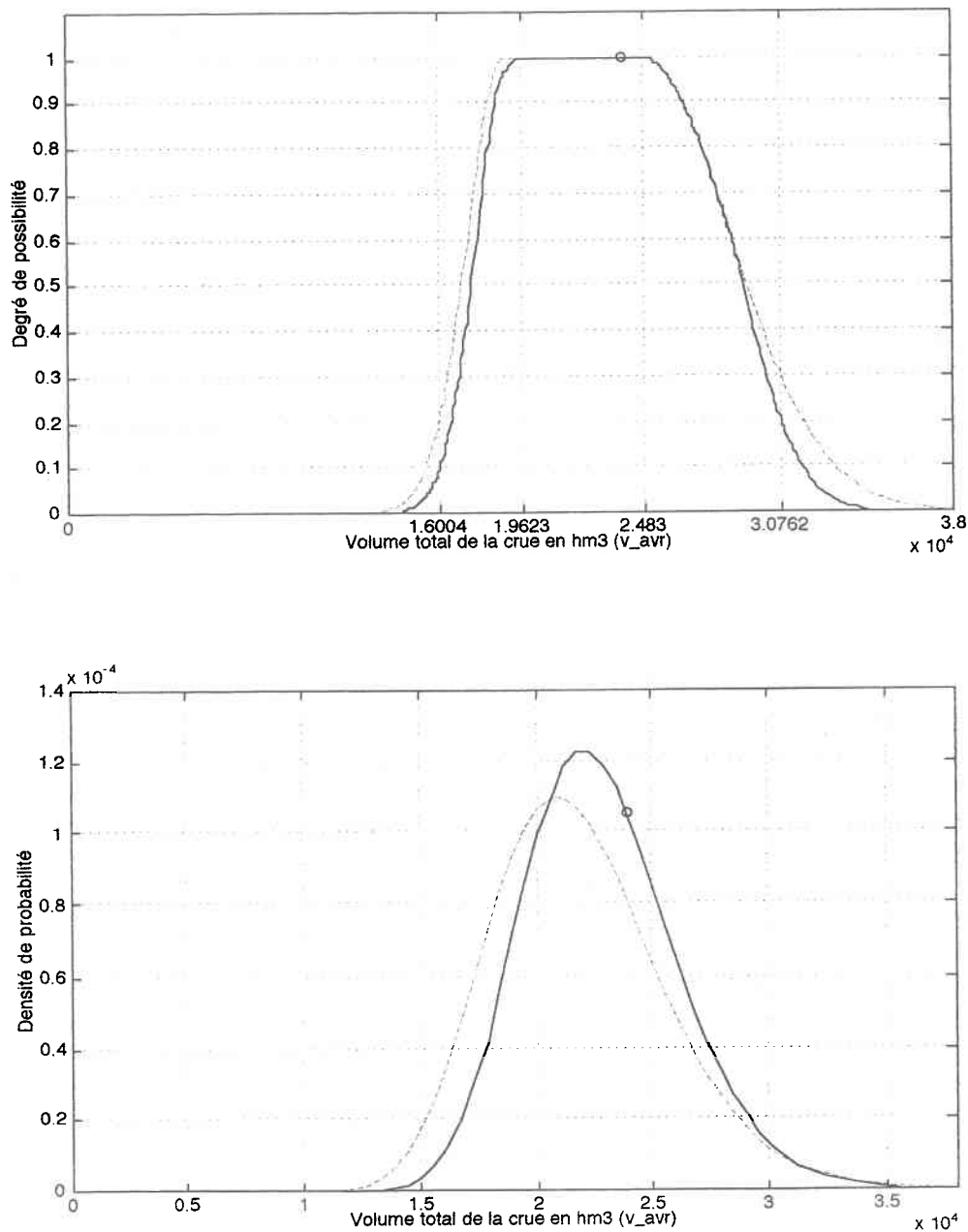
**Figure 9.4:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du volume total de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au 1<sup>er</sup> avril ( $v_{\text{avr}}$ ) sur le bassin total et la prévision de 1974, soit  $y = 23501 \text{ hm}^3$  (*Observation* =  $31114 \text{ hm}^3$ ).



**Figure 9.5:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du volume total de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au 1<sup>er</sup> avril ( $v_{\text{avr}}$ ) sur le bassin total et la prévision de 1975, soit  $y = 23746 \text{ hm}^3$  (*Observation* =  $19345 \text{ hm}^3$ ).



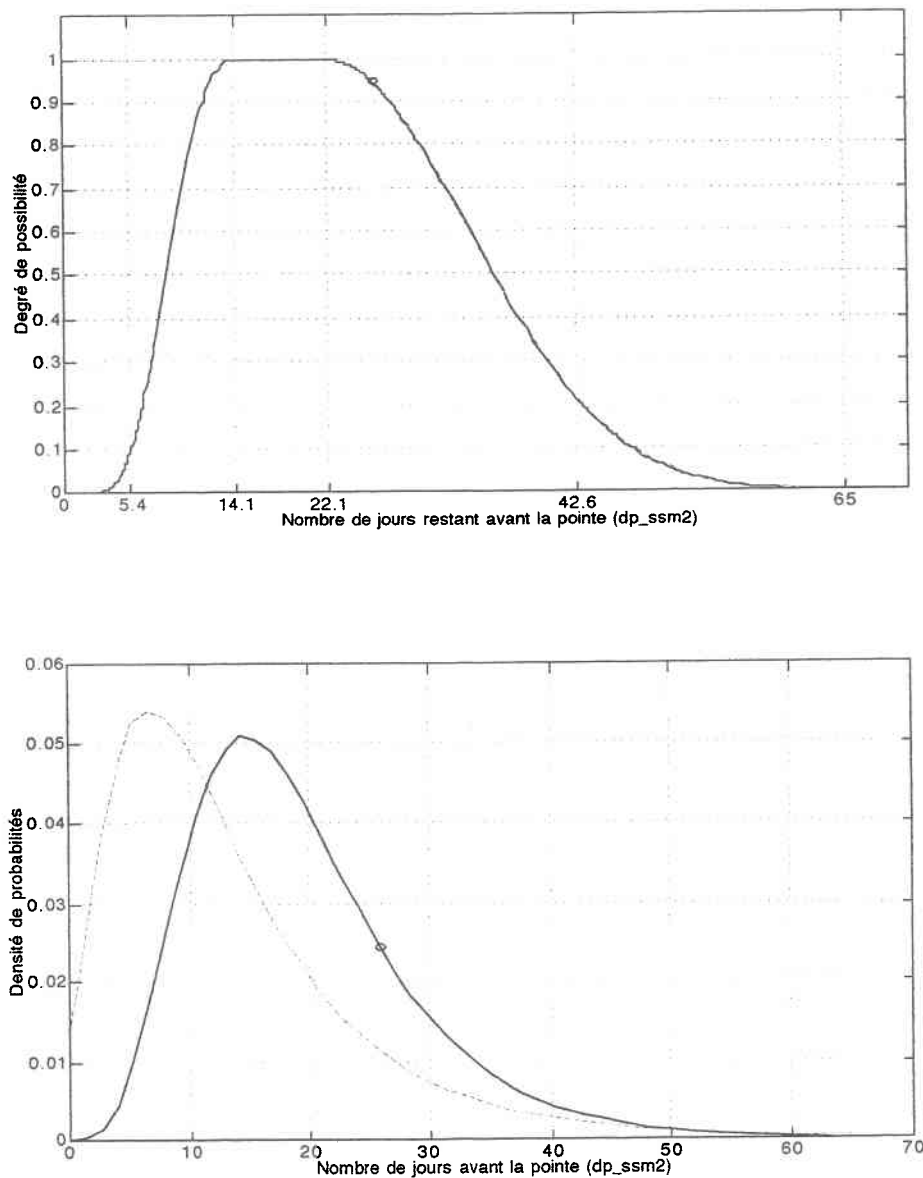
**Figure 9.6:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du volume total de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au 1<sup>er</sup> avril ( $v_{\text{avr}}$ ) sur le bassin total et la prévision de 1993, soit  $y = 16895 \text{ hm}^3$  ( $\text{Observation} = 22108 \text{ hm}^3$ ).



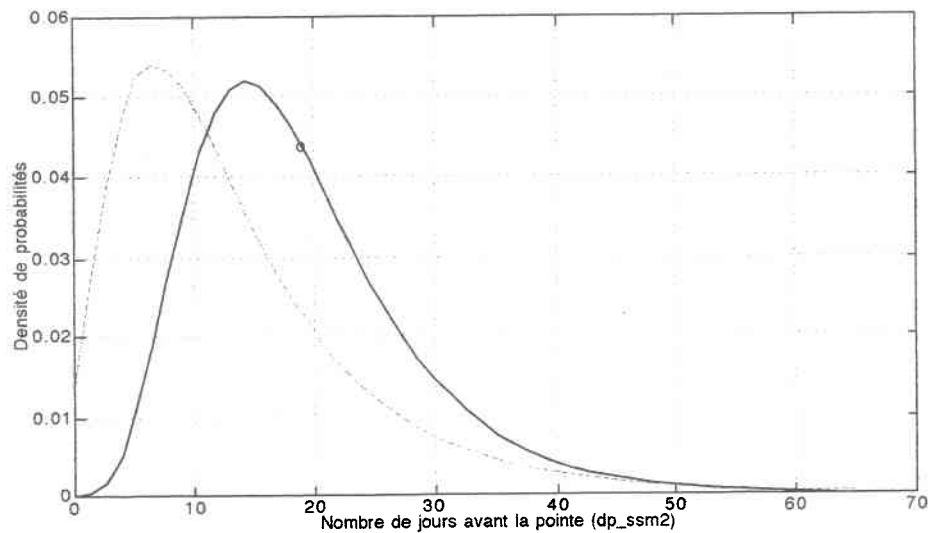
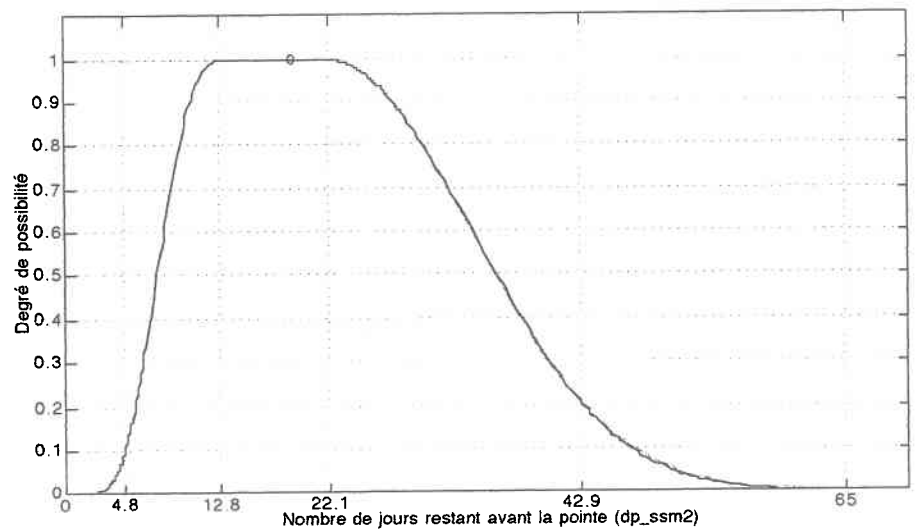
**Figure 9.7:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du volume total de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au 1<sup>er</sup> avril ( $v_{\text{avr}}$ ) sur le bassin total et la prévision de 1997, soit  $y = 22660 \text{ hm}^3$  (Observation =  $23927 \text{ hm}^3$ ).

### **9.6.3.2 Nombre de jours entre le 1<sup>er</sup> jour du sous-stade *ssm2* et la pointe de la crue sur le bassin amont (*dp\_ssm2*)**

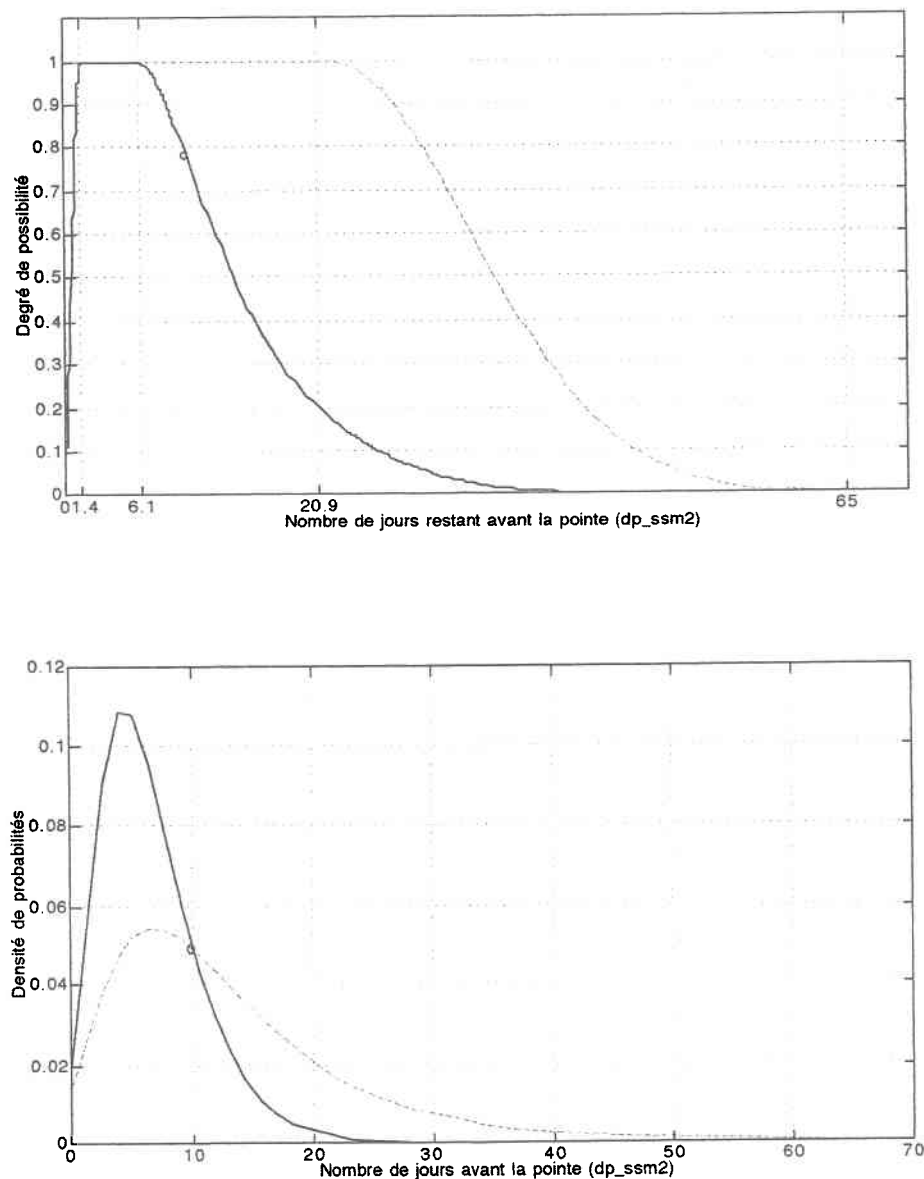
Les distributions de possibilités et de probabilités *a posteriori* obtenues pour le nombre de jours restant avant la pointe de la crue au début du sous-stade montée 2 (*dp\_ssm2*) sur le bassin amont sont présentées sur les cinq figures qui suivent; chaque figure correspond à l'une des 5 années retenues pour fin de comparaison. On peut dire que le comportement du PPP tout comme celui du PBP est très bon, et ce, pour les cinq années. Pour les années 1967 (Figure 9.8), 1974 (Figure 9.9) et 1997 (Figure 9.12) la possibilité/probabilité des valeurs faibles diminue *a posteriori* avec raison puisque l'observation est élevée. La possibilité de l'observation pour ces trois années est supérieure à 0.95. Pour les années 1975 (Figure 9.10) et 1993 (Figure 9.11), les prévisions étant faibles, la possibilité/probabilité des valeurs élevées diminue de beaucoup. On observe une baisse très importante de l'incertitude *a posteriori*; ceci est dû au fait que le système de prévision est très informatif lorsque la prévision est faible.



**Figure 9.8:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du nombre de jours restant avant la pointe de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au début du sous-stade montée 2 (dp\_ssm2) sur le bassin amont et la prévision de 1967, soit  $y = 18.19$  (Observation = 26).

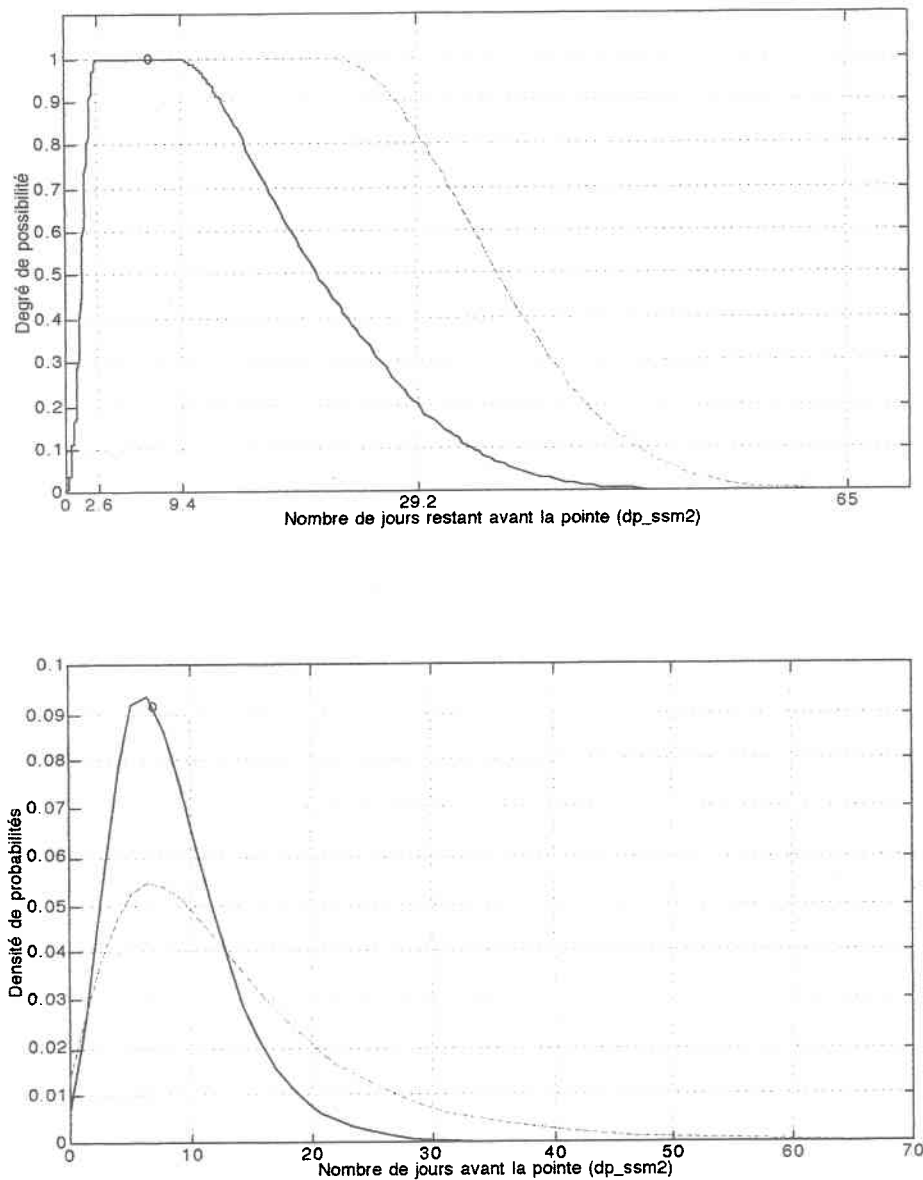


**Figure 9.9:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du nombre de jours restant avant la pointe de la crue (en  $hm^3$ ) au début du sous-stade montée 2 ( $dp\_ssm2$ ) sur le bassin amont et la prévision de 1974, soit  $y = 17.59$  (*Observation* = 19).

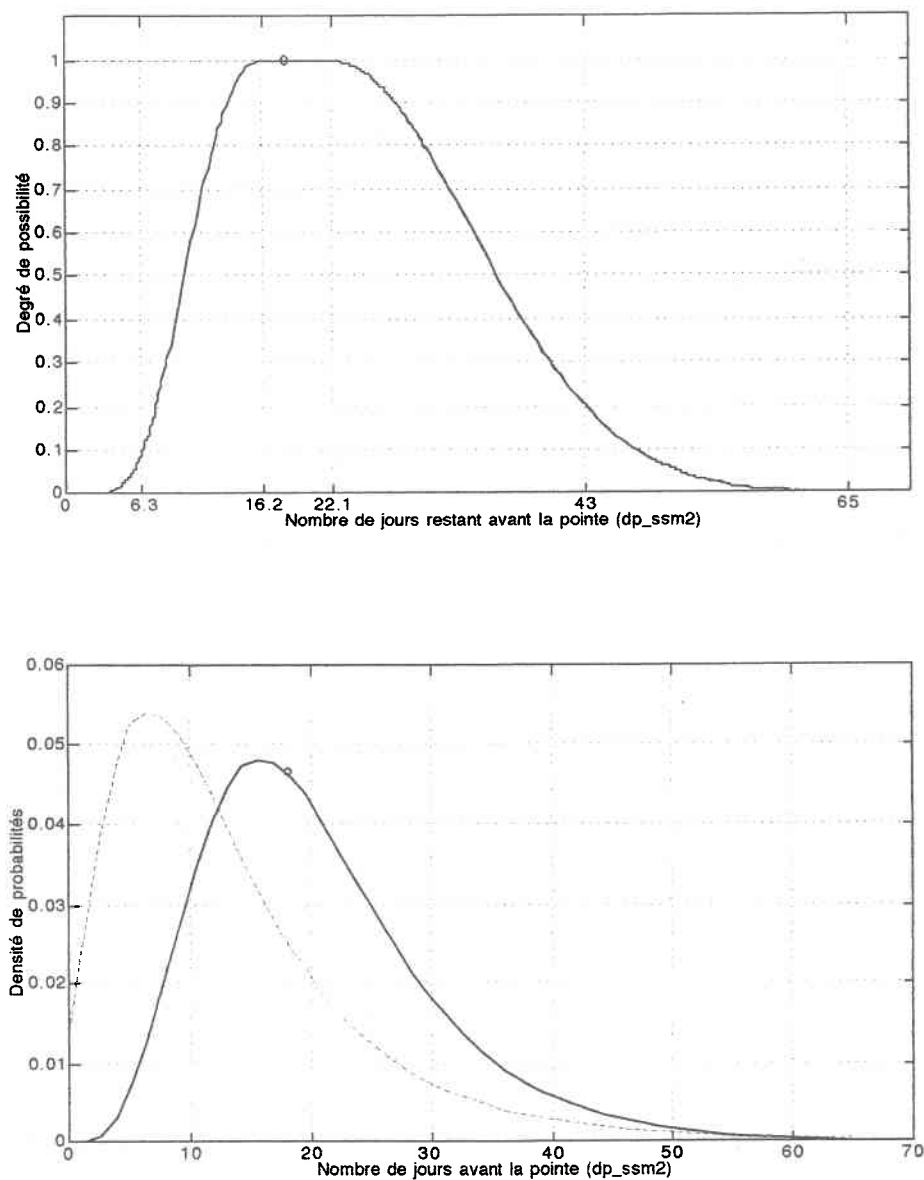


**Figure 9.10:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du nombre de jours restant avant la pointe de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au début du sous-stade montée 2 ( $\text{dp\_ssm2}$ ) sur le bassin amont et la prévision de 1975, soit  $y = 5.85$  (*Observation* = 10).





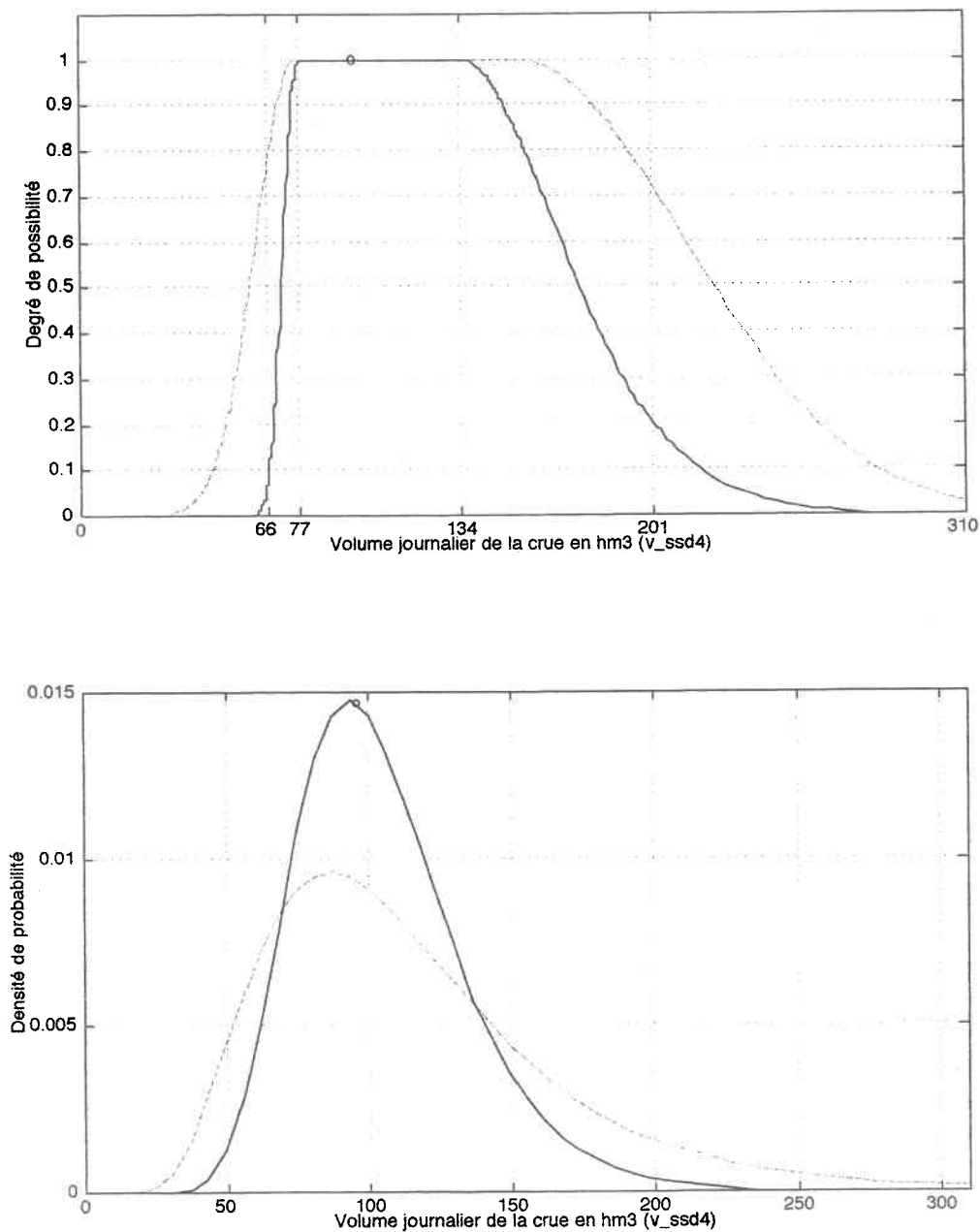
**Figure 9.11:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du nombre de jours restant avant la pointe de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au début du sous-stade montée 2 ( $\text{dp\_ssm2}$ ) sur le bassin amont et la prévision de 1993, soit  $y = 8.47$  (*Observation* = 7).



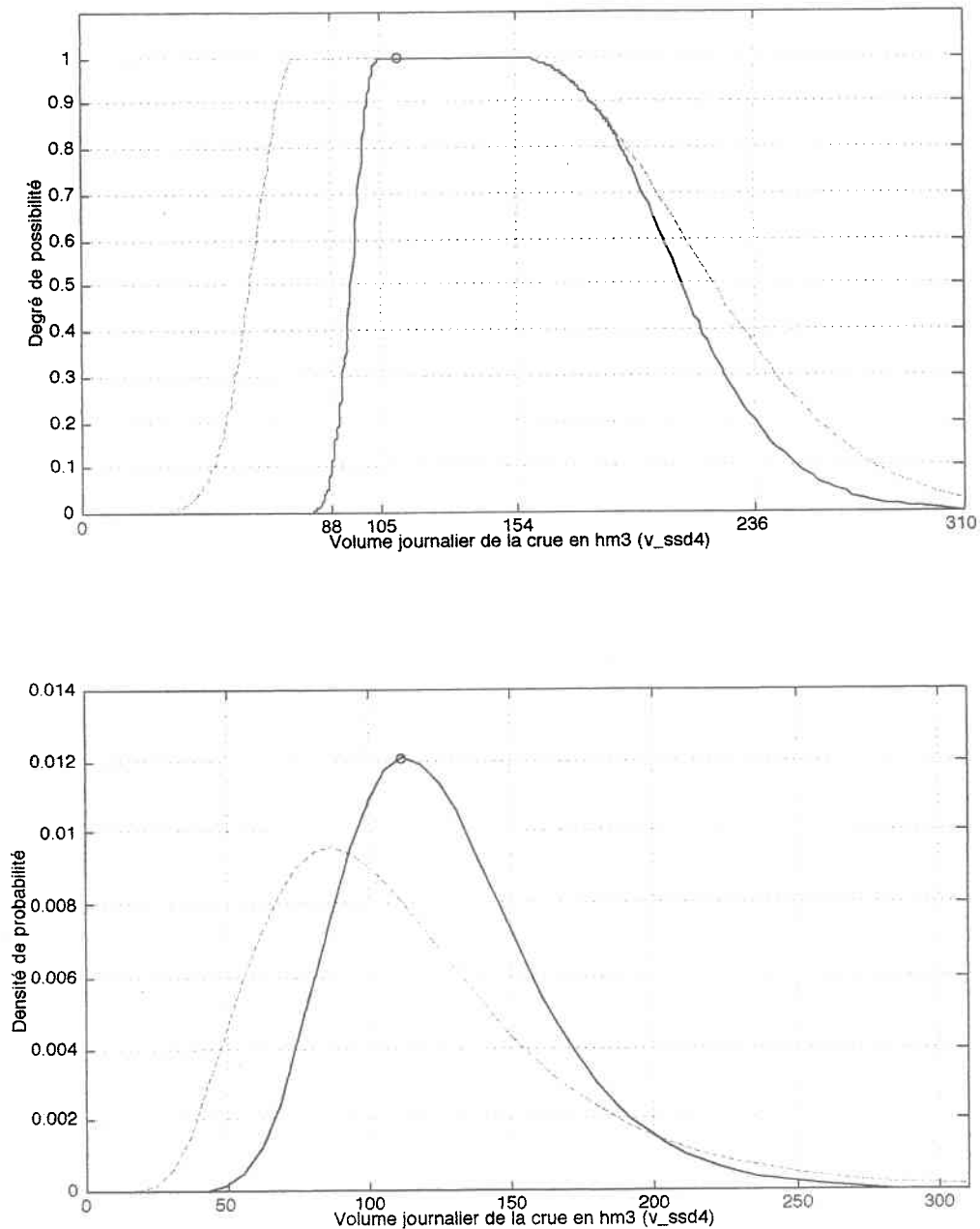
**Figure 9.12:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du nombre de jours restant avant la pointe de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au début du sous-stade montée 2 ( $\text{dp\_ssm2}$ ) sur le bassin amont et la prévision de 1997, soit  $y = 19.09$  (*Observation = 18*).

### 9.6.3.3 Volume d'apport non contrôlé journalier entre le 1<sup>er</sup> jour du sous-stade *ssd4* et la fin de la crue sur le bassin aval(*v\_ssd4*)

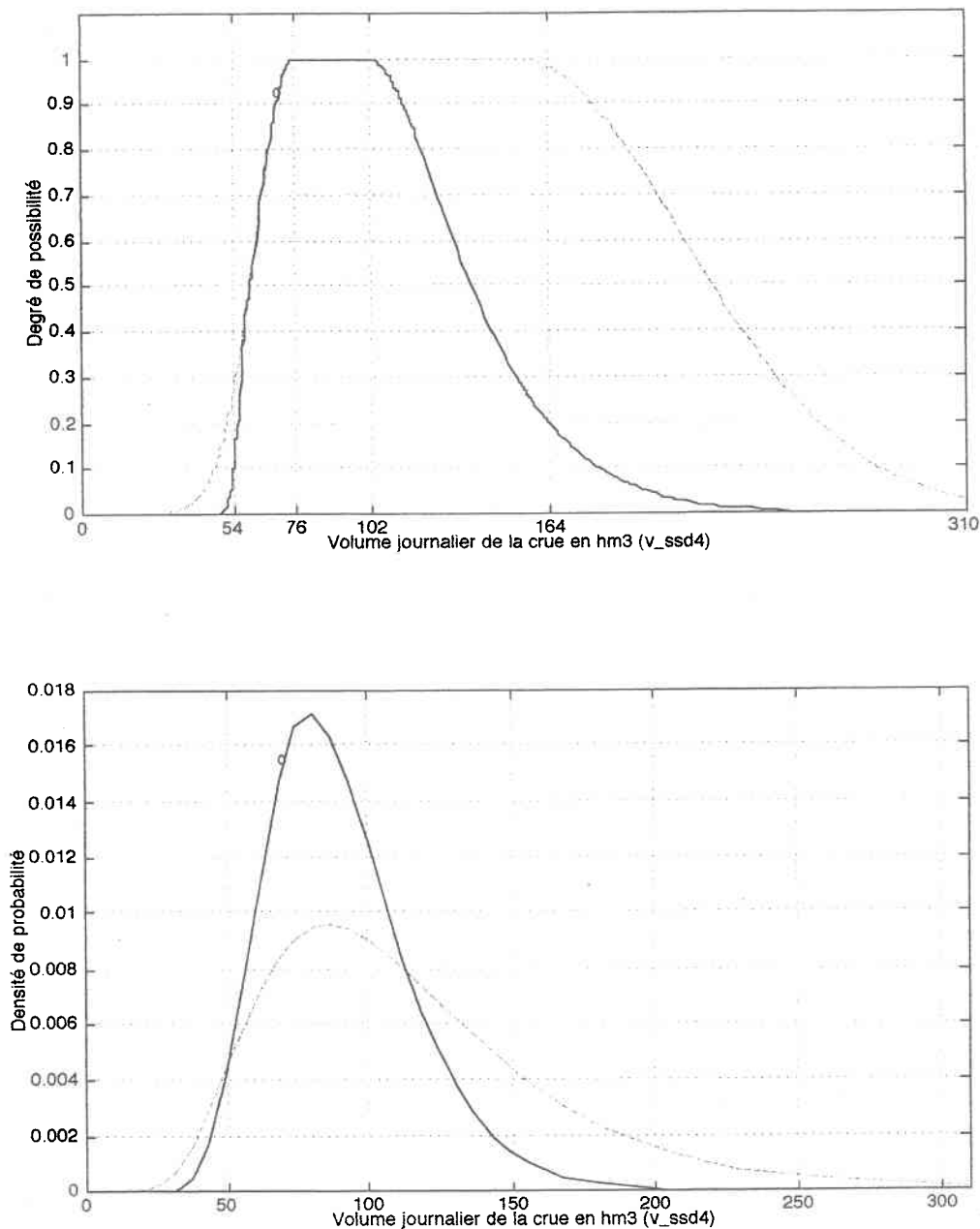
Les distributions de possibilités et de probabilités *a posteriori* obtenues pour le volume journalier de la crue restant au sous-stade descente 4 (*v\_ssd4*) sur le bassin aval sont présentées sur les trois figures qui suivent; chaque figure correspond à l'une des 3 années pour lesquelles le sous-stade *ssd4* existe, soient 1974, 1975 et 1993. Le comportement du PPP et du PBP est excellent, et ce, pour les trois années. En 1974 (Figure 9.13), on observe une diminution importante de la possibilité/probabilité pour les grandes et petites valeurs puisque la prévision est moyenne. Les deux méthodes (PPP et PBP) fournissent de l'information *a posteriori* très précise; notons que l'observation se retrouve au sommet de la f.d.p.. Pour l'année 1975 (Figure 9.14), l'observation est une fois de plus au sommet de la f.d.p.; le PPP donne aussi des résultats très satisfaisant puisque la possibilité de l'observation est de 1. Pour l'année 1993 (Figure 9.15), l'application du PPP et du PBP conduit à une baisse de la possibilité/probabilité pour les valeurs élevées. Encore ici, les deux méthodes sont très efficaces puisque la possibilité et la probabilité de l'observation sont près des maximums.



**Figure 9.13:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) restant au sous-stade descente 4 ( $v_{\text{ssd4}}$ ) sur le bassin aval et la prévision de 1974, soit  $y = 103.33 \text{ hm}^3$  (*Observation* =  $95.69 \text{ hm}^3$ ).



**Figure 9.14:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) restant au sous-stade descente 4 ( $v_{\text{ssd4}}$ ) sur le bassin aval et la prévision de 1975, soit  $y = 127.17 \text{ hm}^3$  (*Observation* =  $111.41 \text{ hm}^3$ ).



**Figure 9.15:** Distribution de possibilités *a posteriori*  $\pi(x|y)$  (en haut) et f.d.p. *a posteriori*  $\eta(x|y)$  (en bas) du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) restant au sous-stade descente 4 ( $v_{\text{ssd4}}$ ) sur le bassin aval et la prévision de 1993, soit  $y = 87.69 \text{ hm}^3$  (*Observation* =  $70.27 \text{ hm}^3$ ).

#### 9.6.4 Sommaire de la comparaison

L'analyse qualitative effectuée dans la section précédente a permis de conclure que les deux approches fonctionnent assez bien à part pour la variable de prévision  $v_{avr}$  sur le bassin total où les résultats sont moyens; ce qui peut être dû à des modèles *a priori* inadéquats. Il serait intéressant de pouvoir effectuer une comparaison analytique des deux approches; ce qui est plutôt difficile puisque leurs fondements sont différents (Dubois et Prade, 1985a). En effet, dans notre cas, on ne peut pas envisager de comparer les degrés de possibilités obtenus aux probabilités obtenues car l'interprétation adoptée de possibilité n'est pas liée à celle de probabilité. On peut par contre extraire de chacun des modèles *a posteriori* la valeur ponctuelle qui est la plus possible/probable. Notons qu'une telle comparaison n'est pas idéale puisqu'on perd presque toute l'information concernant l'incertitude *a posteriori*; on la présente donc à titre indicatif seulement.

Pour effectuer une comparaison ponctuelle, on utilise la moyenne floue (Bárdossy et Duckstein, 1995) *a posteriori* et l'espérance statistique *a posteriori*. La Figure 9.16 présente sous forme d'histogramme, les résultats de la comparaison pour la variable  $v_{avr}$  sur le bassin total. On observe que les deux méthodes (PPP et PBP) donnent des résultats très similaires. Ils sous-estiment et surestiment l'observation pour les mêmes années. La Figure 9.17 présente l'histogramme de la comparaison pour la variable  $dp_{ssm2}$  sur le bassin amont. Le PPP donne de meilleurs résultats pour les années 1967 et 1975 alors que le PBP donne de meilleurs résultats pour les trois autres années. La Figure 9.18 fournit l'histogramme de la comparaison pour la variable  $v_{ssd4}$  sur le bassin aval. Les deux méthodes ont tendance à surestimer la valeur observée mais beaucoup moins dans le cas du PBP et ce pour les 3 années. On peut donc dire que le PBP possède un léger avantage sur le PPP pour cette variable de prévision si on désire utiliser une valeur ponctuelle au lieu d'un intervalle. Les excellents résultats obtenus pour cette variable de prévision avec le PBP peuvent paraître étonnants puisque l'amplitude de l'erreur (de la relation entre les observations et les prévisions) n'est pas constante. On peut donc prétendre que le modèle méta-Gaussien a permis de traiter adéquatement cette situation particulière pour la variable de prévision  $v_{ssd4}$  sur le bassin aval.

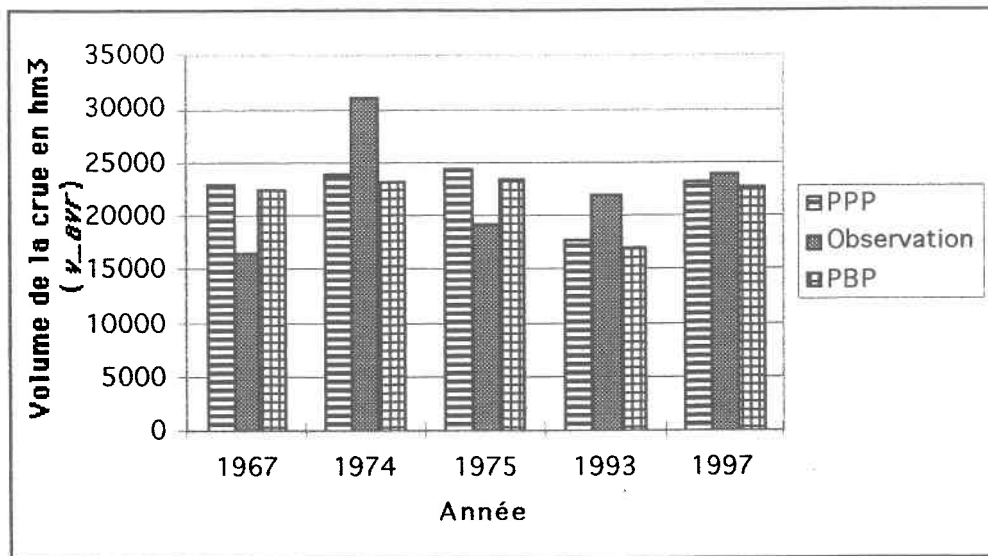


Figure 9.16: Comparaison du PPP et du PBP pour la variable de prévision  $v_{avr}$  sur le bassin total en utilisant la moyenne floue *a posteriori* et l'espérance statistique *a posteriori*.

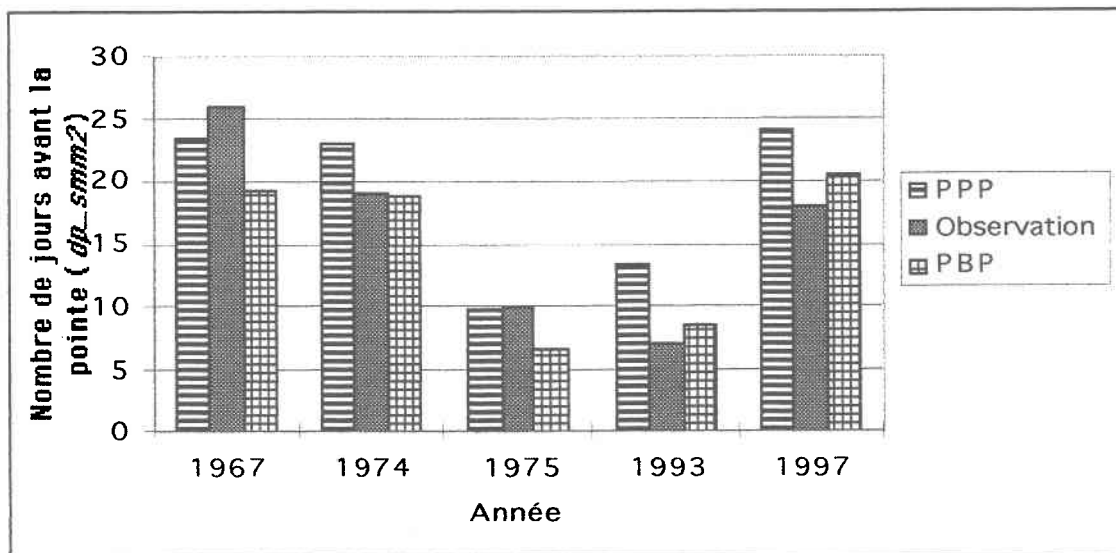
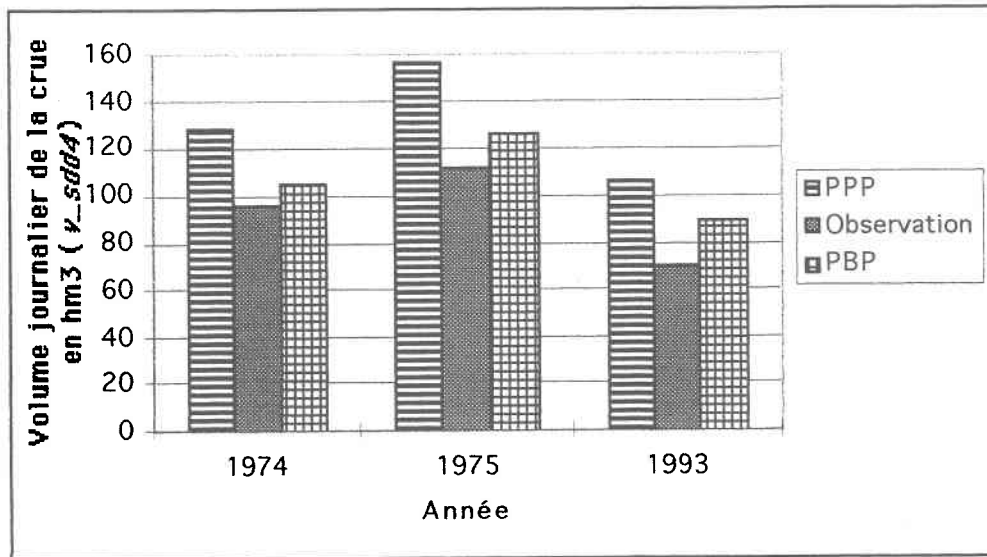


Figure 9.17: Comparaison du PPP et du PBP pour la variable de prévision  $dp_{ssm2}$  sur le bassin amont en utilisant la moyenne floue *a posteriori* et l'espérance statistique *a posteriori*.





**Figure 9.18:** Comparaison du PPP et du PBP pour la variable de prévision  $v_{ss4}$  sur le bassin aval en utilisant la moyenne floue *a posteriori* et l'espérance statistique *a posteriori*.

## 9.7 Discussion sur l'application

Le Système de surveillance et de prévision (SSP) des crues proposé dans ce travail pour le système hydrique de SÉCAL constitue un nouvel outil de gestion qui devrait permettre aux hydrologues de la compagnie de faire un meilleur suivi des crues printanières en utilisant des prévisions dont ils ne disposaient pas auparavant. Jusqu'alors l'équipe SÉCAL utilisait que des prévisions à moyen terme (quelques mois) à des dates fixes et des prévisions à court terme (quelque jours) en utilisant un modèle déterministe combiné à des scénarios météorologiques. Le SSP est donc susceptible de retombées concrètes pour l'optimisation de la production hydroélectrique.

Toutes les étapes pour le traitement subjectif de l'incertitude pour l'application sur les bassin de SÉCAL ont été accomplies avec succès, soient:

1. Sélection d'une interprétation pour la notion de *possibilité* et acceptation de celle-ci par l'équipe SÉCAL.
2. Développement d'une méthode systématique pour construire les distributions de possibilités marginales et conditionnelles qui soit accord avec la perception de l'incertitude de l'équipe SÉCAL.

3. Construction des systèmes de prévision nécessaires et simulation des données requises par une technique de ré-échantillonnage.
4. Analyse des distributions de possibilités *a posteriori* obtenues pour certaines variables de prévision et comparaison avec l'approche bayésienne.

Les résultats que l'on a obtenus avec le PPP et le PBP permettent de conclure que les deux méthodes sont adéquates pour traiter l'incertitude dans les prévisions pour les bassins de SÉCAL. Ces méthodes permettent effectivement de pondérer l'influence d'une prévision émise en fonction de l'aptitude du système de prévision. Par exemple, on a pu observer que, dans le cas de la variable de prévision  $v_{avr}$  (sur le bassin total), l'incertitude *a posteriori* ne diminue pas beaucoup; ceci traduit la difficulté de prédire cette variable (inaptitude du système de prévision) pourtant importante pour SÉCAL. Par contre, pour les deux autres variables de prévision étudiées, on a observé des diminutions importantes de l'incertitude *a posteriori*; ce qui démontre une certaine aptitude des systèmes de prévision. On peut donc prétendre que les deux méthodes (PPP et PBP) sont appropriées pour les bassins de SÉCAL. Il y a un gain évident à utiliser de telles approches surtout dans le contexte actuel où les prévisions émises sont imprécises.

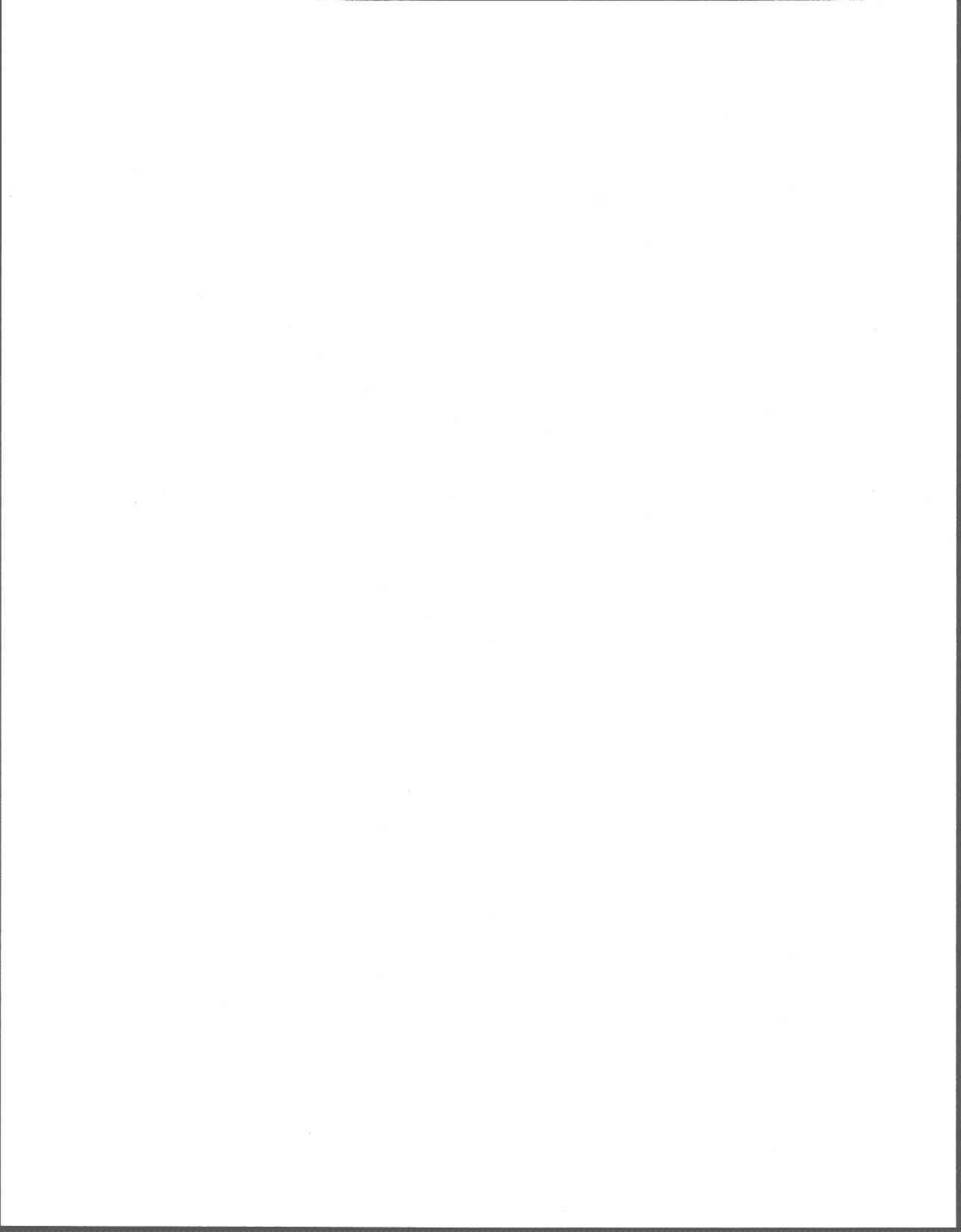
Il est bon de noter que lors de l'application du PPP sur les bassins de SÉCAL certains avantages importants du PPP sur le PBP n'ont pas été mis en valeur (cf. 6.6):

1. Puisqu'il y avait suffisamment de données (43), la construction de modèles probabilistes n'a pas causé de problèmes.
2. Il n'a pas été nécessaire de traiter des données singulières; ce qui aurait été difficile avec le PBP.
3. Aucune connaissance spécifique d'expert ne devait être intégrée dans les modèles d'incertitudes; étape difficilement envisageable avec le PBP.

Pour d'autres applications où ces avantages auraient une plus grande importance que pour l'application sur les bassins de SÉCAL, on pourrait s'attendre à ce que le PPP surpasse le PBP.

Un point qui mérite d'être soulevé concerne l'utilisation qu'on peut faire d'une distribution de possibilités *a posteriori*. Il faut premièrement rappeler que l'interprétation considérée de la

distribution *a posteriori* doit correspondre à l'interprétation de la distribution *a priori* qui a été adoptée (cf. 9.5). Ainsi, la section de niveau 1 de la distribution *a posteriori* correspond aux valeurs qui causeraient aucune surprise si elles étaient observées (étant donné la prévision émise). La valeur dans la section montante de la distribution *a posteriori* ayant un degré de possibilité de 0.1 a le même degré de possibilité que le minimum historique dans la distribution *a priori*. Ainsi, on pourrait appeler cette valeur *le minimum historique a posteriori* car son non-dépassement est aussi surprenant que le non-dépassement du minimum historique lorsqu'on ne connaît pas la prévision. On peut faire un argument similaire pour le maximum historique. La valeur dans la section descendante de la distribution *a posteriori* ayant un degré de possibilité de 0.2 correspond au maximum historique qui a le même degré de possibilité dans la distribution *a priori*. Ainsi, on pourrait appeler cette valeur *le maximum historique a posteriori* puisque son dépassement est aussi surprenant que le dépassement du maximum historique avant que la prévision soit émise.



## 10 CONCLUSION ET DISCUSSION

---

L'objectif de ce projet de recherche était de développer une méthodologie pour la construction de Systèmes de surveillance et de prévision des crues qui permette de tenir compte de l'incertitude dans les prévisions, et ce, de manière subjective. Dans le cadre de ce travail, on s'est attardé à tous les aspects du problème étudié dans le but d'en arriver à une solution qui soit facilement applicable.

### 10.1 Principales contributions de la recherche effectuée

D'un point de vue général, la contribution de ce travail est de montrer qu'il est possible de traiter de manière subjective et rationnelle l'incertitude en hydrologie. À cette fin, on propose d'utiliser la théorie des possibilités tout en adoptant une interprétation subjective du terme *possibilité*; cette approche est aussi performante que l'approche Bayésienne mais plus souple d'emploi. Ce travail a permis de trouver des solutions pratiques à différents problèmes. Les principales contributions de cette thèse concernent:

- L'élaboration d'une méthodologie pour la construction de Systèmes de surveillance et de prévision des crues. Ceci permet de faire un suivi continu des crues et de mettre à jour les prévisions au fur et à mesure que la crue évolue; ce qui devrait aider à faire une meilleure gestion des crues.
- Le développement de l'analogie possibiliste de la règle de Bayes qui permet de réviser une distribution de possibilités suite à l'acquisition d'une nouvelle information. D'un point de vue théorique, la solution à ce problème constitue le corps de ce projet de recherche. Différentes règles d'inférence fonction de la norme triangulaire utilisée ont été proposées.
- La présentation du Processeur possibiliste de prévision (PPP) qui découle directement des règles d'inférence et qui permet de tenir compte de l'incertitude dans les prévisions. Le PPP est l'équivalent en théorie des possibilités du Processeur bayésien de prévisions (PBP). Plusieurs propriétés du PPP ont été étudiées; ce qui aide à choisir la règle d'inférence la plus appropriée pour une application donnée.

- L'utilisation de l'interprétation subjective du terme *possibilité*, telle que définie par Shackle (1969), pour l'application du PPP en hydrologie. Selon cette interprétation, la possibilité d'un événement est vue comme le *degré de surprise potentielle* associé à cet événement.
- L'élaboration d'une méthodologie pour construire les distributions de possibilités (marginales et conditionnelles) nécessaires à l'application du PPP et en accord avec l'interprétation retenue. Cette méthodologie a été utilisée pour l'application.
- Le développement et l'implantation des systèmes de prévision nécessaires à la simulation des données par ré-échantillonnage (*jackknife*) en vue de leur application sur les bassins de SÉCAL.
- L'application du PPP sur les bassins amont, aval et total de SÉCAL. Trois différents modèles pour représenter les distributions conditionnelles ont été nécessaires.
- La comparaison des résultats obtenus (pour trois variables de prévision) avec le PPP et le PBP sur les bassins de SÉCAL. La conclusion est que les deux méthodes donnent des résultats assez voisins et généralement satisfaisants.
- La présentation d'arguments en faveur de l'utilisation des méthodes possibiliste et bayésienne en hydrologie; ceci devrait permet d'envisager d'autres applications de ces méthodes dans ce domaine.

## 10.2 Discussion

Ce travail a montré comment il est possible de traiter l'incertitude de manière subjective et de développer des applications en hydrologie qui utilisent ce type de traitement. La base des présents travaux repose sur deux règles d'inférence élémentaires en théorie des possibilités qui sont généralement bien acceptées; la première permet d'obtenir une distribution jointe à partir d'une distribution conditionnelle et d'une distribution marginale (cf. (5-8)); la deuxième permet d'obtenir une distribution marginale à partir d'une distribution jointe (cf. (5-10)). Les développements théoriques effectués en théorie des possibilités dans le cadre de ce travail ne dépendent donc d'aucune règle arbitraire permettant de manipuler des distributions de possibilités. Rappelons que les règles d'inférence utilisées sont fonction d'une norme triangulaire qui constitue un paramètre important du PPP.

Une différence fondamentale entre la méthode proposée dans ce travail, le PPP, et la méthode probabiliste, le PBP, se situe au niveau de l'interaction, du dialogue qui doit être établi entre l'hydrologue et le scientifique responsable de la construction du système de traitement de l'incertitude. Avec le PPP, il est nécessaire que l'hydrologue intervienne dès le début dans la conception du système et qu'il fasse certains choix (norme triangulaire et distributions de possibilités) qui sont fonction de sa perception de l'incertitude. Par contre, avec le PBP il n'y a pas lieu généralement de faire intervenir l'hydrologue avant d'obtenir les modèles *a posteriori*. Cette différence s'explique par le fait, qu'avec le PPP, on traite l'incertitude de manière subjective ce qui nécessite l'intervention humaine.

Le domaine du traitement subjectif de l'incertitude n'est que très peu développé à l'exception des probabilités subjectives qui demeurent tout de même peu utilisées en pratique. Les applications existantes (non probabilistes) qui traitent subjectivement l'incertitude utilisent généralement des règles d'inférences arbitraires qui ont du sens mais qui ne pourraient être acceptées par tous. Dans le présent travail, le choix de la règle d'inférence n'est pas fixé, mais revient plutôt à l'utilisateur qui en fonction de sa perception et de l'application étudiée sélectionnera celle qui semble la plus convenable parmi celle proposées.

Il reste évidemment certains problèmes à résoudre pour que la méthode proposée dans ce travail puisse être plus largement utilisée. D'une part, de nouveaux outils (en accord avec l'interprétation retenue) devront être développés pour permettre l'analyse des distributions *a posteriori*; de tels outils existent dans le domaine des probabilités (les intervalles de confiance, par exemple). D'autre part, la méthodologie pour construire des distributions de possibilités pourrait être raffinée et plus particulièrement en ce qui concerne la méthode pour valider une distribution qui vient d'être construite par un expert. Il serait intéressant d'étudier si les résultats présentés dans ce travail pourraient être généralisés aux mesures de possibilités. Finalement, l'utilisation du cadre d'inférence bayésien en théorie des possibilités avec plusieurs systèmes de prévision (au lieu d'un seul) représente une autre avenue de recherche intéressante.

Les applications des méthodes basées sur les sous-ensembles flous en sciences de l'eau sont assez rares (Bárdossy, 1990; Bárdossy et al, 1990; Esogbue et al, 1992; Bárdossy et Duckstein, 1995; 1996; Chongfu, 1996). Cette thèse en présente une nouvelle qui, on l'espère, pourra démontrer que des méthodes autres que probabilistes pour le traitement de l'incertitude sont justifiées dans certaines circonstances.

Il est difficile de prendre position sur l'avenir de la théories des possibilités en sciences de l'eau. Nous croyons cependant que son avenir dépendra de l'intérêt des utilisateurs potentiels, de leur désir d'être plus impliqués dans les processus de décision et aussi de l'acceptation de la subjectivité comme méthode raisonnée pour le traitement de l'incertitude. Il est évident que la méthode développée va à l'opposé des méthodes classiques (objectives) qui cherchent à optimiser certains critères de performance. L'optimisation constitue une forme de frein à l'acceptation de la méthode proposée ici puisque cette question est relativement difficile à aborder avec des méthodes impliquant la subjectivité. Par contre, elle est souple d'utilisation et facile à comprendre tout en étant raisonnée; ce qui constitue des atouts intéressants.

Les travaux de cette thèse sont susceptibles de retombées pour tout problème lié à la gestion continue des opérations en période de crue. Pour ce qui est de SÉCAL, la mise en place du système développé et sa bonne utilisation devrait permettre à la compagnie d'optimiser la production d'énergie hydroélectrique durant les crues, en particulier, au printemps où les pertes dues à l'incertitude sont importantes.

Nous croyons que cette thèse atteint bien les deux objectifs visés par la collaboration entre l'INRS-Eau et SÉCAL. D'une part, l'incidence industrielle en hydrologie est belle et bien présente car le projet s'attaque à un problème important et pratique pour la compagnie. D'autre part, une contribution scientifique significative a été apportée dans le domaine du traitement subjectif de l'incertitude.



## BIBLIOGRAPHIE

---

- Bárdossy, A. (1990). Note on fuzzy regression. *Fuzzy Sets and Systems*, 37: 65-75.
- Bárdossy A. (1996). The use of fuzzy rules for the description of elements of the hydrological cycle. *Ecological Modeling*, 85: 59-65.
- Bárdossy, A., I. Bogardi et L. Duckstein (1990). Fuzzy regression in hydrology. *Water Resources Research*, 26 (7): 1497-1508.
- Bárdossy A. et L. Duckstein (1995). *Fuzzy rule-based modeling with applications to geophysical, biological and engineering systems*. CRC Press, Boca Raton, Florida.
- Berger, J.O. (1985). *Statistical decision theory and bayesian analysis*. Springer-Verlag, New York.
- Bernier, J. (1991). Bayesian analysis of robustness of models in water and environmental sciences. *NATO ASI on Risk and Reliability in Water Resources and Environmental Engineering*. J. Ganoulis éd., Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Porto Karras, Grèce, G29: 203-229.
- Bisson, J.-L. (1995). Génération d'apports prévisionnels. *International Conference on Statistical and Bayesian Methods in Hydrological Sciences*. UNESCO, Paris, France.
- Bouchon, B. (1987). Fuzzy inferences and conditional possibility distributions. *Fuzzy Sets and Systems*, 23: 33-41.
- Cheeseman, P. (1986). Probabilistic versus fuzzy reasoning. L.N. Kanal et J.F. Lemmer (éditeurs), *Uncertainty in Artificial Intelligence*, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland.
- Chib, S. et E. Greenberg (1995). Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. *The American Statistician*, 49 (4): 327-335.
- Chongfu, H. (1996). Fuzzy risk assessment of urban natural hazards. *Fuzzy Sets and Systems*, 83 (2): 271-282.
- Civanlar, M.R. et H.J. Trussell (1986). Constructing membership functions using statistical data. *Fuzzy Sets and Systems*, 18: 1-13.
- Cooke, R. (1991). *Experts in uncertainty: opinion and subjective probability in science*. Oxford University Press, New York.
- de Campos, L., J. Gebhardt et R. Kruse (1995). Axiomatic treatment of possibilistic independence. C. Froideraux et J. Kohlas (éditeurs), *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, Lecture Notes on AI, 946, Springer Verlag: 77-88.

- DeGroot, M.H. (1975). *Probability and statistics, Second edition*. Addison-Wesley publishing company, Massachusetts.
- Di Nola, A., W. Pedrycz et S. Sessa (1982). On solutions of fuzzy relational equations and their characterization. *Busefal* 12: 60-71.
- Di Nola, A., W. Pedrycz, S. Sessa et W. Pei-Zhuang (1993). Fuzzy relation equation under a class of triangular norms: A survey and new results. D. Dubois, H. Prade et R.R. Yager (éditeurs), *Reading in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, Morgan Kaufmann, San Francisco: 166-189.
- Di Nola, A., S. Sessa, W. Pedrycz et E. Sanchez (1989). *Fuzzy Relations Equations and their Applications to Knowledge Engineering*. Kluwer Academic Publishing, Dordrecht.
- Dubois, D., S. Moral et H. Prade (1997). A semantics for possibility theory based on likelihoods. *J. of Mathematical Analysis and Applications* 205: 359-380.
- Dubois D. et H. Prade (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, New York.
- Dubois D. et H. Prade (1985a). *Théorie des possibilités: Applications à la représentation des connaissances en informatique*. Masson, Paris.
- Dubois D. et H. Prade (1985b). A review of fuzzy set aggregation connectives. *Information Sciences* 36: 85-121.
- Dubois D. et H. Prade (1986a). Possibilistic inference under matrix form. H. Prade et C.V. Negoita (éditeurs), *Fuzzy Logic in Knowledge Engineering* (Verlag TÜV Rheinland, Köln): 112-126.
- Dubois, D. et H. Prade (1986b). Fuzzy sets and statistical data. *European Journal of Operational Research*, 25: 345-356.
- Dubois D. et H. Prade (1988a). The treatment of uncertainty in knowledge-based systems using fuzzy sets and possibility theory. *Int. Journal of Intelligent Systems* 3: 141-165.
- Dubois D. et H. Prade (1988b). An introduction to possibilistic and fuzzy logics. P. Smets, E.H. Mamdani, D. Dubois et H. Prade (éditeurs), *Non-Standard Logics for Automated Reasoning* (Academic Press, New York): 288-326.
- Dubois D. et H. Prade (1988c). Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures. *Computational Intelligence* 4: 244-264.
- Dubois D. et H. Prade (1990). The logical view of conditioning and its application to possibility and evidence theories. *Int. Journal of Approximate Reasoning* 4: 23-46.
- Dubois D. et H. Prade (1991a). Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions. *Fuzzy Sets and Systems* 40: 143-202.
- Dubois D. et H. Prade (1991b). Updating with belief functions, ordinal conditional functions and possibility measures. P.P. Bonissone, M. Henrion, L.N. Kanal et J.F. Lemmer (éditeurs), *Uncertainty in Artificial Intelligence* 6: 311-329.

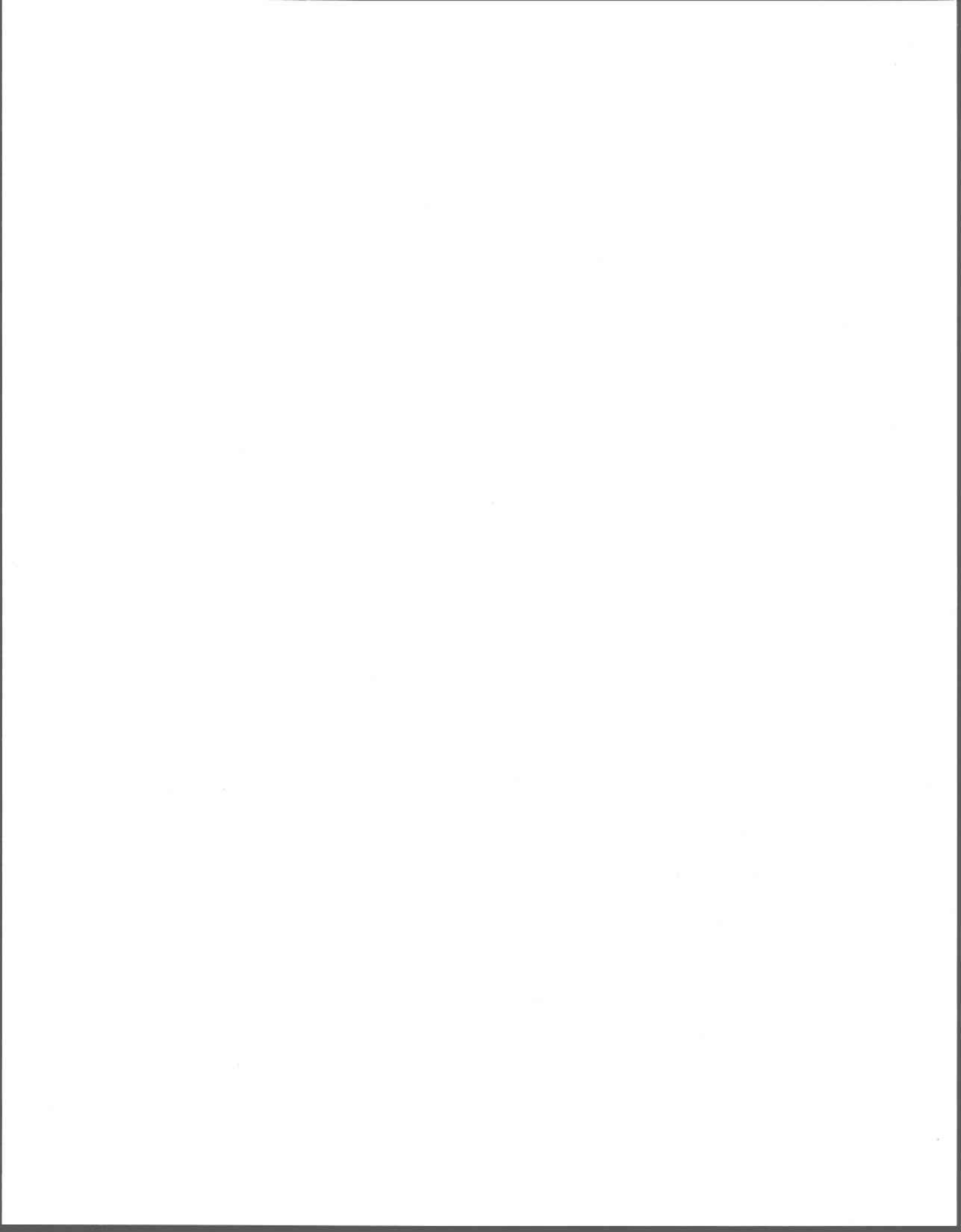
- Dubois D. et H. Prade (1992a). Possibilistic abduction. *Proc. of the 4<sup>th</sup> Inter. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU'92), Advanced Methods in Artificial Intelligence*, LNCS 682, Springer Verlag: 3-12.
- Dubois D. et H. Prade (1992b). On the combination of evidence in various mathematical frameworks. J. Flamm et T. Luisi (éditeurs), *Reliability Data Collection and Analysis* (Netherlands): 213-241.
- Dubois, D. et H. Prade (1992c). When upper probabilities are possibility measures. *Fuzzy sets and systems*, 49: 65-74.
- Dubois D. et H. Prade (1997). Bayesian conditioning in possibility theory. *Fuzzy Sets and Systems* 92: 223-240.
- Dubois D. et H. Prade (1998). Possibility theory: qualitative and quantitative aspects. D.M. Gabbay et Ph. Smets (éditeurs), *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, Kluwer Academic Publishers 1: 169-226.
- Duckstein, L. et K. Heidel (1988). Estimation of fuzzy set membership functions using value function transformations. Dans *Proceedings of the Fourth International Conference on the Foundation and Applications of Utility, Risk and Decision Theory*. Budapest, Hongrie.
- Dupont, K. (1996). Analyse de précipitations (modélisation de la réponse hydrologique des bassins versants lac Saint-Jean et Chute du Diable). Rapport no. 96-08, Groupe ressources hydriques, Société d'électrolyse et de chimie Alcan Ltée, Jonquière, Québec.
- Esogbue, A.O., M. Theologidu et K. Guo (1992). On the application of fuzzy set theory to the optimal flood control problem arising in water resources systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 48 (2).
- Fonk, P. (1997). A comparative study of possibilistic conditional independence and lack of interaction. *Int. Journal of Approximate Reasoning*, 16: 149-171.
- Fukami, S., M. Masaharu et K. Tanaka (1980). Some considerations on fuzzy conditional inference. *Fuzzy Sets and Systems* 4: 243-273.
- Gignac, C., L. Rémillard et L. Salessé (1990). Détermination de nouveaux modèles mathématiques pour les prévisions à moyen terme de la crue printanière (1er avril au 30 juin). Rapport no. 90-06, Groupe ressources hydriques, Société d'électrolyse et de chimie Alcan Ltée, Jonquière, Québec.
- Hamacher, H. (1975). Über Logische Verknüpfungen unshorfer Aussagen und deren Zugehörige Bewertungs-funktionen. Dans *Progress in Cybernetics and Systems Research*, II (Trappe, De Hanika, éditeurs), Hemisphere Pub. Corp., New York: 276-287.
- Härdle, W. (1990). *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Hisdal, E. (1978). Conditional possibilities independence and noninteraction. *Fuzzy Sets and Systems* 1: 283-297.

- Hisdal, E. (1988a). The philosophical issues raised by fuzzy sets. *Fuzzy sets and systems*, 25: 349-356.
- Hisdal, E. (1988b). Are grades of membership probabilities? *Fuzzy sets and systems*, 25: 325-348.
- Hisdal, E. (1994). Interpretative versus prescriptive fuzzy set theory. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 2 (1): 22-26.
- Karlsson, M. et S. Yakowitz (1987). Nearest-neighbor methods for nonparametric rainfall-runoff forecasting. *Water Resources Research*, 23 (7): 1300-1308.
- Kaufmann, A. (1973). *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous à l'usage des ingénieurs. Tome 1, Éléments théoriques de base*. Masson et Cie, éditeurs, Paris.
- Kaufmann, A. (1977). *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous à l'usage des ingénieurs, Tome IV, Compléments et nouvelles applications*. Masson et Cie, éditeurs, Paris.
- Kaufmann, A. et M.M. Gupta (1988). *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*. North-Holland, Amsterdam.
- Kaufmann, A. et M.M. Gupta (1991). *Introduction to fuzzy arithmetic: Theory and applications*. Van Nostrand, New York.
- Kelly K.S. et R. Krzysztofowicz (1994). Probability distributions for flood warning systems. *Water Resources Research*, 30 (4): 1145-1152.
- Kelly K.S. et R. Krzysztofowicz (1995). Bayesian revision of an arbitrary prior density. Dans *1995 Proceedings of the Section on Bayesian Statistical Science of the American Statistical Association*.
- Kelly K.S. et R. Krzysztofowicz (1996b). A Bayesian model and choice of experts. Department of Systems Engineering, University of Virginia, Charlottesville. Aussi présenté à *TIMS/ORSA Joint National Meeting in Boston, Massachusetts, 24-27 avril, 1994*.
- Klir, G.J. et T.A. Folger (1988). *Fuzzy sets, uncertainty and information*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Krzysztofowicz R. (1983). Why should a forecaster and a decision maker use Bayes theorem. *Water Resources Research*, 19 (2): 327-336.
- Krzysztofowicz R. (1985). Bayesian models of forecasted time series. *Water Resources Bulletin*, 21 (5): 805-814.
- Krzysztofowicz R. (1987). Markovian forecast processes. *J. of the American statistical Association*, 82 (397): 31-37.
- Krzysztofowicz R. (1992). Bayesian correlation score: a utilitarian measure of forecast skill. *Monthly weather review*, 120 (1): 208-219.
- Krzysztofowicz R. (1993). A theory of flood warning systems. *Water Resources Research*, 29 (12): 3981-3994.

- Krzysztofowicz, R. et S. Reese (1991). Bayesian analyses of seasonal runoff forecasts. *Stochastic Hydrol. Hydraul.* 5: 295-322.
- Krzysztofowicz R. et L.M. Watada (1986). Stochastic model of seasonal runoff forecasts. *Water Resources Research*, 22 (3): 296-302.
- Lapointe, S. (1996). Classification et prévision des crues printanières. Rapport no. I-137, INRS-Eau, Université du Québec, Sainte-Foy, Québec.
- Lapointe, S. et B. Bobée (1999). Revision of possibility distributions: A bayesian inference pattern. Accepted pour publication dans *Fuzzy Sets and Systems*.
- López de Mántaras, R. (1990). *Approximate reasoning models*. Ellis Horwood Lim., Chichester, Angleterre.
- Magrez, P. et P. Smets (1989). Fuzzy modus ponens: A new model suitable for applications in knowledge-based systems. *Int. Journal of Intelligent Systems* 4: 181-200.
- Mathworks (1995). *The student edition of MATLAB, Version 4, User's guide*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J..
- Menger, K. (1942). Statistical metrics. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 28: 535-537.
- Natvig, B. (1983). Possibility versus probability. *Fuzzy sets and systems*, 10: 31-36.
- Nguyen, H.T. (1978). On conditional possibility distributions. *Fuzzy Sets and Systems*, 1: 299-309.
- Ouarda, T.B.M.J., M. Haché, P.F., Rasmussen et B. Bobée (1998). Risque et fiabilité en hydrologie. Rapport de recherche no R-535, INRS-Eau, Université du Québec, Sainte-Foy, Québec, 153 pages.
- Pedrycz, W. (1982). Fuzzy relational equations with triangular norms and their resolution. *Busefal* 11: 24-32.
- Perreault, L., M. Haché, L. Rémillard et B. Bobée (1996). Analyse de fréquence du volume de crue et des apports maximums saisonniers. Rapport no. R-486, INRS-Eau, Université du Québec, Sainte-Foy, Québec.
- Perron, H., P. Bruneau et B. Bobée (1997). Logiciel AJUST: Manuel de l'utilisateur. INRS-Eau/HMS Énergie.
- Ramer, A. (1989). Conditional possibility measures. *Proc. of the 3rd Inter. Fuzzy Systems Assoc. (IFSA) Congress*, Seattle, WA: 412-415.
- Rasmussen, P.F., T.B.M.J. Ouarda, M. Haché, J.-L. Bisson et B. Bobée (1997). Stochastic modeling of forecasted streamflows. *Proceedings of the American Geophysical Union, 17th Annual Hydrology Days*: 273-282.
- Sanchez, E. (1974). *Équations de relations floues*. Thèse biologie humaine, Faculté de Médecine de Marseille.

- Sanchez, E. (1976). Resolution of composite fuzzy relations. *Information and Control*, 30: 38-49.
- Sanchez, E. (1977). Solutions in composite fuzzy relation equations: Applications to medical diagnosis in browerian logic. M. Gupta, G.N. Saridis et R.K. Ragade (éditeurs), *Fuzzy Automata and Decision Processes* (North Holland, Amsterdam): 221-234.
- SÉCAL (1982). Nouvelle technologie pour accroître la puissance générée par un système hydroélectrique complexe déjà existant. Rapport technique, projet PAT no 46C/512-71, Groupe ressources hydriques, Société d'électrolyse et de chimie Alcan Ltée, Jonquière, Québec.
- Shackle, G.L.S. (1969). *Decision, order and time in human affairs*. Cambridge University Press.
- Shapiro, S.S. et M.B. Wilk (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52: 591-611.
- Smets, P. (1982). Possibilistic inference from statistical data. *Proc. of the 2<sup>nd</sup> World Conf. on Math. at the Service of Man*, Las Palmas, Espagne: 611-613.
- Sugeno, M. (1974). *Theory of fuzzy integrals and its applications*. Thèse de doctorat, Tokyo Institute of Technology.
- Sugeno, M. (1977). Fuzzy measures and fuzzy integrals: A survey. M.M. Gupta, G.N. Saridis et B.R. Gaines (éditeurs), *Fuzzy Automata and Decision Processes* (North-Holland, Amsterdam): 89-102.
- Studeny, M. (1993). Formal properties of conditional independence in different calculi of AI. M. Clarke et al (éditeurs), *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, Lecture Notes in Computer Science, 747, Springer Verlag: 341-348.
- Terano, T. et M. Sugeno (1975). Conditional fuzzy measures and their applications. L.A. Zadeh, K.S. Fu, K. Tanaka et M. Shimura (éditeurs), *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* (Academic Press, New York): 151-170.
- Trillas, E. et L. Valverde (1985a). On mode and implication in approximate reasoning. M.M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler et J.B. Kiszka (éditeurs), *Approximate Reasoning in Expert Systems* (North-Holland, Amsterdam): 157-166.
- Trillas, E. et L. Valverde (1985b). On implication and indistinguishability in the setting of fuzzy logic. J. Kacprzyk et R.R. Yager (éditeurs), *Management Decision Support Systems Using Fuzzy Sets and Possibility Theory* (Verlag TÜV Rheinland, Köln): 198-212.
- Turksen, I.B. (1991). Measurement of membership functions and their acquisition. *Fuzzy Sets and Systems*, 40: 5-38.
- Weber, S. (1983). A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms. *Fuzzy Sets and Systems* 11: 115-134.
- Weisberg, S. (1985). *Applied linear regression*. John Wiley and Sons, New York.

- 
- Wu, W. (1986). Fuzzy reasoning and fuzzy relational equations. *Fuzzy Sets and Systems* 20: 67-78.
- Yager, R.R. (1991). Connective and quantifiers in fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 40: 39-75.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8: 338-353.
- Zadeh, L.A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* SMC-3 (1): 28-44.
- Zadeh, L.A. (1975). Calculus of fuzzy restrictions. L.A. Zadeh, K.S. Fu, K. Tanaka et M. Shimura (éditeurs), *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* (Academic Press, New York): 1-39.
- Zadeh, L.A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems* 1: 3-28.
- Zadeh, L.A. (1979). A theory of approximate reasoning. J.E. Hayes, D. Mitchie et L.I. Mikulich (éditeurs), *Machine Intelligence*, Vol. 9 (Wiley, New York): 149-194.
- Zadeh, L.A. (1989). Knowledge representation in fuzzy logic. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* 1 (1): 89-100.





## **ANNEXE A:        SYSTÈME HYDROÉLECTRIQUE                          DE SÉCAL**

---

Une description complète du système hydroélectrique de la compagnie Alcan au Saguenay-Lac-Saint-Jean (SÉCAL) est donnée dans un rapport interne (SÉCAL, 1982). Les grandes lignes de ce système sont présentées dans ce qui suit à partir des cartes de SÉCAL.

### **A.1 Description du système hydroélectrique**

La Figure A.1 fournit une représentation détaillée du réseau hydrographique (rivières et lacs) du bassin versant du Saguenay-Lac-Saint-Jean. Le système hydroélectrique Alcan au Saguenay-Lac-Saint-Jean comporte six centrales et trois réservoirs d'importance (voir Figure A.2 où les réservoirs sont représentés par des hexagones et les centrales par des cercles). Analysons maintenant le cheminement de l'eau dans le système. Le réservoir le plus en amont est le lac Manouane (hexagone 1) qui n'est rattaché à aucune centrale. L'eau passe par le canal Bonnard et ensuite par la rivière Péribonka pour parvenir jusqu'au réservoir Passes Dangereuses (hexagone 2). L'eau quitte Passes Dangereuse à travers la centrale Chutes-des-Passes (cercle 1) ou par les déversoirs, et continue sa descente dans la rivière Péribonka pour parvenir au réservoir Chute du Diable (hexagone 3), lequel ne permet qu'une faible quantité d'emmagasinement, et passer par deux centrales au fil de l'eau, soit Chute du Diable (cercle 2) et Chute à la Savane (cercle 3). L'eau parvient ainsi à l'immense réservoir qu'est le lac Saint-Jean (hexagone 4). À partir du lac Saint-Jean l'écoulement passe par la centrale Isle-Maligne (cercle 4) ou par les déversoirs de la rivière Grande Décharge ou Petite Décharge (ces rivières n'apparaissent pas sur la Figure A.2) pour rejoindre la rivière Saguenay en passant par la centrale Chute à Caron (cercle 5) ou Shipsisaw (cercle 6) et continuer son périple jusqu'au fleuve St-Laurent pour aboutir finalement dans l'océan Atlantique. La capacité totale d'emmagasinement utile des trois réservoirs principaux est de  $13.31 \times 10^9 \text{ m}^3$ : Lac Manouane:  $2.66 \times 10^9 \text{ m}^3$ , Passes-Dangereuses:  $5.23 \times 10^9 \text{ m}^3$  et Lac Saint-Jean:  $5.42 \times 10^9 \text{ m}^3$ . Notons aussi que la capacité totale de production hydroélectrique des six centrales est de 2 687 MW.

## A.2 Les bassins versants

Le système hydroélectrique Alcan est alimenté en eau par six bassins versants (cf. Figure A.3). La superficie totale couverte par les bassins est de 73 800 Km<sup>2</sup>. Le point le plus au nord est distant du point le plus au sud d'environ 550 Km. Le bassin amont (16 000 km<sup>2</sup>) correspond au regroupement des bassins versant Lac Manouane et Chutes-des-Passes. Le bassin aval (57 000 km<sup>2</sup>) correspond au regroupement des bassins versant Chute du Diable, Chute à la Savane et Lac Saint-Jean. Notons que les apports non contrôlés du bassin aval excluent l'eau déversée du bassin amont (par la centrale Chutes-des-Passes ou ses déversoirs) vers le bassin aval. Le bassin total (73 000 km<sup>2</sup>) correspond au regroupement des bassins amont et aval. Notons que le bassin versant Shipshaw/Chute-à-Caron est de superficie négligeable par rapport aux autres et qu'il ne fait partie ni du bassin amont, ni du bassin aval. Notons aussi que 75% de l'eau qui parvient au lac Saint-Jean n'est aucunement contrôlée, alors que le reste (25%) est géré par la centrale Chutes-des-Passes.

## A.3 Le réseau hydro-météorologique

Le réseau hydrométrique (cf. Figure A.4) est composé de quinze stations réparties surtout autour et près du lac Saint-Jean, le long de la rivière Péribonka et au réservoir Manouane pour des raisons d'accessibilité. Les stations associées aux réservoirs fournissent des mesures journalières de hauteur d'eau pour le calcul des apports naturels à partir de l'équation du bilan hydrique, alors que les stations associées aux rivières fournissent des mesures de hauteur pour le calcul du débit des rivières. La source majeure d'incertitude et de variabilité est due aux conditions météorologiques observées sur les bassins. Le réseau météorologique utilisé par SÉCAL est composé d'environ 33 stations réparties surtout dans la partie aval du bassin et plus particulièrement autour du lac Saint-Jean (cf. Figure A.5). Les variables météorologiques qui sont mesurées sur une base journalière sont les températures maximale, minimale et moyenne, les précipitations liquide (la pluie) et solide (neige et glace). Les mesures prises aux différentes stations sont utilisées pour le calcul par interpolation des valeurs moyennes (pour les différentes variables météorologiques) sur les bassins versants.

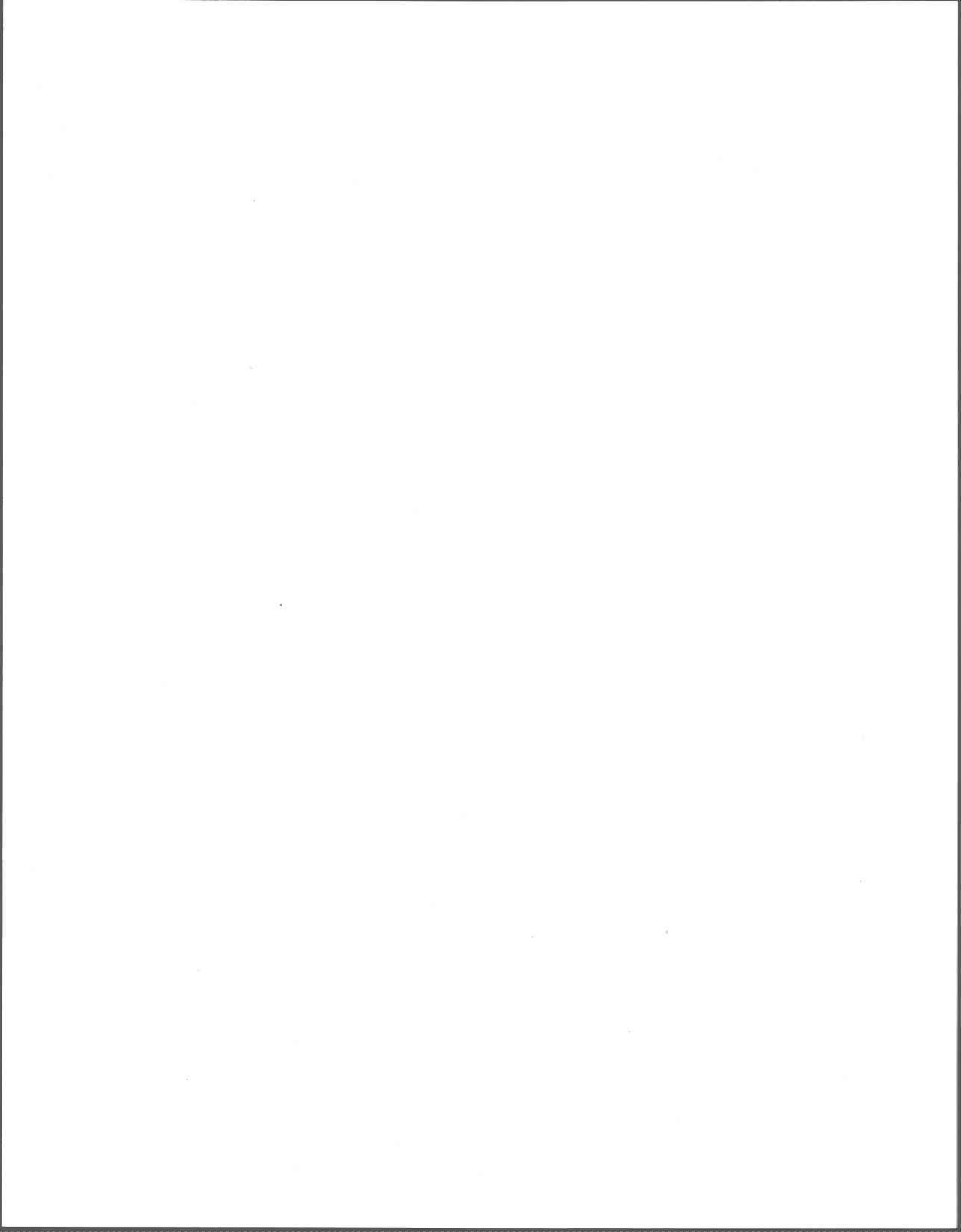
## A.4 Le réseau nivométrique

La Figure A.6 montre le réseau qui est utilisé pour effectuer les relevés de neige à la fin des mois de janvier, février et mars. On y mesure l'épaisseur, la densité et l'équivalent en eau de la neige. Le réseau est composé de vingt stations nivométriques. Par interpolation des

mesures effectuées aux stations, on obtient des valeurs moyennes pour les bassins versants; ces valeurs sont utilisées pour effectuer des prévisions sur les bassins. Notons que les pertes annuelles en eau par évapotranspiration peuvent être estimées à environ 1/3 des précipitations totales annuelles.

L'INRS ne détient pas les droits pour diffuser les cartes placées dans cette thèse. Vous pouvez les consulter dans la version papier présente sur les rayons de la bibliothèque de l'INRS-Ete

Voici la cote : ZZ1 LAP646 1999



## **ANNEXE B: DESCRIPTION DES SYSTÈMES DE PRÉVISIONS UTILISÉS**

---

### **B.1 Sélection des variables et de leur poids**

La variante de la régression non paramétrique (RNP) et l'approche des voisins les proches (VPP) que l'on utilise (cf. 9.4.2) requièrent un poids pour chaque variable explicative. Plus le poids d'une variable est élevé plus la pertinence de cette variable est importante et plus elle aura d'influence dans les modèles de prévision. Si une variable n'est pas significative, on lui attribuera un poids de 0.

L'approche proposée ici pour la sélection des poids des variables explicatives est la même pour les deux méthodes de prévision (RNP et VPP). Le but visé par cette approche est de permettre l'utilisation des ces méthodes de prévision avec n'importe quel ensemble de variables explicatives; aucune restriction n'est imposée sur l'ensemble de variables en autant qu'il y ait au moins une variable qui soit pertinente. Ainsi, on peut retrouver de la redondance ou de fortes corrélations dans cet ensemble de variables explicatives. En cas de redondance, il n'a pas lieu d'enlever manuellement une des deux variables; la méthode de sélection des variables qui est proposée ci-dessous va éliminer une de ces deux variables automatiquement. En résumé, aucun filtrage des données n'est requis, ce qui facilite l'application des méthodes de prévision RNP et VPP.

L'approche utilisée pour la sélection des variables et de leur poids est basée sur la régression linéaire de type pas à pas (*forward*). La base de ce type de régression consiste à construire graduellement un modèle de régression linéaire multiple (en ajoutant les variables une à une) pour expliquer la variabilité d'une variable de prévision  $Y$  en utilisant les variables explicatives  $X_1, X_2, \dots, X_p$  (Weisberg, 1985). Pour déterminer si on doit ajouter une nouvelle variable dans un modèle en construction, on utilise la statistique  $SSR$  qui représente la réduction de la somme des erreurs au carré ( $SSE$ ) due à l'addition d'une variable dans le modèle étant donné les autres variables déjà considérées dans le modèle. Plus  $SSR$  est grand, plus la variable permet d'expliquer la variabilité résiduelle:

$$SSR(X_{k_i} | X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_{i-1}}) = SSE(X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_{i-1}}) - SSE(X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_{i-1}}, X_{k_i})$$

La variabilité totale  $SYY$  de la variable de prévision  $Y$  est équivalente à  $SSE$  lorsqu'il n'y pas de variables dans le modèle. Le test  $F$  partiel est utilisé pour vérifier si le coefficient de régression d'une variable est significativement différent de zéro. La statistique du test est donnée par:

$$F^* = \frac{SSR(X_{k_i} | X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_{i-1}})}{1} \div \frac{SSE(X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_{i-1}}, X_{k_i})}{N - (i + 1)} = \frac{MSR(X_{k_i} | X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_{i-1}})}{MSE(X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_{i-1}}, X_{k_i})}$$

où  $N$  est le nombre de données historiques.  $F^*$  est distribuée selon une loi  $F$  de degré de liberté 1 et  $(N - (i + 1))$ ;  $F^* \sim F(1, N - (i + 1))$ . Plus la valeur de  $F^*$  est élevée plus la variable est significative.

L'approche adoptée ici est de considérer seulement les variables ayant été jugées pertinentes par la régression de type pas à pas et de déterminer leur poids en fonction de la diminution de  $SSE$  par l'ajout de cette variable dans le modèle étant donné l'ordre dans lequel les variables ont été ajoutées au modèle. On utilise la fonction de pondération suivante pour déterminer le poids d'une variable  $X_{k_i}$  ajoutée au rang  $k_i$ :

$$W_{k_i} = \sqrt{\frac{SSR(X_{k_i} | X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_{i-1}})}{SYY}}$$

Une fois que les poids des variables sont déterminés, on utilise la *distance Euclidienne pondérée* pour mesurer la similarité entre deux événements en fonction des valeurs prises par les variables explicatives; ce qui est permis à condition de standardiser les données, i.e., de soustraire la moyenne et de diviser par l'écart type. Cette distance est à la base des méthodes de prévision RNP et VPP qui ont été utilisées dans le cadre de ce travail. La distance Euclidienne pondérée entre deux ensembles de valeurs standardisées prises par les variables explicatives, soient  $x_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}\}$  et  $x_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp}\}$ , étant donné le vecteur de poids  $W_1, W_2, \dots, W_p$  est définie par:

$$D(x_i, x_j) = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^P W_p (x_{ip} - x_{jp})^2}{\sum_{p=1}^P W_p}}$$

## B.2 Régression non paramétrique

On utilise le lissage par noyau (*kernel smoothing*) comme méthode de régression non paramétrique (Härdle, 1990); c'est une procédure qui consiste à effectuer une moyenne locale en utilisant une fonction de pondération (le noyau). L'idée générale de cette méthode consiste à utiliser seulement les observations historiques qui sont proches (similaires) à l'événement actuel pour obtenir une prévision. L'application de cette méthode lorsqu'il y a plusieurs variables explicatives, comme dans le cas qui nous concerne, est difficilement envisageable lorsqu'il n'y a pas une très grande quantité de données. Par conséquent, on utilise une variante qui permet de se ramener au cas unidimensionnelle. À cette fin, on utilise la distance Euclidienne pondérée pour projeter l'espace des variables explicatives dans un espace de distances unidimensionnel avant d'appliquer la régression non paramétrique.

Soit  $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}, y_i\}$   $i=1, 2, \dots, N$  un ensemble d'observations historiques et soit  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  les valeurs prises par les variables explicatives pour l'événement actuel. La prévision de la valeur de  $Y$  pour l'événement actuel est définie par:

$$\frac{\sum_{i=1}^N K_h(D(x, x_i)) y_i}{\sum_{i=1}^N K_h(D(x, x_i))}$$

$$K_h(u) = \frac{K(u/h)}{h}$$

La fonction  $K$  est appelée le noyau et  $h$  est le paramètre de lissage de la méthode. La technique classique de validation croisée (*cross-validation*) a été utilisée pour estimer  $h$  (Härdle, 1990). De plus, le noyau normal a été considéré dans le cadre de ce travail:

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{h}\right)^2\right)$$

## B.3 Méthode des voisins les plus proches

La méthode des voisins les plus proches (Karlsson et Yakowitz, 1987) consiste à chercher dans l'ensemble des observations historiques les  $K$  voisins les plus proches de l'événement actuel et à effectuer une prévision en utilisant uniquement ces  $K$  voisins; la prévision est une



moyenne pondérée de ces voisins. Dans le cadre du présent projet, on a considéré les trois voisins les plus proches ( $K=3$ ). Pour la sélection des voisins, on utilise la distance Euclidienne pondérée.

Soit  $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}, y_i\}$   $i=1, 2, \dots, K$  les  $K$  voisins les plus proches de l'événement actuel  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ . La prévision de la valeur de  $Y$  pour l'événement actuel est définie par:

$$\frac{\sum_{i=1}^K P_i y_i}{\sum_{i=1}^K P_i}$$

où  $P_i$  est une fonction de pondération qui permet d'ajuster l'influence de chaque voisin. La fonction qui a été utilisée dans ce travail est définie par:

$$P_i = 1 - D(x, x_i) / D_{Moy}$$

où  $D(x, x_i)$  est la distance Euclidienne pondérée entre  $x$  et  $x_i$ , et  $D_{Moy}$  est la moyenne de toutes les distances Euclidienne pondérées entre les observations historiques et l'événement actuel.

# ANNEXE C: DISTRIBUTIONS DE POSSIBILITÉS A *PRIORI* ET CONDITIONNELLES POUR LES BASSINS DE SÉCAL

## C.1 Distributions de possibilités *a priori*

### C.1.1 Bassin amont

#### Volume

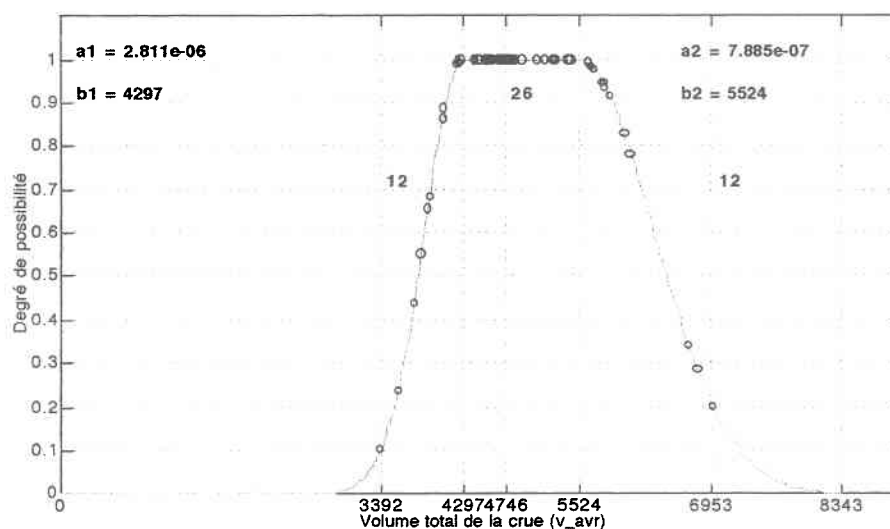
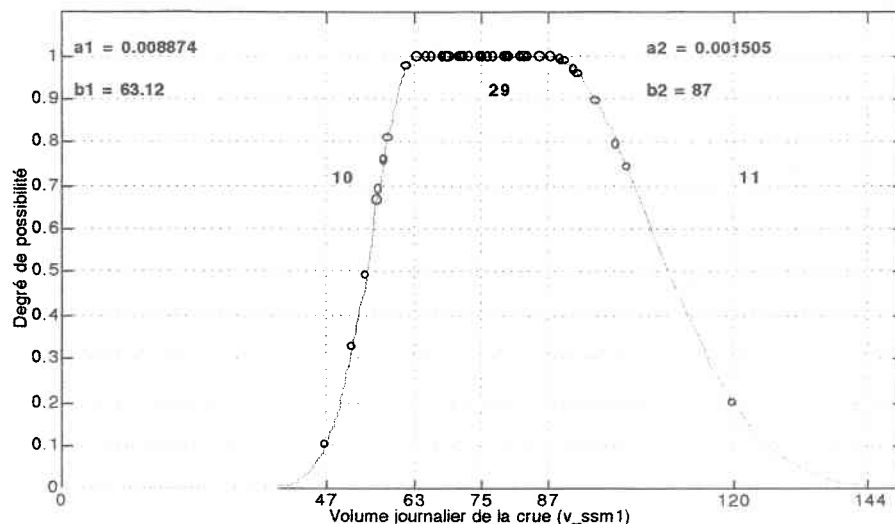
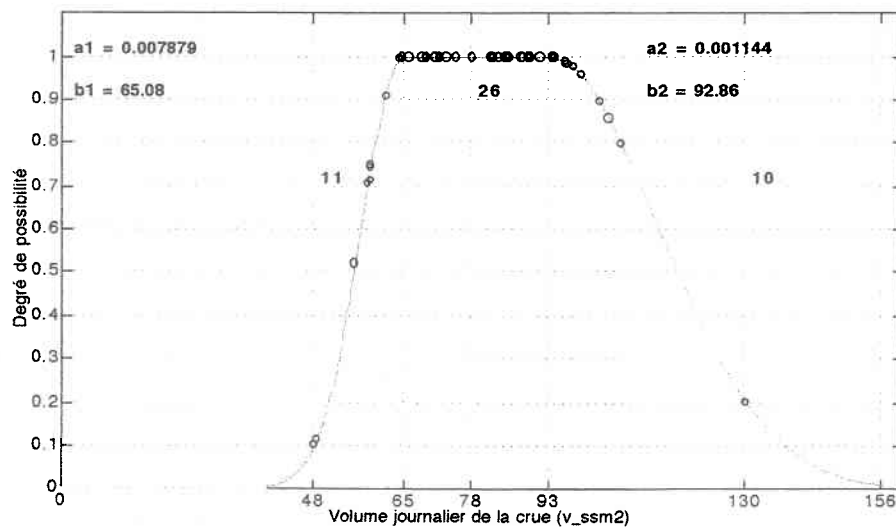


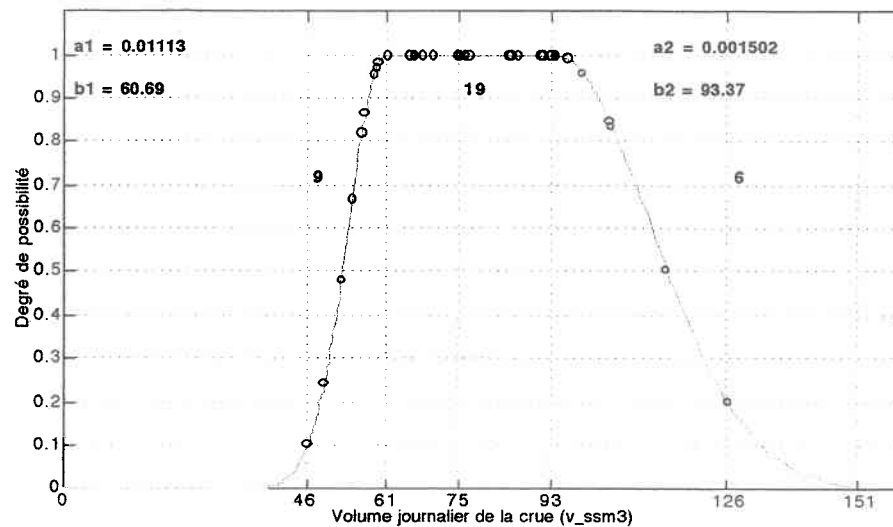
Figure C. 1: Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du volume total de la crue (en  $hm^3$ ).



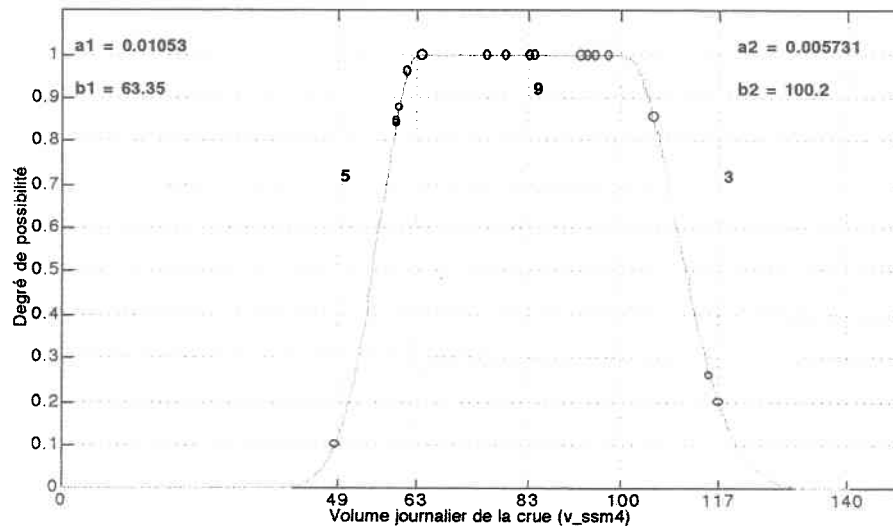
**Figure C. 2:** Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $hm^3$ ) au sous-stade montée 1.



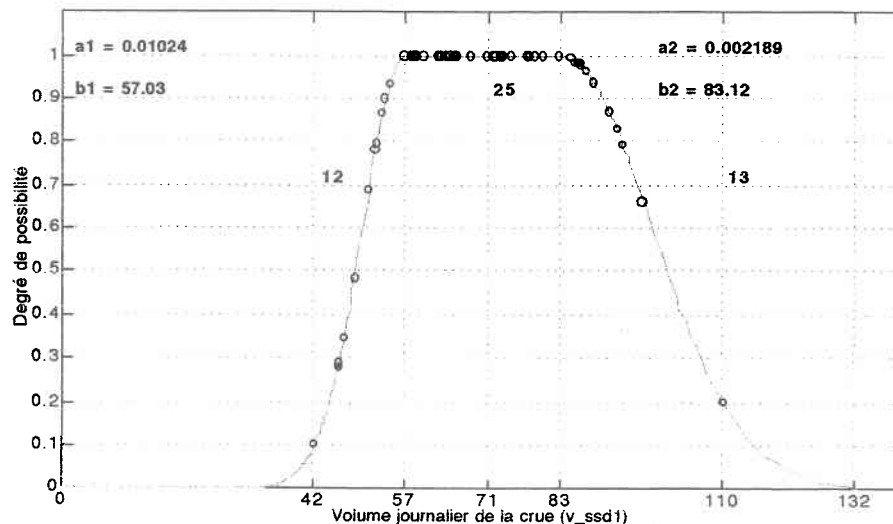
**Figure C. 3:** Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $hm^3$ ) au sous-stade montée 2.



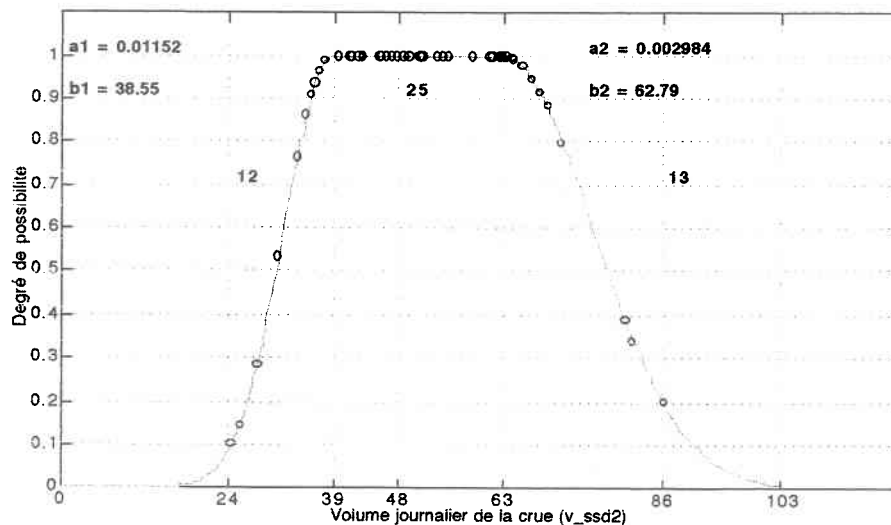
**Figure C. 4:** Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $hm^3$ ) au sous-stade montée 3.



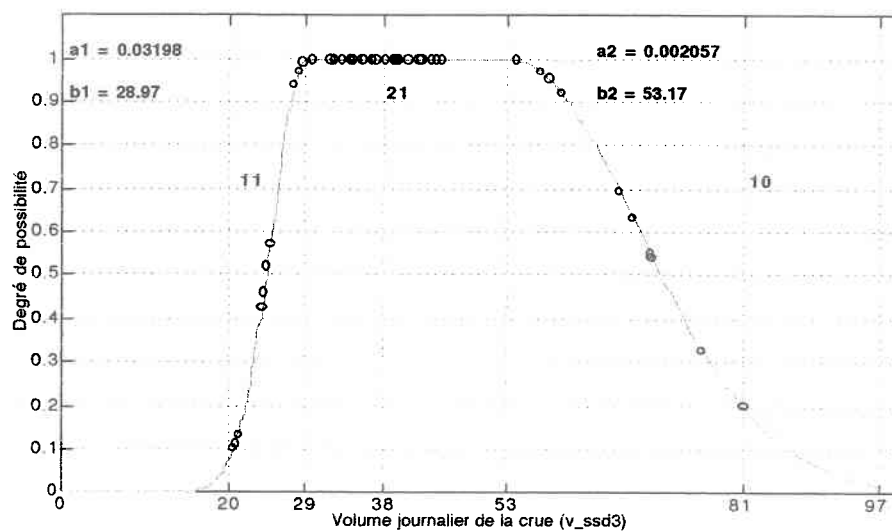
**Figure C. 5:** Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $hm^3$ ) au sous-stade montée 4.



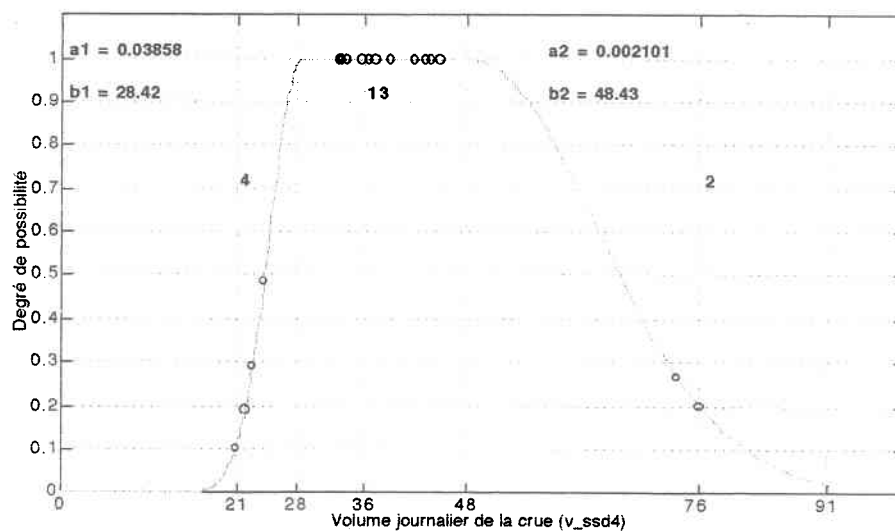
**Figure C. 6:** Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 1.



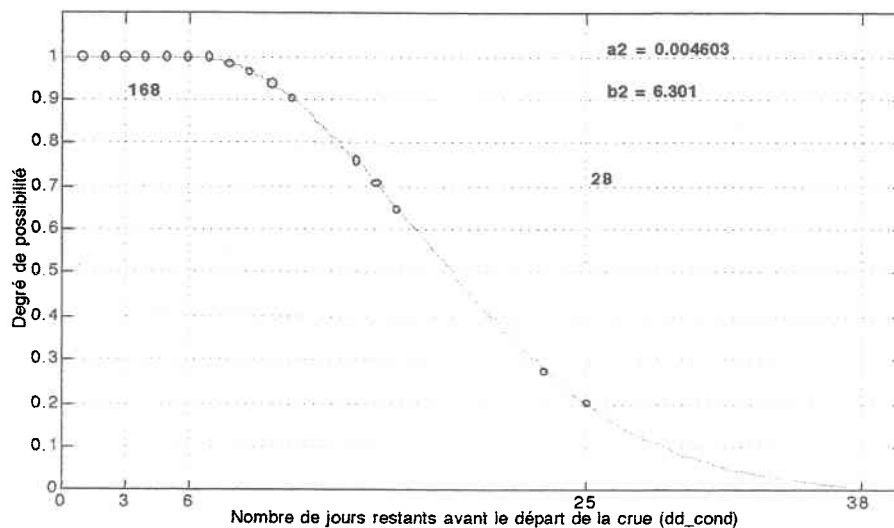
**Figure C. 7:** Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 2.



**Figure C. 8:** Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 3.

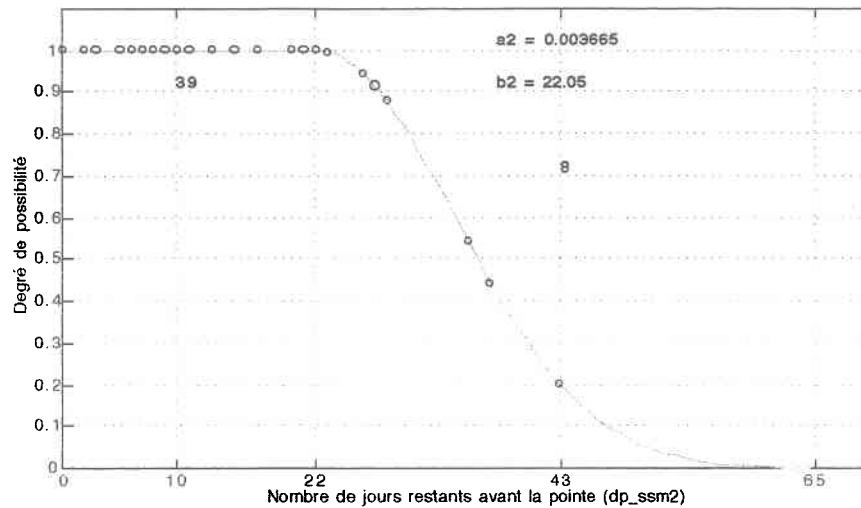


**Figure C. 9:** Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 4.

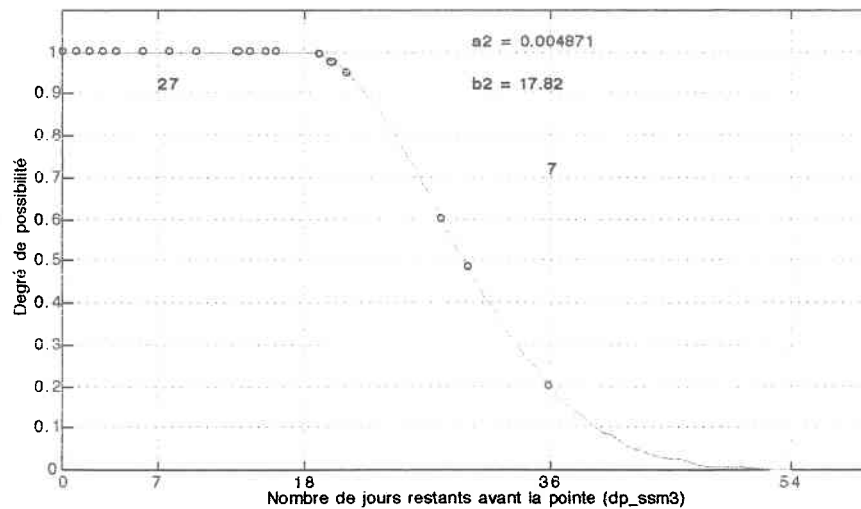
Date de départ

**Figure C. 10:** Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du nombre de jours restants avant le départ de la crue lorsque les conditions pour le départ éventuel sont satisfaites.

### Date de pointe

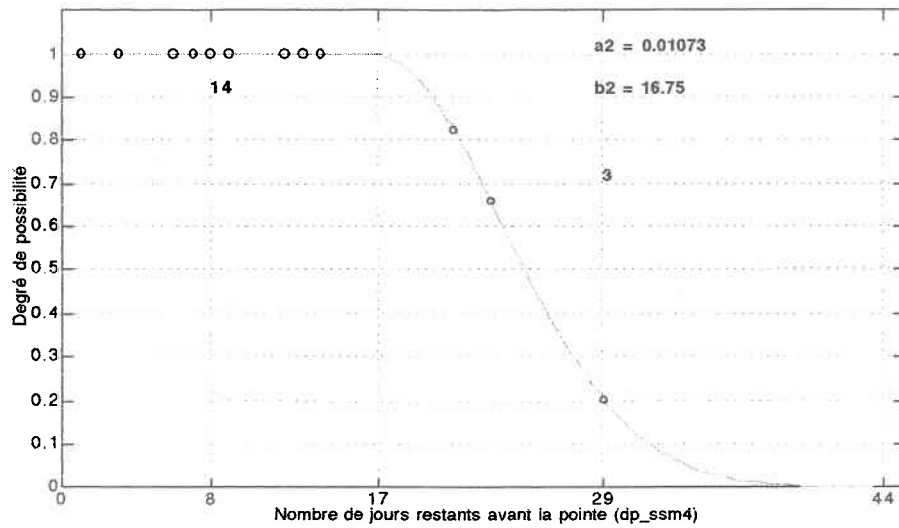


**Figure C. 11: Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 2.**



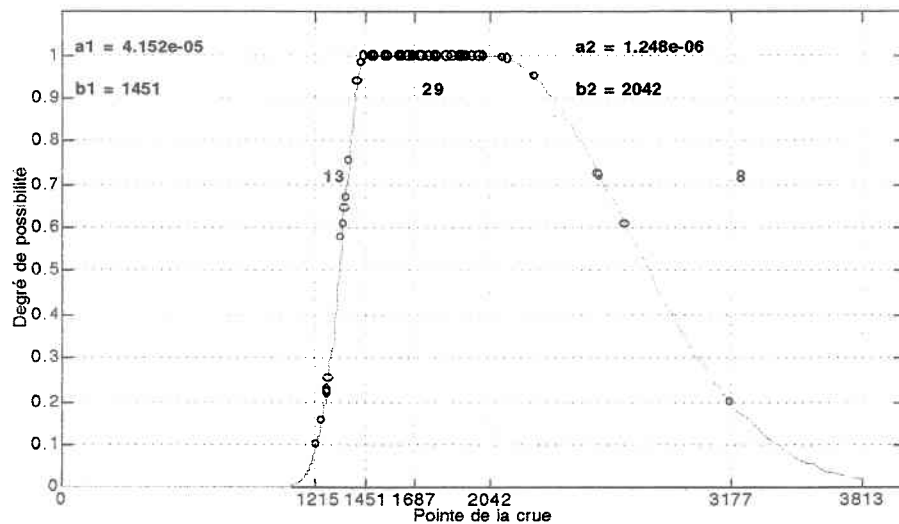
**Figure C. 12: Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 3.**





**Figure C. 13:** Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 4.

### Pointe



**Figure C. 14:** Bassin amont: Distribution de possibilités *a priori* de la pointe de la crue (en  $m^3/s$ ).

## C.1.2 Bassin aval

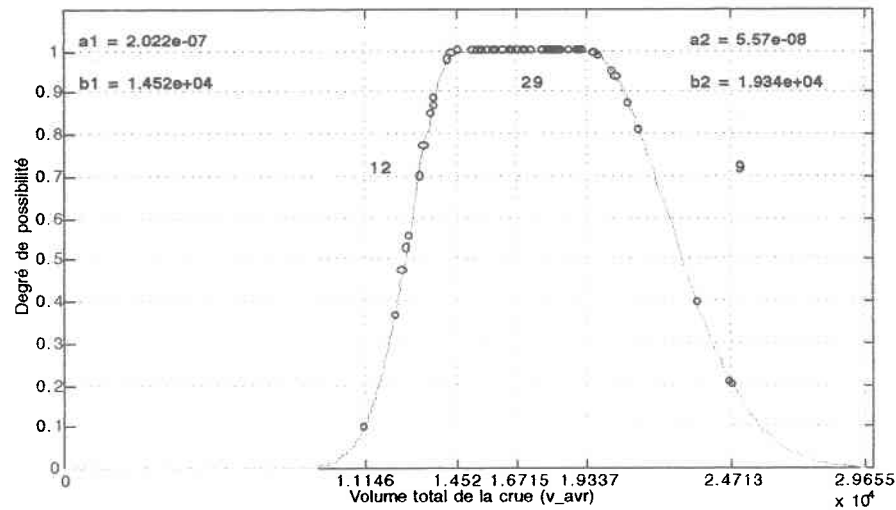
Volume

Figure C. 15: Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du volume total de la crue (en  $\text{hm}^3$ ).

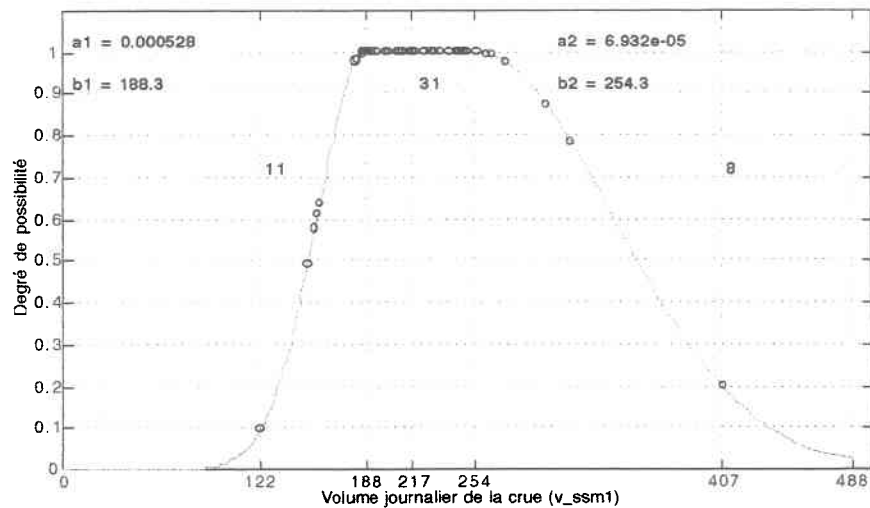


Figure C. 16: Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 1.

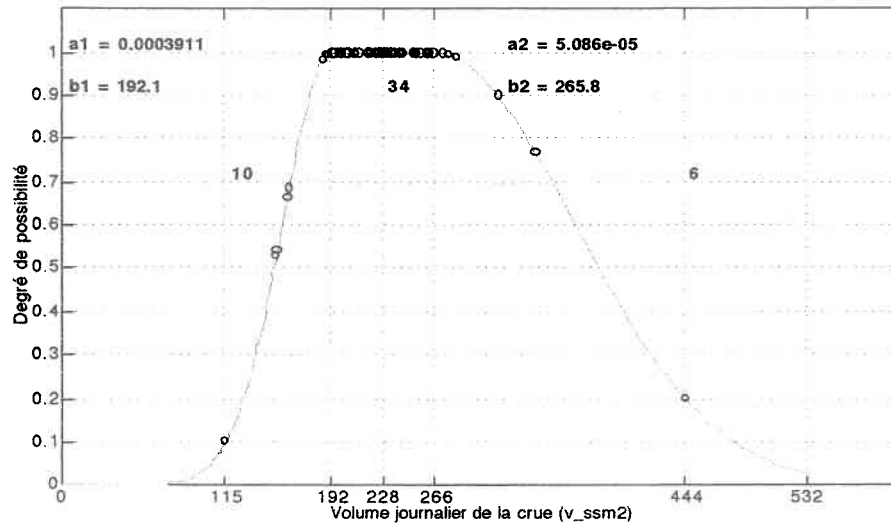


Figure C. 17: Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $hm^3$ ) au sous-stade montée 2.

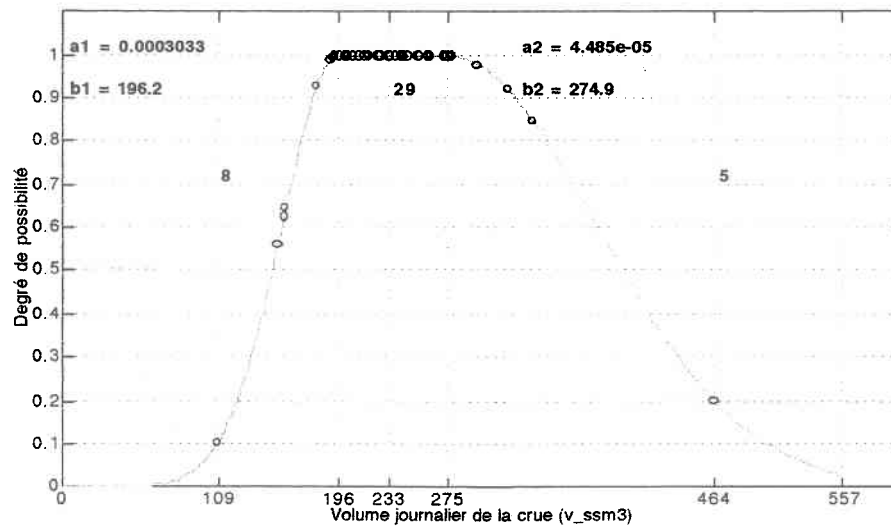
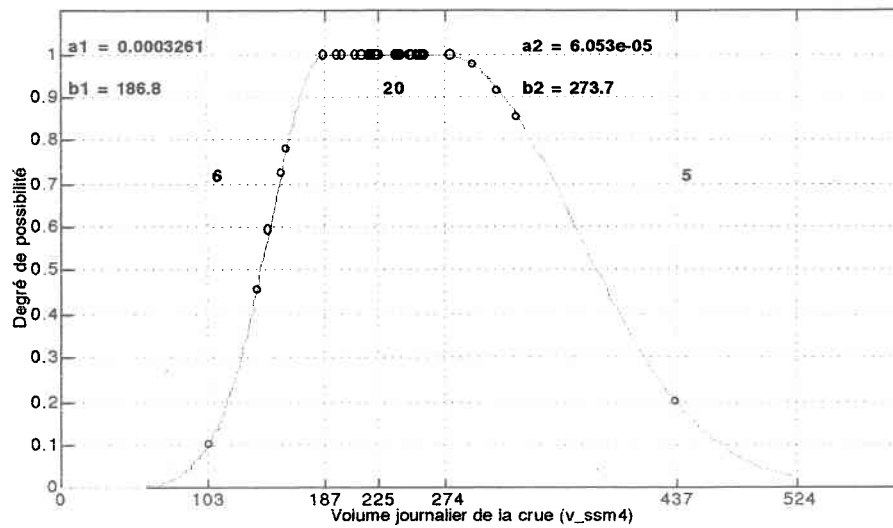
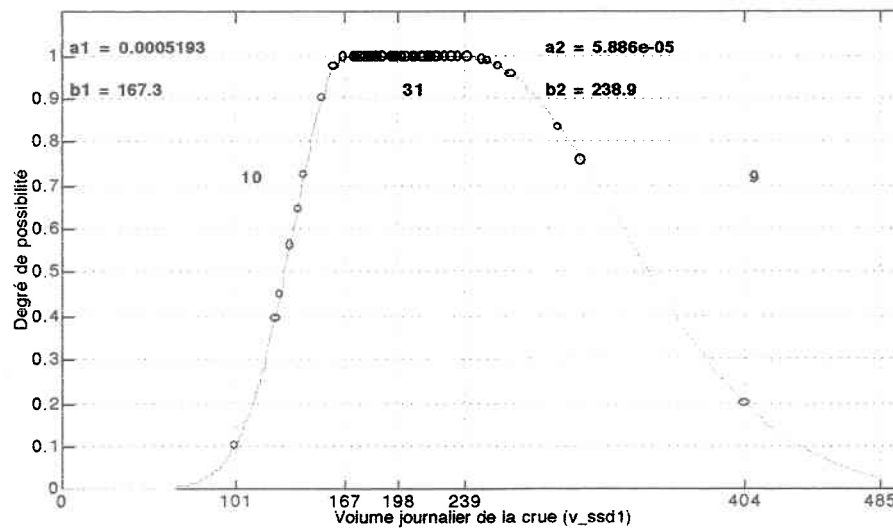


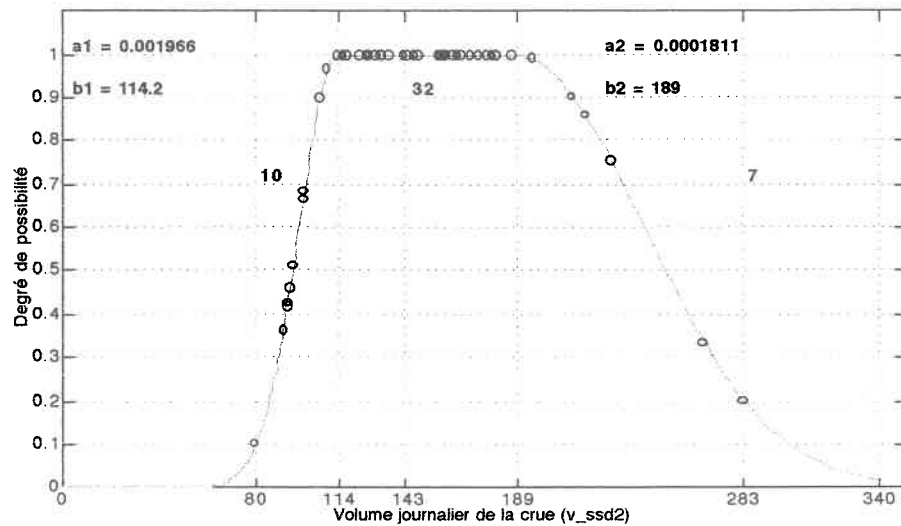
Figure C. 18: Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $hm^3$ ) au sous-stade montée 3.



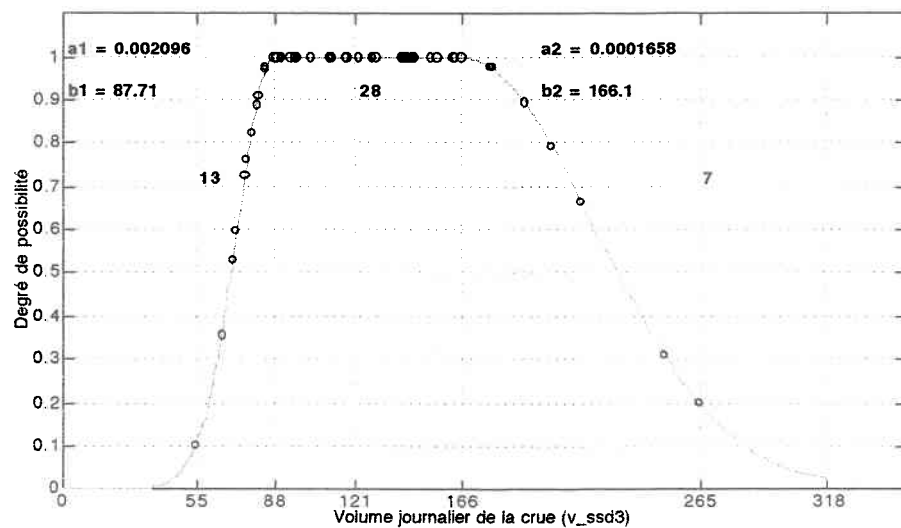
**Figure C. 19: Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 4.**



**Figure C. 20: Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 1.**



**Figure C. 21:** Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 2.



**Figure C. 22:** Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 3.

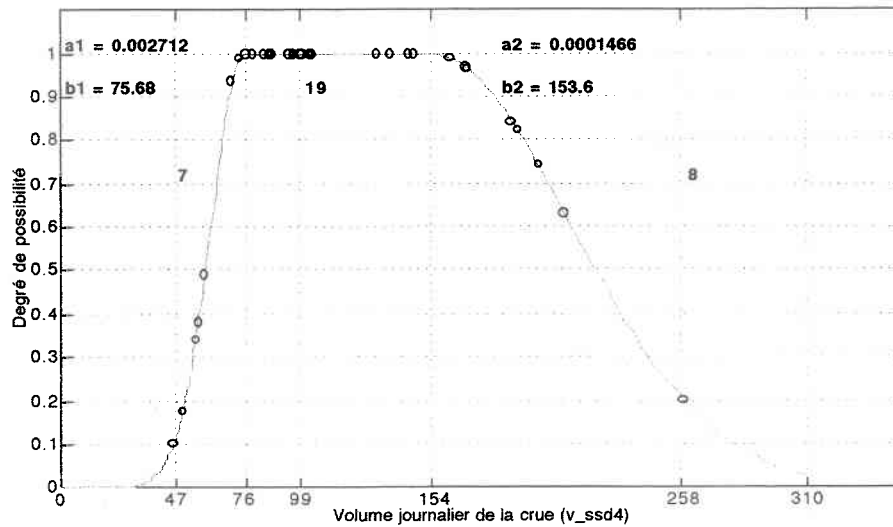


Figure C. 23: Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en hm<sup>3</sup>) au sous-stade descente 4.

### Date de pointe

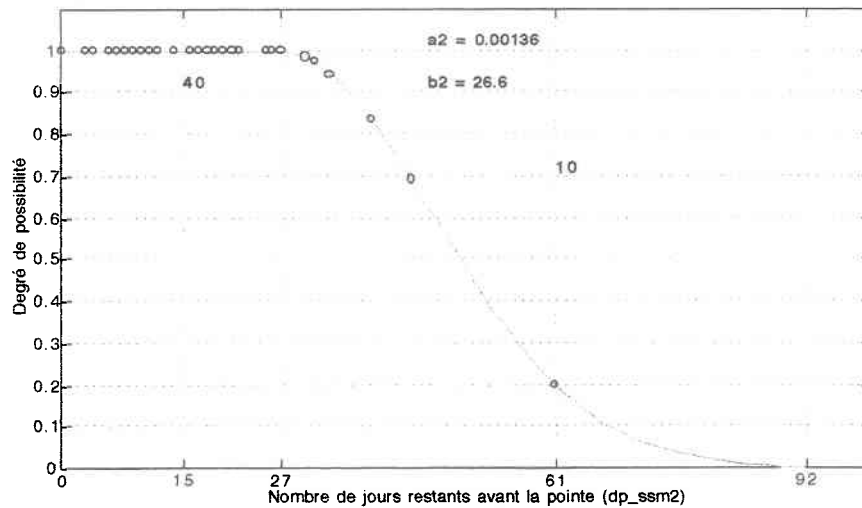
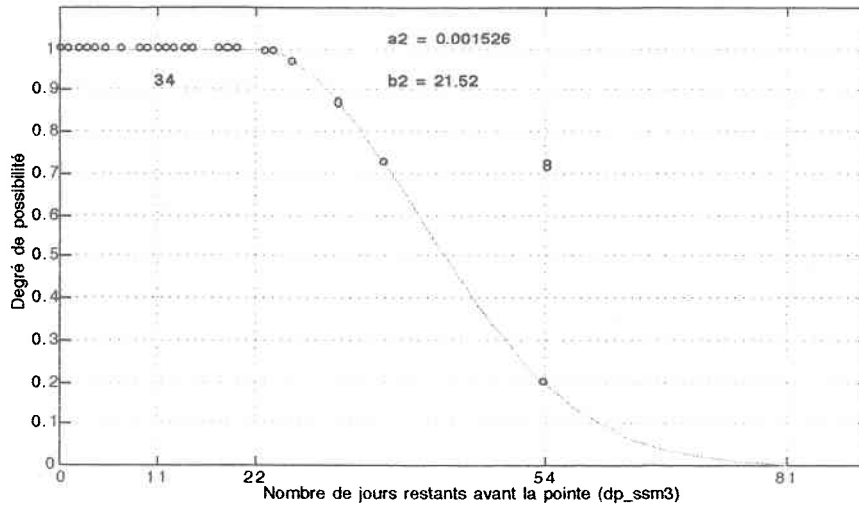
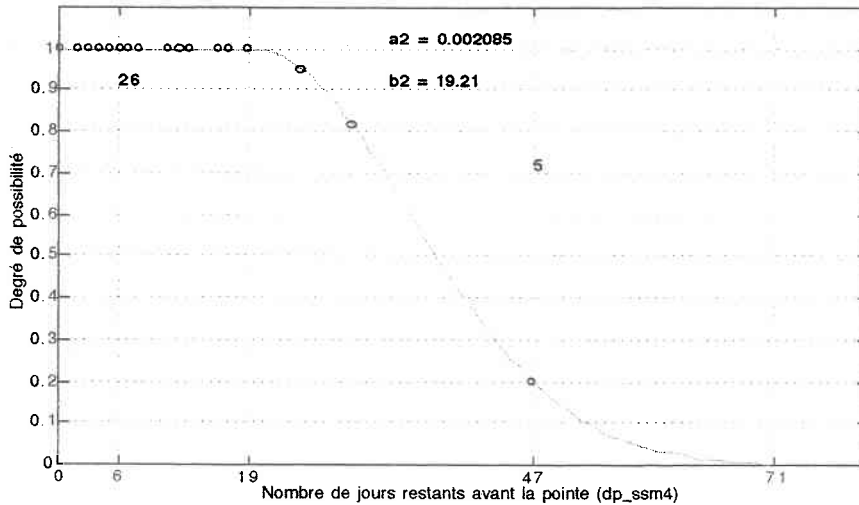


Figure C. 24: Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 2.

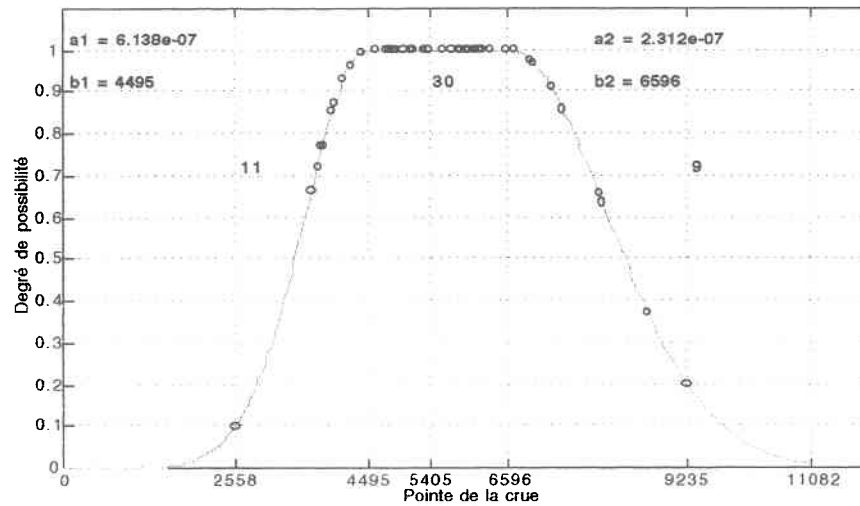


**Figure C. 25: Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 3.**



**Figure C. 26: Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 4.**

### Pointe



**Figure C. 27: Bassin aval: Distribution de possibilités *a priori* de la pointe de la crue (en  $m^3/s$ ).**



### C.1.3 Bassin total

#### Volume

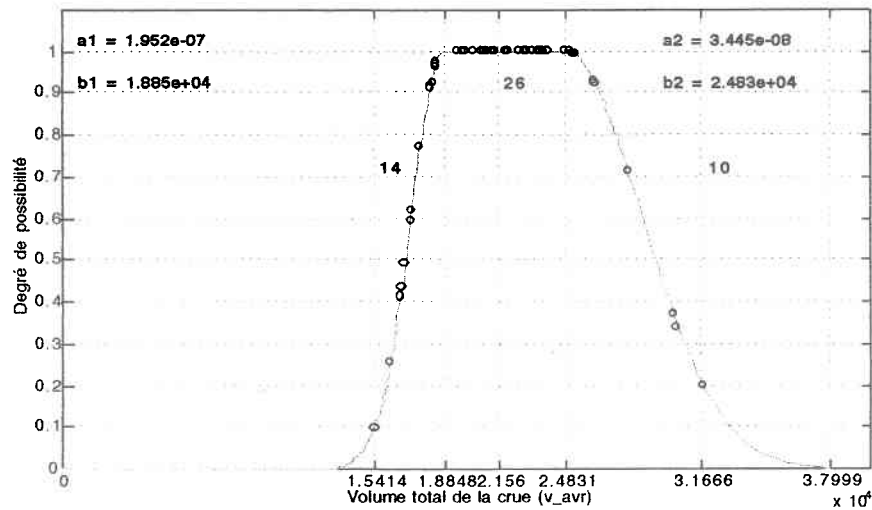


Figure C. 28: Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du volume total de la crue (en  $hm^3$ ).

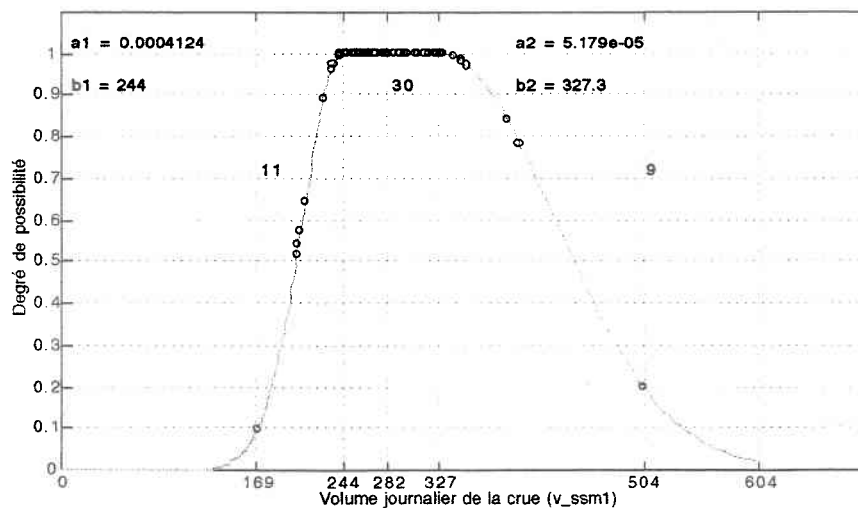
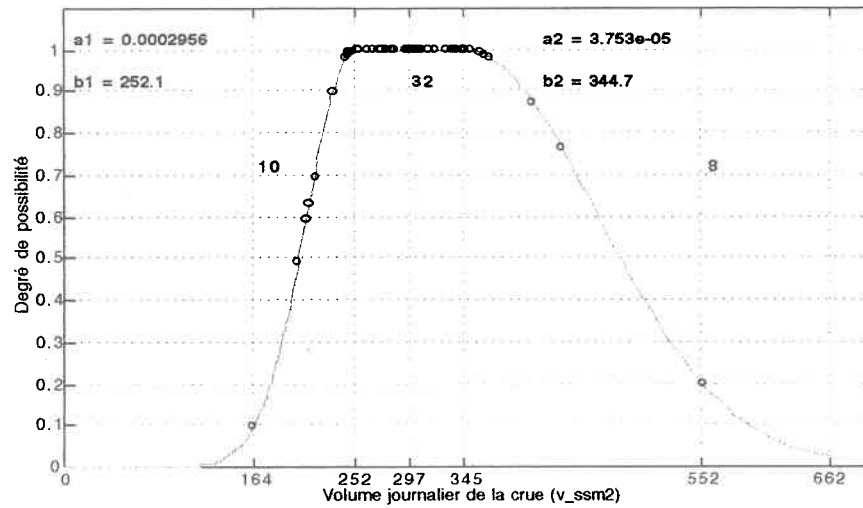
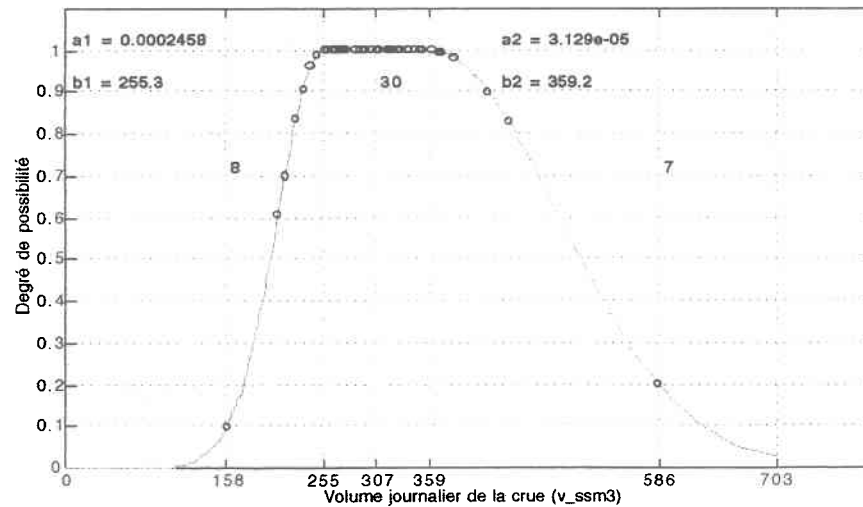


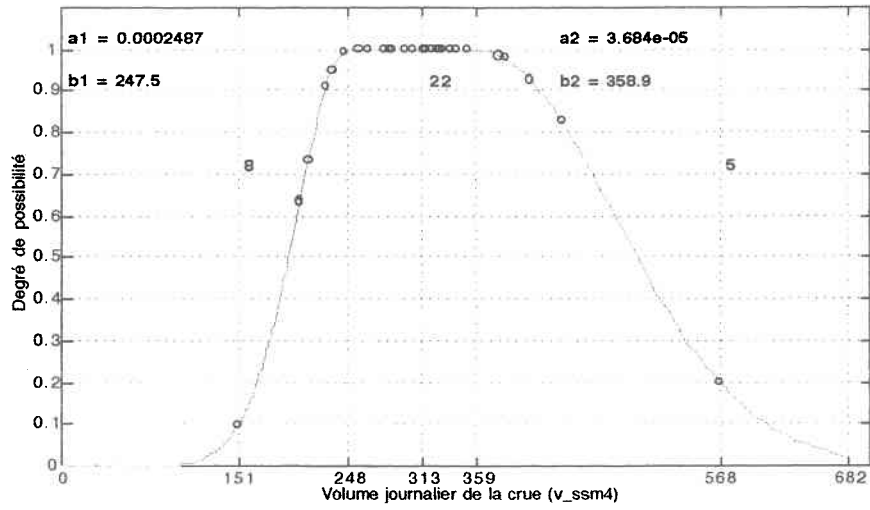
Figure C. 29: Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $hm^3$ ) au sous-stade montée 1.



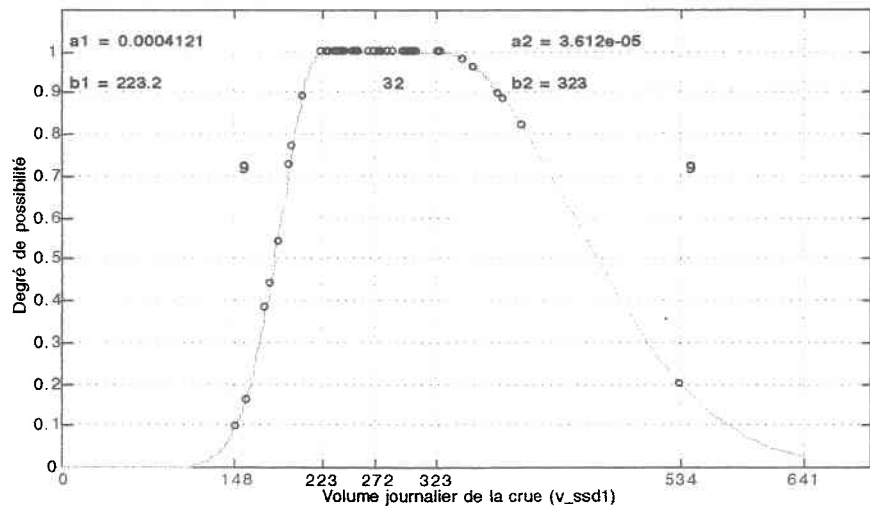
**Figure C. 30: Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 2 .**



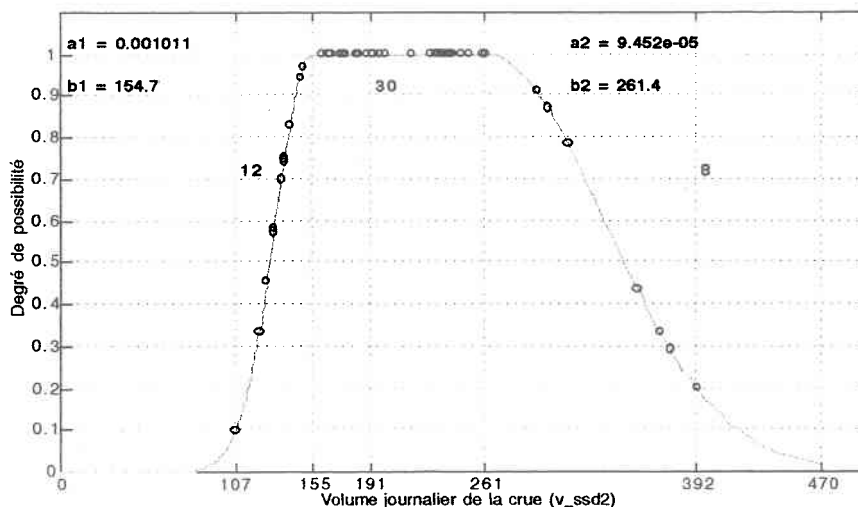
**Figure C. 31: Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 3 .**



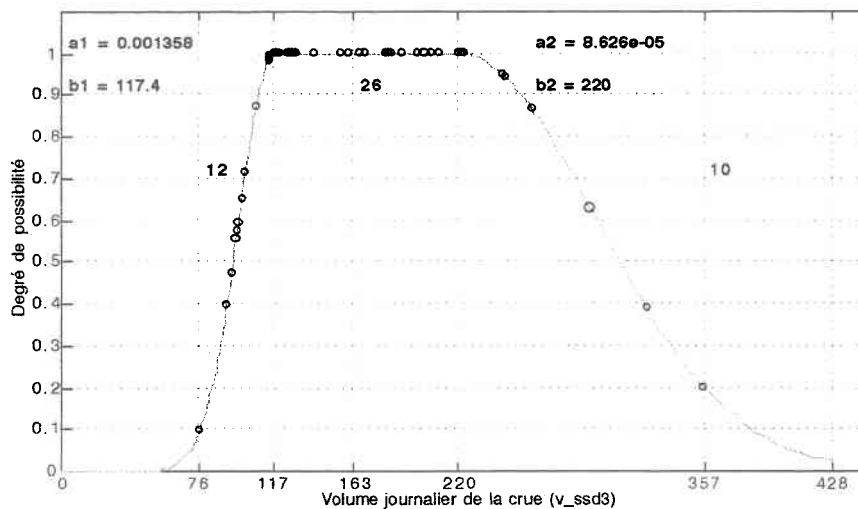
**Figure C. 32:** Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 4.



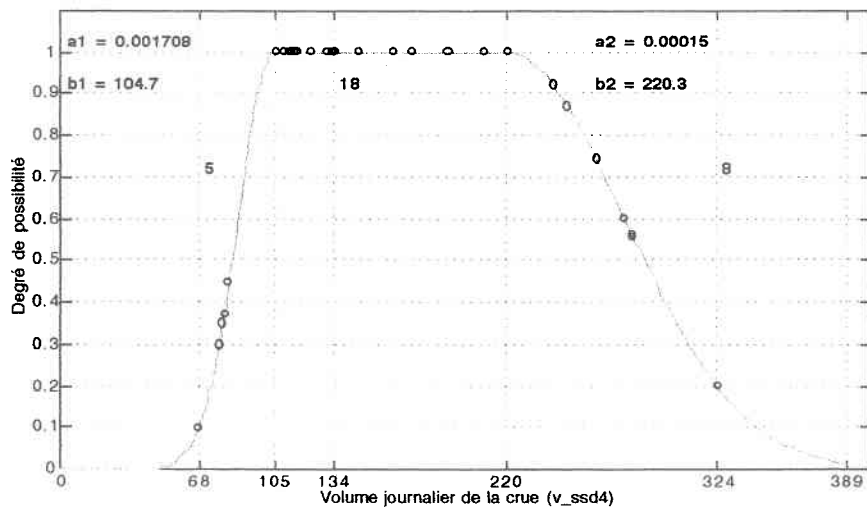
**Figure C. 33:** Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 1.



**Figure C. 34:** Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 2.

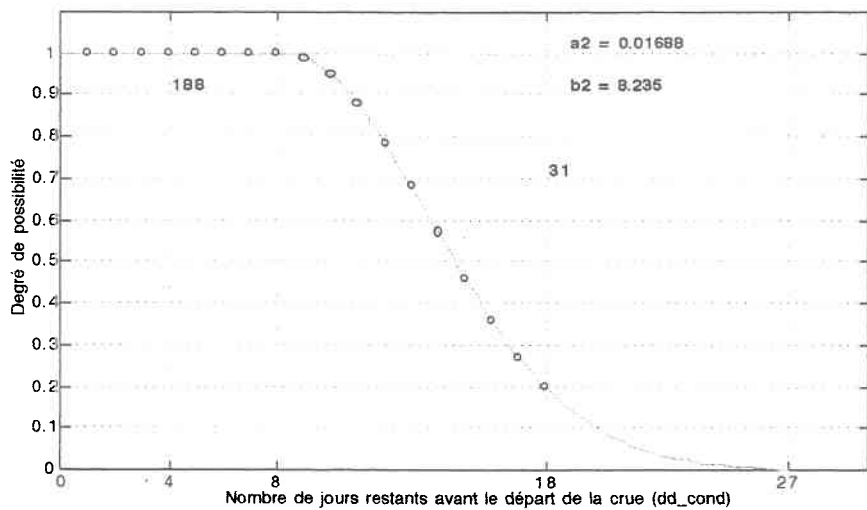


**Figure C. 35:** Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 3.

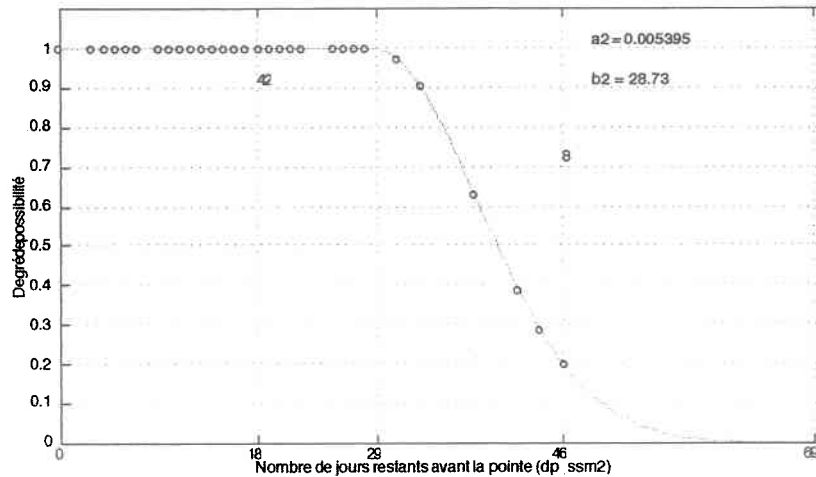


**Figure C. 36: Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 4.**

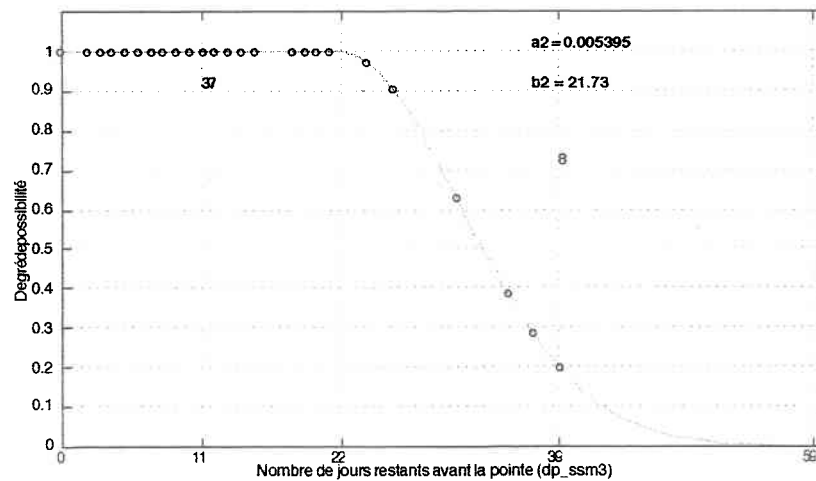
### Date de départ



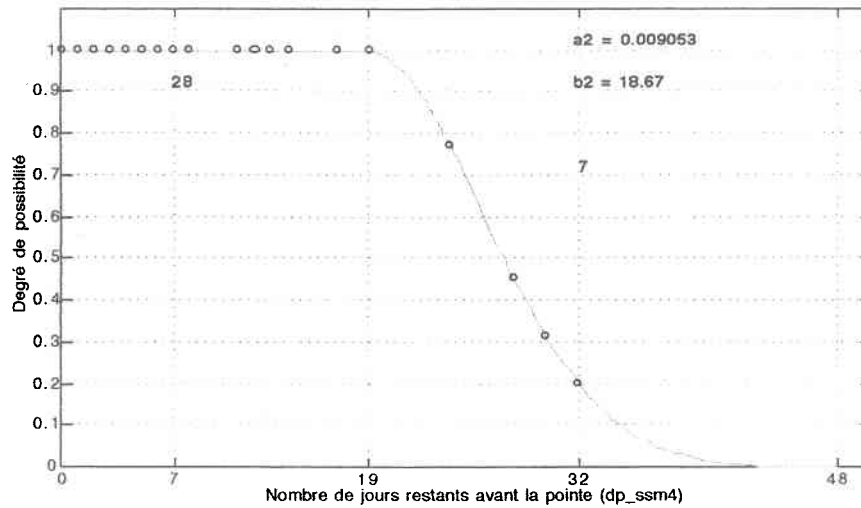
**Figure C. 37: Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du nombre de jours restants avant le départ de la crue lorsque les conditions pour le départ éventuel sont satisfaites.**

Date de pointe

**Figure C. 38:** Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 2.

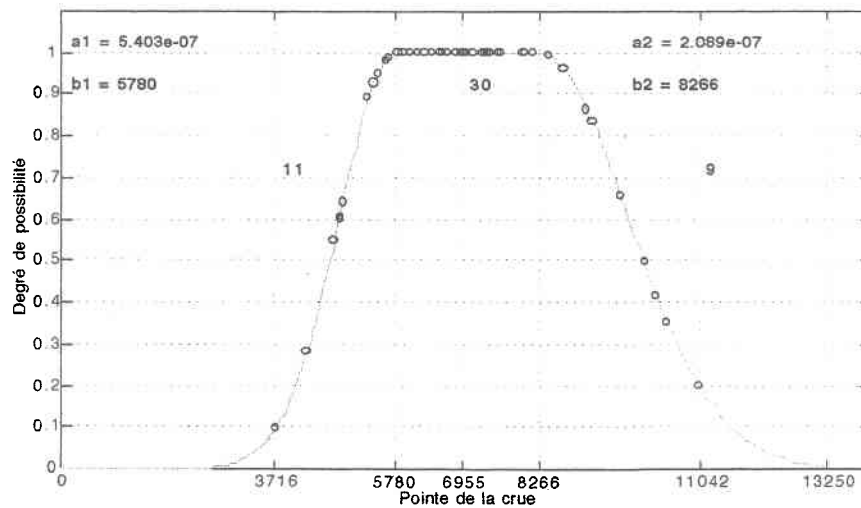


**Figure C. 39:** Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 3.



**Figure C. 40:** Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 4.

### Pointe

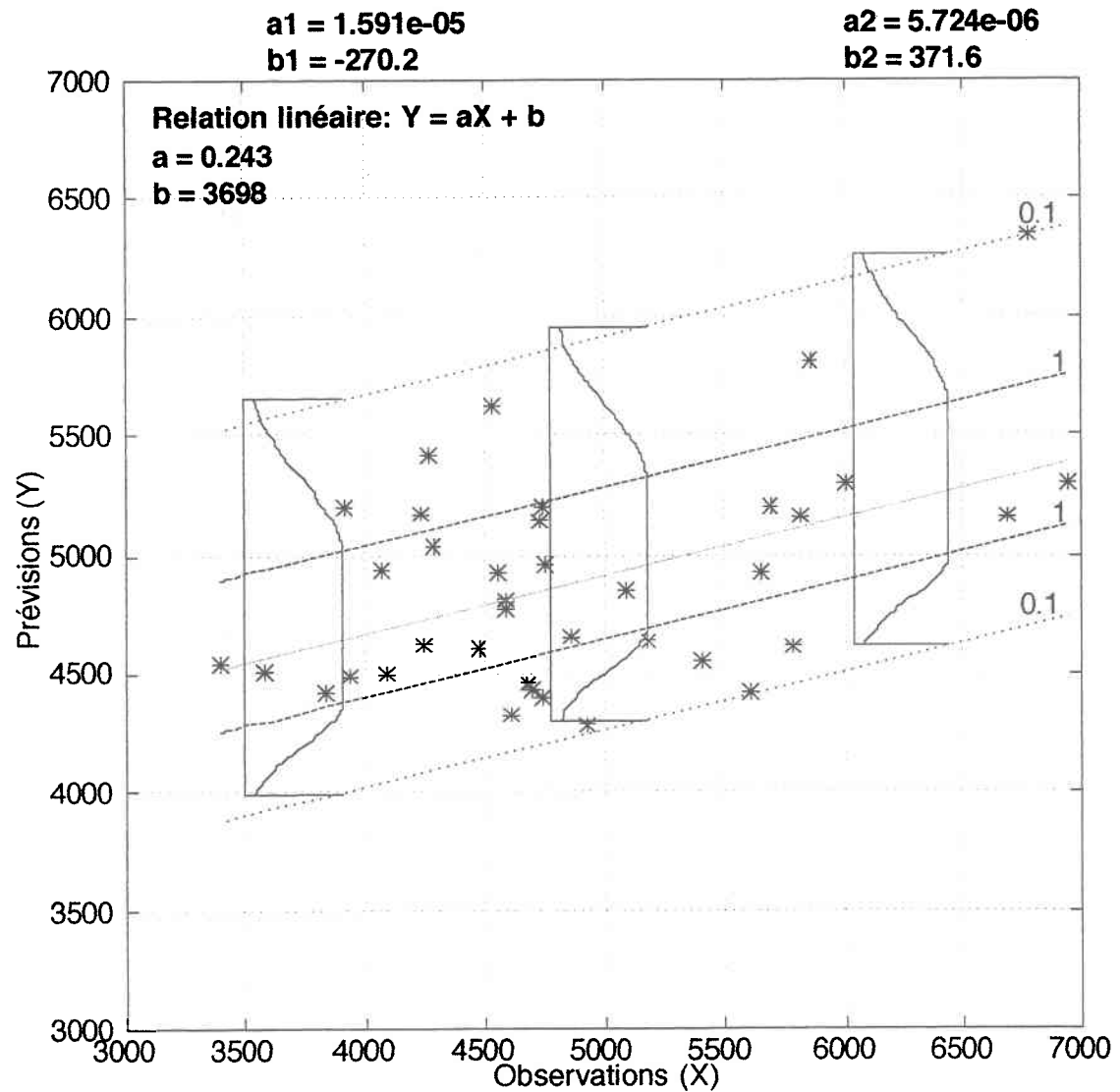


**Figure C. 41:** Bassin total: Distribution de possibilités *a priori* de la pointe de la crue (en m<sup>3</sup>/s).

## C.2 Distributions de possibilités conditionnelles

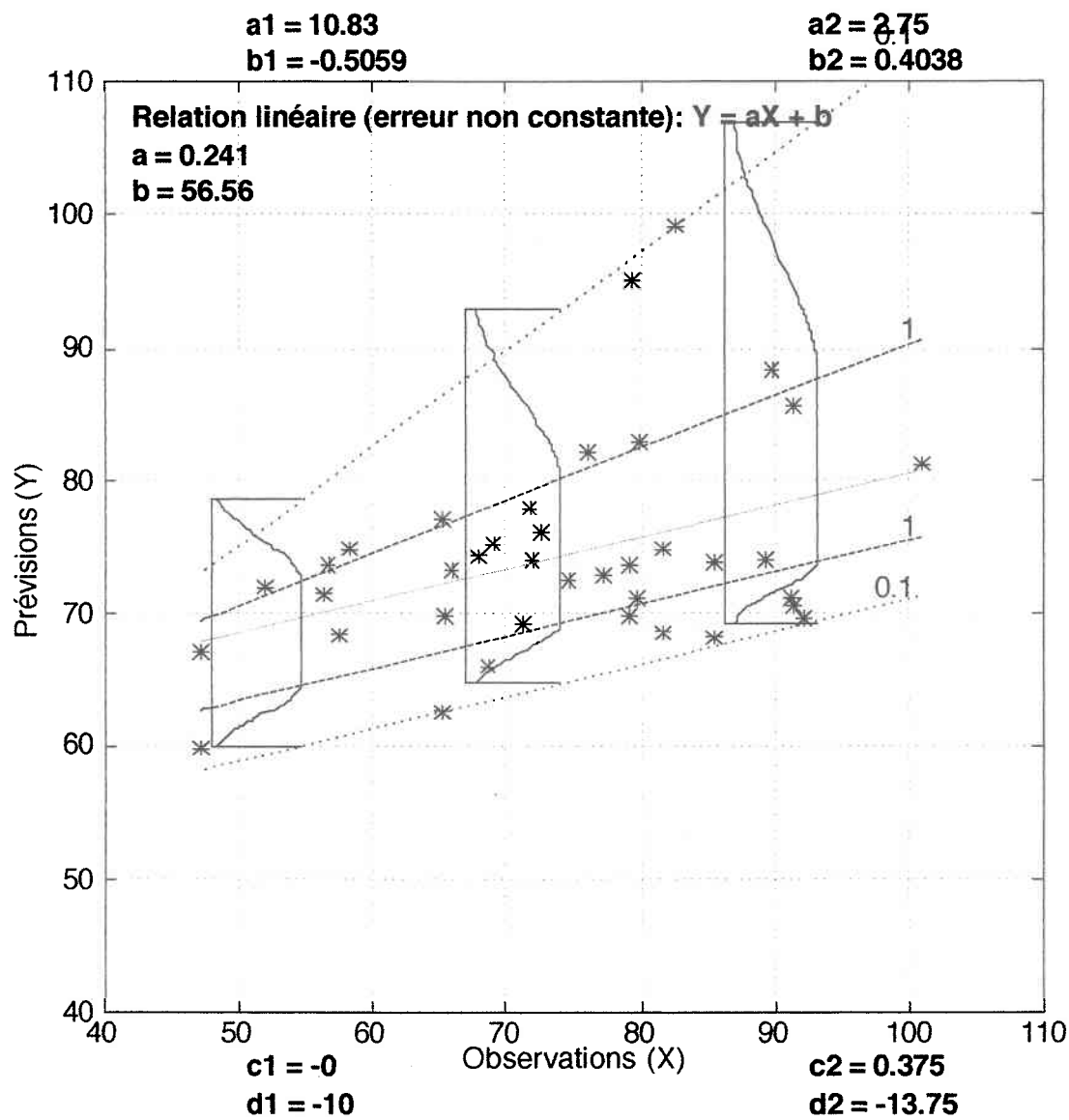
### C.2.1 Bassin amont

#### Volume

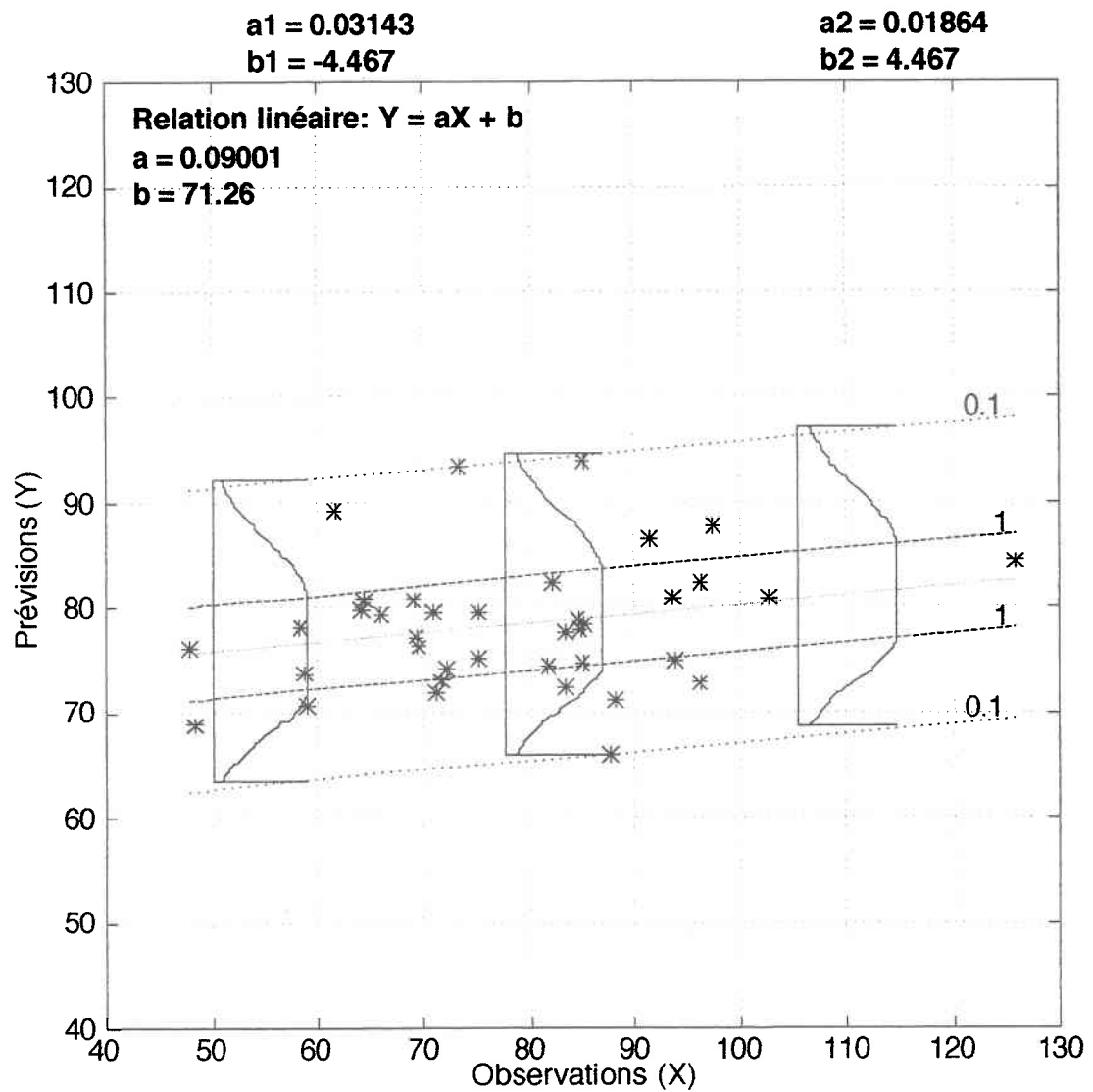


**Figure C. 42: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume total de la crue (en  $hm^3$ ) au 1<sup>er</sup> avril ( $v_{avr}$ ).**

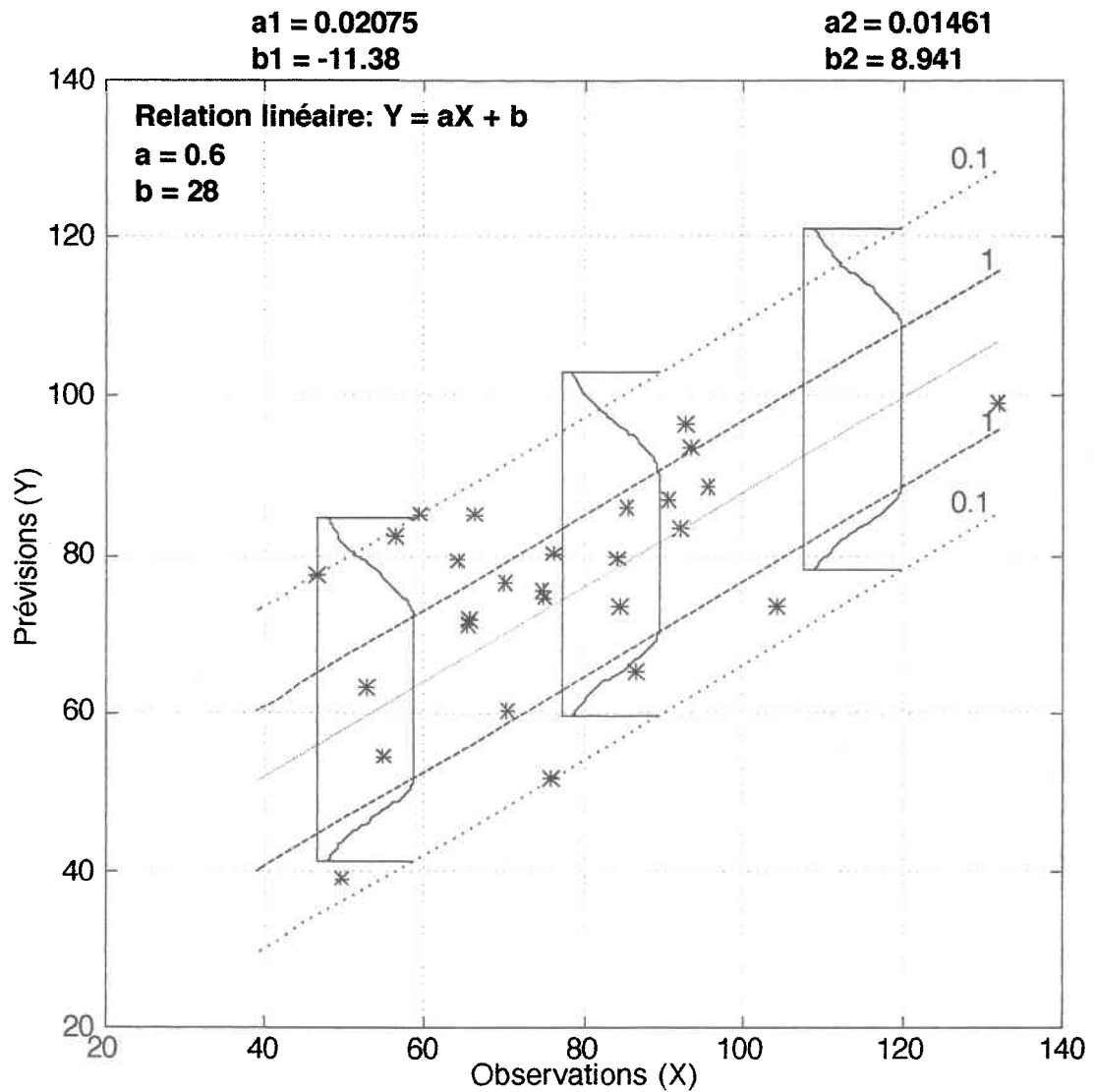




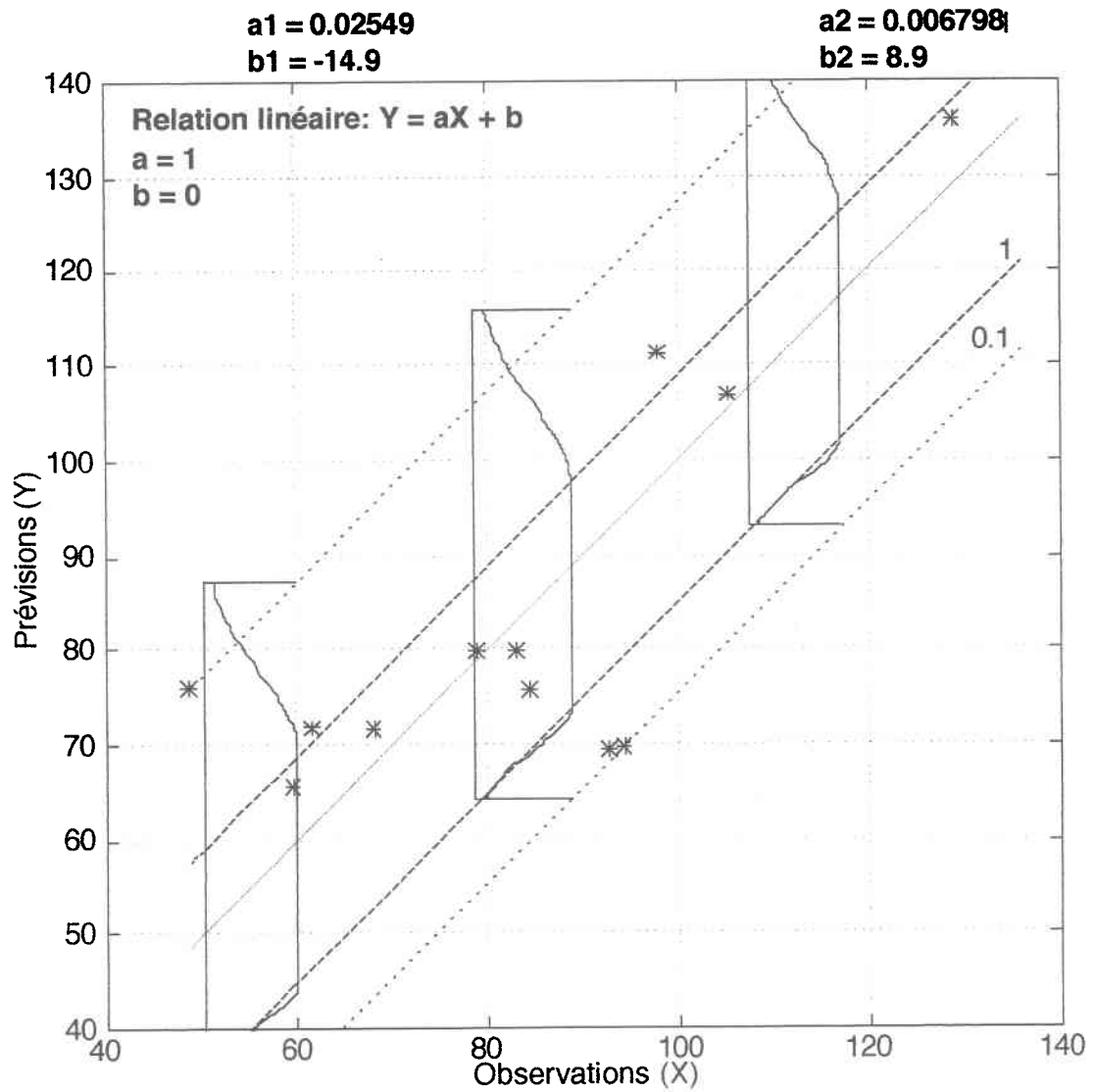
**Figure C. 43: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 1 ( $v_{\text{ssm1}}$ ).**



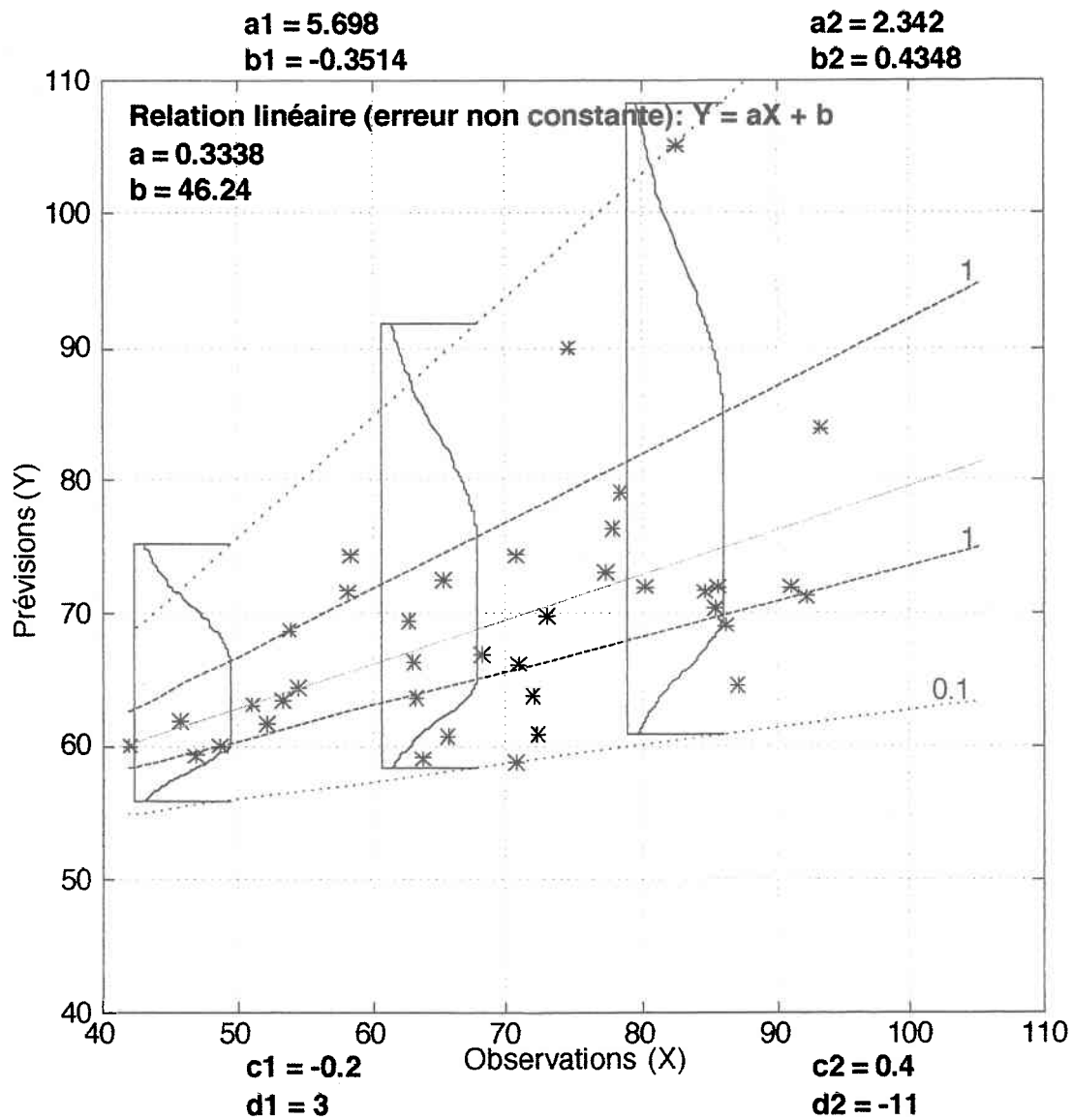
**Figure C. 44: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 2 ( $v\_ssm2$ ).**



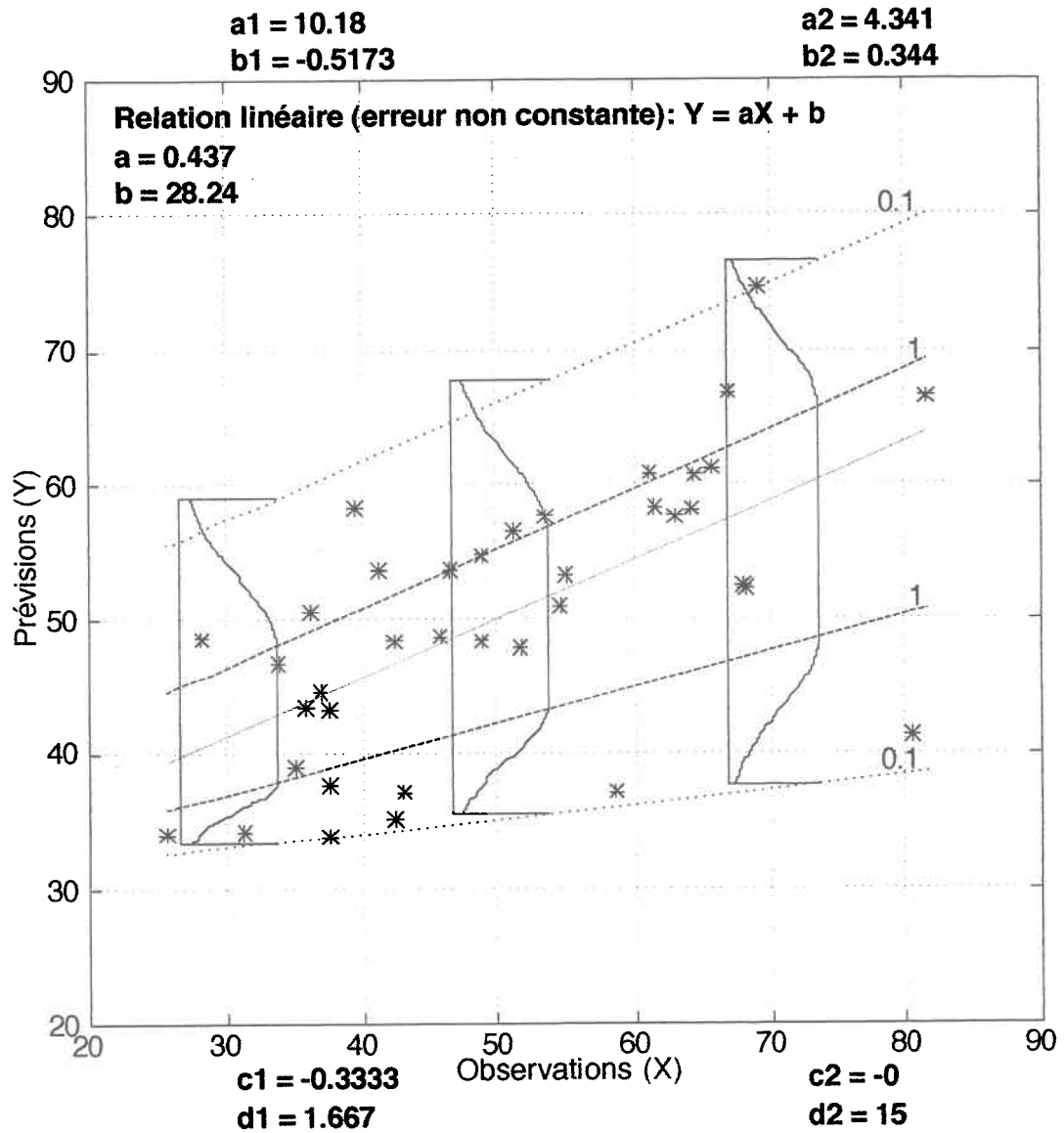
**Figure C. 45: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 3 ( $v\_ssm3$ ).**



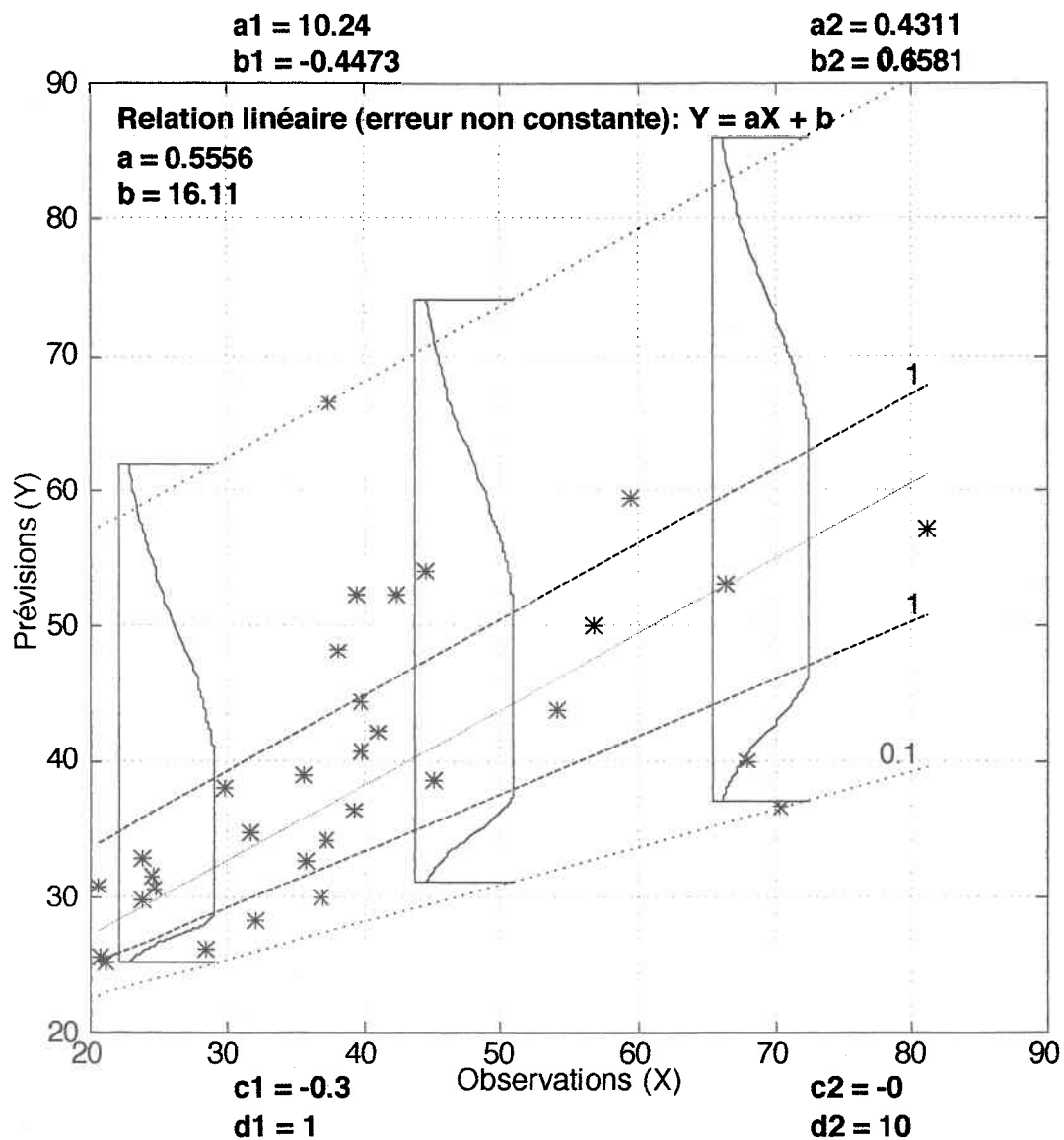
**Figure C. 46: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 4 ( $v_{\text{ssm}4}$ ).**



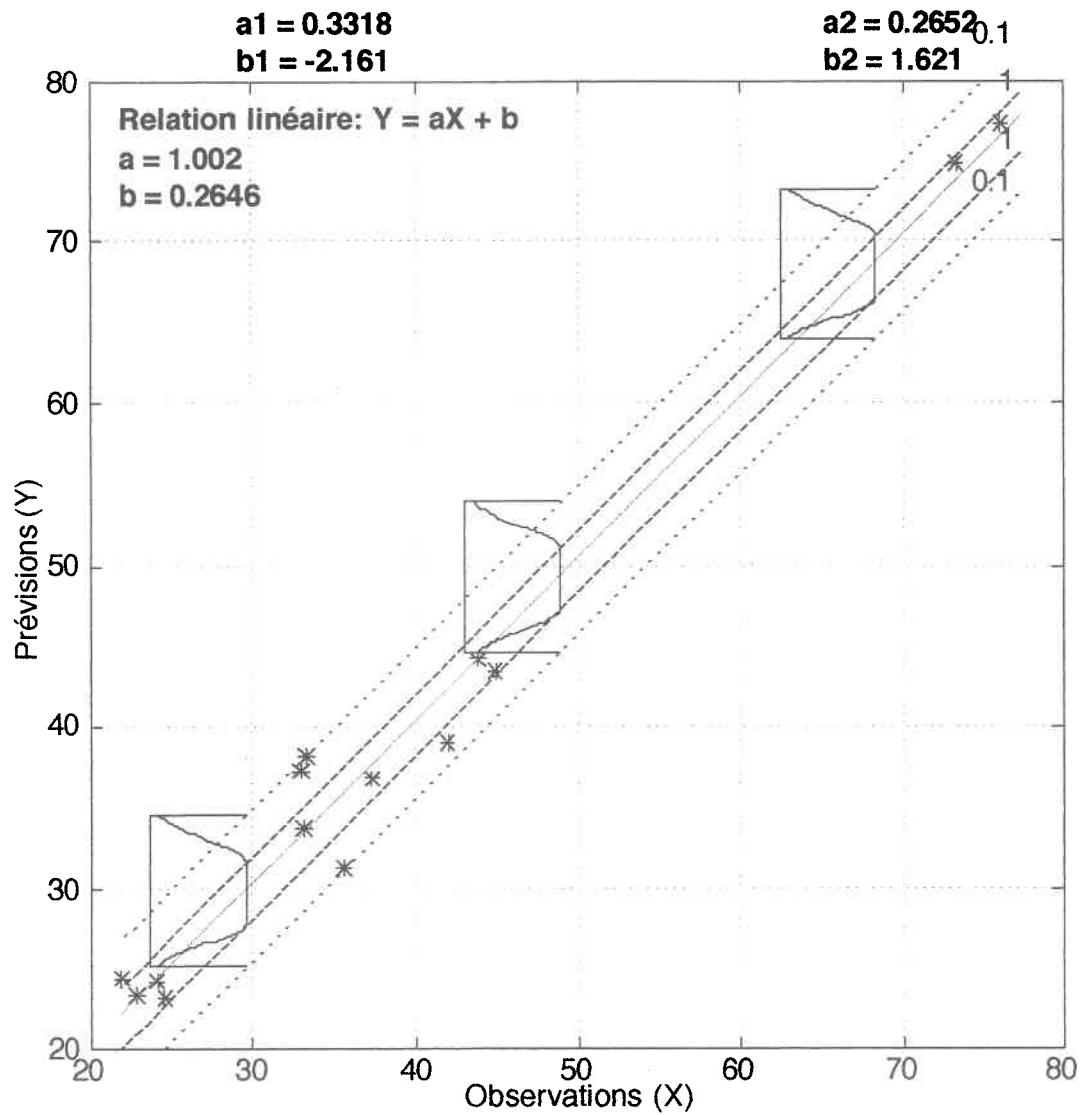
**Figure C. 47: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 1 ( $v_{\text{ssd1}}$ ).**



**Figure C. 48: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 2 ( $v_{\text{ssd}2}$ ).**

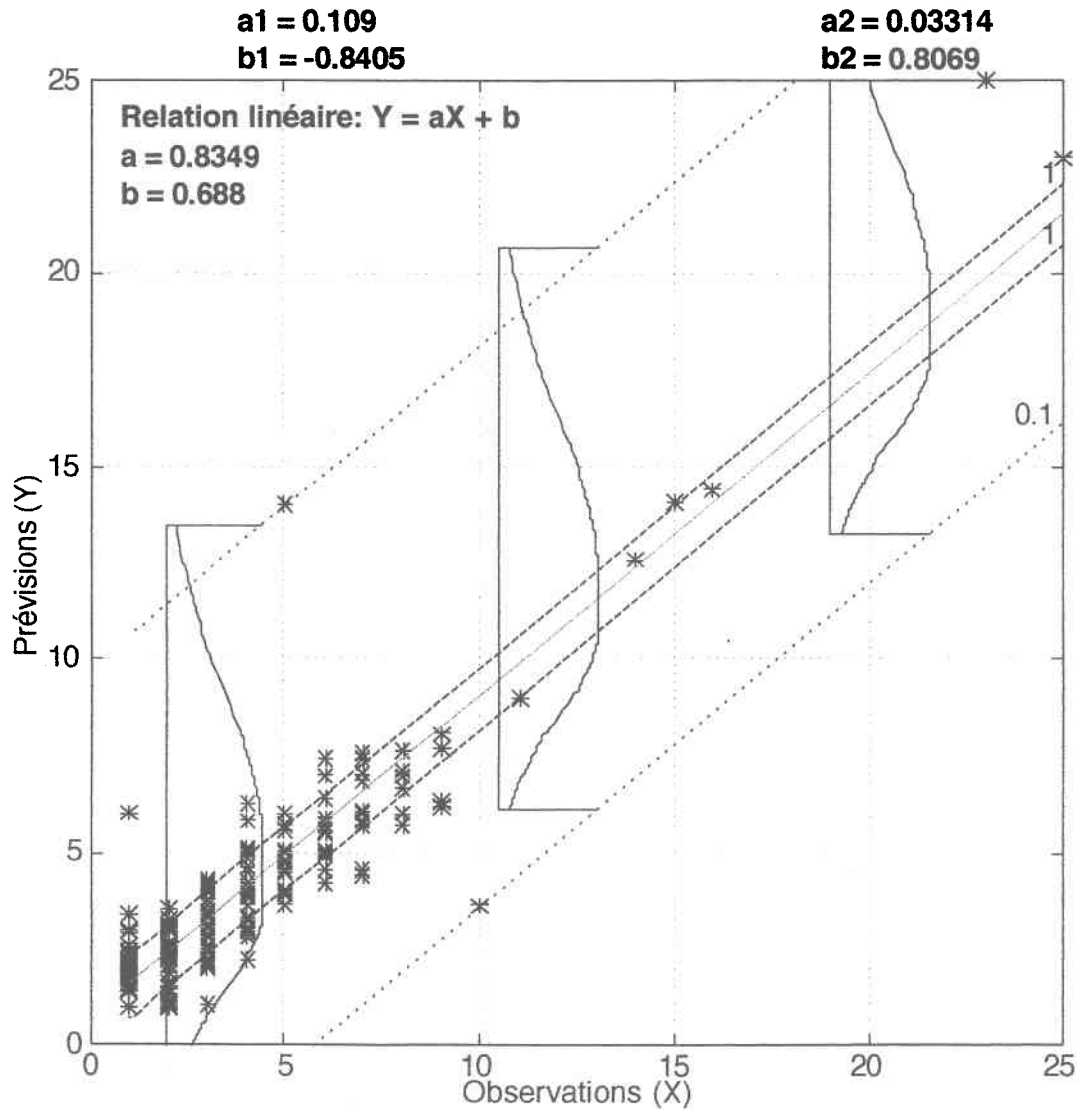


**Figure C. 49: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 3 ( $v_{\text{ssd}3}$ ).**

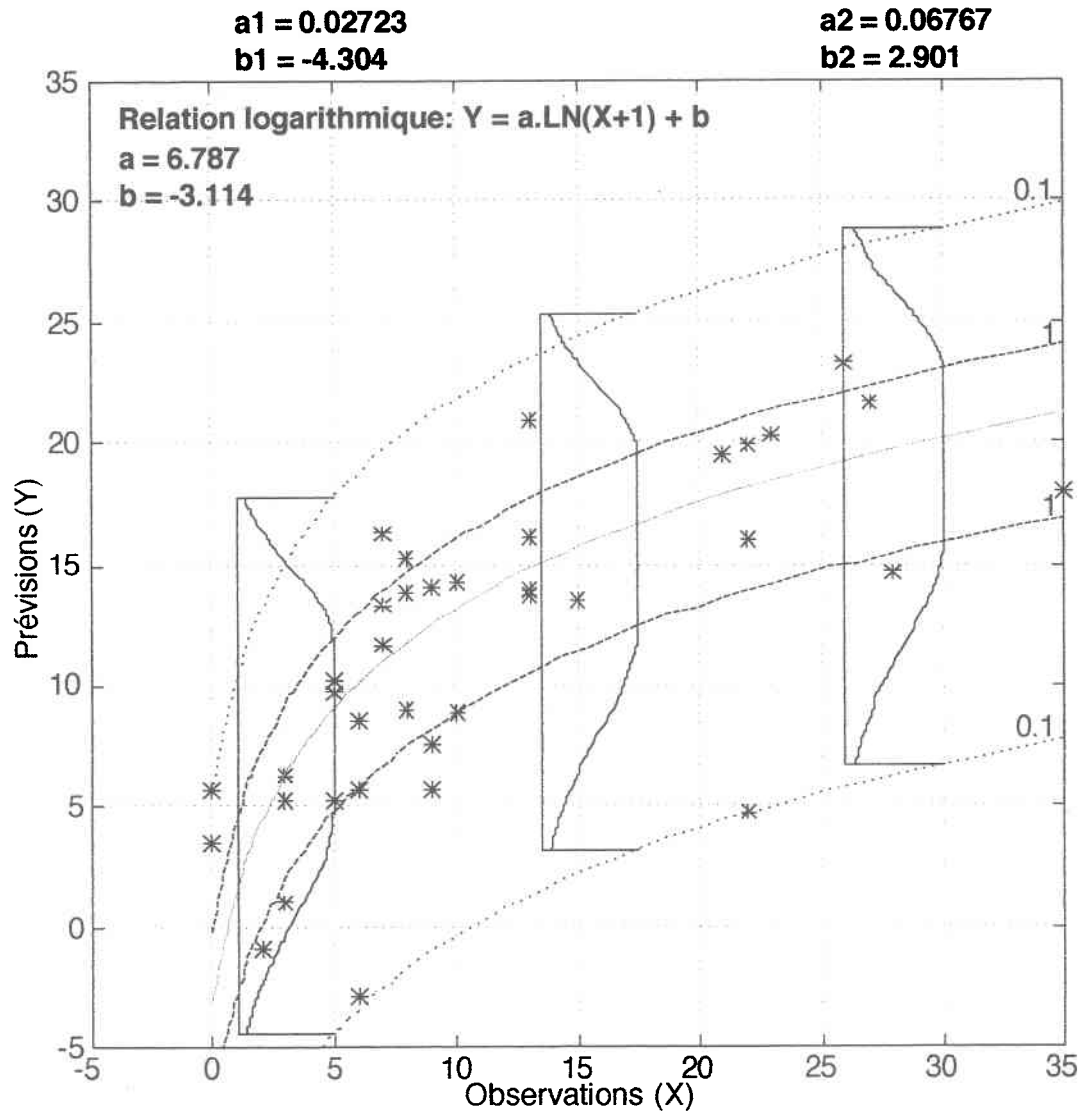


**Figure C. 50: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 4 ( $v_{\text{ssd4}}$ ).**

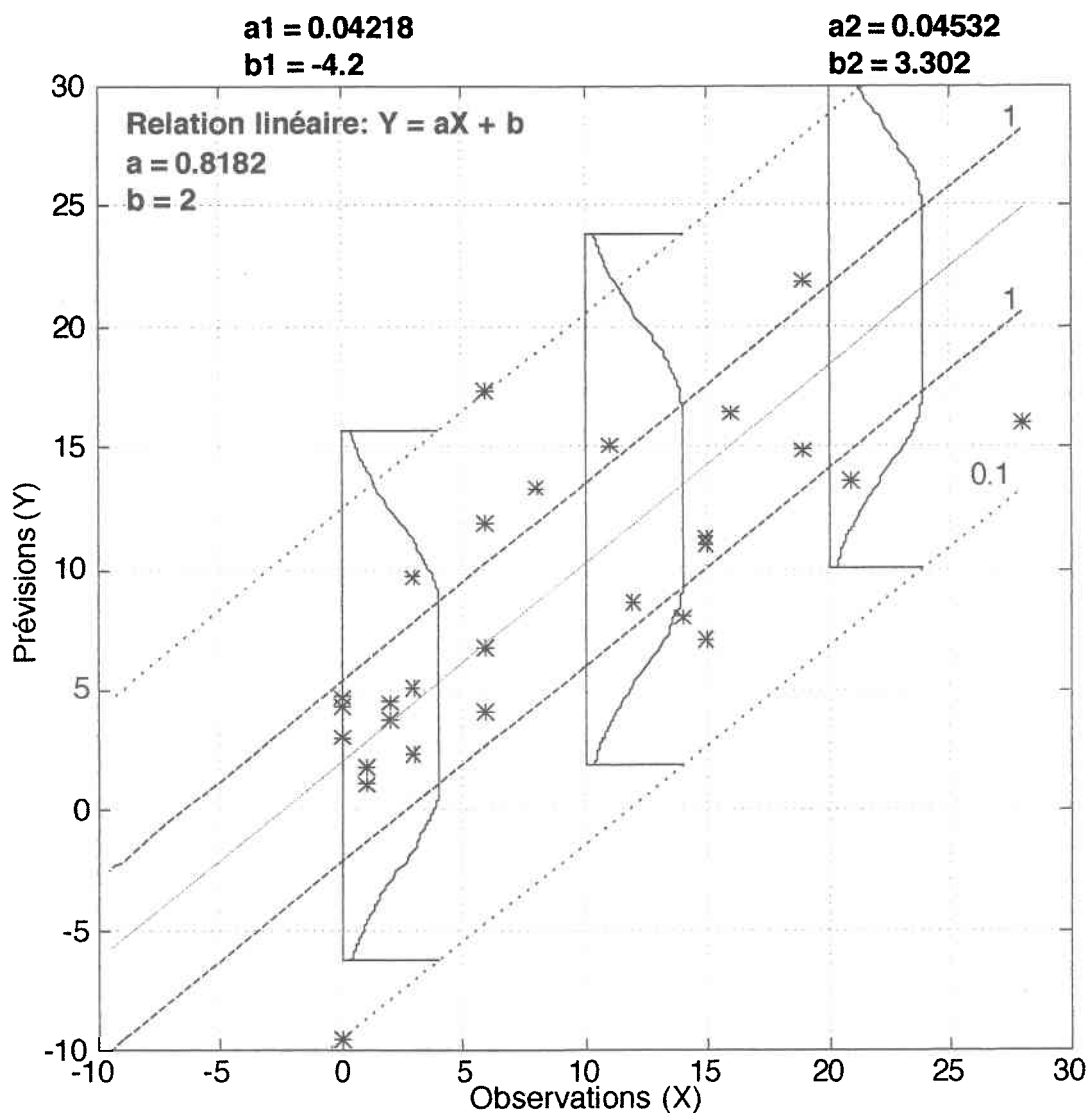


Date de départ

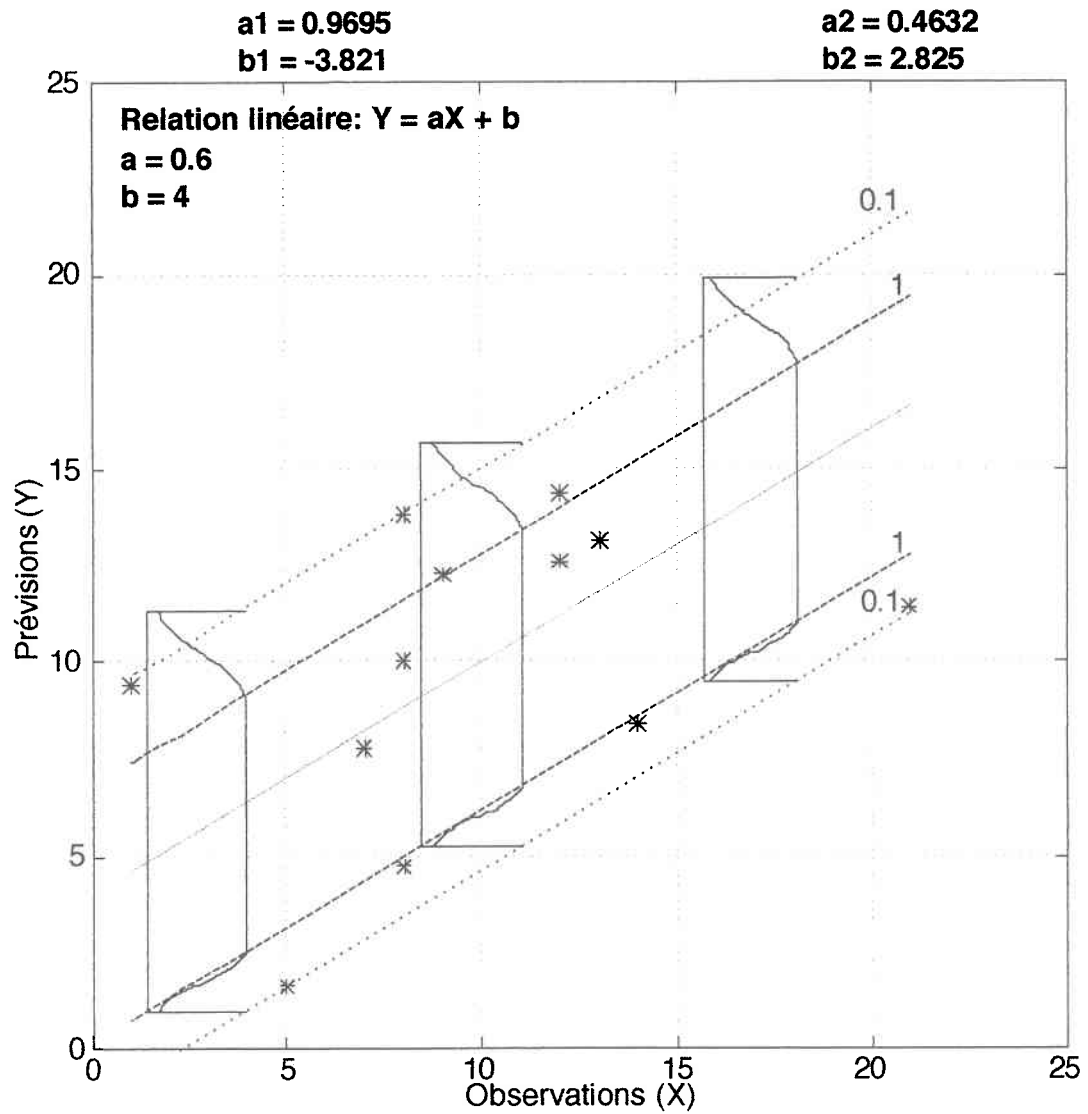
**Figure C. 51: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du nombre de jours restants avant le départ de la crue lorsque les conditions pour le départ éventuel sont satisfaites (dd\_cond).**

**Date de pointe**

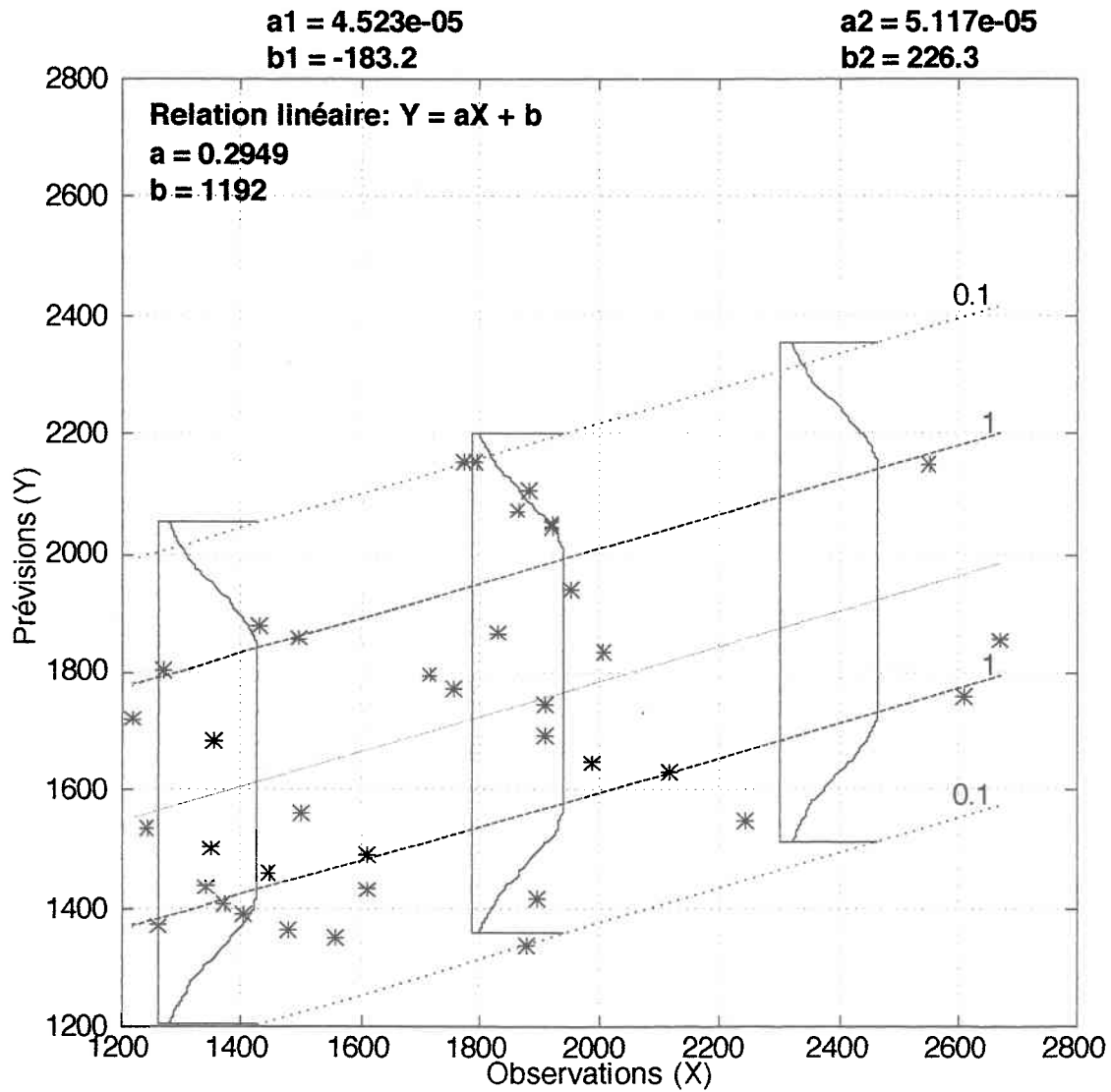
**Figure C. 52: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 2 (dp\_ssm2).**



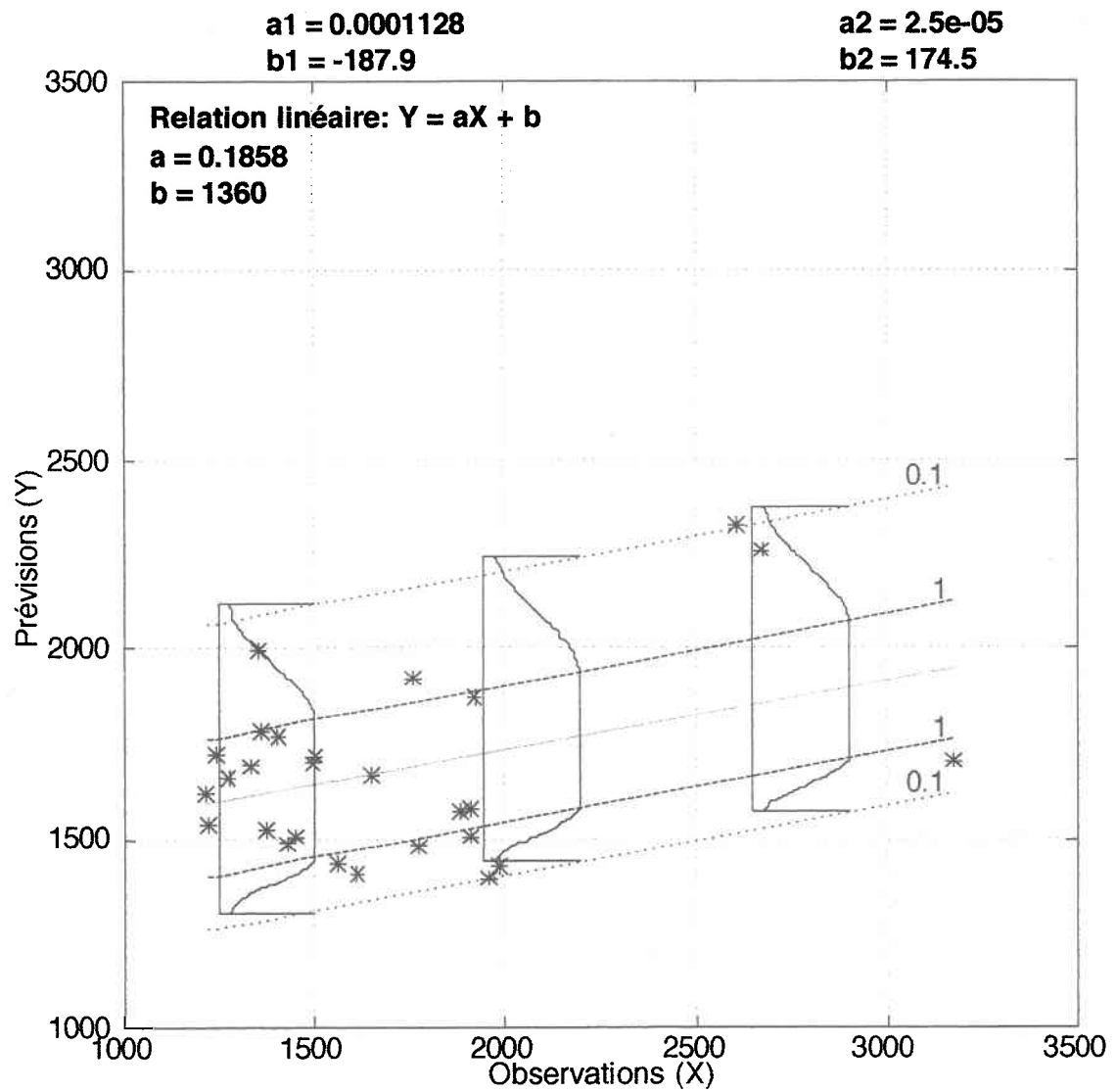
**Figure C. 53: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 3 (dp\_ssm3).**



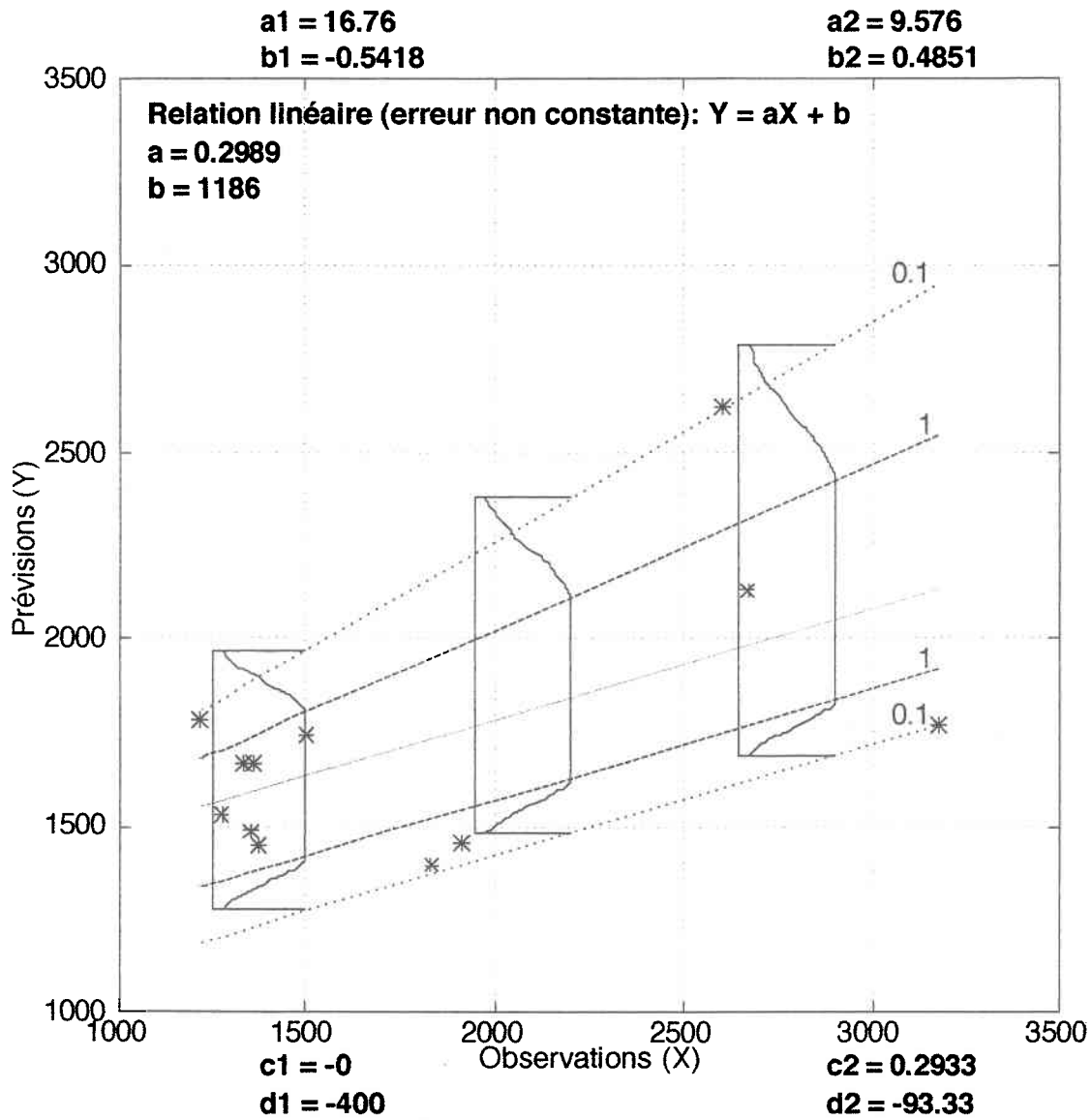
**Figure C. 54: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 4 (dp\_ssm4).**

**Pointe**

**Figure C. 55: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  de la pointe de la crue (en  $m^3/s$ ) au sous-stade montée 2 (p\_ssm2).**

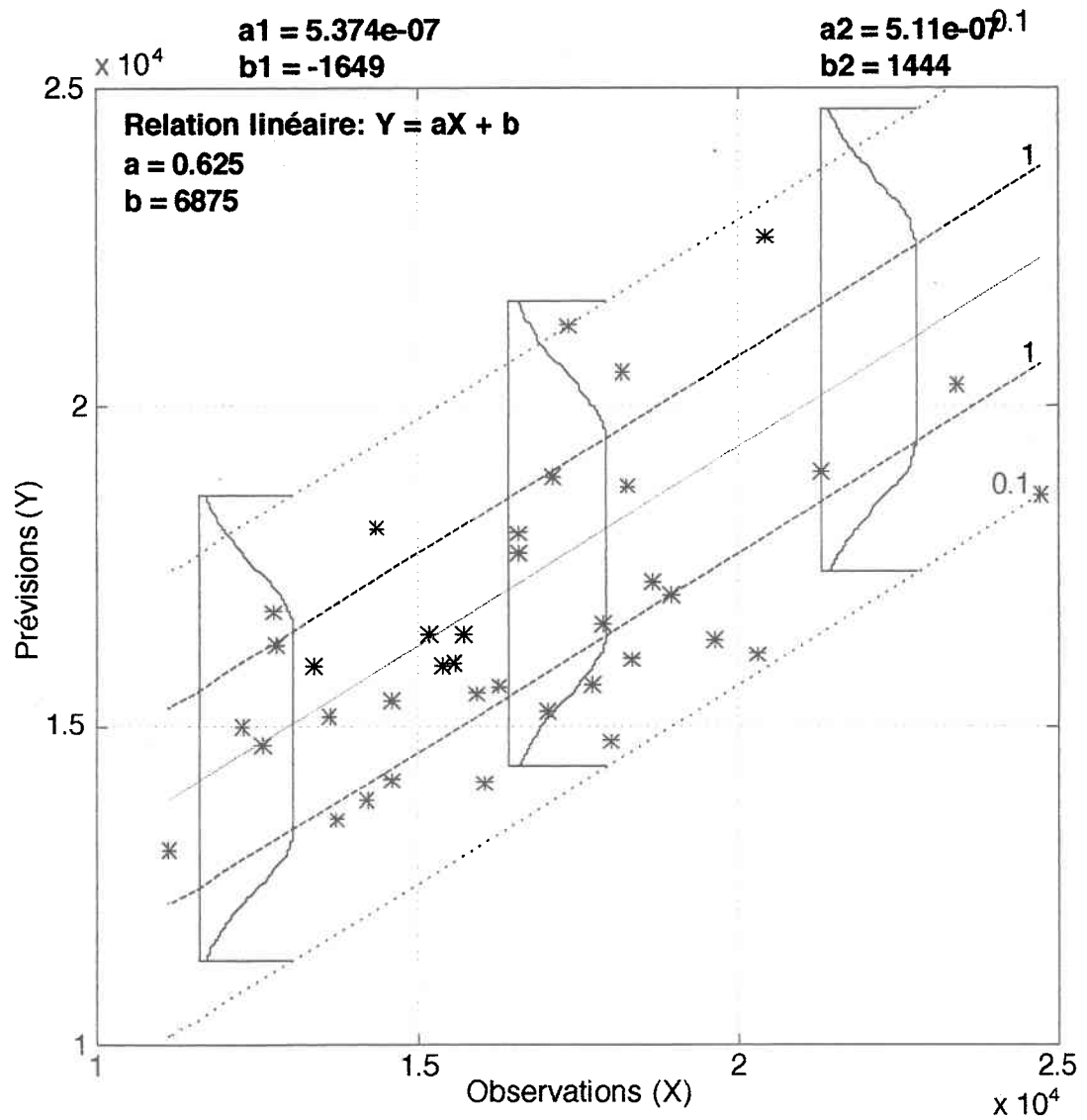


**Figure C. 56: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  de la pointe de la crue (en  $m^3/s$ ) au sous-stade montée 3 (p\_ssm3).**



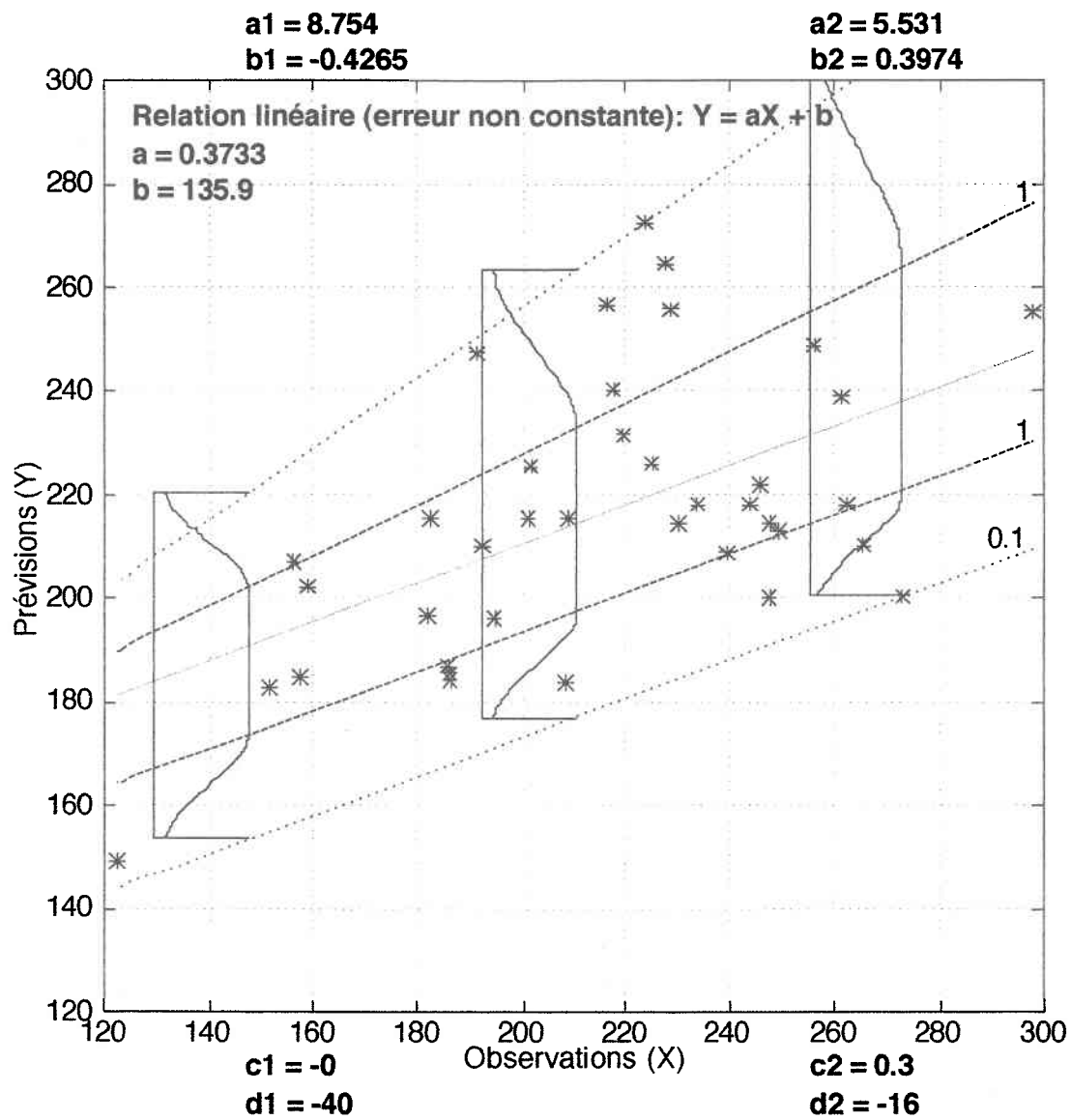
**Figure C. 57: Bassin amont: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  de la pointe de la crue (en  $m^3/s$ ) au sous-stade montée 4 (p\_ssm4).**

## C.2.2 Bassin aval

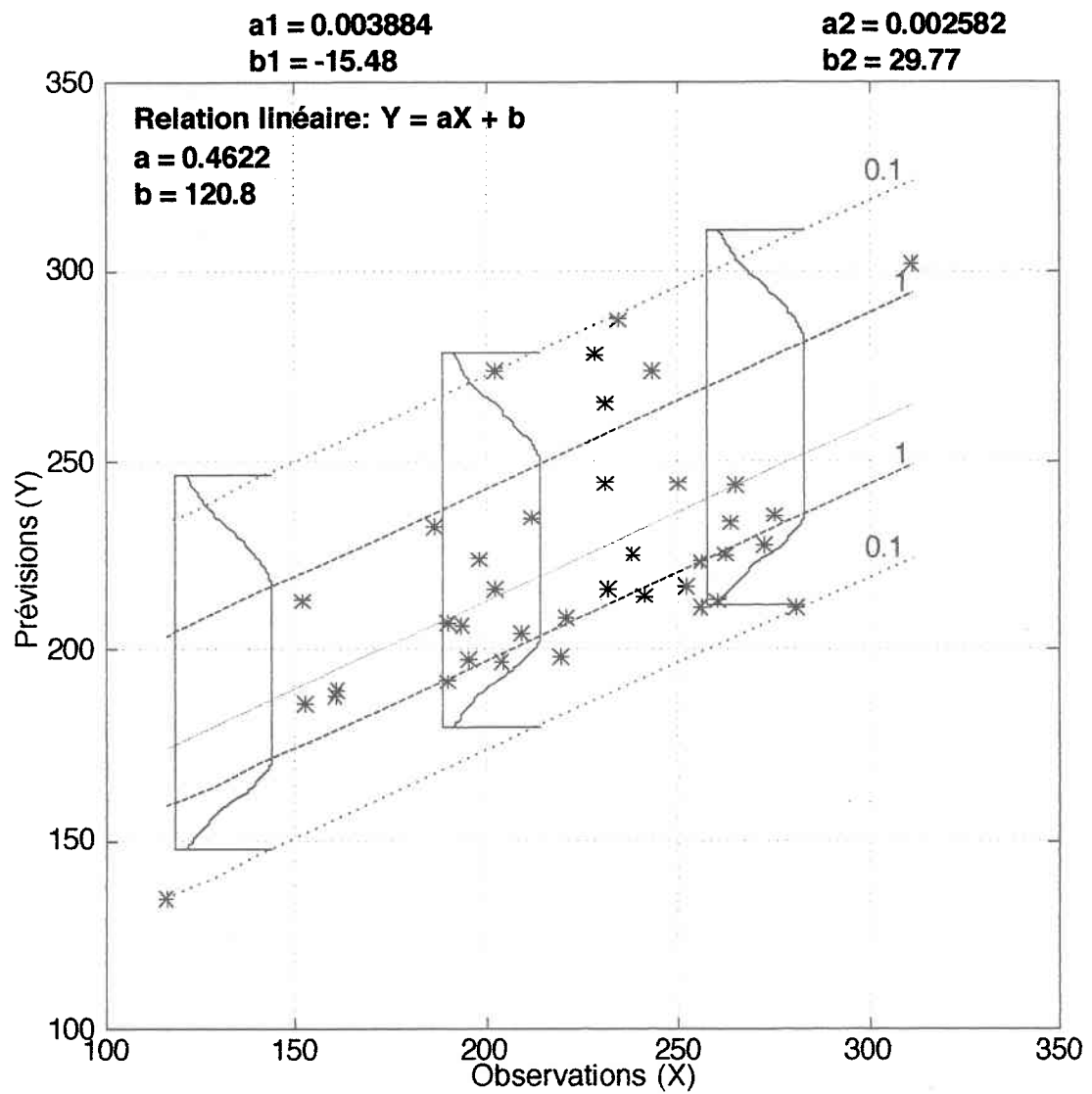
Volume

**Figure C. 58: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume total de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au 1<sup>er</sup> avril ( $v_{\text{avr}}$ ).**

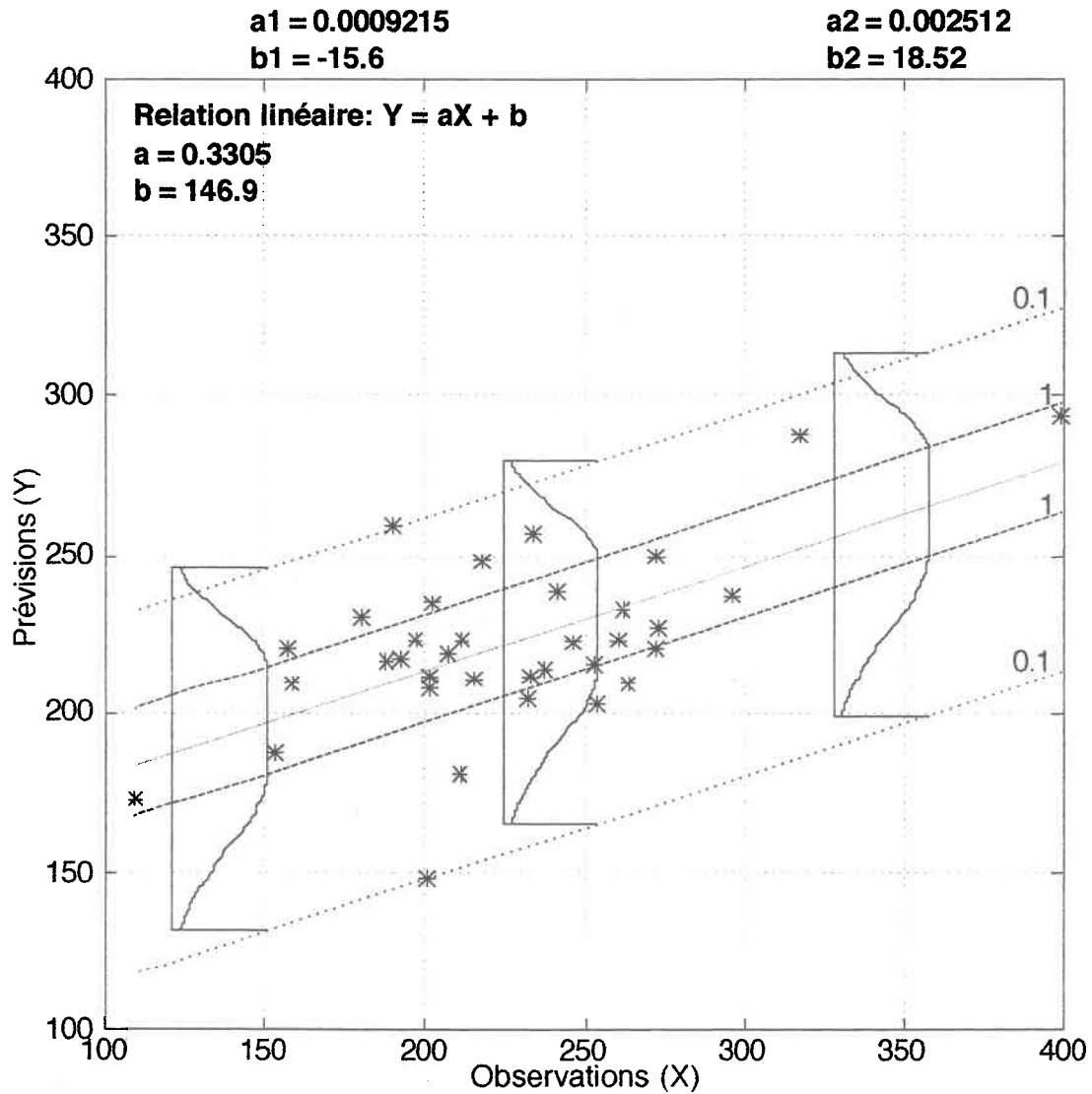




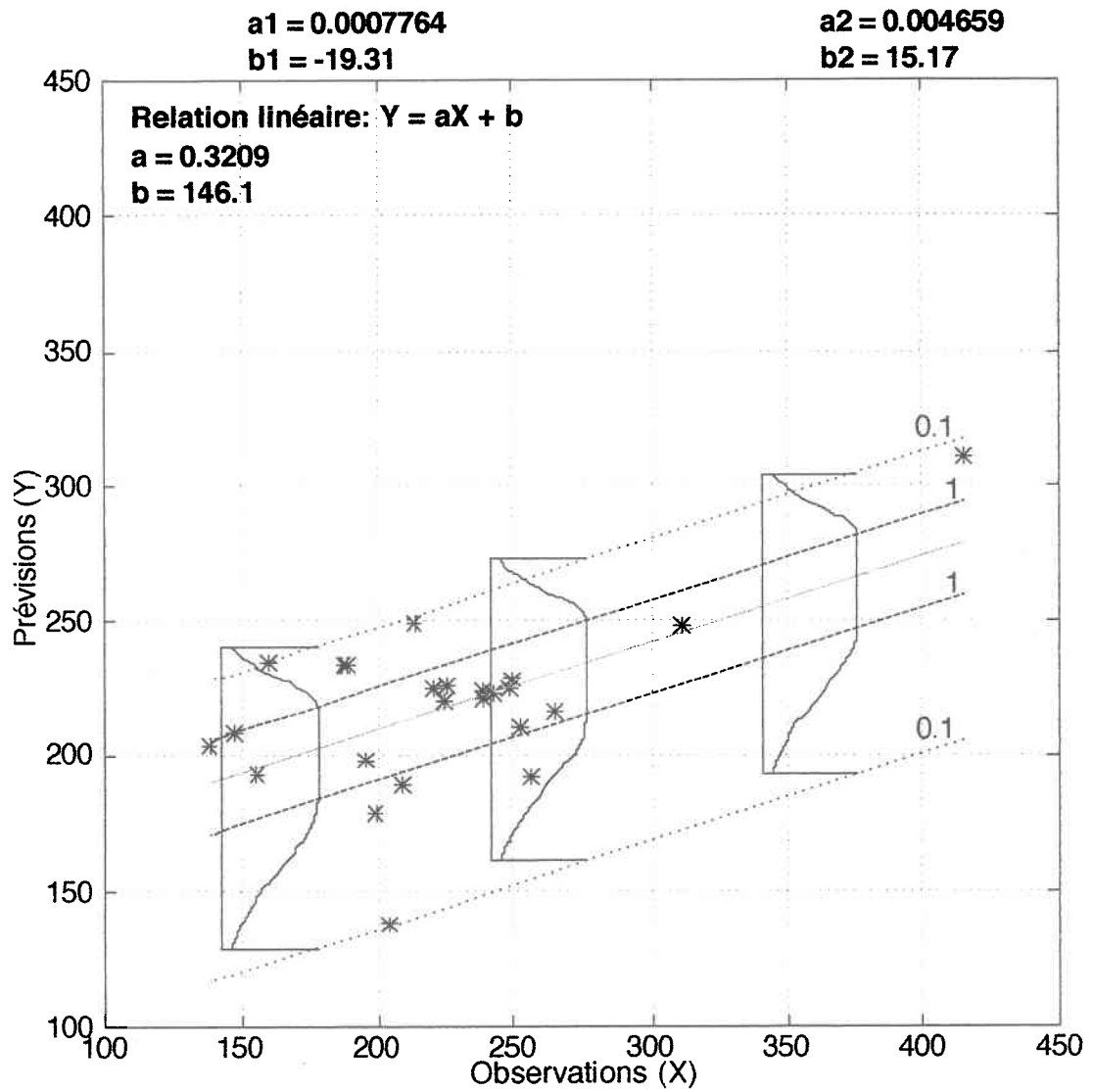
**Figure C. 59: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 1 ( $v_{\text{ssm1}}$ ).**



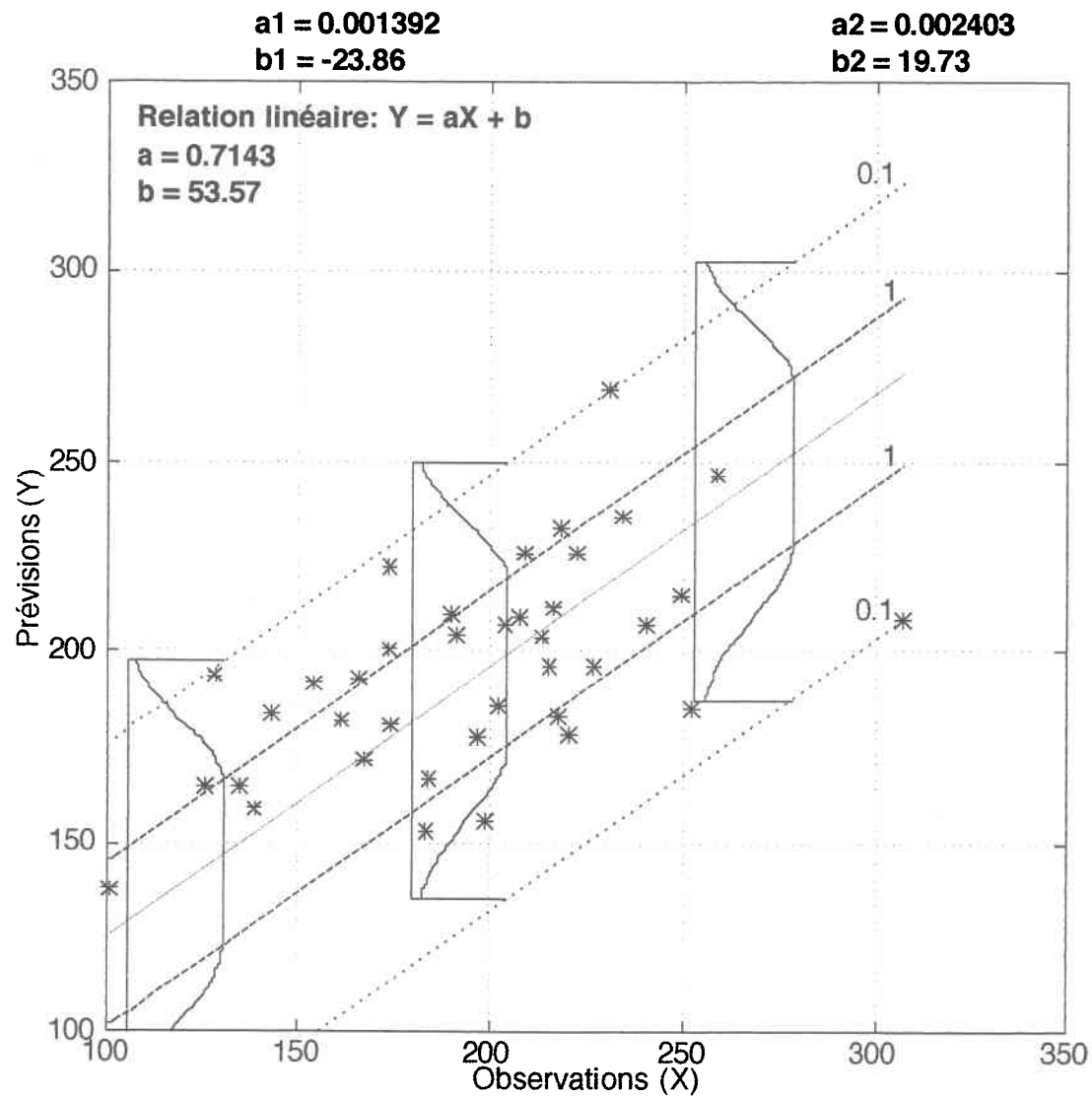
**Figure C. 60: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 2 ( $v\_ssm2$ ).**



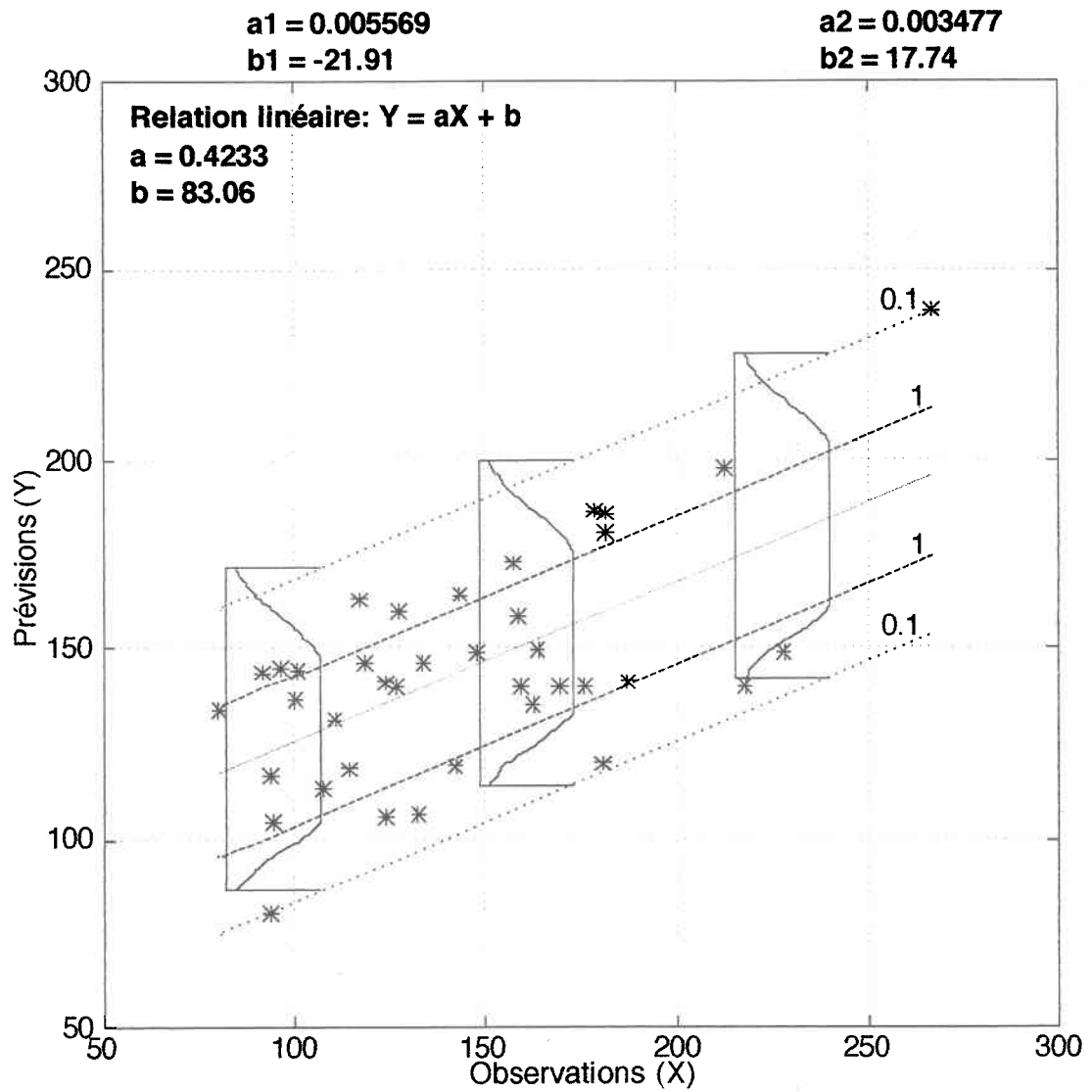
**Figure C. 6 1: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 3 ( $v\_ssm3$ ).**



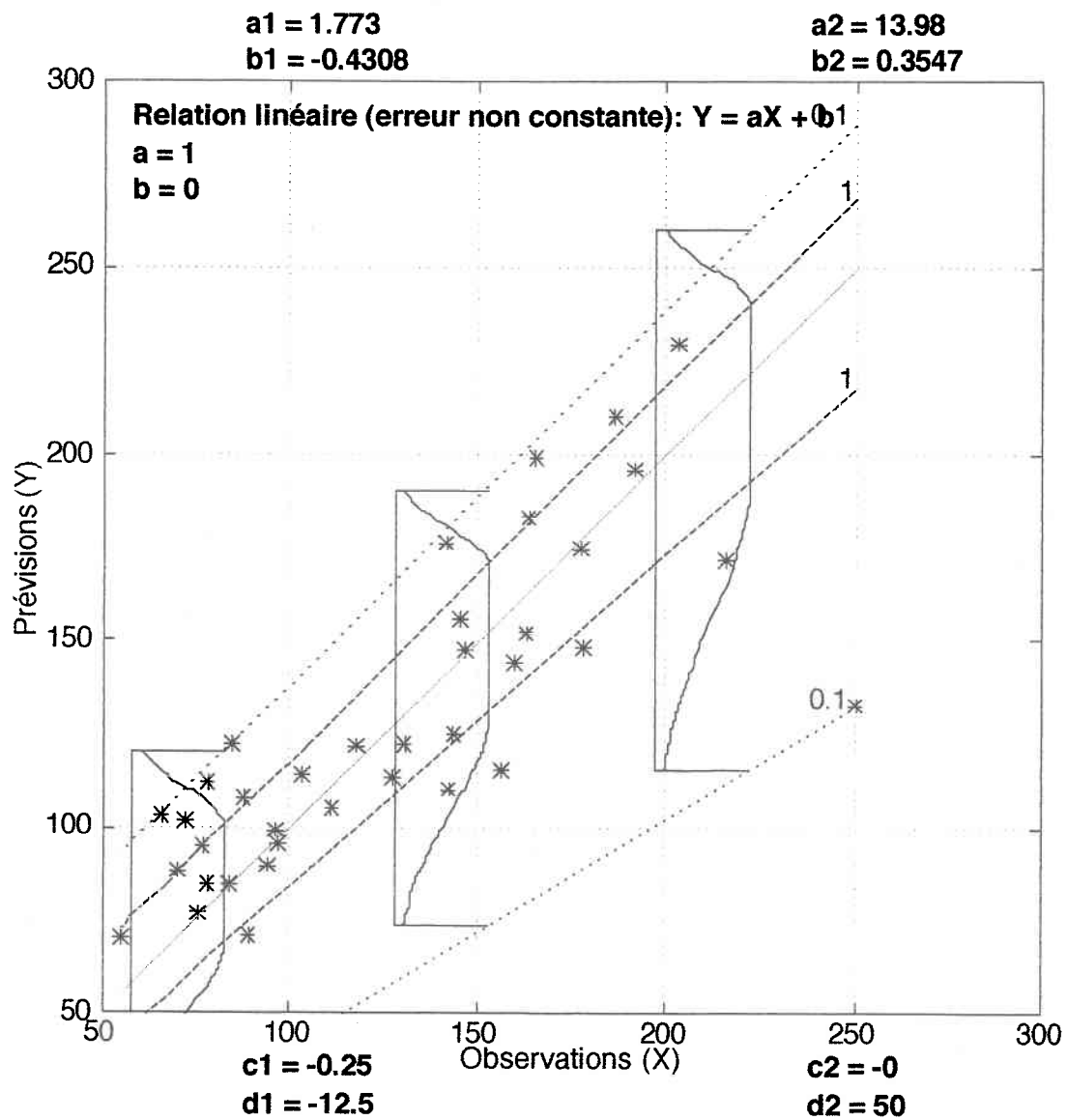
**Figure C. 62: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 4 ( $v\_ssm4$ ).**



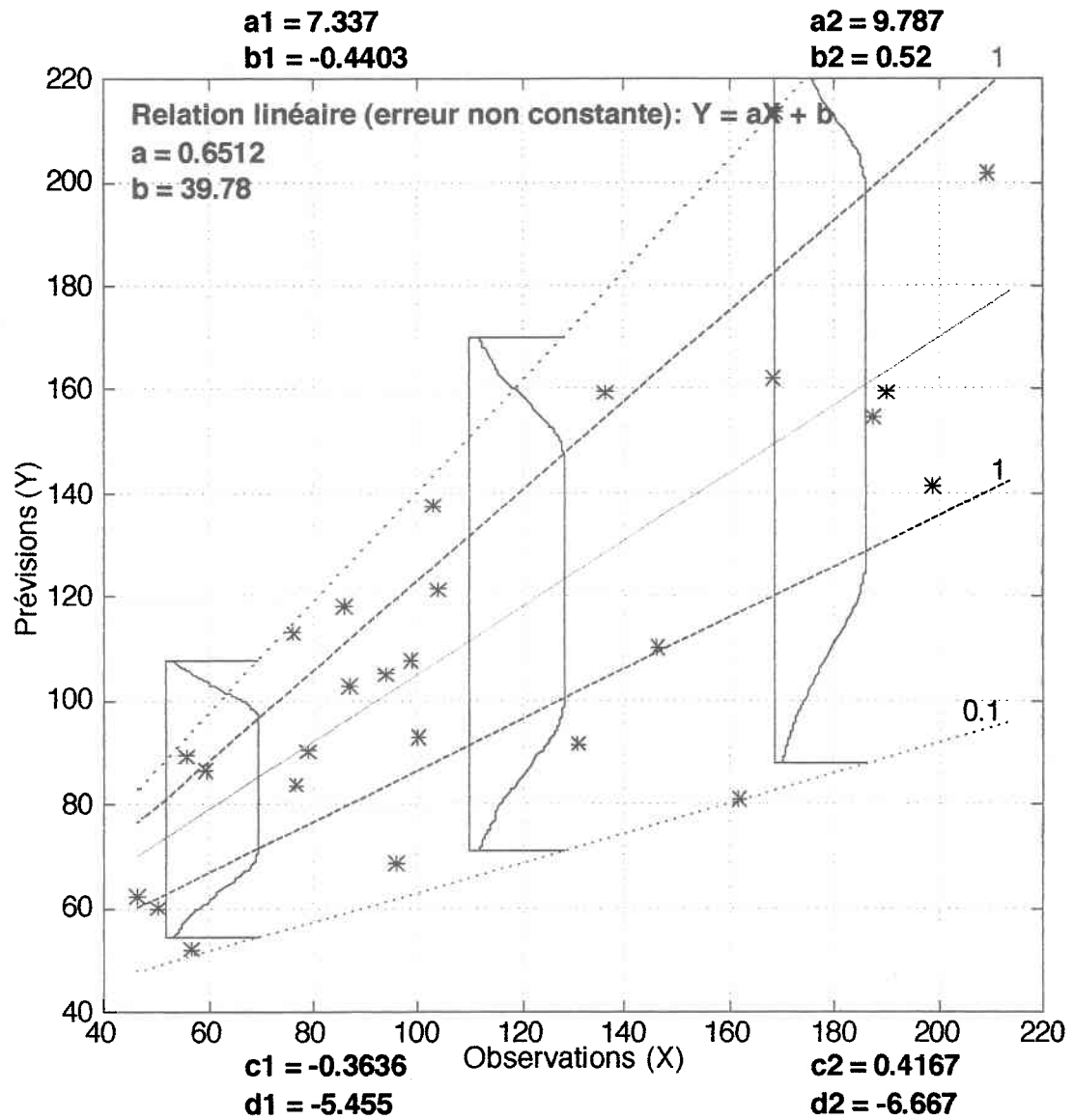
**Figure C. 63: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 1 ( $v_{\text{ssd1}}$ ).**



**Figure C. 64: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 2 ( $v_{\text{ssd}2}$ ).**

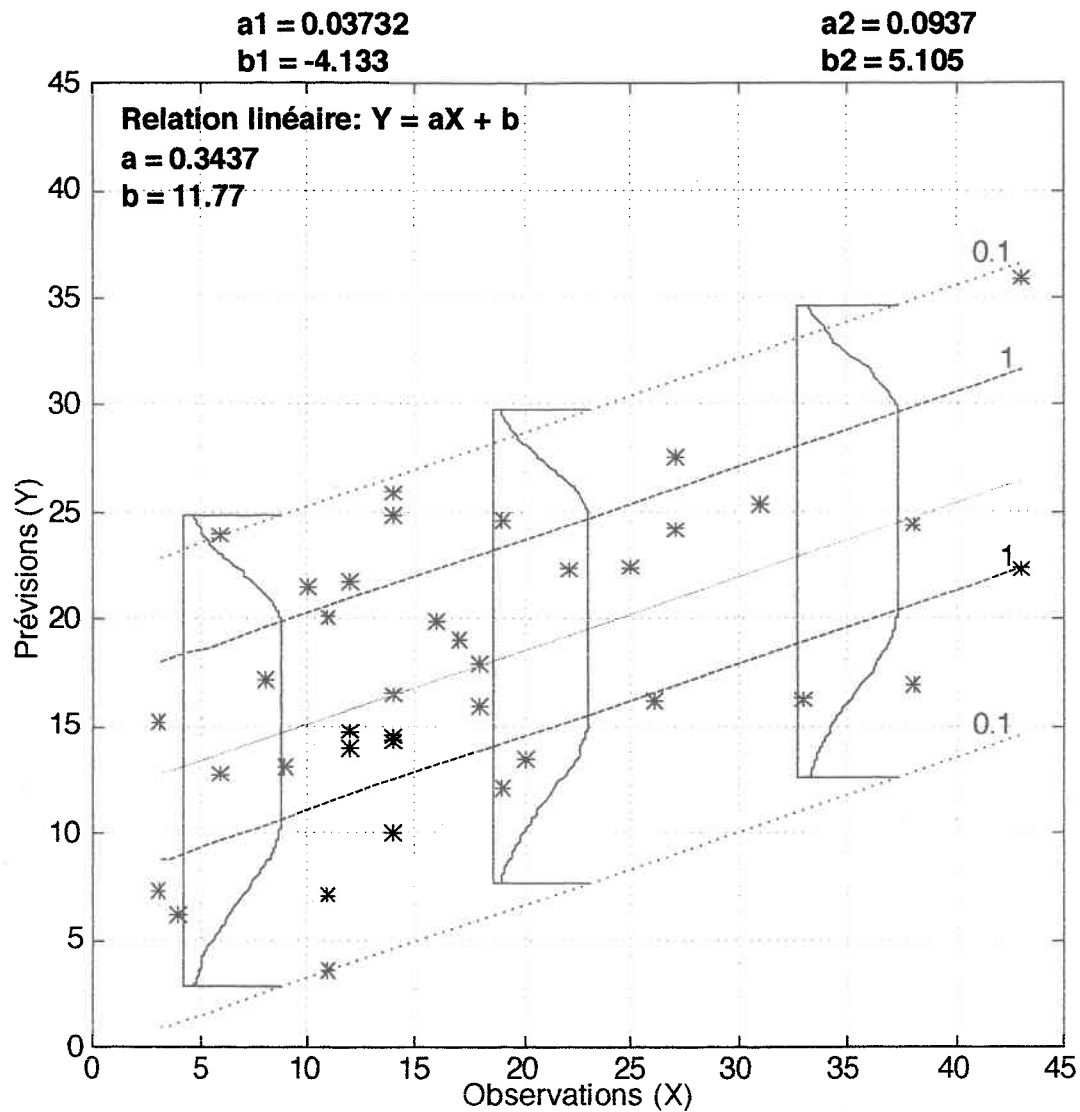


**Figure C. 65: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 3 ( $v_{\text{ssd3}}$ ).**

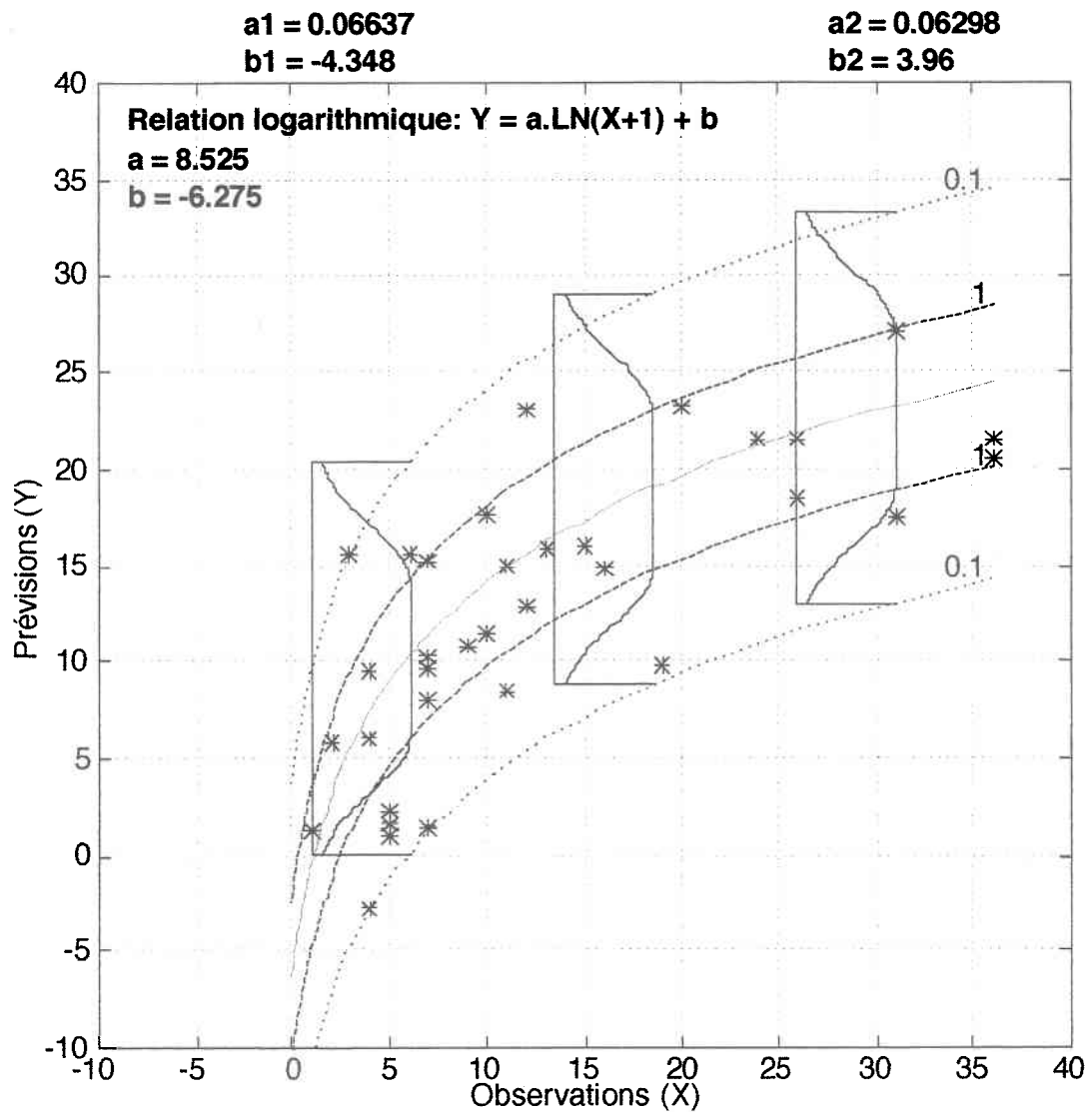


**Figure C. 66: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 4 ( $v_{\text{ssd4}}$ ).**

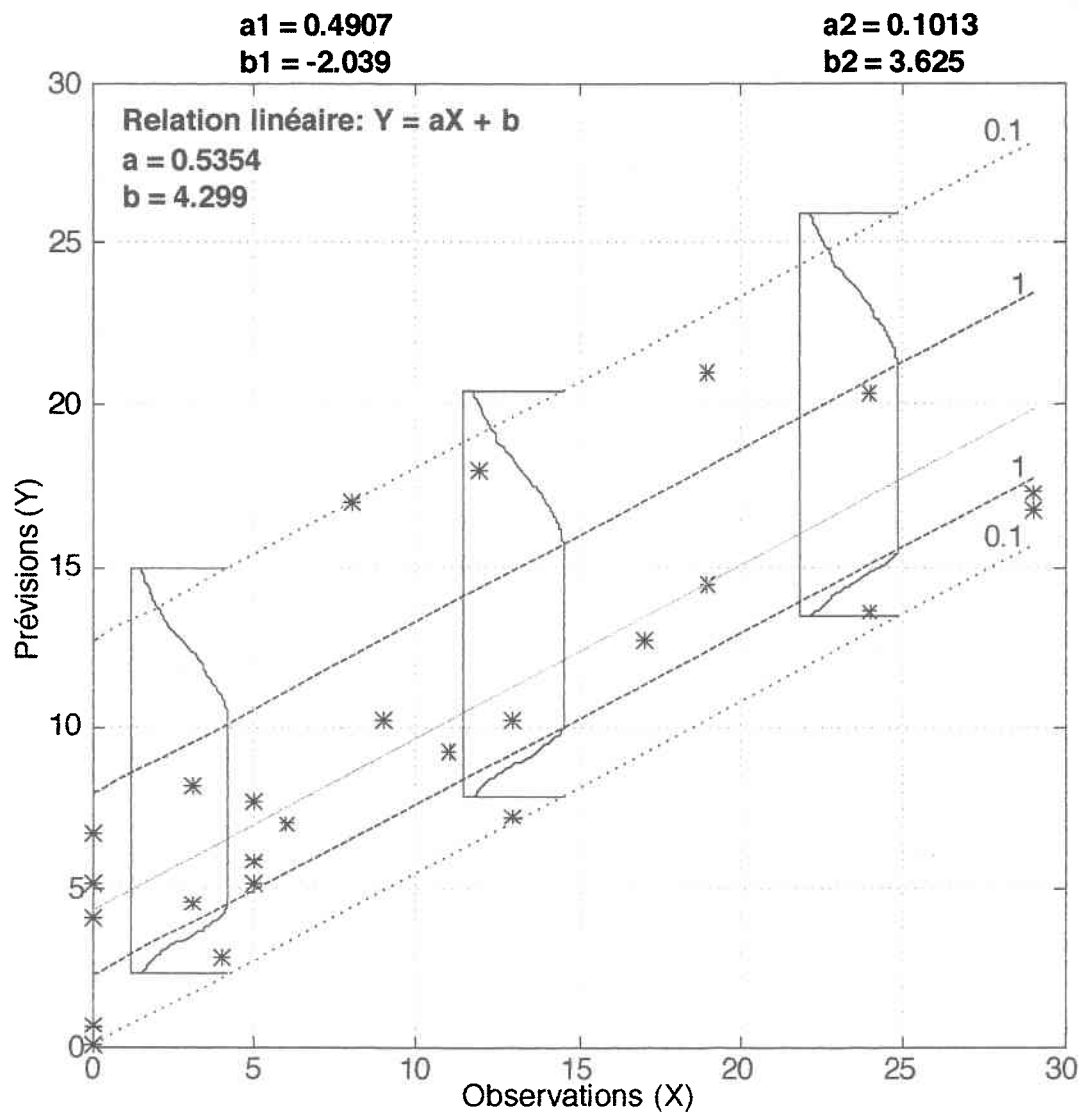


Date de pointe

**Figure C. 67: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 2 (dp\_ssm2).**

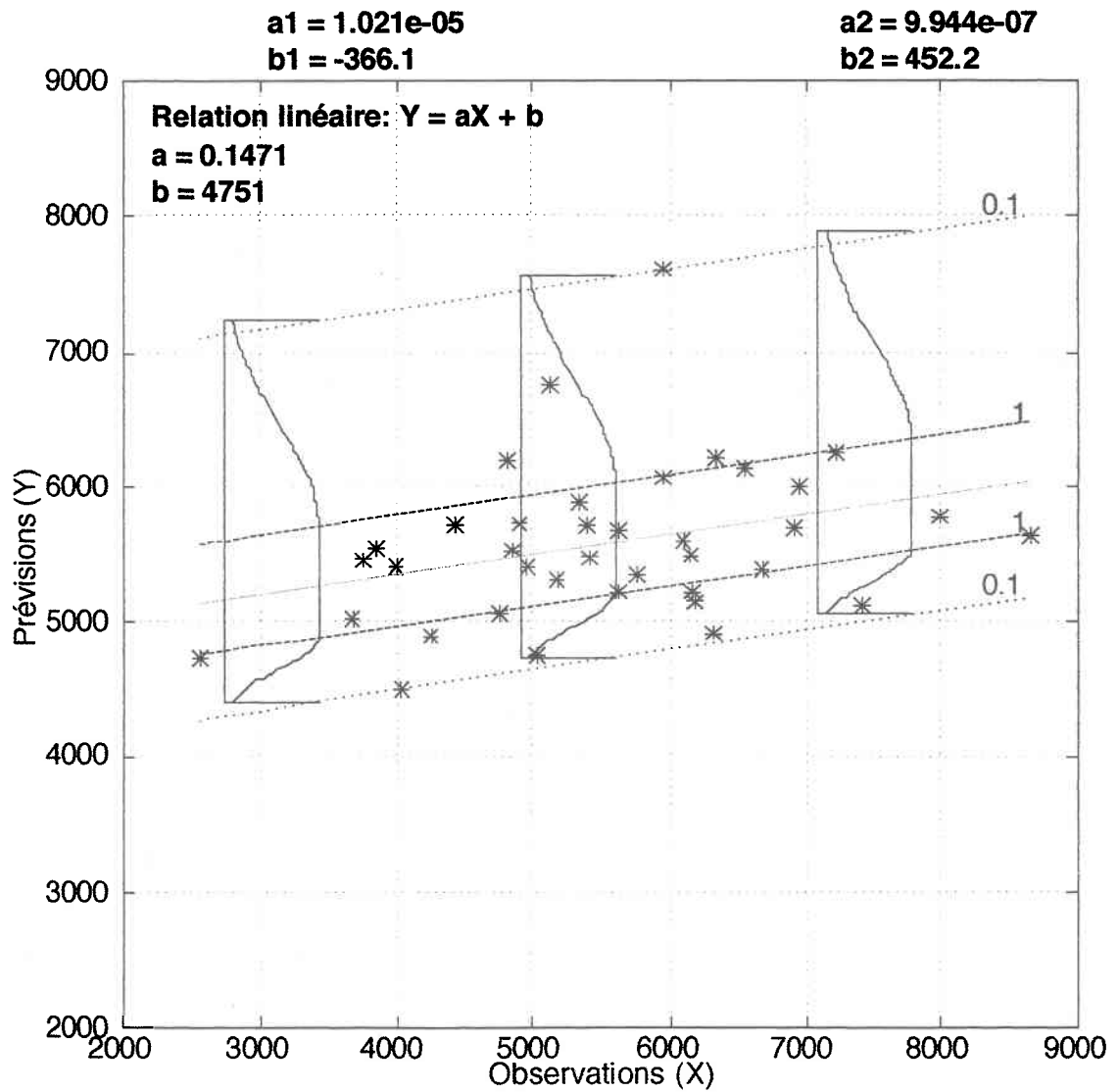


**Figure C. 68: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 3 (dp\_ssm3).**

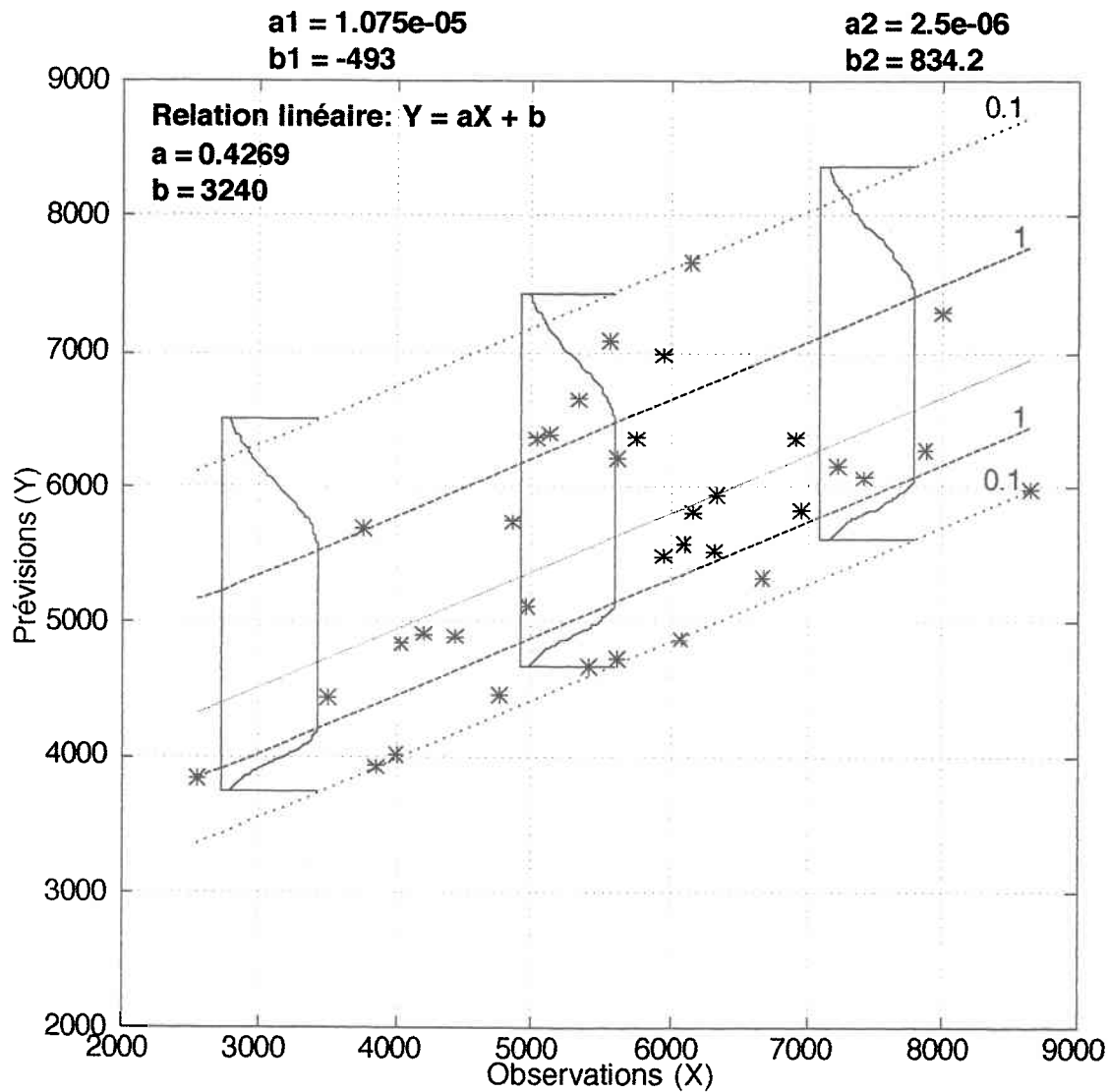


**Figure C. 69: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 4 (dp\_ssm4).**

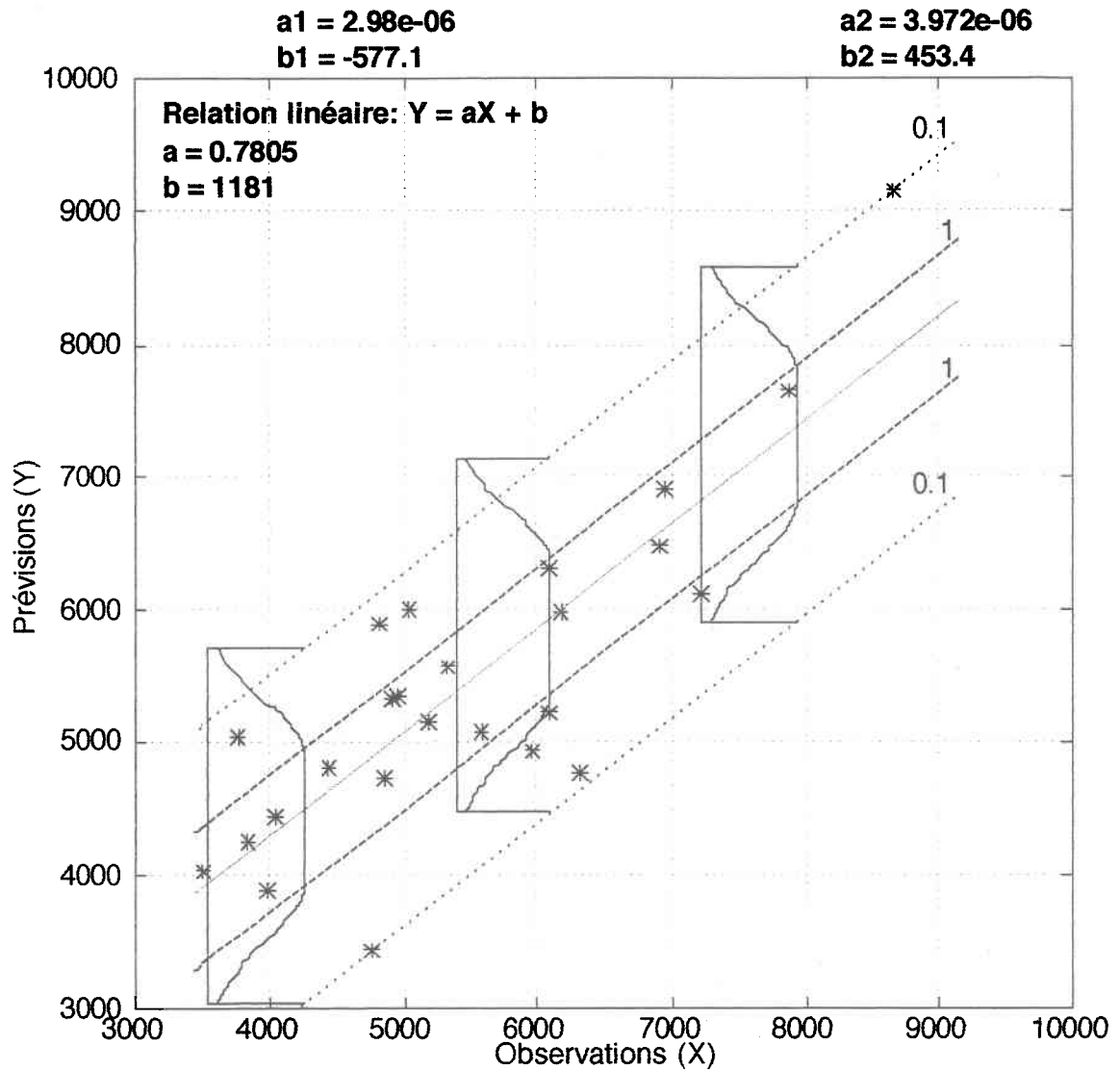
### Pointe



**Figure C. 70: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  de la pointe de la crue (en  $m^3/s$ ) au sous-stade montée 2 (p\_ssm2).**

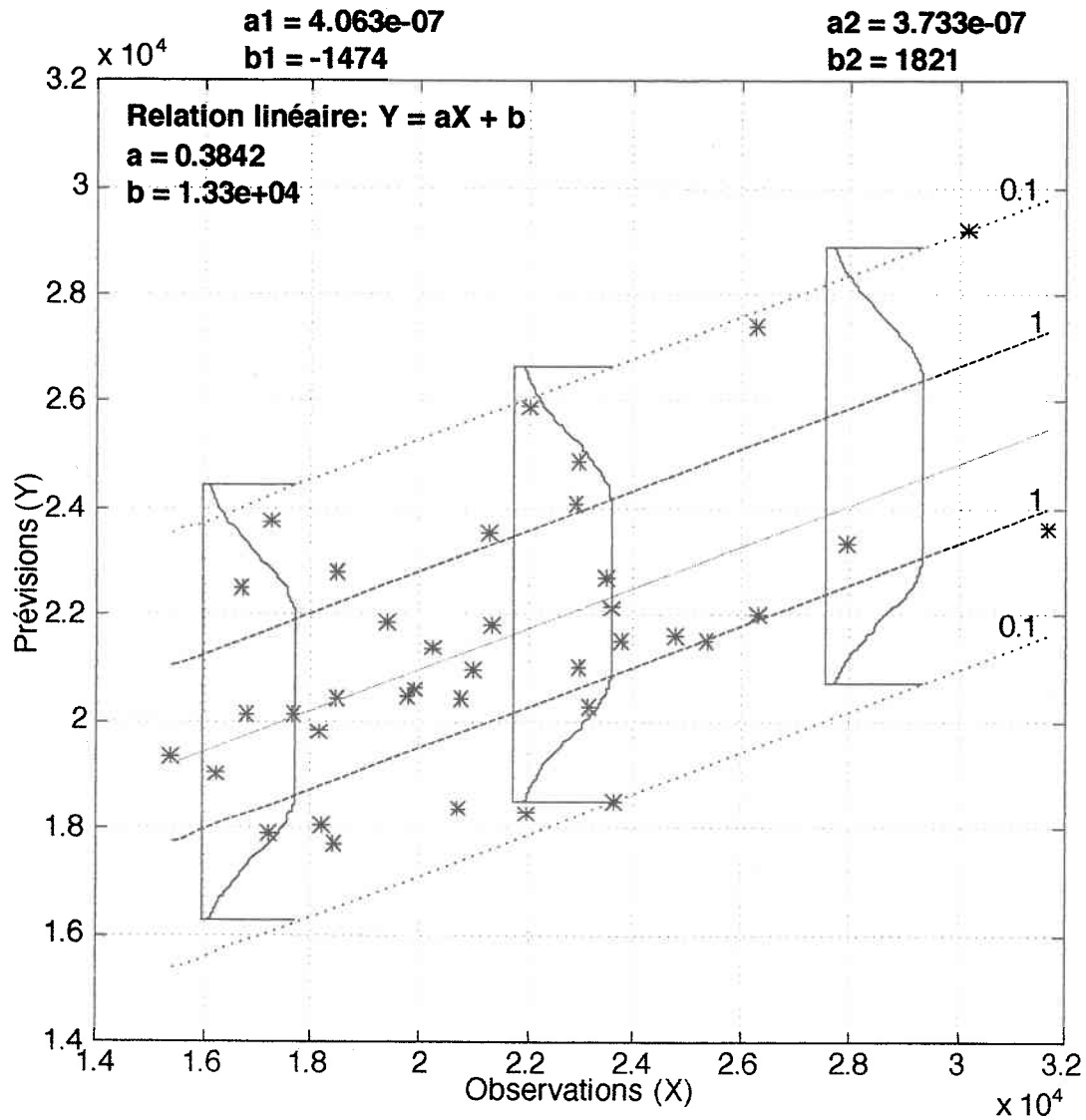


**Figure C. 71: Bassin aval: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  de la pointe de la crue (en  $m^3/s$ ) au sous-stade montée 3 (p\_ssm3).**



**Figure C. 72: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  de la pointe de la crue (en  $m^3/s$ ) au sous-stade montée 4 (p\_ssm4).**

## C.2.3 Bassin total

Volume

**Figure C. 73: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume total de la crue (en  $hm^3$ ) au 1<sup>er</sup> avril ( $v_{avr}$ ).**

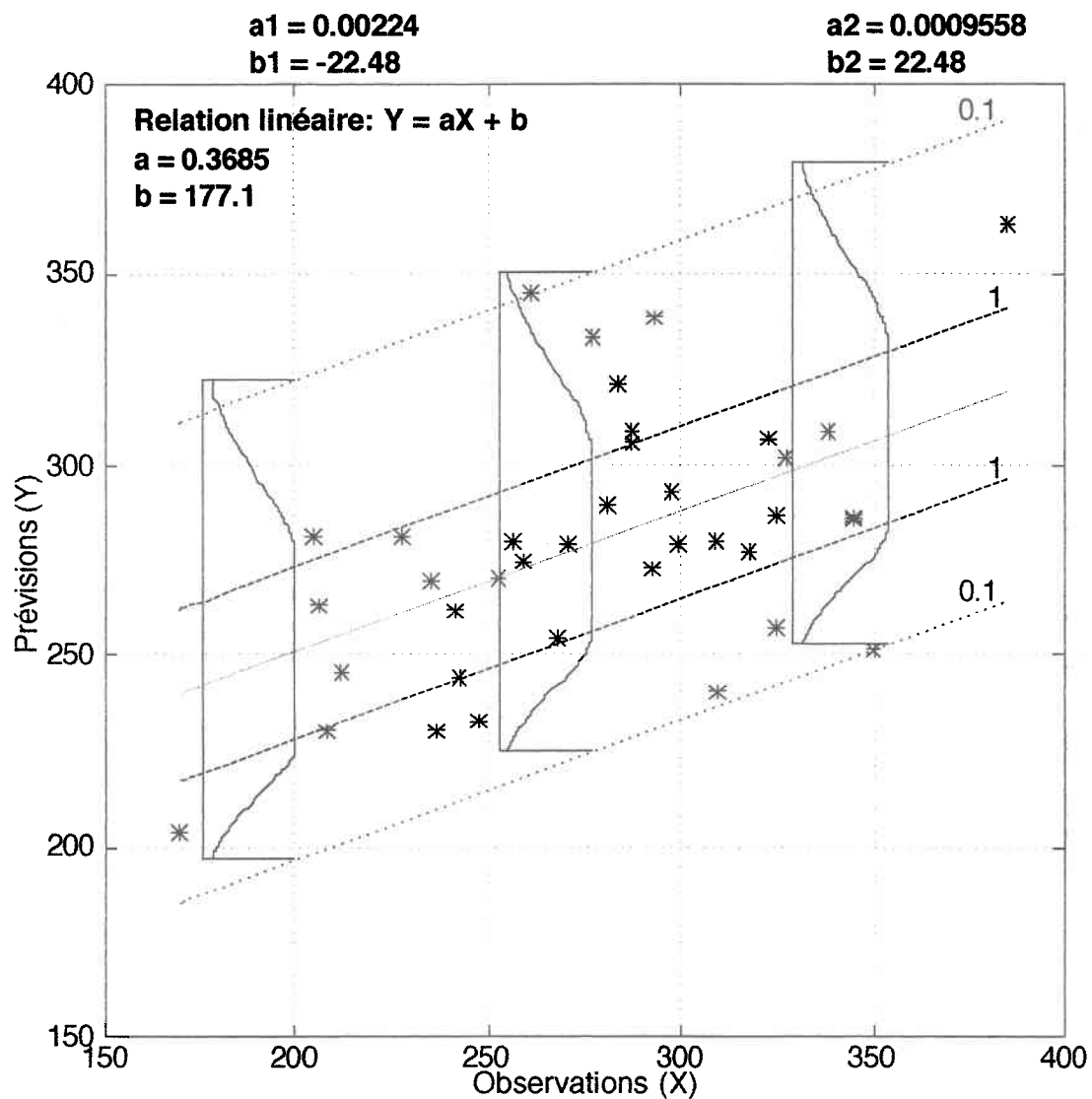
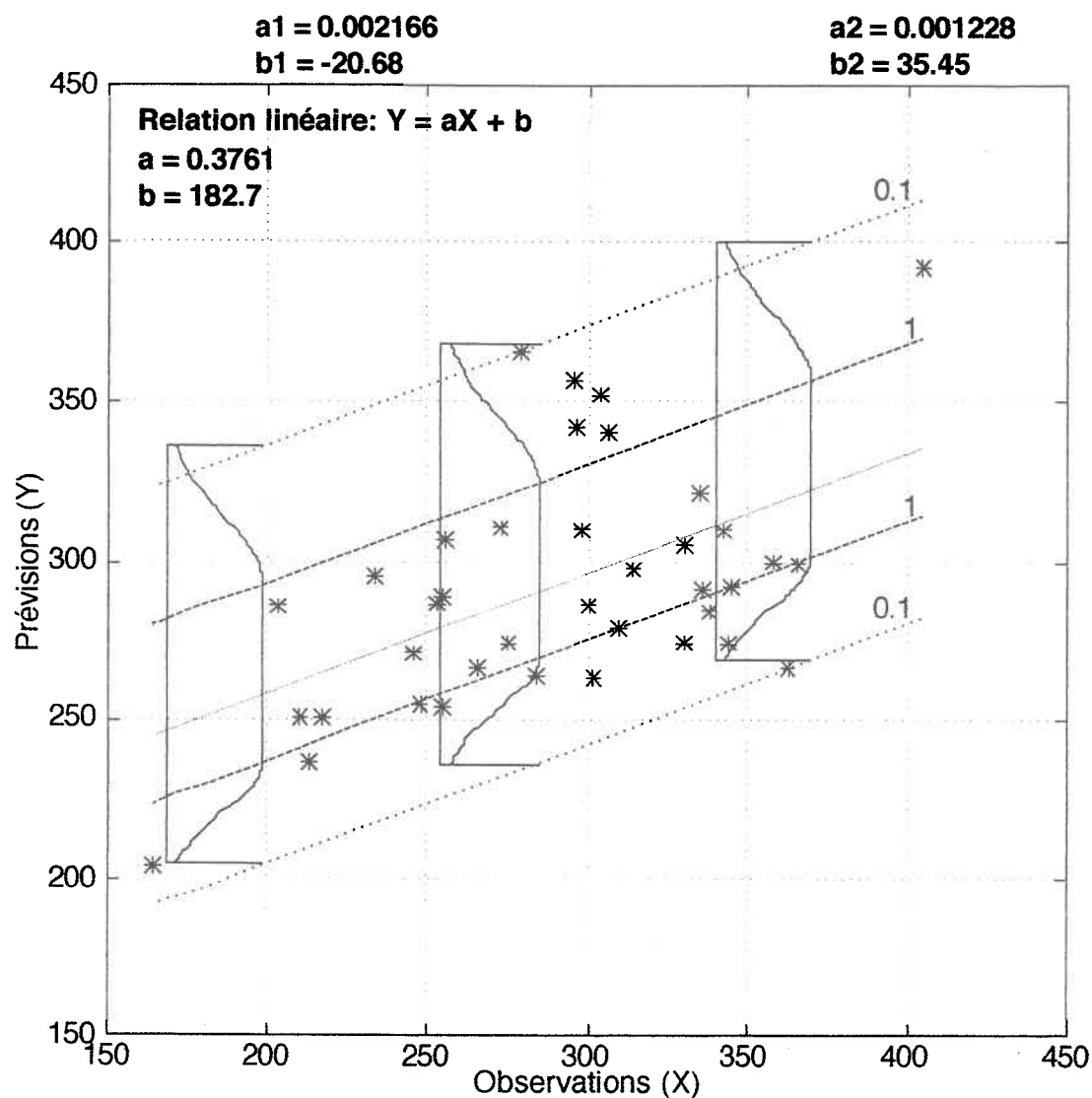
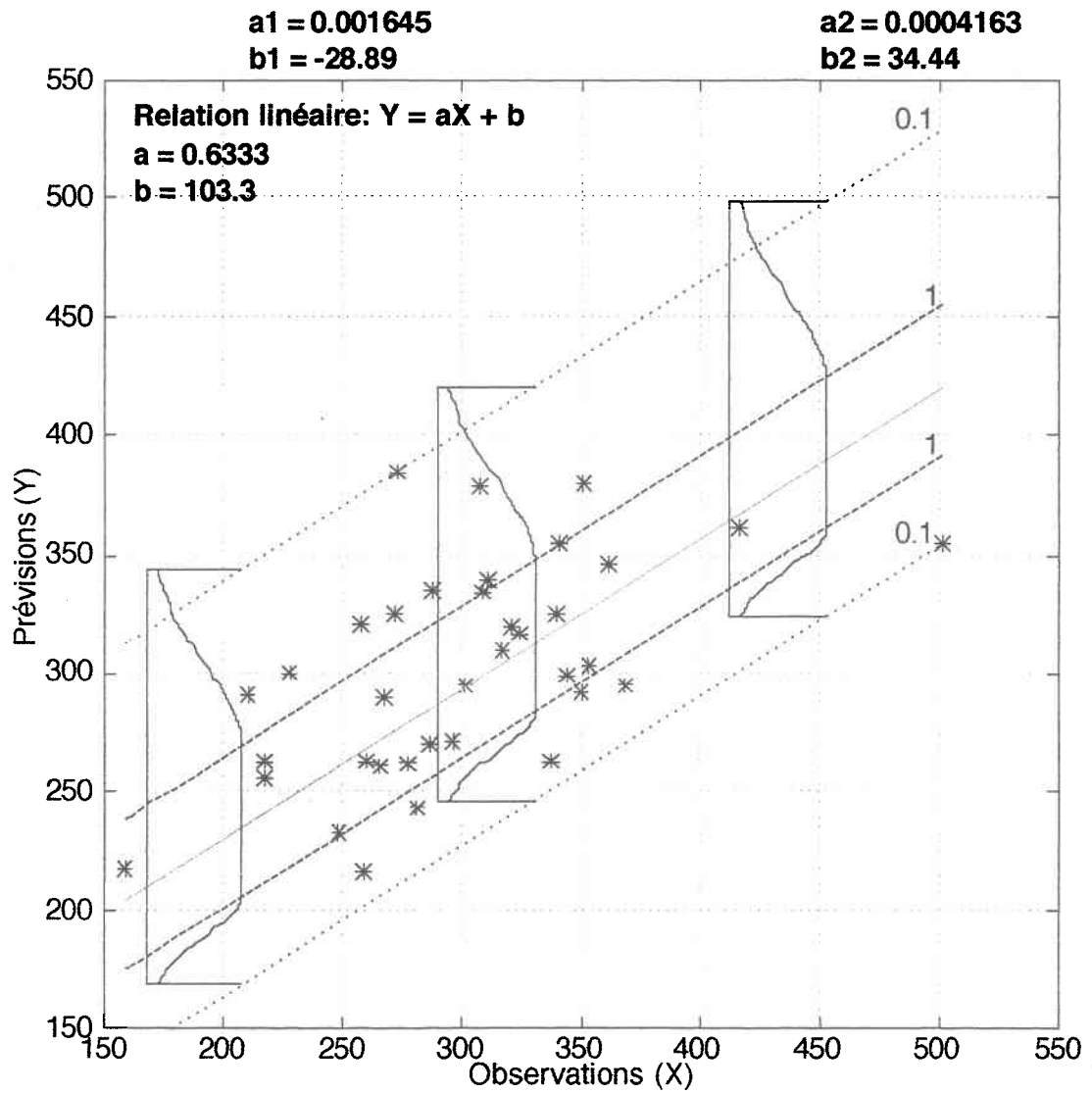


Figure C. 74: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 1 ( $v\_ssm1$ ).

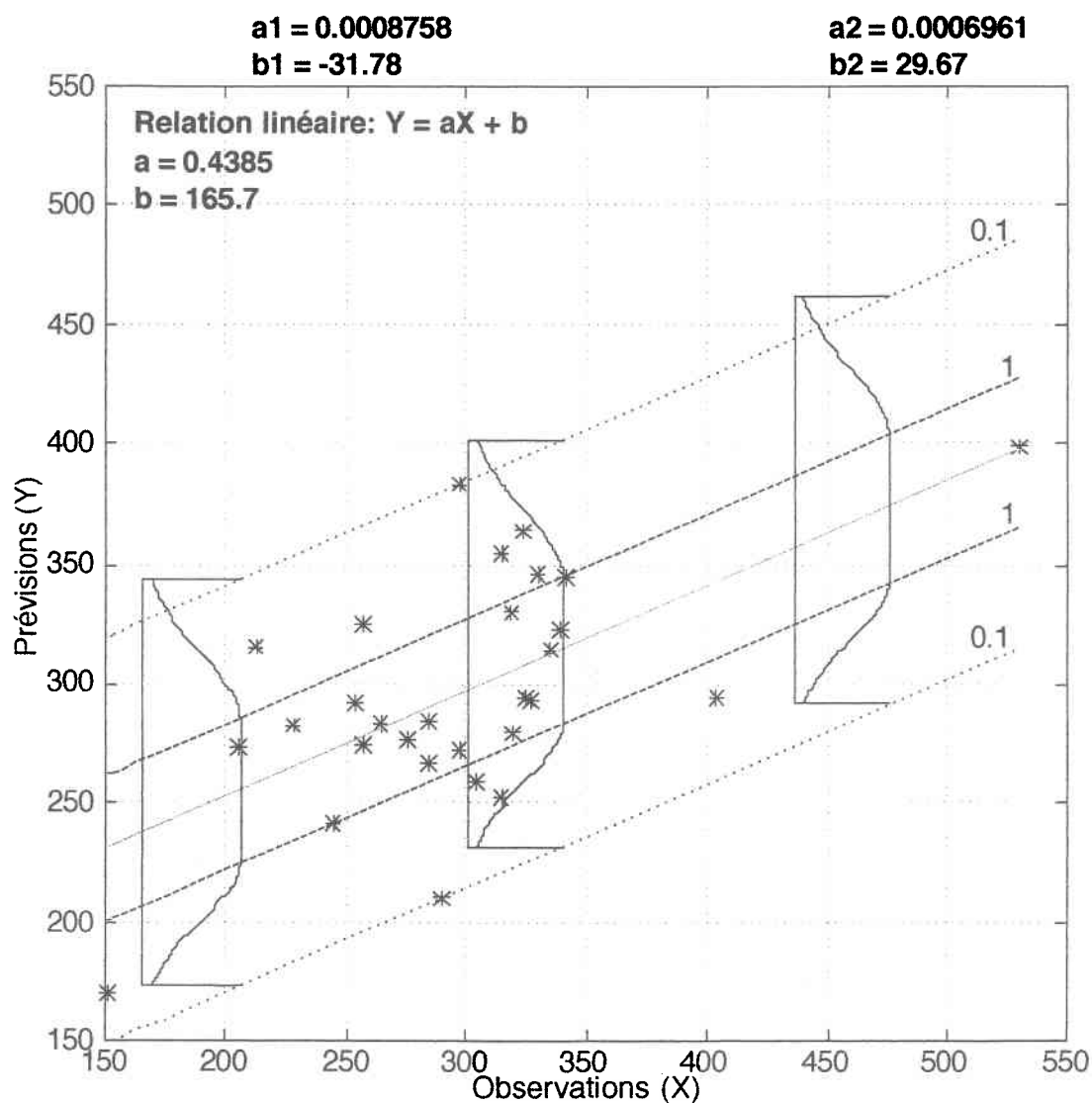




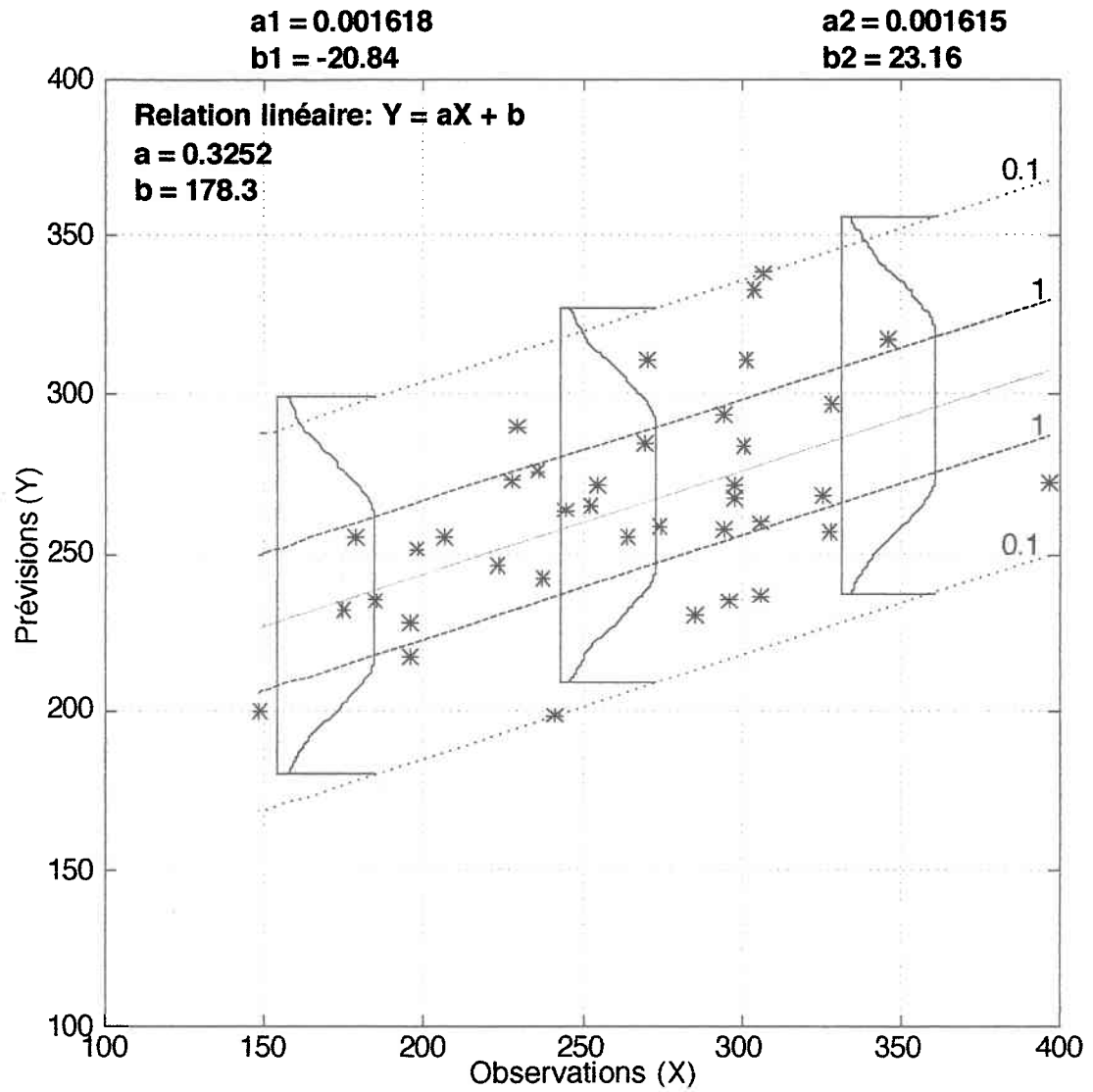
**Figure C. 75: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 2 ( $v\_ssm2$ ).**



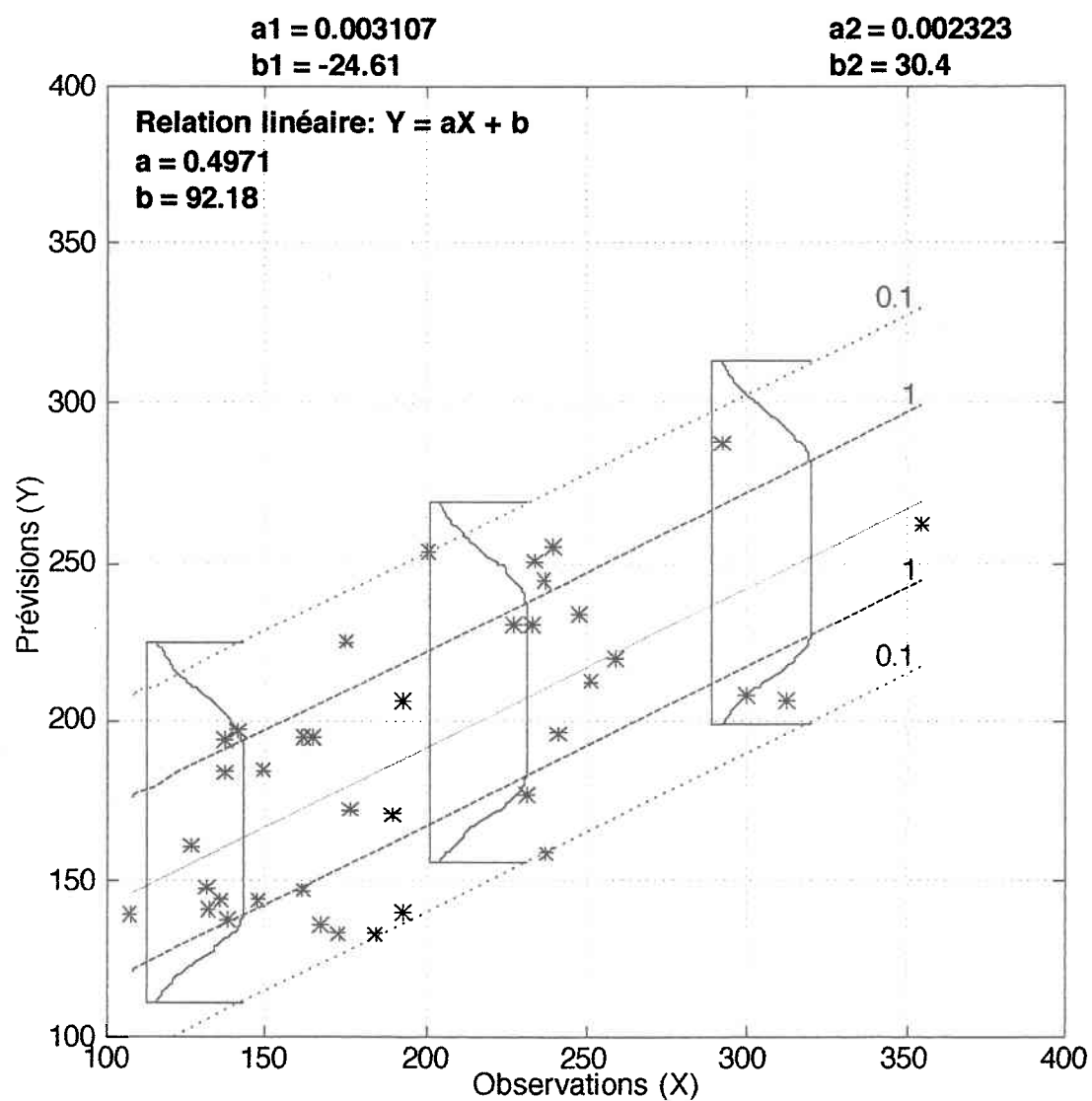
**Figure C. 76: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 3 ( $v_{\text{ssm}3}$ ).**



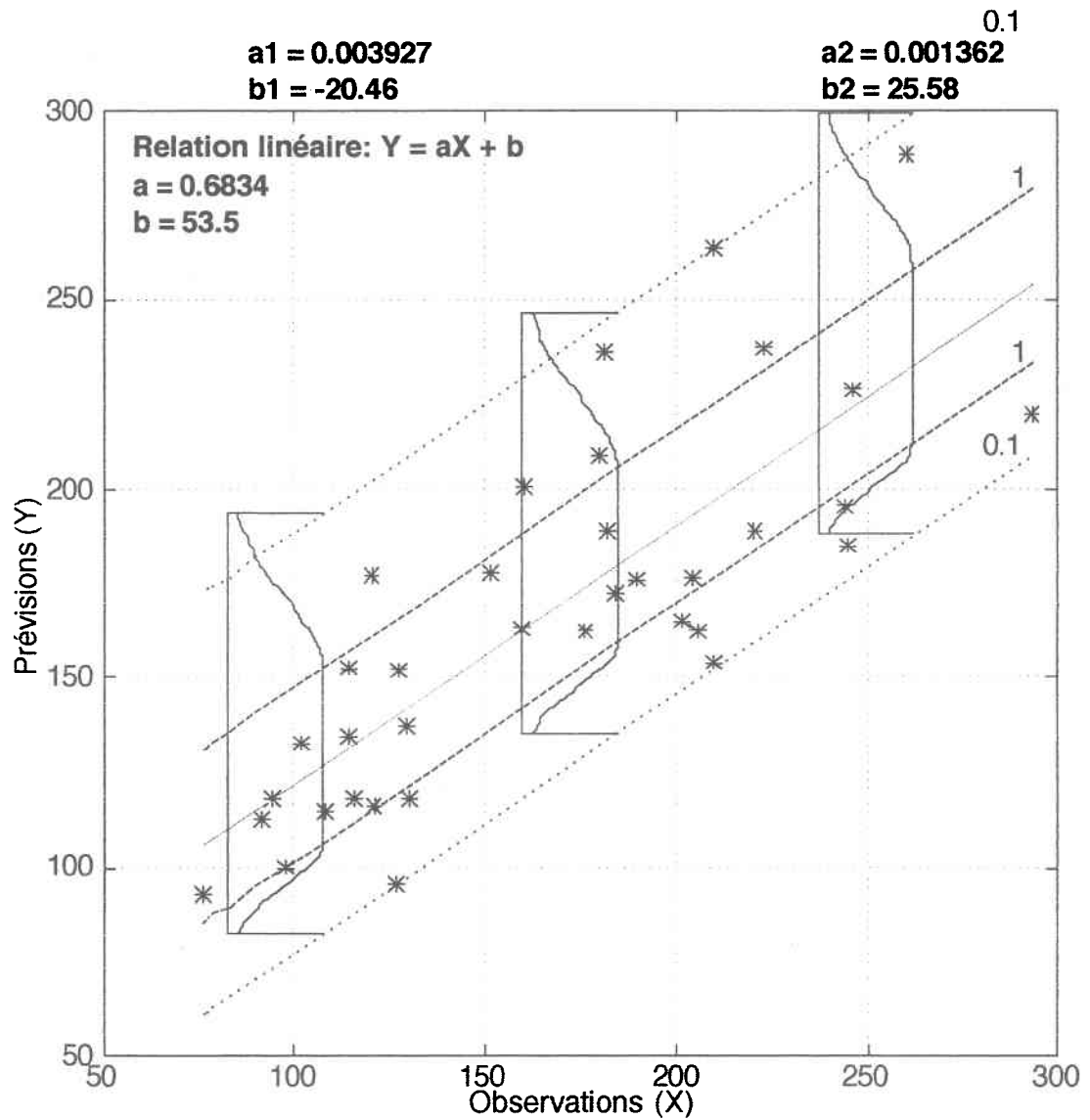
**Figure C. 77: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade montée 4 ( $v_{\text{ssm4}}$ ).**



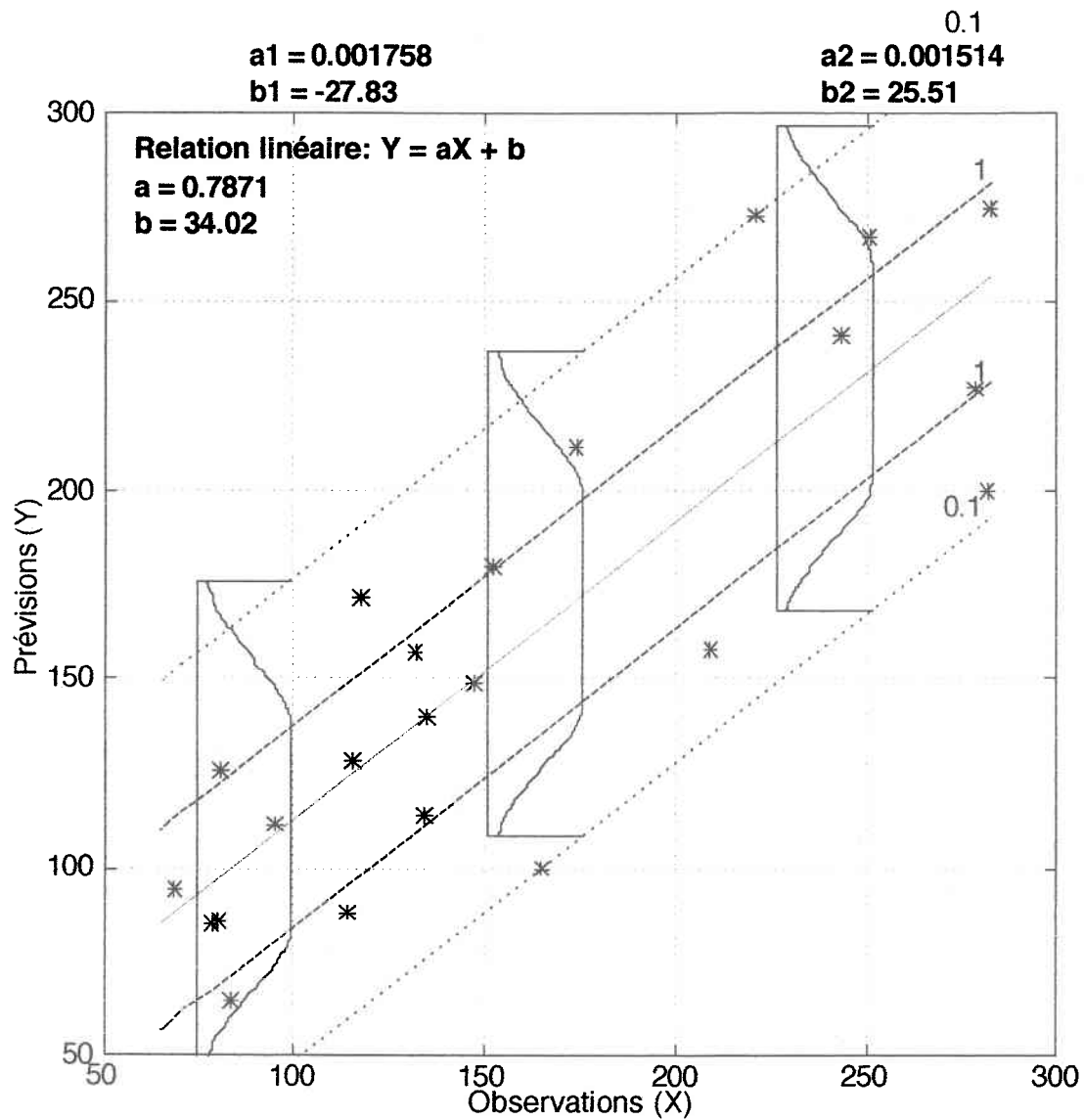
**Figure C. 78: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 1 ( $v_{\text{ssd1}}$ ).**



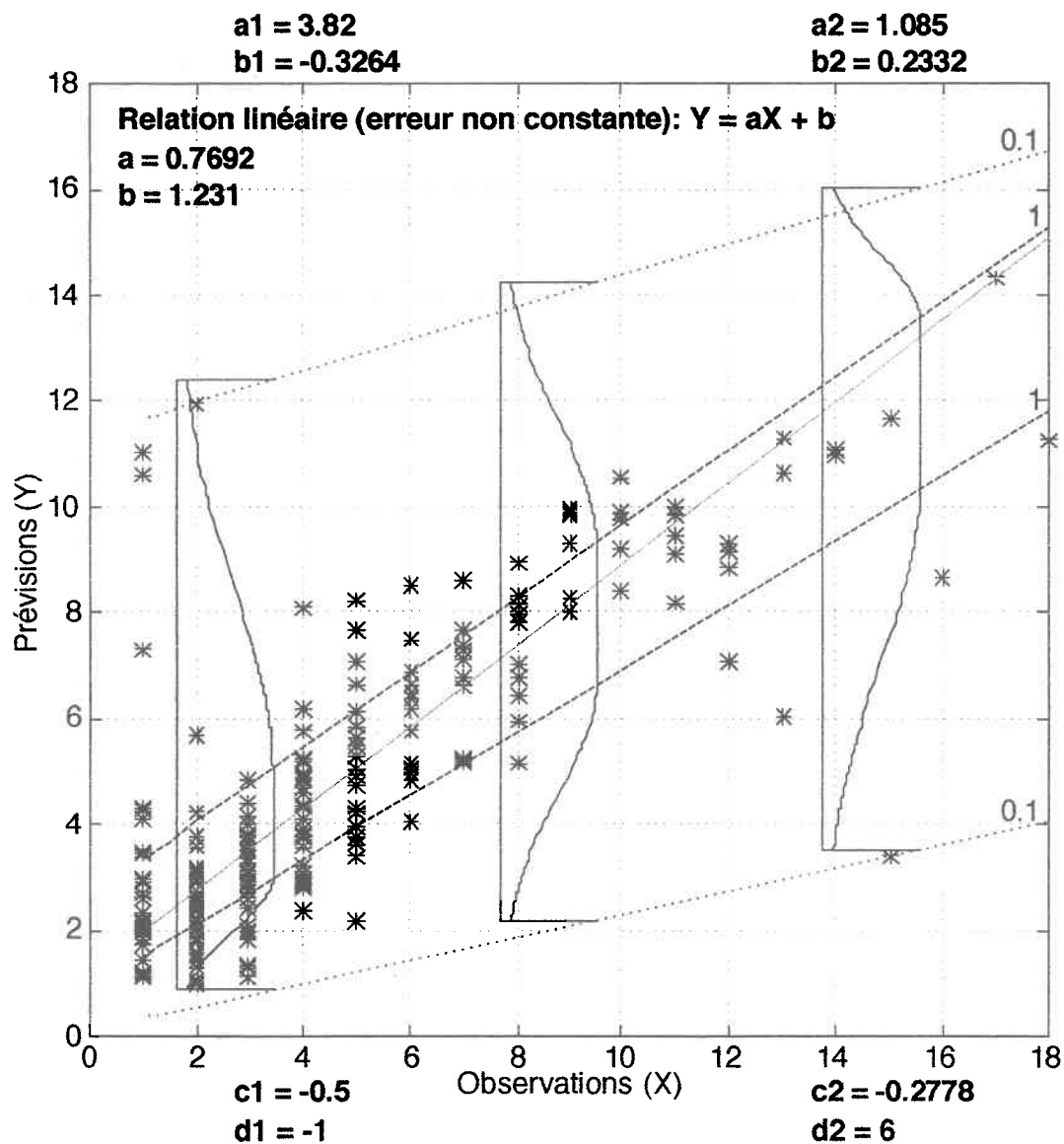
**Figure C. 79: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 2 ( $v_{\text{ssd}2}$ ).**



**Figure C. 80: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descende 3 ( $v_{\text{ssd}3}$ ).**

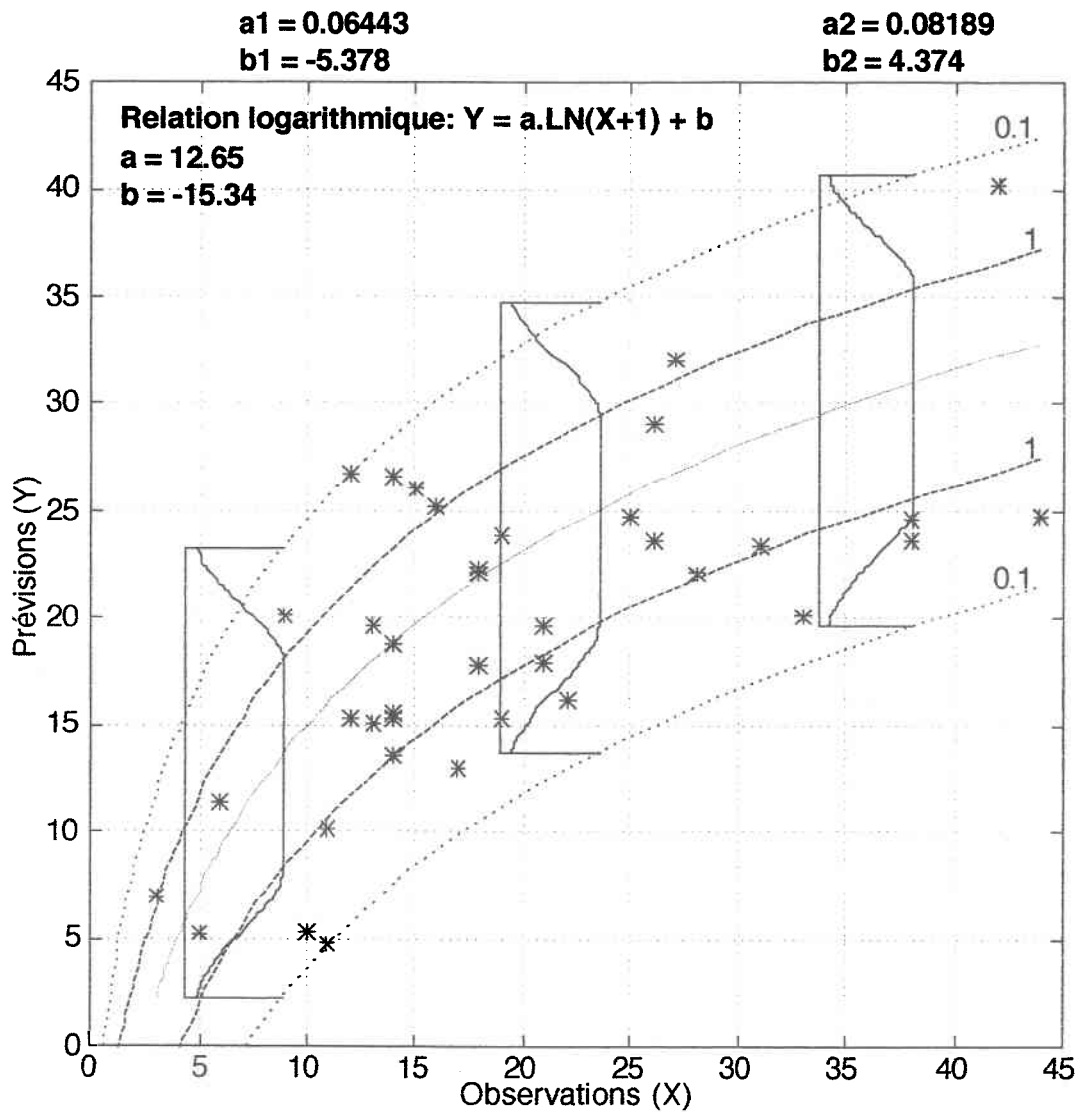


**Figure C. 81: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du volume journalier de la crue (en  $\text{hm}^3$ ) au sous-stade descente 4 ( $v_{\text{ssd4}}$ ).**

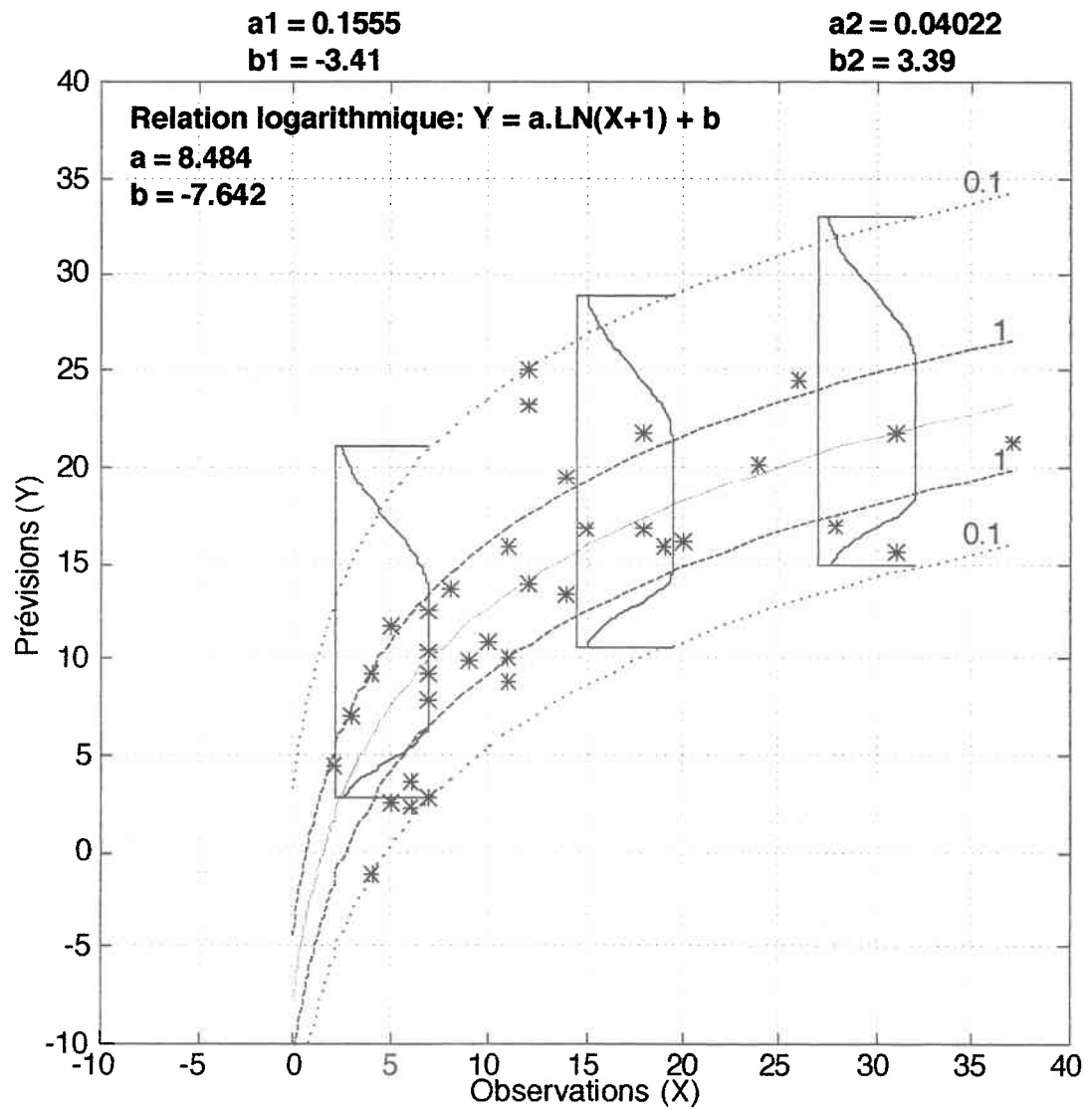
Date de départ

**Figure C. 82: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du nombre de jours restants avant le départ de la crue lorsque les conditions pour le départ éventuel sont satisfaites (dd\_cond).**

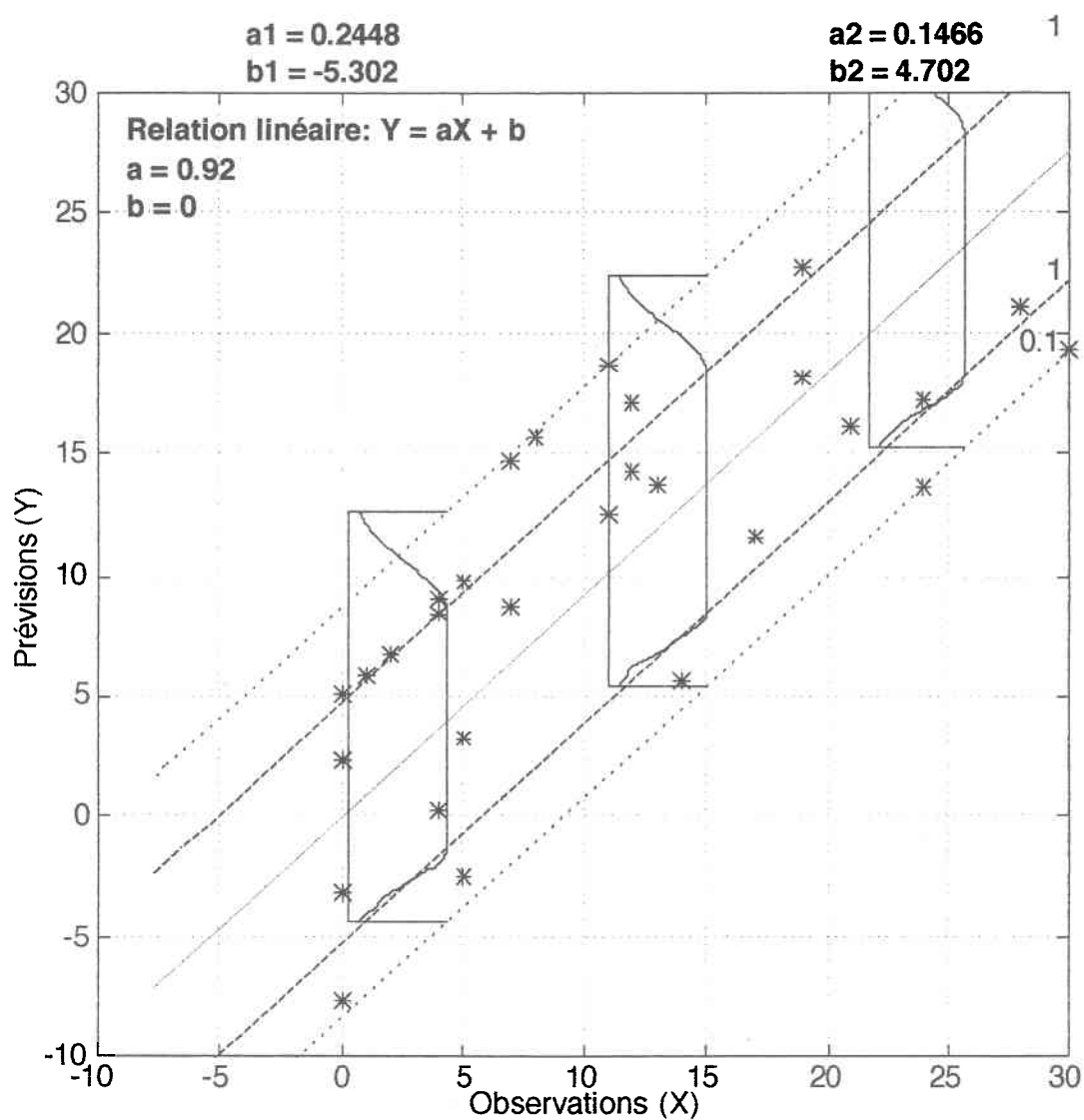


Date de pointe

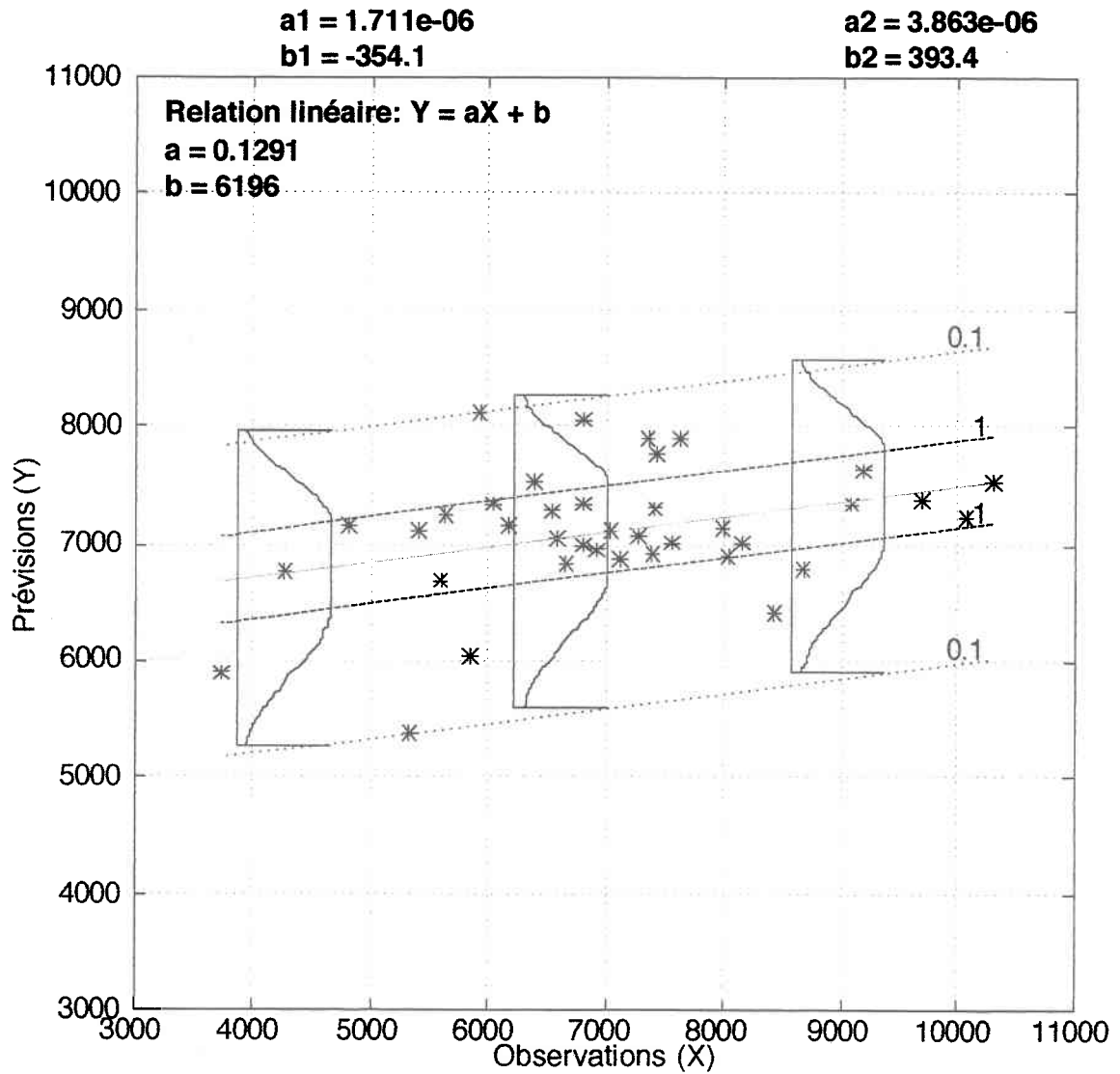
**Figure C. 83: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 2 (dp\_ssm2).**



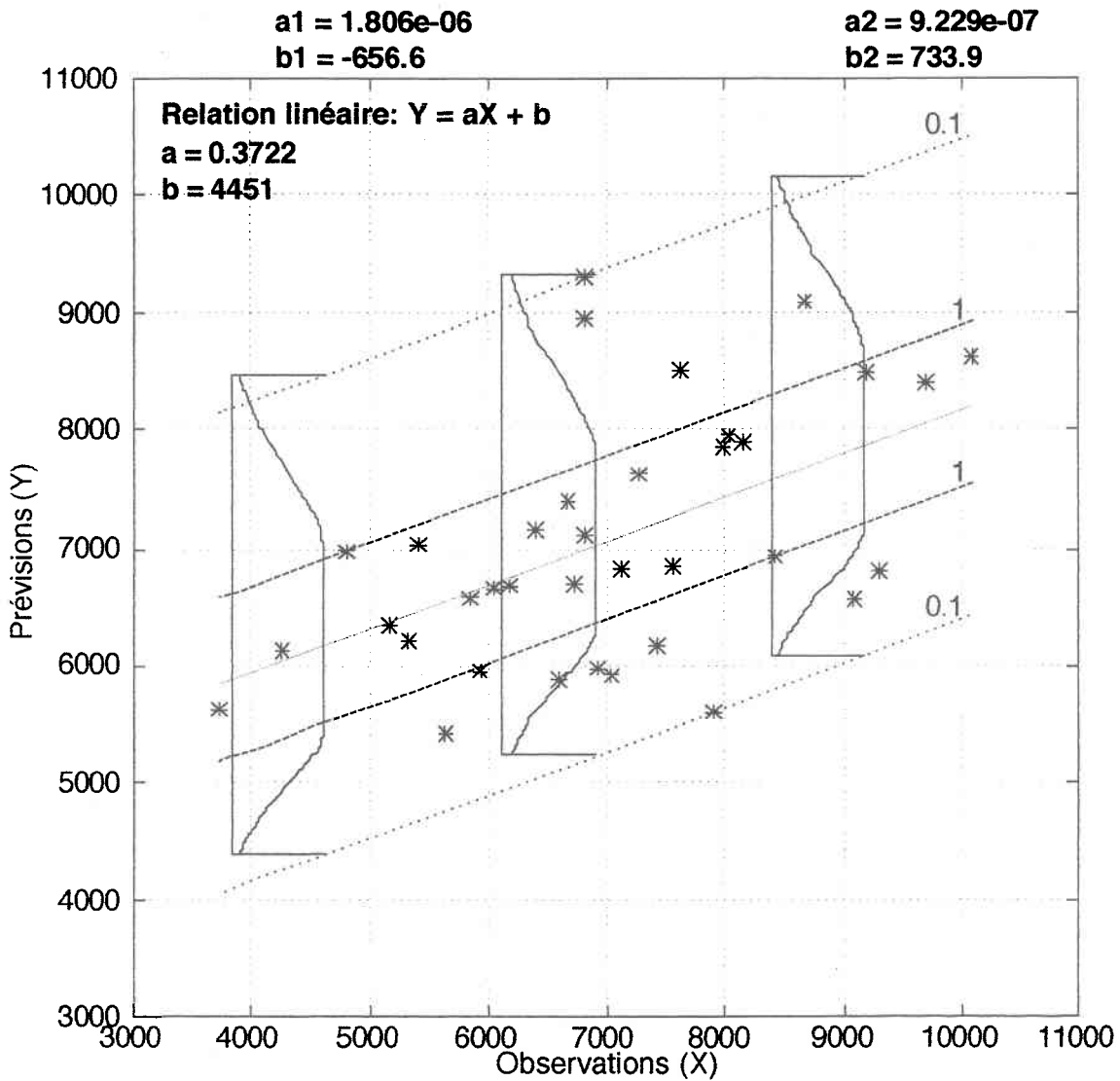
**Figure C. 84: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du nombre de jours restants avant la pointe de la crue au sous-stade montée 3 (dp\_ssm3).**



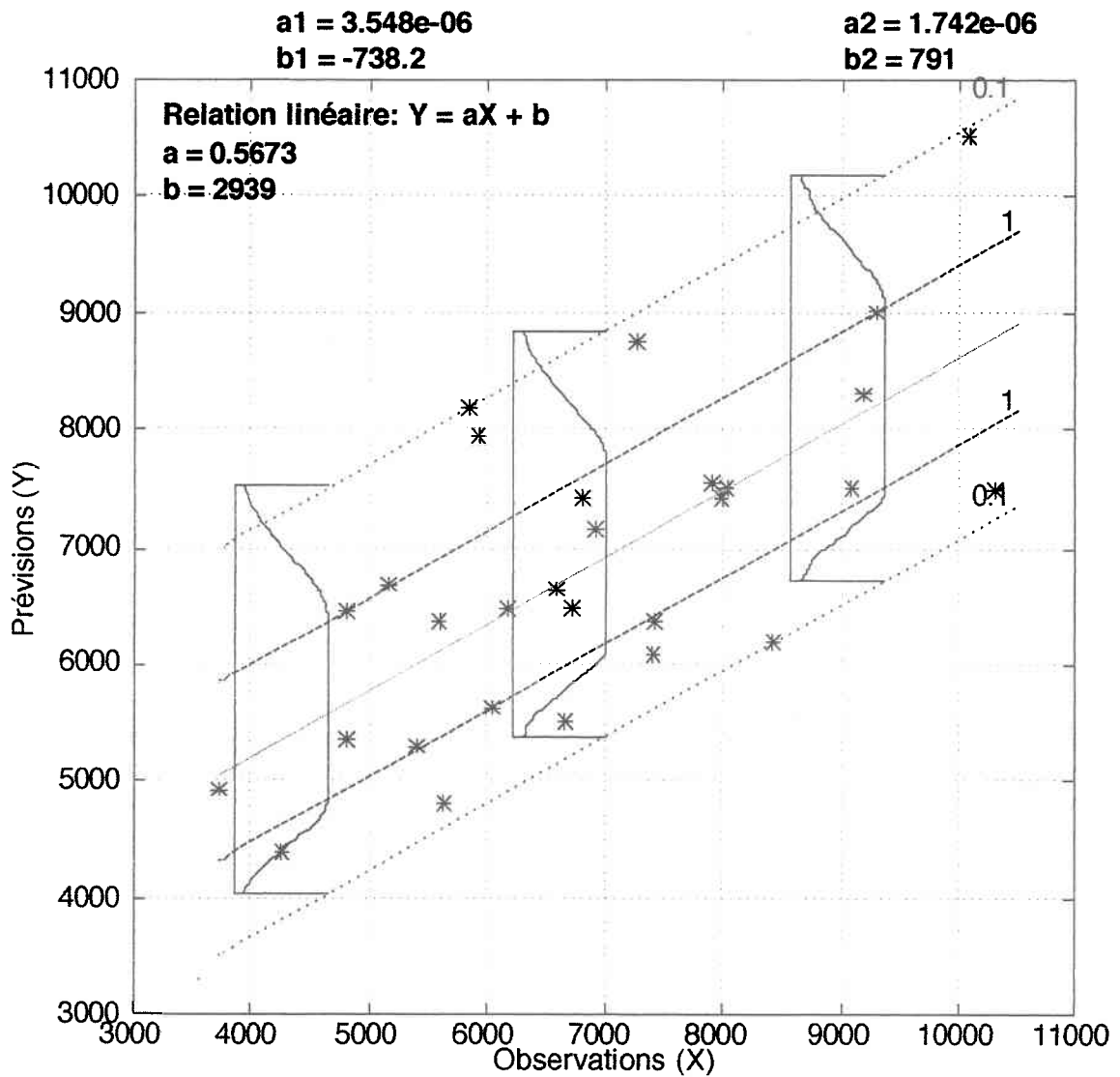
**Figure C. 85: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  du nombre de jours restants avant la crue au sous-stade montée 4 (dp\_ssm4).**

**Pointe**

**Figure C. 86: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  de la pointe de la crue (en  $m^3/s$ ) au sous-stade montée 2 (p\_ssm2).**



**Figure C. 87: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  de la pointe de la crue (en  $m^3/s$ ) au sous-stade montée 3 (p\_ssm3).**



**Figure C. 88: Bassin total: Distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(y|x)$  de la pointe de la crue (en  $m^3/s$ ) au sous-stade montée 4 (p\_ssm4).**

