

Université du Québec
INRS - Eau, Terre et Environnement

**UN ÉLÉMENT 3D MINIMAL POUR LES ÉCOULEMENTS
FLUVIAUX À SURFACE LIBRE**

Par
Maude Giasson

Mémoire présenté
pour l'obtention
du grade de Maître ès sciences (M. Sc.)
en Sciences de l'eau

Jury d'évaluation

Examineur interne

Michel Leclerc, INRS-ETE

Examineur externe

Jean-Loup Robert, Université Laval

Directeur de recherche

Yves Secretan, INRS - ETE

©droits réservés de Maude Giasson, 2008

RÉSUMÉ

Ce travail se situe dans un contexte de modélisation hydrodynamique numérique. Après avoir fait le lien entre les équations bidimensionnelles et tridimensionnelles représentant l'écoulement, l'étude se concentre sur les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles et hydrostatiques. Dans le cadre d'une discrétisation par élément fini, un élément tridimensionnel minimal est présenté. Ce dernier est développé mathématiquement puis implanté au sein de H2D2, une application hydrodynamique. L'élément présenté est validé sur un canal en courbe et les résultats obtenus sont comparés aux résultats *2D*.



Maude Giasson, étudiante



Yves Secretan, directeur

AVANT-PROPOS

J'adresse mes sincères remerciements à mon directeur de recherche, M. Yves Secretan, pour son implication dans ce projet et pour avoir su m'offrir une impressionnante disponibilité tout en me laissant une grande liberté. J'insiste aussi à le remercier pour tous ces outils qu'il sait dénicher, ou littéralement créer, qui facilitent souvent le travail et donnent beaucoup de sérieux aux réalisations.

Je tiens aussi à remercier les autres membres de l'équipe, en particulier M. Michel Leclerc, Valérie et Éric, pour les coups de mains et discussions, qui ont parfois fait du bien, parfois fait la différence.

Je remercie aussi le CEMAGREF de Lyon et en particulier M. André Paquier, pour l'accueil, M. Hervé Capra, pour m'avoir invité à présenter mon travail, et Magali, parce que, pour une numéricienne, connaître quelqu'un du terrain est une indispensable connexion avec la réalité.

Merci au fond NATEQ qui, à chaque année, rend la vie plus facile à de nombreux étudiants, c'est un honneur pour moi de faire partie du lot.

Aujourd'hui comme toujours, je partage ma joie avec mes proches qui savent me faire apprécier chaque moment de la vie. Famille, belle-famille et amis, je suis choyée d'évoluer à vos côtés.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	ii
AVANT-PROPOS	iv
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES TABLEAUX	xiii
NOTATION	xv
INTRODUCTION	1
1 Étude bibliographique	5
1.1 Le modèle mathématique	5
2 Le modèle mathématique	11
2.1 Modèle de Navier-Stokes 3D hydrostatique	13
2.2 Modèle de Saint-Venant 2D	16
2.3 Fermetures	19
2.3.1 Tenseur des contraintes	20

2.3.2	Forces extérieures	21
2.3.3	Lois de comportement à la surface et au fond	22
2.4	Conclusion	23
3	Formulation variationnelle	29
3.1	Formulation variationnelle forte	30
3.2	Formulation variationnelle faible	31
3.3	Conditions aux limites	33
3.3.1	Frontières ouvertes Γ_i et Γ_o	33
3.3.2	Parois Γ_p	34
3.3.3	Fond et surface Γ_f et Γ_s	34
3.4	Vitesse verticale	35
3.5	Conclusion	36
4	Modèle discret	41
4.1	Approximation par éléments finis	42
4.2	Élément d'approximation	43
4.2.1	Élément unidimensionnel	44
4.2.2	Élément bidimensionnel	45
4.2.3	Élément tridimensionnel	46
4.3	Discrétisation	48
4.3.1	Assemblage	49
4.3.2	Changement de variable	50
4.3.3	Conditions limites	54
4.4	Vitesse verticale	54
4.5	Méthodes de résolution	56

TABLE DES MATIÈRES

ix

4.6	Intégration numérique	56
4.7	Conclusion	59
5	Implantation	63
5.1	Élément géométrique	64
5.2	Intégration numérique	65
5.3	Élément d'approximation	66
5.4	Validation de la programmation	70
5.5	Conclusion	75
6	Application à un canal en courbe	79
6.1	Description générale des travaux de comparaison	80
6.1.1	L'expérience de STEFFLER et JIN (1993)	80
6.1.2	Simulation de référence 2D	80
6.1.3	Simulation 2D avec dispersion	83
6.2	Simulation avec le P12L	84
6.2.1	Paramètres de simulation	84
6.2.2	Description générale de l'écoulement simulé	85
6.2.3	Vitesses longitudinales	87
6.2.4	Vitesses transversales	89
6.2.5	Variation verticale des vitesses	91
6.2.6	Vitesse verticale	93
6.3	Conclusion	95
A	COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE	101
A.1	Règle de Leibniz	102

A.2	Théorème de la divergence	102
A.3	Intégrale projetée	103
B	MÉTRIQUES	105

LISTE DES FIGURES

1.1	Principales hypothèses et modèles associés	10
2.1	Principales variables utilisées	12
2.2	Séquence d'hypothèses	14
3.1	Domaine Ω et ses frontières	33
4.1	Discrétisation d'une frontière	44
4.2	Élément d'approximation unidimensionnel à 2 nœuds ($L2$)	44
4.3	Élément d'approximation bidimensionnel à 6 nœuds ($T6L$)	45
4.4	Élément d'approximation tridimensionnel à 12 nœuds ($P12L$)	47
4.5	Assemblage des contributions élémentaires dans la matrice K^e	50
4.6	Intégration numérique d'une fonction d'ordre 1 sur un $L2$	57
5.1	Diagramme de classes des éléments géométriques	64
5.2	Diagramme de classes des schémas d'intégration numérique	65
5.3	Diagramme de classes des éléments d'approximation de base	67
5.4	Séquence d'appels pour la fonction <i>asmke()</i>	69
6.1	Description du canal courbe (STEFFLER et JIN, 1993)	81

6.2	Sens de l'écoulement	81
6.3	Isosurfaces du module de la vitesse, simulation de référence 2D (Hydrosim)	82
6.4	Isosurfaces de vitesse, simulation avec dispersion (d'après SECRETAN et DUBOS (2005)	83
6.5	Maillage utilisé pour les simulations numériques	85
6.6	Isosurfaces de vitesse, simulation P12L	86
6.7	Profil des vitesses longitudinales (m/s) sur différents transects	88
6.8	Profil des vitesses transversales (m/s) sur différents transects	90
6.9	Profils verticaux des vitesses longitudinales et transversales (m/s) au centre ($-y/L = 0$) des transects 90° et 180°	92
6.10	Profil de la vitesse verticale (en m/s) au fond (w_f) et en surface (w_s) sur les différents transects.	94
A.1	Projection dans le plan xOy	103

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Modèle mathématique 3D	24
2.2	Modèle mathématique 2D	25
3.1	Hypothèses associées au modèle variationnel tridimensionnel	37
3.2	Modèle variationnel tridimensionnel	38
4.1	Forme discrète de l'équation de continuité	51
4.2	Forme discrète de l'équation du mouvement en x	52
4.3	Forme discrète de l'équation du mouvement en y	53
4.4	Points d'intégration de Gauss sur un $L2$	58
4.5	Points d'intégration sur un $T3$ (formules de Hammer)	58
4.6	Points d'intégration sur un $P6$	60
5.1	Paramètres des test de $lmg0_p12l_evaluate()$	71
5.2	Types d'éléments utilisés pour les tests d'évaluation et d'intégration . .	71
5.3	Paramètres des test de $ni_p12l_evaluate()$	72
5.4	Paramètres des test de $ns_macro3d_evaluate()$	73
5.5	Paramètres des test de $ns_macro3d$	74

B.1 Métriques d'un $L2$	107
B.2 Métriques sur le $T6L$ et le $T3$	107
B.3 Définition des variables pour les métriques du $P12L$	108
B.4 Jacobien du $P12L$ et du $P6$	109
B.5 Déterminant du jacobien du $P12L$ et du $P6$	110
B.6 Inverse du jacobien du $P12L$ et du $P6$	111

NOTATION

A	Projection dans le plan XOY d'un domaine tridimensionnel
$A(\psi, \phi)$	Application sur les fonctions ψ et ϕ
c_w	Coefficient de traînée du vent
f_i	Forces extérieures
g	Gravité
h	Niveau d'eau
h'	Cote du fond
H	Profondeur
i, j, k	Indices de la notation d'Einstein
J_r^e	Jacobien de transformation de l'élément e vers l'élément de référence associé r
j_r^e	Inverse du jacobien ($J_r^{e^{-1}}$)
$ J_r^e $	Déterminant du jacobien
K	Matrice de rigidité
K_e	Matrice de contributions élémentaires
l_m	Longueur de mélange

L	Opérateur sur l'espace fonctionnel ϕ
M	Opérateur sur l'espace fonctionnel ϕ_t
N_r^f	Fonction d'approximation de la fonction f sur l'élément réel r
\bar{N}	Fonction d'approximation géométrique
\mathbf{n}	Normale à la frontière
n	Coefficient de Manning (associé à la rugosité)
n_m	Coefficient de Manning des macrophytes
n_g	Coefficient de Manning de la glace
n_{tot}	Coefficient de frottement global
p	Pression
p_a	Pression atmosphérique
r_{ij}	Contraintes de Reynolds
R_{ij}	Contraintes de Reynolds moyennées sur la colonne d'eau
t	temps, variable indépendante
T_{ij}	Contraintes visqueuses moyennées sur la colonne d'eau
T	Petit intervalle de temps
u_i	Composantes de la vitesse
u, v, w	Composantes de la vitesse
U, V, W	Partie moyennée sur la colonne d'eau des composantes de la vitesse
\mathbf{w}	Vecteur de vitesse du vent
w_i	Composantes de la vitesse du vent
x_i	Composantes cartésiennes
x, y, z	Composantes cartésiennes

z_f, z_s	Cote de fond et niveau d'eau
α_{ij}	Terme de dispersion
Γ	Frontière de Ω
ε_i	$U_i \varepsilon_i(z)$ est la différence entre la variable u_i au point z et sa moyenne sur la colonne
ν	Coefficient de viscosité
ν_l	Viscosité laminaire ou moléculaire
ν_t	Viscosité turbulente
ξ, η, ζ	Système de coordonnées des éléments de référence
ρ	Densité de l'eau
ρ_a	Densité de l'air
σ_{ij}	Tenseur des contraintes
τ_{ij}	Contraintes visqueuses
τ_{iz}^s, τ_{iz}^f	Contraintes de surface et de fond
$\tau_{iz}^{s;w}, \tau_{iz}^{s;g}$	Contraintes de surface liées au vent et à la glace
$\tau_{iz}^{f;r}, \tau_{iz}^{f;m}$	Contraintes au fond liées à la rugosité et aux macrophytes
τ_r^e	Transformation géométrique de l'élément réel e vers l'élément de référence r
ϕ	Latitude
ϕ	Vecteur des fonctions solutions
$\tilde{\phi}$	Approximation du vecteur des fonctions solutions
ψ	Fonction de pondération ou fonction test
ω	vitesse angulaire de rotation de la terre

- Ω Domaine de \mathbb{R}^n
- Ω^e Restriction de Ω à un élément
- Ω^r Élément de référence

- $\overline{(\)}$ Moyenne sur un court intervalle de temps T
- $(\)'$ Partie fluctuante de la variable moyennée sur un court intervalle de temps T
- $(\)_{,x}$ Opérateur de dérivation partielle
- $\{(\)\}$ Matrice verticale $n \times 1$
- $\langle (\) \rangle$ Matrice horizontale $1 \times n$

INTRODUCTION

Contexte

Les modèles hydrodynamiques numériques sont des outils d'analyse et d'aide à la décision précieux utilisés dans des domaines aussi variés que la sédimentologie, l'hydrogéologie, l'écologie et l'aménagement du territoire, pour n'en citer que quelques uns. C'est en mettant à profit des mesures du terrain et en solutionnant des équations de la mécanique des fluides que les modèles hydrodynamiques arrivent à représenter un écoulement, fournissant en particulier la vitesse du courant et le niveau d'eau en chacun des points du domaine.

Les équations de Navier-Stokes sont largement utilisées en hydrodynamique, sous leur forme tridimensionnelle ou bien, suite à une intégration sur la verticale des variables, sous une forme bidimensionnelle aussi nommée équations de Saint-Venant. Mis à part certains cas triviaux, il n'existe pas de solution analytique connue à ces équations. Le recours à une discrétisation du domaine et aux méthodes numériques s'avère donc nécessaire. La simplification des équations, menant à l'obtention d'un modèle mathématique adéquat pour l'étude envisagée, le choix d'une méthode de discrétisa-

tion appropriée et la résolution numérique sont les grandes étapes du développement d'un modèle hydrodynamique.

Dans un contexte où les ressources informatiques sont finies, les simplifications sont appliquées afin de résoudre le problème considéré dans un temps acceptable. Ces simplifications permettent d'accélérer la résolution en diminuant le nombre de variables et d'équations à considérer. En revanche, les hypothèses posées lors du développement d'un modèle restreignent les cas pouvant être adéquatement représentés par le modèle en question. Un des objectifs de ce travail sera de comparer les différents modèles au niveau des hypothèses posées lors du développement mathématique.

L'équipe d'éco-hydraulique numérique de l'INRS - Eau, Terre et Environnement, a développé Hydrosim (HENICHE ET AL., 2000b), et Modeleur (ROY ET AL., 2000). Hydrosim résout les équations de Saint-Venant 2D par une discrétisation en éléments finis à l'aide d'un élément P_1isoP_2/P_1 et une résolution numérique de forme GMRES (*Generalized Minimal Residual Method*) non-linéaire. Ce programme est de type couvant-découvrant. Pour sa part, Modeleur est un imposant système d'information géographique (SIG), capable de gérer et stocker des couches d'informations. En particulier, Modeleur peut servir de pré- et post-processeur éléments finis en construisant des maillages et il utilise Hydrosim comme application externe. Le couple Modeleur/Hydrosim a été utilisé avec succès à de nombreuses reprises, notamment pour simuler les crues au Saguenay (INRS-EAU, 1997), la rivière Montmorency (LECLERC ET AL., 1998) et le fleuve Saint-Laurent. La suite d'Hydrosim est actuellement en cours de développement. L'application se nommera H2D2 et combinera des équations de transport-diffusion aux équations d'écoulement.

Bien que la formulation bidimensionnelle de Saint-Venant utilisée dans Hydrosim et H2D2 fournisse d'excellents résultats en pratique, il existe certains cas où, en s'éloi-

gnant des hypothèses sous-jacentes au modèle, l'écoulement modélisé n'arrive plus à capter certaines particularités de l'écoulement réel. Le canal en courbe de STEFFLER et JIN (1993) en est un exemple. Dans ce canal, Hydrosim représente l'écoulement comme une rotation de corps rigide (SECRETAN et DUBOS, 2005), omettant ainsi l'effet des courants secondaires sur la vitesse moyenne. Le raffinement horizontal du maillage ne suffit pas à améliorer les résultats puisque l'essence du problème se trouve sur la verticale. Il faut alors penser à modifier le modèle mathématique. À ce sujet, deux principales solutions peuvent être envisagées, l'amélioration du modèle bidimensionnel ou le passage à un modèle tridimensionnel.

STEFFLER et GHAMRY (2005) et SECRETAN et DUBOS (2005) ont travaillé à partir d'un modèle bidimensionnel, les premiers en ajoutant des inconnues et équations au problème, les seconds en paramétrant le terme de dispersion. Dans ce travail, nous avons plutôt penché vers l'utilisation d'un modèle tridimensionnel de Navier-Stokes hydrostatique, ramenant ainsi la complexité de résolution au schéma numérique élément fini. La particularité de ce projet réside dans le choix de l'élément d'approximation, lequel s'est avéré minimal. Il s'agit en fait d'un prisme à 6 noeuds (P_6), mais ne s'empilant pas sur la verticale, ce qui permet d'utiliser un maillage essentiellement bidimensionnel. Ainsi, nous pouvons tirer profit de cette nouvelle représentation sur la verticale, mais à un coût moindre en espace mémoire et en temps de calcul. Il s'agit donc d'un compromis entre le 2D standard et le 3D complet.

Objectifs

Les objectifs fixés pour ce travail sont les suivants :

- comparer différents modèles hydrodynamiques sur le plan des hypothèses posées lors du développement mathématique ;
- revoir le développement du modèle bidimensionnel de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes ;
- élaborer un modèle mathématique tridimensionnel et comparer les hypothèses posée à celles provenant du développement des équations de Saint-Venant ;
- développer et implanter un élément tridimensionnel minimal pour un écoulement en régime permanent ;
- tester l'élément et évaluer ses performances.

Méthodologie et plan de rédaction

Au premier chapitre, une revue de la littérature permettra d'étudier une sélection de modèles dans le but de répondre au premier objectif de ce travail. Le second chapitre présente le modèle mathématique $3D$. De plus, un développement des équations de Saint-Venant $2D$ par une intégration verticale des équations de Navier-Stokes y est introduit.

La suite du mémoire reprend les étapes classiques que l'on retrouve dans les travaux numériques. Le chapitre 3 présente la formulation variationnelle du problème alors que la forme discrète et la description de l'élément d'approximation se retrouvent au chapitre 4. Les détails d'implantation et les premiers tests de validation de la programmation sont détaillés au chapitre 5, et finalement, le chapitre 6 présente et analyse des résultats de simulations sur un canal en courbe.

Chapitre 1

Étude bibliographique

1.1 Le modèle mathématique

Le sujet à l'étude est un écoulement tridimensionnel, transitoire, où l'une des frontières du domaine est délimitée par une surface libre, dont la position (niveau d'eau) est une inconnue du problème. Les équations de Navier-Stokes décrivent ce type d'écoulement. Dans la majorité des modèles hydrodynamiques, (p. ex. CASULLI et STELLING (1998), FERRARI et SALERI (2004), HENICHE ET AL. (2002), STELLING et BUSNELLI (2001) et TOME et MCKEE (1994)) on pose l'hypothèse d'incompressibilité. Les écoulements d'intérêt étant turbulents, une version moyennée sur la turbulence est utilisée, ce qui mène aux équations dites *RANS* pour *Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations*, où les variables sont décomposées en une somme de deux termes, soit une valeur moyenne sur une échelle de temps macroscopique et la variation instantannée par rapport à cette moyenne. L'influence de l'agitation turbulente sur l'écoulement moyen est représentée à l'aide d'un terme turbulent qui, associé à

une viscosité équivalente, doit être paramétré. Il existe différents modèles de turbulence pour des problèmes tridimensionnels, dont ceux présentés dans RODI (1984). Devant l'impossibilité de résoudre analytiquement les *RANS* pour des problèmes non triviaux, il faut chercher des solutions numériques.

Selon ALCRUDO (2002), les solutions numériques complètes tridimensionnelles sont limitées à des écoulements lents ou permanents (p. ex. SINHA ET AL. (1998), CASULLI et STELLING (1998) et YE et MCCORQUODALE (1998)). Plus récemment, d'autres algorithmes pour résoudre les équations de Navier-Stokes *3D* non hydrostatiques avec surface libre ont été présentés (p. ex. YUAN et WU (2004), KOÇYIGIT ET AL. (2002)), mais dans ces modèles, la formulation mathématique a peu d'intérêt, l'attention se portant plutôt sur la formulation du modèle discret et sa résolution numérique. Notons toutefois que KOÇYIGIT ET AL. (2002) séparent la pression en une composante hydrostatique et une non hydrostatique et solutionnent le problème dans un système en coordonnées adimensionnelles σ , c'est-à-dire un système transformant la coordonnée verticale σ variant sur $[-1, 0]$ entre le fond et la surface libre.

Lorsque les échelles horizontales du domaine sont d'un ordre supérieur aux échelles verticales, le problème peut être simplifié en posant l'hypothèse de pression hydrostatique. LECLERC (1985) et MIGLIO ET AL. (1999) présentent des modèles tridimensionnels, utilisant plusieurs couches sur la verticale où seule l'équation de conservation de la masse est modifiée et ce, par une intégration sur la verticale. HENICHE (1995) propose une approche similaire mais ajoute un terme représentant la pression due aux sédiments dans la colonne d'eau. Les modèles tridimensionnels demeurent coûteux (en temps machine et en espace mémoire), en particulier parce qu'il est nécessaire d'adapter la discrétisation du domaine au mouvement de la surface libre (AUDUSSE, 2005). De tels modèles s'avèrent toutefois nécessaires pour résoudre certains problèmes, par

exemple, pour des cas de dispersion de contaminant (ex : BUIL (1999)) ou d'autres avec des recirculations importantes (ex : LECLERC (1985)).

Les modèles bidimensionnels horizontaux hydrostatiques sont très largement utilisés. Ils ont l'avantage important d'alléger la discrétisation du domaine de calcul, ce dernier ne se déplaçant plus avec la surface libre. Ils conviennent bien aux problèmes où la variable d'intérêt est la hauteur d'eau, qui est elle-même une variable bidimensionnelle. La formulation la mieux connue en 2D provient de DE SAINT-VENANT (1871), où elle directement dérivée des équations de conservation de la masse et du mouvement dans le plan (ALCRUDO, 2002). Les équations de Saint-Venant posent l'hypothèse de pression hydrostatique et les vitesses sont remplacées par leur valeur moyenne sur la verticale. Des systèmes similaires sont obtenus à partir des équations de Navier-Stokes en posant que les vitesses horizontales ne varient pas sur la verticale (p. ex. HENICHE ET AL. (2002)) ou par une intégration des équations sur la verticale (p. ex. HEROIN (1991), SECRETAN et DUBOS (2005), ZHANG (1992)). Lors de l'intégration verticale, des termes non-linéaires (accélération convective) basés sur la différence entre la vitesse moyenne et la vitesse réelle apparaissent. Ces termes sont traités comme de la dispersion. Différentes solutions pour paramétrer ce terme sont étudiées (p.ex. SECRETAN et DUBOS (2005)), mais pour obtenir un système équivalent au système de Saint-Venant, il faut supposer que l'intégration sur la verticale de ces termes est nulle et faire certaines hypothèses concernant les contraintes en surface et au fond. Nous ferons cette démonstration dans le présent document (chapitre 2). Comme nous l'avons déjà dit, les applications des modèles bidimensionnels de type Saint-Venant sont nombreuses. À titre d'exemple, un ambitieux projet de modélisation du Saint-Laurent utilisant Hydrosim est actuellement en cours (MORIN ET AL., 2003). Le déplacement des frontières latérales avec le niveau d'eau y est pris en compte

via un traitement de couvrant-découvrant (HENICHE ET AL. (2002)), une problématique que nous ne considérerons pas dans le présent travail, puisque déjà bien gérée par Hydrosim.

Dans les modèles bidimensionnels obtenus par une intégration sur la verticale, le terme représentant la turbulence n'est pas intégré mais sa valeur moyenne est paramétrée. FERRARI et SALERI (2004) ont développé à nouveau des équations de type Saint-Venant à partir de Navier-Stokes, en conservant les termes de viscosité provenant du système tridimensionnel. Cela permet en particulier de comparer le modèle $2D$ obtenu à un modèle $3D$, la fermeture turbulente étant elle aussi intégrée sur la verticale. Pour analyser le terme de dispersion ainsi que la pression moyenne sur la verticale, FERRARI et SALERI (2004) se basent sur des équations aux dimensions. Ce travail est une extension de celui de GERBEAU et PERTHAME (2001). Ces derniers ne considèrent pas la variation de topographie (ce qui mène à une situation où l'hypothèse hydrostatique est applicable) et travaillent principalement en $1D$. FERRARI et SALERI (2004) introduisent pour leur part de faibles pentes et conservent des termes représentant la pression. Les dimensions verticales sont supposées inférieures aux dimensions longitudinales - ce qui n'est pas sans rappeler l'hypothèse hydrostatique - et c'est par rapport à ce ratio qu'ils obtiennent un système bidimensionnel approximant au second ordre le problème tridimensionnel.

STEFFLER et GHAMRY (2005) introduisent aussi un système de type Saint-Venant. Or, ils ne supposent pas les vitesses uniformes sur la verticale, ni la pression hydrostatique. À partir d'un système de Saint-Venant standard, ils remplacent les vitesses horizontales par une équation linéaire alors que la pression et la vitesse verticale sont remplacées par des équations quadratiques. L'ajout de variables supplémentaires au problème est compensé par des équations de moments, elles aussi jointes au modèle

mathématique, ce qui porte le nombre d'équations à 10 tout comme le nombre de variables sur lesquelles s'effectue le calcul.

Il existe aussi des modèles bidimensionnels verticaux et des modèles unidimensionnels. Ces derniers sont très fréquents et trouvent de nombreuses applications, mais ce sujet n'a pas été étudié.

La figure 1.1 résume les principales hypothèses et traitements (rectangles) menant à l'obtention de différents modèles (losanges) abordés dans ce chapitre.

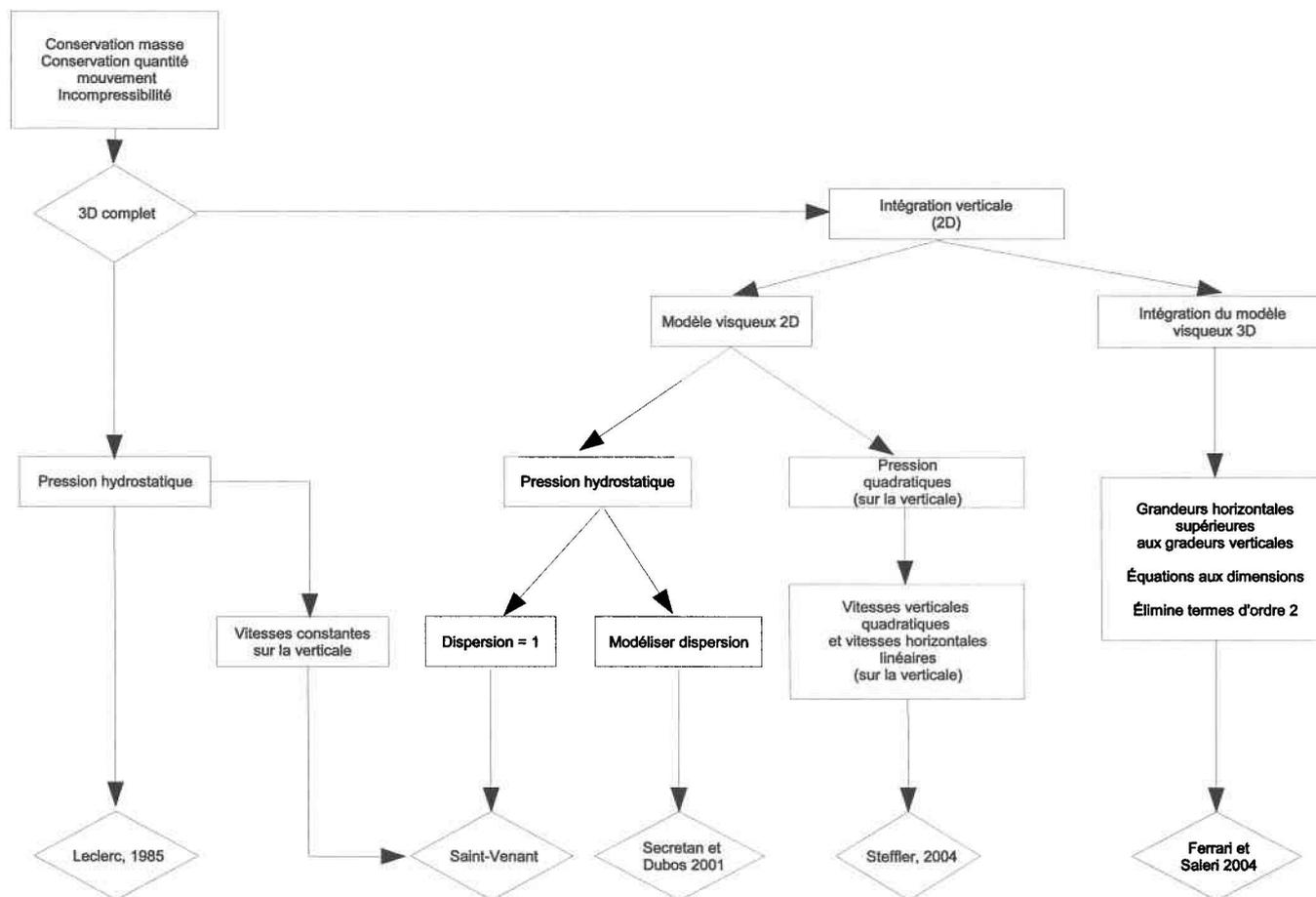


FIG. 1.1 – Principales hypothèses et modèles associés

Chapitre 2

Le modèle mathématique

Le modèle mathématique décrit le système hydrodynamique à l'aide d'un système d'équations différentielles partielles (EDP). Alors que H2D2 résout les équations de Saint-Venant dans un espace bidimensionnel, nous projetons d'introduire dans le cadre de ce travail un élément tridimensionnel simplifié capable de solutionner les équations de Navier-Stokes. Le présent chapitre a pour objectif de présenter les modèles mathématiques liés à ces deux systèmes d'équations et, en particulier, établir le lien entre les équations de Navier-Stokes et les équations de Saint-Venant.

Le point de départ est le système (2.1) représentant, en notation d'Einstein (somme implicite des indices répétés), les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible (BOIS, 2000) :

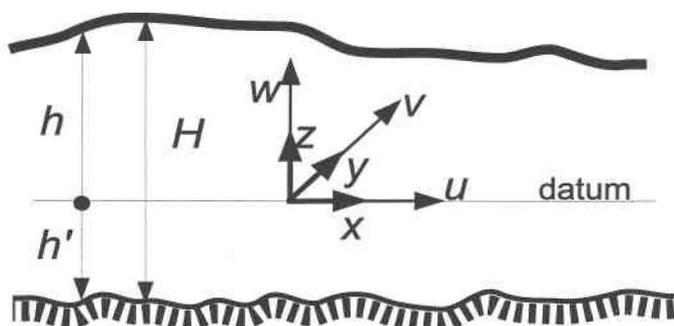


FIG. 2.1 – Principales variables utilisées

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + f_i \right) - g \delta_{i3} \\ i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où u_i est la variable de vitesse, ρ est la densité (constante dans l'espace et dans le temps), f_i est la somme des forces extérieures, p est la variable de pression et τ_{ij} le tenseur des contraintes. Le symbole de Kronecker δ_{ij} vaut 0 lorsque $i \neq j$ et 1 lorsque $i = j$. Il permet ici d'exprimer que la gravité ne s'applique que dans une direction.

Le modèle mathématique 3D utilisé dans ce travail sera obtenu en ajoutant l'hypothèse de pression hydrostatique à (2.1). De son côté, le modèle mathématique de Saint-Venant actuellement utilisé dans H2D2 peut être obtenu par une intégration verticale des équations de (2.1). Pour les deux modèles, des fermetures turbulentes sont nécessaires et seront décrites. L'ordre dans lequel les hypothèses sont posées n'ayant

pas d'impact sur le modèle mathématique obtenu, le développement du modèle de Saint-Venant présenté dans ce chapitre et résumé à la figure 2.2 est équivalent à celui de la figure 1.1, avec intégration verticale. Pour sa part, le modèle 3D correspond, toujours au sein de la figure 1.1 au travail de LECLERC (1985).

2.1 Modèle de Navier-Stokes 3D hydrostatique

Nous poserons l'hypothèse de pression hydrostatique, laquelle se formule ainsi dans un domaine à masse spécifique constante :

$$p = \rho g(h - z) + p_a \quad (2.2)$$

où p_a est la pression atmosphérique, laquelle sera considérée constante à l'échelle du domaine. L'hypothèse de pression hydrostatique est applicable sur les domaines où les échelles horizontales sont beaucoup plus importantes que les échelles verticales, et c'est pourquoi on l'appelle parfois approximation des ondes longues (BOIS, 2000). Les accélérations verticales doivent en particulier être négligeables (ALCRUDO, 2002). Ainsi, les domaines ayant de fortes pentes, les cas de ruptures de barrages ou de ressaut hydraulique par exemple, seront difficilement représentés adéquatément.

Les termes de pression et d'accélération gravitationnelle sont considérés dominants par quelques ordres de grandeur dans la troisième équation du mouvement ($i = 3$); alors, en déclinant (2.2) par rapport à z , et en tenant compte de cette hypothèse, une nouvelle formulation pour l'équation de la conservation de la quantité de mouvement en z est obtenue :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

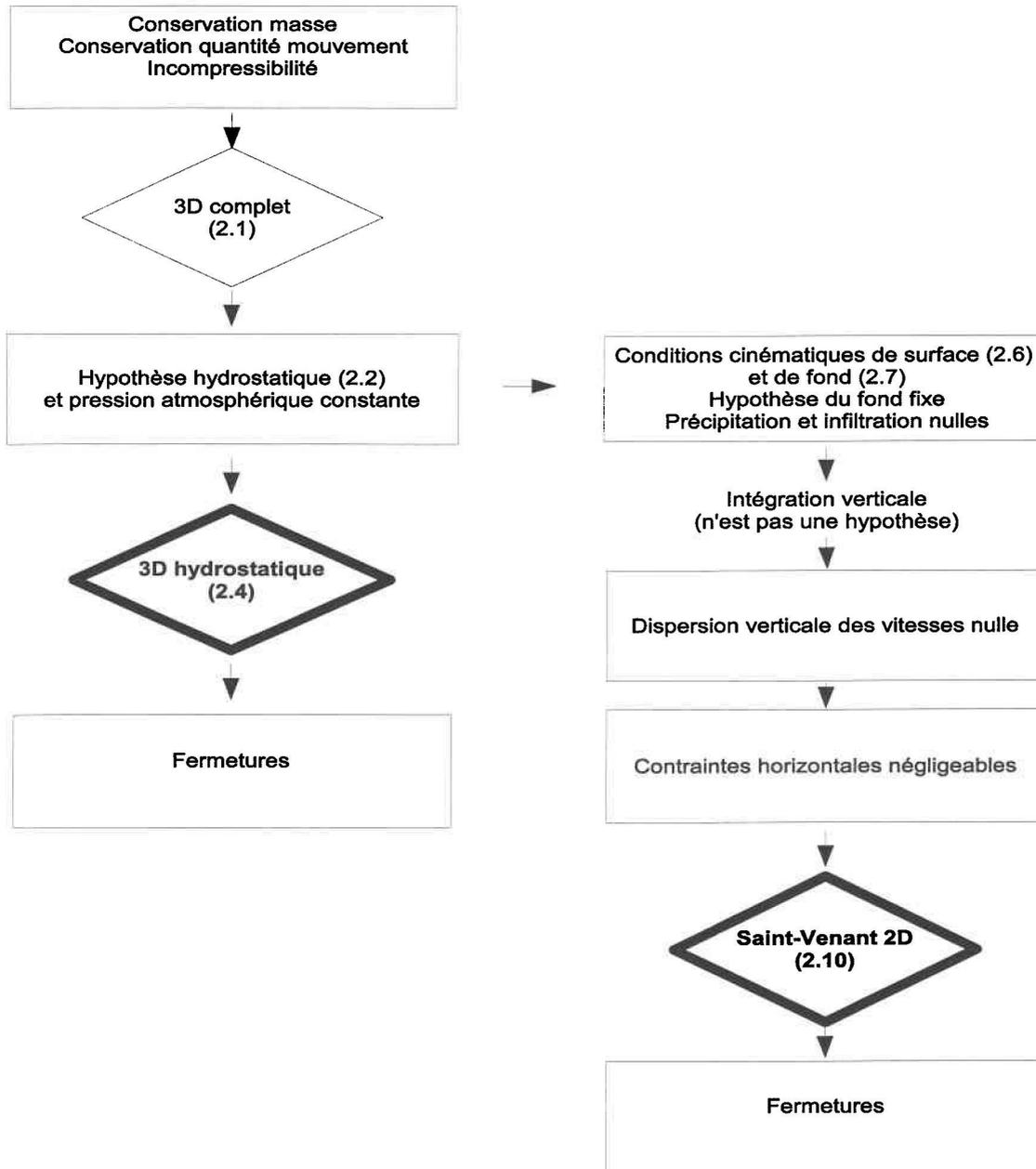


FIG. 2.2 – Séquence d'hypothèses

L'expression (2.2) peut ainsi être dérivée selon x et y , ce qui permet d'éliminer la variable de pression p au profit du niveau d'eau h :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = g \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

i ne représentant dorénavant que deux dimensions. En appliquant ce résultat à (2.1) et en laissant tomber l'équation en z , maintenant incluse dans le système, nous obtenons le **modèle mathématique 3D hydrostatique** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -g \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \left(f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) \\ i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse dans (2.3) nous obtenons le système équivalent en variables primitives :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \left(f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) \\ i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3 \end{array} \right.} \quad (2.4)$$

Cette dernière forme a été utilisée dans le cadre de ce travail de recherche. Toutefois, c'est la forme 2.3 qui sera intégrée sur la verticale pour l'obtention du modèle de Saint-Venant 2D.

2.2 Modèle de Saint-Venant 2D

Nous obtenons le modèle de Saint-Venant 2D par une intégration verticale du modèle 3D (HENICHE ET AL. (2000a), BOIS (2000)), ce qui permet d'éliminer la dépendance à z . Il est aussi possible de supposer l'uniformité des vitesses horizontales par rapport à la verticale, ce qui mène directement à un système de Saint-Venant. Ici l'intégration aura lieu sans supposer l'uniformité de la vitesse sur la verticale, ce qui, dans un premier temps, ne conduira pas tout à fait au même système. On retrouvera un système de Saint-Venant, mais seulement après avoir ajouté certaines conditions. L'intérêt d'un tel cheminement est de séparer l'hypothèse d'uniformité des vitesses horizontales en un ensemble d'hypothèses pouvant être étudiées individuellement.

Nous utiliserons les notations suivantes pour l'intégration sur la verticale :

$$\langle f \rangle = \int_{h'}^h f dz$$

où h' est la cote de fond et h le niveau d'eau. Pour la moyenne sur la verticale d'une fonction :

$$F = \frac{1}{H} \langle f \rangle$$

où $H = h - h'$ représente la profondeur.

Les termes de (2.3) contenant des dérivées partielles par rapport à x et y sont intégrés à l'aide de la formule de Leibnitz, détaillée en annexe (A.1), alors que ceux contenant des dérivées par rapport à z sont intégrés directement. Pour l'équation de

la continuité, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle &= \frac{\partial HU}{\partial x} - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + u(h') \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle &= \frac{\partial HV}{\partial y} - v(h) \frac{\partial h}{\partial y} + v(h') \frac{\partial h'}{\partial y} \\ \left\langle \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle &= w(h) - w(h') \end{aligned} \quad (2.5)$$

où U et V sont les composantes selon x et y des vitesses intégrées sur la verticale.

Les conditions cinématiques de fond et de surface permettent de simplifier $u_i(h)$ et $u_i(h')$ concernant les vitesses aux limites. Ces conditions définissent $w(h)$ en posant le déplacement en surface tangent à la surface libre et $w(h')$ en considérant le fond fixe dans le temps ($\frac{\partial h'}{\partial t} = 0$) et imperméable :

$$\begin{aligned} w(h) &= \frac{\partial h}{\partial t} + u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(h) \frac{\partial h}{\partial y} \\ w(h') &= u(h') \frac{\partial h'}{\partial x} + v(h') \frac{\partial h'}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Certains auteurs ajoutent aux conditions cinématiques des valeurs d'infiltration et de précipitation, ceci n'est toutefois pas le cas dans le développement présenté ici. En remplaçant (2.6) dans (2.5), nous obtenons une version intégrée sur la verticale de l'équation de la continuité :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} = 0$$

Les termes d'accélération des équations de conservation de la quantité de mouvement de (2.3) sont eux aussi intégrés verticalement (où $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$) :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} U_i H + u_i(h) \frac{\partial h}{\partial t} + u_i(h') \frac{\partial h'}{\partial t} \\ \left\langle \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j \rangle + u_i(h) u_j(h) \frac{\partial h}{\partial x_i} + u_i(h') u_j(h') \frac{\partial h'}{\partial x_j} \\ \left\langle \frac{\partial u_i w}{\partial z} \right\rangle &= u_i(h) w(h) - u_i(h') w(h') \end{aligned}$$

et ensuite simplifiés à l'aide des conditions cinématiques (2.6) pour ne laisser que les termes suivants pour l'accélération :

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i H + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j \rangle \quad (2.7)$$

Afin d'exprimer $\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j}$, posons $\varepsilon_i(z)$ tel que $U_i \varepsilon_i(z)$ soit la différence entre la variable u_i au point z et sa moyenne sur la colonne, alors :

$$u_i(z) = U_i(1 + \varepsilon_i(z))$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} U_i U_j H \alpha_{ij}$$

où

$$\alpha_{ij} = \left(1 + \frac{1}{H} \langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle\right)$$

est le terme de dispersion. Il est facile d'imaginer un cas où les vitesses en x et en y sont toutes deux inférieures à leur moyenne pour des petits z et supérieures à leur moyenne pour des grands z . Ainsi, le terme de dispersion est parfois considéré comme étant une constante comprise entre 1,01 et 1,1 (ROBERT, 1983), quoiqu'il s'agisse plutôt d'une variable selon x , y et t . Notons que nous poserons plus loin $\alpha_{ij} \equiv 1$ afin d'obtenir le système de Saint-Venant.

Nous obtenons une version intégrée verticalement des équations de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial HU_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial HU_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j H \alpha_{ij}) = -gH \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{F_i H}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{\rho} \left(\tau_{ij}|_h \frac{\partial h}{\partial x_j} + \tau_{ij}|_{h'} \frac{\partial h'}{\partial x_j} \right) \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{\rho} (\tau_{iz}^s - \tau_{iz}^f) \\ i = 1, 2; \quad j = 1, 2 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où T est la moyenne verticale de τ , et les contraintes verticales en surface et au fond sont respectivement $\tau_{iz}^s = \tau_{iz}|_h$ et $\tau_{iz}^f = \tau_{iz}|_{h'}$. Les pentes étant faibles, nous négligeons les termes : $\tau_{ij}|_h \frac{\partial h}{\partial x_j}$ et $\tau_{ij}|_{h'} \frac{\partial h'}{\partial x_j}$ (DUBOS, 2001).

En posant $\alpha_{ij} \equiv 1$, et en appliquant au système (2.8) les simplifications mentionnées dans les paragraphes précédents nous obtenons le **modèle de Saint-Venant 2D** ou *shallow water equations* :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial HU_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial HU_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j H) = -gH \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{F_i H}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{\rho} (\tau_{iz}^s - \tau_{iz}^f) \end{array} \right.} \quad (2.9)$$

2.3 Fermetures

Les modèles mathématiques (2.4) et (2.9) présentés comportent de nombreuses variables. À terme, seules les vitesses et la hauteur d'eau seront conservées. Afin de

réduire le nombre d'inconnues, les contraintes et les forces extérieures sont modélisés à l'aide des autres variables du système.

2.3.1 Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes se décompose en une somme des contraintes visqueuses (τ'_{ij}, T'_{ij}) et des contraintes de Reynolds (r_{ij}, R_{ij}) :

$$3D : \quad \tau_{ij} = \tau'_{ij} + r_{ij} \qquad 2D : \quad T_{ij} = T'_{ij} + R_{ij} \qquad (2.10)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses τ'_{ij} est supposé proportionnel au taux de déformation angulaire :

$$3D : \quad \tau'_{ij} = \nu_l \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \qquad 2D : \quad T'_{ij} = \nu_l \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3 \qquad i = 1, 2; \quad j = 1, 2$$

où la constante de proportionnalité ν_l représente la viscosité moléculaire.

Le tenseur de (2.10) comprend un terme (r_{ij}) représentant l'effet du champ fluctuant sur le champ moyen. Ses composantes, appelées contraintes de Reynolds, sont, en situation de turbulence développée, prépondérantes devant le tenseur des contraintes visqueuses. C'est en particulier le cas loin des parois. La fermeture utilisée pour le tenseur de Reynolds est basée sur le concept de viscosité turbulente introduit par Boussinesq en 1877. Nous privilégions le modèle à viscosité pour des raisons de simplicité, mais aussi parce qu'il s'agit d'un modèle stable et couramment utilisé. L'hypothèse de Boussinesq consiste, par analogie avec la loi de Newton, à supposer le tenseur des contraintes de Reynolds proportionnel au taux de déformation :

$$r_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

où ν_t est la viscosité turbulente, qui varie dans le temps et dans l'espace. La fermeture pour cette variable détermine la qualité du modèle de turbulence. Un modèle à 0 équations, fut privilégié devant d'autres modèles avec équations de transport ($\kappa - \epsilon$, κ , $\kappa - \omega$). Ce choix repose une fois de plus sur des raisons de simplicité, et ce, afin d'obtenir un modèle tridimensionnel minimal. Afin de fermer le modèle sans ajouter de nouvelles équations, nous utilisons la loi de Prandtl, qui lie la viscosité turbulente au module du gradient des vitesses RODI (1984) :

$$\nu_t = l_m^2 \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}$$

où la longueur de mélange l_m est un paramètre de calibration. La même formulation est utilisée en 2D, mais avec des vitesses intégrées sur la verticale.

Dans (2.9), T_{ij} est l'intégration verticale de τ_{ij} . Des fermetures similaires viennent d'être présentées pour ces deux tenseurs, mais la fermeture 2D n'est pas une intégration verticale de la fermeture du modèle 3D. FERRARI et SALERI (2004) ont intégré une fermeture turbulente 3D sur la verticale pour ensuite obtenir un modèle bidimensionnel qui approxime le modèle tridimensionnel au second ordre en regard du ratio entre les grandeurs verticales et longitudinales.

2.3.2 Forces extérieures

Nous ne considérons que la force de Coriolis :

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{c} 2\omega \sin(\phi)v \\ -2\omega \sin(\phi)u \end{array} \right\} \text{ en } 2D \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} \mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{c} 2\omega \sin(\phi)V \\ -2\omega \sin(\phi)U \end{array} \right\} \text{ en } 2D$$

où ω représente la vitesse angulaire de rotation de la terre et ϕ la latitude. Toutefois, dans plusieurs problèmes de type fluvial, dont ceux d'inondation (ALCRUDO, 2002), la force de Coriolis a un effet minimal et peut être négligée.

2.3.3 Lois de comportement à la surface et au fond

Puisqu'ils proviennent de l'intégration verticale, les contraintes au fond et en surface ne se présentent que dans le modèle bidimensionnel (2.9). Au chapitre suivant, lors de l'obtention de la forme faible du système, nous retrouverons des conditions similaires pour le modèle 3D.

Pour fermer le modèle 2D, des lois de comportement sont établies afin de représenter les contraintes à la surface et au fond. Au fond, la résistance peut provenir de la rugosité ou des plantes aquatiques. En surface, se trouvent les contraintes du vent et de la résistance de la glace en hivers. Les lois présentées ici sont tirées de (HENICHE ET AL., 2000a) et représentent ce qui est actuellement implanté au sein d'Hydrosim pour la résolution des équations de Saint-Venant 2D. Tout d'abord, une loi de traînée est utilisée pour les contraintes du vent :

$$\frac{1}{\rho} \tau_{iz}^{s;w} = \rho_a c_w |\mathbf{w}| w_i$$

où :

- ρ_a est la masse spécifique de l'air
- c_w le coefficient de traînée
- w_i la composante en (i) du vent
- $|\mathbf{w}|$ le module de la vitesse du vent.

Notons que c_w est fonction de la rugosité de la surface (les vagues). Il est donc lui-même fonction du vent. De son côté, le frottement est représenté par une extension

2D des formules de Chézy-Manning :

$$\frac{1}{\rho} \tau_{iz}^f = \frac{1}{H^{1/3}} g n^2 |\mathbf{U}| U_i$$

où le coefficient n de Manning est un paramètre lié à la taille du substrat, au type, à la densité et à la taille des macrophytes ainsi qu'à la rugosité de la glace. Ces coefficients peuvent être pilotés indépendamment :

$$n_{\text{tot}} = \sqrt{n_g^2 + n_m^2 + n_r^2}$$

Des coefficients de Manning sont aussi utilisés dans les modèles unidimensionnels pour représenter à la fois le frottement global de la section et certaines accélérations convectives. Ici, il s'agit d'une propriété locale ($n(x, y)$) strictement réservée au frottement. En somme, nous obtenons une loi globale représentant les contraintes au fond et à la surface en utilisant le frottement de Manning s'appliquant à la vitesse moyenne sur la colonne d'eau :

$$\frac{1}{\rho} \left(\tau_{iz}^s - \tau_{iz}^f \right) = \rho_a c_w |\mathbf{w}| w_i + \frac{1}{H^{1/3}} g (n_{\text{tot}}^2) |\mathbf{U}| U_i$$

2.4 Conclusion

En appliquant l'hypothèse de pression hydrostatique aux équations de Navier-Stokes, nous avons obtenu un modèle mathématique tridimensionnel représentant l'écoulement. Les contraintes de Reynolds ont été modélisées à l'aide de l'hypothèse de Boussinesq. Résumé au tableau 2.1, ce modèle 3D sera conservé pour la suite du présent travail.

Le modèle bidimensionnel de Saint-Venant (2.2) a été obtenu par une intégration verticale du modèle 3D. L'intégration verticale est une opération mathématique qui ne

Équations de Navier-Stokes hydrostatiques :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \left(f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right)$$

Tenseur des contraintes :

Loi de Newton ; Loi de Boussinesq

$$\frac{1}{\rho} \tau_{ij} = (\nu_l + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Loi de Prandtl

$$\nu_t = l_m^2 \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}$$

Force de Coriolis :

$$\frac{1}{\rho} f_i = \begin{cases} 2\omega \sin(\phi)v \\ -2\omega \sin(\phi)u \end{cases}$$

TAB. 2.1 – Modèle mathématique 3D

Équations de Saint-Venant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial HU_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial HU_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_i U_j H)}{\partial x_j} = -gH \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{F_i H}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} (\tau_{iz}^s - \tau_{iz}^f)$$

Tenseur des contraintes :

Loi de Newton ; Loi de Boussinesq

$$\frac{1}{\rho} T_{ij} = (\nu_l + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Fermeture turbulente

$$\nu_t = l_m^2 \sqrt{2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2}$$

Force de Coriolis :

$$\frac{1}{\rho} F_i = \begin{Bmatrix} 2\omega \sin(\phi) V \\ -2\omega \sin(\phi) U \end{Bmatrix}$$

Contraintes à la surface et au fond :

$$\frac{1}{\rho} (\tau_{iz}^s - \tau_{iz}^f) = \rho_a c_w |w| w_i + \frac{1}{H^{1/3}} g (n_{\text{tot}}^2) |U| U_i$$

TAB. 2.2 – Modèle mathématique 2D

diminue pas la qualité de la représentation du système. Toutefois, plusieurs hypothèses réductrices sont posées parallèlement à l'intégration et ont été mises en évidence dans ce chapitre.

Les deux principales hypothèses sont sans aucun doute l'hypothèse de pression hydrostatique (déjà présente dans le modèle $3D$), et le terme de dispersion constant. Les domaines pouvant être très bien représentés sous ces deux hypothèses doivent avoir de faibles pentes et les dimensions horizontales doivent être nettement supérieures aux dimensions verticales. Notons que le système de Saint-Venant aurait facilement été obtenu en posant les vitesses constantes sur la verticale. Cela ne va pas sans rappeler l'hypothèse du terme de dispersion constant, quoique cette dernière soit moins forte.

De nombreuses autres hypothèses, plus rarement notées dans la littérature, ont aussi été mises en évidence dans ce développement. Il s'agit en particulier de la pression atmosphérique constante, des contraintes horizontales négligeables et des conditions cinématiques, auxquelles s'ajoutent l'hypothèse du fond fixe et de l'absence d'infiltration et de précipitation. Bien que ces hypothèses aient généralement moins d'impact, il est important de les noter et les connaître car, lors d'études de problématiques particulières (ex : sédimentologie, couplage avec un modèle d'écoulement sous-fluvial), elles pourraient devenir plus significatives.

La qualité de représentation dépend aussi d'un choix approprié pour les fermetures. Un exemple de fermeture a été présenté dans ce chapitre, mais l'objet n'était pas ici l'étude étendue des différentes lois empiriques pouvant être utilisées pour fermer le modèle. L'intégration sur la verticale pour le modèle $2D$ fait apparaître des contraintes au fond et en surface qui ont dû être modélisées. En ce qui concerne le tenseur des contraintes turbulentes, il fut modélisé de façon similaire, mais non équivalente, en $2D$ et en $3D$. Rien ne permet d'indiquer qu'une intégration d'une

fermeture tridimensionnelle représenterait mieux les contraintes que les fermetures ici appliquées au problème. Toutefois, les comparaisons entre les différents modèles seraient alors simplifiées.

Ce chapitre a permis de mettre en évidence les différences entre le modèle mathématique $2D$ utilisé au sein de H2D2 et le modèle mathématique $3D$ mis en oeuvre dans le cadre du présent travail. Au premier abord, le modèle $2D$ comporte plus d'hypothèses, comme les conditions cinématiques et les contraintes au fond et en surface. Toutefois, des hypothèses similaires viendront se greffer au modèle $3D$ lors de l'obtention de sa formulation variationnelle faible au chapitre suivant.

Chapitre 3

Formulation variationnelle

Nous présentons dans ce chapitre une formulation variationnelle correspondant au modèle mathématique $3D$ du tableau 2.1. Il s'agit d'un pas vers la discrétisation éléments finis présentée au chapitre subséquent (4). Les principes menant à l'obtention de la forme variationnelle faible sont tirés de DHATT et TOUZOT (1984). Cette dernière est obtenue suite à l'intégration par partie de l'équation de la continuité et du tenseur des contraintes. Ceci permet la mise en évidence de conditions aux limites naturelles qui pourront être imposées aux frontières du domaine. Finalement, la vitesse verticale est déterminée par une pré-intégration de l'équation de continuité.

3.1 Formulation variationnelle forte

Considérons tout d'abord la forme classique d'un système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} M(\phi, t) + L(\phi) = f & \text{sur } \Omega \\ C(\phi) = b & \text{sur } \Gamma \\ \phi_{t=0} = \phi_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où

- ϕ est le vecteur des fonctions solutions ;
- $M(\phi, t)$ est un opérateur sur l'espace fonctionnel ϕ, t ;
- $L(\phi)$ est un opérateur sur l'espace fonctionnel ϕ ;
- f sont les sollicitations ;
- $C(\phi)$ est un opérateur sur l'espace fonctionnel ϕ représentant les conditions limites ;
- ϕ_0 sont les conditions initiales ;
- Ω est le domaine de ϕ ;
- Γ est la frontière de Ω .

Dans notre problème, la forme classique est le modèle mathématique 3D présenté au tableau 2.1 où l'espace fonctionnel ϕ est (u, v, h) . Aucune solution analytique générale n'est connue pour ce système. Le résidu, $R(\phi)$, défini par :

$$R(\phi) = M(\phi, t) + L(\phi) - f$$

est identiquement nul en tout point de Ω pour une solution ϕ à la forme (3.1). Nous nous proposons de trouver une approximation $\tilde{\phi}$ de ϕ telle que le résidu soit nul au sens des résidus pondérés de Galerkin (HIRSH, 1988), ce qui consiste à trouver une

solution numérique approchée $\tilde{\phi}$ annulant la forme intégrale :

$$\int_{\Omega} \psi R(\tilde{\phi}) d\Omega = 0 \quad \forall \psi \in E(\Omega)$$

Un résidu nul de l'approximation, $R(\tilde{\phi}) = 0$, peut se produire en certains points du domaine Ω , mais $\tilde{\phi}$ n'étant qu'une approximation de la solution exacte, $R(\tilde{\phi})$ ne peut être nul sur l'ensemble du domaine. L'objectif est de réduire l'erreur e commise, cette dernière étant évaluée par : $e = |\phi - \tilde{\phi}|$. Les fonctions d'approximation et les fonctions de pondération font partie du même espace $E(\Omega)$ lequel sera déterminé à l'étape de la discrétisation, au chapitre suivant (section 4.1). Notons pour l'instant qu'il doit au moins respecter les conditions de dérivabilité et conditions limites correspondant au système. La formulation intégrale, aussi nommée forme variationnelle forte, s'exprime ainsi pour notre système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \tilde{\phi} = (u, v, h) \in E_{\tilde{\phi}}(\Omega), \quad \forall \psi \in E_{\psi}(\Omega) \\ \int_{\Omega} \psi^h \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \psi^{u_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \left(f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) \right) d\Omega = 0 \\ i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

3.2 Formulation variationnelle faible

La forme faible permet de réduire l'ordre de dérivation de certains termes et fait apparaître des conditions aux frontières. Tout d'abord, nous intégrons par partie les termes en u et v de l'équation de la continuité, puis nous appliquons le résultat (A.2)

issu du théorème de la divergence :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi^h}{\partial x} u + \frac{\partial \psi^h}{\partial y} v \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(\psi^h u)}{\partial x} + \frac{\partial(\psi^h v)}{\partial y} \right) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi^h}{\partial x} u + \frac{\partial \psi^h}{\partial y} v \right) d\Omega + \oint_{\Gamma} \psi^h \mathbf{u}_{xy} \cdot \mathbf{n}_{xy} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $\mathbf{u}_{xy} = (u, v)$ et \mathbf{n}_{xy} sont respectivement les projections dans le plan xOy de la vitesse et de la normale à la frontière. De façon similaire, mais en utilisant cette fois le théorème complet de la divergence (A.2.1), nous intégrons par partie le tenseur des contraintes :

$$\int_{\Omega} \psi^{u_i} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^{u_i}}{\partial x_j} \tau_{ij} d\Omega + \oint_{\Gamma} \psi^{u_i} \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.4)$$

où $\boldsymbol{\tau}_i = (\tau_{ix}, \tau_{iy}, \tau_{iz})$ représente une ligne du tenseur des contraintes visqueuses. En remplaçant (3.4) et (3.3) dans (3.2), nous obtenons la forme faible du système :

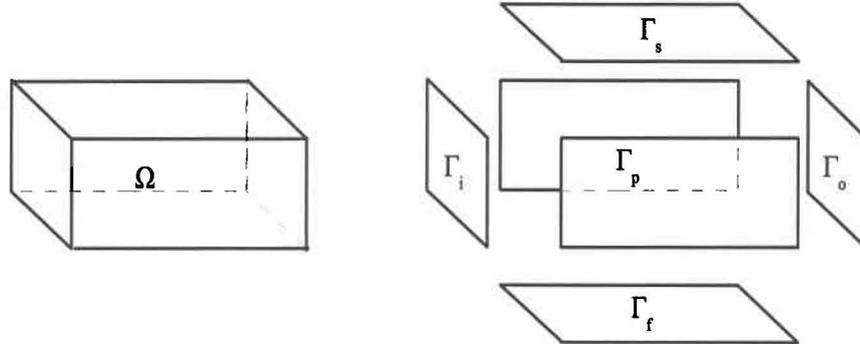
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi^h \in E_{\psi^h}(\Omega) \text{ et } \forall \psi^u \in E_{\psi^u}(\Omega) : \\ \quad - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi^h}{\partial x} u + \frac{\partial \psi^h}{\partial y} v \right) d\Omega + \oint_{\Gamma} \psi^h \mathbf{u}_{xy} \cdot \mathbf{n}_{xy} d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} \psi^{u_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{f_i}{\rho} + \frac{\partial \psi^{u_i}}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) d\Omega - \oint_{\Gamma} \psi^{u_i} \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \end{array} \right.$$

La forme faible fait apparaître les termes de contour suivants :

$$C^h = \oint_{\Gamma} \psi^h \mathbf{u}_{xy} \cdot \mathbf{n}_{xy} d\Gamma \quad (3.5)$$

$$C^u = \oint_{\Gamma} \psi^{u_i} \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.6)$$

Ce sont les conditions naturelles du système, définies à la section suivante pour chacune des frontières.

FIG. 3.1 – Domaine Ω et ses frontières

3.3 Conditions aux limites

La frontière Γ du domaine tridimensionnel Ω est formée de différentes parties :

$$\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_s \cup \Gamma_p \cup \Gamma_i \cup \Gamma_o$$

soit le fond Γ_f , la surface Γ_s , les parois Γ_p ainsi que le segment limite en entrée Γ_i et celui en sortie Γ_o (figure 3.1).

3.3.1 Frontières ouvertes Γ_i et Γ_o

Afin de déterminer le régime d'écoulement, nous imposons des conditions de Dirichlet sur ces deux frontières. Ce peut être soit des conditions de type niveau/niveau ou débit/niveau. Les conditions de type débit/débit conduisent pour leur part à une infinité de solution, celle étant habituellement obtenue représente le minimum d'énergie spécifique. Nous verrons à l'étape de la discrétisation que le terme de contour C^h n'a pas à être déterminé sur les frontières d'entrées et de sortie puisque le niveau d'eau,

ou le débit, y est imposé. Finalement, nous supposons les contraintes normales nulles $C^u = 0$ ce qui vient déterminer la seconde condition naturelle (3.6) sur ces frontières.

3.3.2 Parois Γ_p

Les parois sont des frontières verticales ($n_z = 0$) et imperméables ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$) d'où la condition naturelle $C_{\Gamma_p}^h = 0$. Concernant les contraintes normales, elles sont posées nulles aux parois : $C_{\Gamma_p}^u = 0$.

3.3.3 Fond et surface Γ_f et Γ_s

Le terme de contour $C_{\Gamma_f \cup \Gamma_s}^h$ représente la projection sur xOy de la vitesse normale à la frontière. Sachant que les normales au fond et en surface sont respectivement :

$$\mathbf{n}_f = \frac{\left(\frac{\partial h'}{\partial x}, \frac{\partial h'}{\partial y}, -1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial h'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h'}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \mathbf{n}_s = \frac{\left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (3.7)$$

et en mettant à profit la règle d'intégration sur la projection d'une surface (A.3), nous obtenons :

$$C_{\Gamma_f \cup \Gamma_s}^h = \int_A \psi^h \left(u_f \frac{\partial h'}{\partial x} + v_f \frac{\partial h'}{\partial y} - u_s \frac{\partial h}{\partial x} - v_s \frac{\partial h}{\partial y} \right) dA \quad (3.8)$$

où A est l'aire de la projection de Γ_s et Γ_f dans le plan xOy . Cette condition naturelle sera simplifiée à la section 3.4 avec les termes issus de la pré-intégration de la vitesse verticale.

De son côté, la condition naturelle $C_{\Gamma_f \cup \Gamma_s}^u$ représentant les contraintes au fond et en surface demeure. Comme nous l'avons fait pour le modèle 2D, nous supposons les contraintes horizontales ($\tau_{xx} \cdot n_x$ et $\tau_{xy} \cdot n_y$) négligeables au fond et en surface et obtenons :

$$C_{\Gamma_f \cup \Gamma_s}^u = \tau_{iz}^f + \tau_{iz}^s$$

et, toujours dans le but d'obtenir un modèle similaire au modèle bidimensionnel, nous appliquons les mêmes contraintes qu'à la section 2.3.3. Il est toutefois important de noter qu'ici, les termes de vitesses représentent les vitesses au fond et non les vitesses moyennes, comme c'était le cas dans le modèle 2D. Nous obtenons, pour le frottement :

$$\frac{\tau_{iz}^f}{\rho} = \frac{1}{H^{\frac{1}{3}}} g (n_{\text{tot}}^2) |\mathbf{u}_f| u_{if}$$

où n_{tot} est le coefficient global de frottement (2.11) et $\mathbf{u}_f = (u_f, v_f, w_f)$ est le vecteur des vitesses au fond. En surface, c'est plutôt le vent qui détermine les contraintes :

$$\frac{\tau_{iz}^s}{\rho} = \rho_a c_w |\mathbf{w}| w_i$$

où ρ_a est la densité de l'air, c_w le coefficient de traînée du vent et \mathbf{w} la vitesse du vent.

3.4 Vitesse verticale

Nous effectuons une pré-intégration verticale du troisième terme de l'équation de continuité (LECLERC, 1985), ce qui fait apparaître les vitesses au fond et en surface. Ensuite, nous utilisons les conditions cinématiques de surface et de fond (2.6) ainsi que l'hypothèse du fond fixe afin de simplifier notre résultat. Voici la formulation variationnelle obtenue pour le troisième terme de l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi^h \frac{\partial w}{\partial z} d\Omega &= \int_A \psi^h \left(\int_{z=h'}^{z=h} \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \int_A \psi^h \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} + v_s \frac{\partial h}{\partial y} - u_f \frac{\partial h'}{\partial x} - v_f \frac{\partial h'}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

où A est la projection de Ω dans le plan xOy . Notons que la fonction test ψ^h a pu être isolée de l'intégrale verticale puisqu'elle est indépendante de z . Cette expression

sera simplifiée en la sommant à (3.8). La vitesse verticale ne fait pas partie du vecteur ϕ et n'est donc pas considérée comme une inconnue. Elle est plutôt déterminée à partir des vitesses horizontales. Sachant que la méthode de résolution sera itérative, la vitesse w_k utilisée pour l'itération k sera déterminée à partir des vitesses u_{k-1} et v_{k-1} obtenues à l'itération précédente. Pour trouver l'expression déterminant $w_k(z)$, il suffit d'intégrer l'équation de continuité de (2.1) entre le fond et z , puis d'appliquer la condition cinématique de fond (2.6) et l'hypothèse du fond fixe. Nous obtenons l'expression suivante :

$$w_k(z) = u_{f_{k-1}} \frac{\partial h'}{\partial x} + v_{f_{k-1}} \frac{\partial h'}{\partial y} - \int_{h'}^z \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{k-1}}{\partial y} \right) dz \quad (3.9)$$

3.5 Conclusion

Au terme du chapitre précédent, nous notons que le modèle mathématique $3D$ comportait moins d'hypothèses que son semblable bidimensionnel. Le présent chapitre fait un pas de plus dans le développement en présentant la formulation variationnelle faible du problème et une expression pour la vitesse verticale. C'est alors que plusieurs hypothèses, équivalentes à celles posées lors du développement du modèle mathématique bidimensionnel, surviennent. En fait, une comparaison entre le tableau 3.1 et la figure 2.2 met en évidence les similitudes entre les deux modèles. En particulier, la seule hypothèse que le modèle tridimensionnel ne conserve pas concerne la dispersion des vitesses sur la verticale. Cela n'implique toutefois pas que les deux modèles s'équivalent sur tous les autres points car, bien que les fermetures choisies soient similaires, elles possèdent certaines différences. Par exemple, dans le modèle tridimensionnel, les contraintes au fond et en surface font intervenir des vitesses locales, contrairement au modèle bidimensionnel, qui utilise plutôt des vitesses moyennes sur la colonne. Nous

Hypothèse (Sous-hypothèse associée)	Section
Masse spécifique constante (incompressibilité)	Modèle mathématique
Pression hydrostatique (Pression atmosphérique constante)	Modèle mathématique (2.1)
Pentes faibles (Contraintes horizontales nulles au fond) (Contraintes horizontales nulles en surface)	Conditions aux limites (3.3)
Parois imperméables	Conditions aux limites (3.3)
Conditions cinématiques (Hypothèse du fond fixe) (Infiltration et précipitation nulles)	Vitesse verticale (3.4)

TAB. 3.1 – Hypothèses associées au modèle variationnel tridimensionnel

Modèle variationnel faible

$$\int_A \psi^h \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) dA - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi^h}{\partial x} u + \frac{\partial \psi^h}{\partial y} v \right) d\Omega = 0 \quad \forall E_{\psi^h}(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \left(\psi^{u_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u \frac{\partial u_i}{\partial x} + v \frac{\partial u_i}{\partial y} + w_k \frac{\partial u_i}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} f_i \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi^{u_i}}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) d\Omega$$

$$- \frac{1}{\rho} \left(\oint_{\Gamma_f} \psi^{u_i} \tau_{iz}^f d\Gamma_f + \oint_{\Gamma_s} \psi^{u_i} \tau_{iz}^s d\Gamma_s \right) = 0 \quad \forall E_{\psi^{u_i}}(\Omega)$$

Conditions aux limites

Conditions de Dirichlet de type $h - h$, $q - h$ ou $q - q$ sur Γ_i et Γ_o

Conditions naturelles :

Écoulement normal nul sur Γ_p : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$

Contraintes normales nulles sur Γ_i , Γ_o et Γ_p

$$\frac{\tau_{iz}^f}{\rho} = \frac{1}{H^{\frac{1}{3}}} g (n_{\text{tot}}^2) |\mathbf{u}_f| u_{if} \quad \text{sur } \Gamma_f$$

$$\frac{\tau_{iz}^s}{\rho} = \rho_a c_w |\mathbf{w}| w_i \quad \text{sur } \Gamma_s$$

Vitesse verticale

$$w_k(z) = u_{f_{k-1}} \frac{\partial h'}{\partial x} + v_{f_{k-1}} \frac{\partial h'}{\partial y} - \int_{h'}^z \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{k-1}}{\partial y} \right) dz$$

Tenseur des contraintes (τ_{ij}) et forces de Coriolis (f_i)

Voir tableau 2.1

TAB. 3.2 – Modèle variationnel tridimensionnel

pouvons toutefois affirmer que les deux modèles se ressemblent et que l'objectif de développer un modèle tridimensionnel minimal, améliorant les vitesses sur la verticale sans modifier les autres paramètres, est atteint.

L'intégration par partie des termes d'ordre supérieur a fait apparaître des intégrales de contour, ce qui a permis l'imposition de conditions naturelles. Des conditions de Dirichlet sont appliquées en entrée et en sortie afin de définir l'écoulement. La vitesse verticale a été éliminée de l'équation de continuité par une pré-intégration verticale (section 3.4) où les termes, issus des conditions cinématiques de fond et de surface, furent simplifiés à l'aide des termes provenant de l'intégration par partie des vitesses horizontales (section 3.2).

Le modèle variationnel obtenu au terme de ce chapitre et résumé dans le tableau 3.2 n'a toujours pas de solution. Au chapitre suivant, nous déterminerons les espaces $E_\psi(\Omega)$ et $E_{\tilde{\phi}}(\Omega)$ dans le but de trouver une approximation $\tilde{\phi}$ de la solution ϕ .

Chapitre 4

Modèle discret

Les solutions analytiques aux formulations présentées dans les chapitres précédents sont difficilement obtenues, voire impossibles pour les cas non triviaux ou à géométrie complexe. Nous obtenons dans le présent chapitre un système discrétisé pour lequel une solution numérique pourra être obtenue. L'équivalence entre la forme classique et la formulation discrète n'est pas maintenue, mais l'erreur générée dépendra de l'approximation choisie et sera en ce sens contrôlable et quantifiable.

Utilisée comme technique d'approximation, la méthode des éléments finis est brièvement décrite à la section 4.1. L'élément d'approximation choisi est un prisme à base triangulaire à 12 nœuds ($P12L$) formé à partir d'une combinaison entre :

- un élément linéaire à 2 nœuds ($L2$) sur la verticale et
- un élément triangulaire à 6 nœuds ($T6L$) formé de 4 sous-éléments triangulaires à 3 nœuds ($T3$).

La section 4.2 présente ces différents éléments. Le modèle variationnel du tableau 3.2 est discrétisé à la section 4.3 en utilisant une méthode de Galerkin standard, puis son intégration numérique est finalement présentée en 4.6. Les sections 4.4 et 4.5 présentent pour leur part le calcul de la vitesse verticale et les méthodes de résolution numérique.

4.1 Approximation par éléments finis

Nous nous contentons ici de rappeler les principaux principes de la méthode des éléments finis, tels qu'introduits par DHATT et TOUZOT (1984). Cette méthode repose sur une partition du domaine en entités géométriques simples nommées éléments. Ces derniers ne doivent pas se chevaucher et leur union, le maillage, doit recouvrir le domaine entier. Les espaces d'approximation $E_{\tilde{\phi}}$ et E_{ψ} (section 3.1) sont construits à partir du maillage. À titre d'exemple, il peut s'agir de l'ensemble des fonctions linéaires sur chacun des éléments et continues d'un élément à l'autre. L'espace d'approximation se présente comme le produit, sur chacun des éléments, entre des fonctions d'approximation connues $\langle N \rangle$ (habituellement polynomiales) et des valeurs inconnues aux nœuds d'approximation. Les nœuds sont des points cibles se situant sur chacun des éléments. Grâce à la définition des espaces d'approximation, nous obtenons un système algébrique, pouvant être résolu avec les méthodes numériques standards (Newton, Picard, GMRES).

À titre d'exemple, plaçons nous dans un contexte à un seul élément, et considérons un élément bidimensionnel comportant une approximation linéaire entre les nœuds de coordonnée $\zeta_1 = -1$ et $\zeta_2 = 1$. L'espace $E_{\tilde{\phi}}$ est engendré par ϕ_1 et ϕ_2 sur les fonctions linéaires $\langle N \rangle$:

$$E_{\bar{\phi}} := \{ \langle N \rangle \{ \phi_i \} \mid \{ \phi_i \} \in \mathbb{R}^2 \}$$

où

$$\langle N \rangle := \left\langle \frac{1-\zeta}{2}, \frac{1+\zeta}{2} \right\rangle$$

Dans notre cas, le système à résoudre est la formulation variationnelle 3.2. Nous utilisons la méthode de Galerkin (DHATT et TOUZOT, 1984), qui consiste à choisir les fonctions test parmi le même espace que les fonctions d'approximation.

4.2 Élément d'approximation

La construction du maillage est une étape centrale de la méthode des éléments finis consistant à partitionner le domaine en un ensemble d'éléments, chacun étant défini par les coordonnées de ses nœuds géométriques. Les éléments étant tous de même type, chacun peut, moyennant une transformation géométrique, être représenté par un élément de référence. La plupart des opérations auront lieu sur l'élément de référence, ce qui simplifie considérablement la programmation, la complexité résidant au sein de la transformation géométrique. Cette transformation doit être bijective et transformer les frontières et les nœuds de l'élément réel vers les frontières et nœuds correspondants de l'élément de référence. Nous utiliserons l'espace (x, y, z) pour définir les éléments réel alors que l'élément de référence sera dans l'espace (ξ, η, ζ) .

Il est à noter qu'une erreur de discrétisation géométrique est commise aux frontières. L'utilisation d'éléments de niveau supérieurs (frontières courbées) ou l'augmentation du nombre d'éléments permettent de réduire l'erreur commise lors de la discrétisation géométrique.

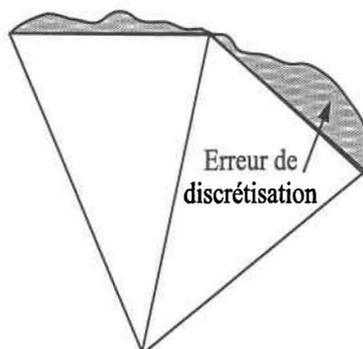
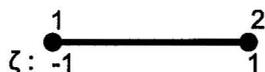


FIG. 4.1 – Discrétisation d'une frontière

4.2.1 Élément unidimensionnel

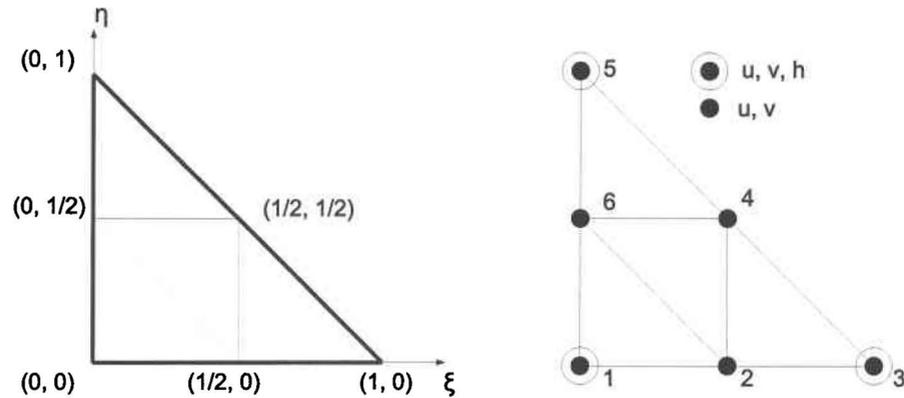
FIG. 4.2 – Élément d'approximation unidimensionnel à 2 nœuds ($L2$)

Un domaine $1D$ peut être subdivisé en un ensemble d'éléments linéaires, déterminés par les coordonnées x_1 et x_2 des nœuds qui en forment les extrémités. Chacun des éléments réels peut être associé à l'élément de référence $L2$ (figure 4.2) ayant comme sommets $\zeta_1 = -1$ et $\zeta_2 = 1$ à l'aide de la transformation τ_{L2}^{e-1} :

$$\tau_{L2}^e : \zeta \rightarrow x(\zeta) = \langle \overline{N_{L2}}(\zeta) \rangle \{x_n\}$$

où

$$\langle \overline{N_{L2}}(\zeta) \rangle := \left\langle \frac{1-\zeta}{2}, \frac{1+\zeta}{2} \right\rangle \quad (4.1)$$

FIG. 4.3 – Élément d'approximation bidimensionnel à 6 nœuds ($T6L$)

Notons que la transformation τ_{L2}^e varie d'un élément à l'autre selon les nœuds géométriques, mais elle garde toujours une forme semblable. Différentes approximations peuvent être portées par un $L2$ (ex : Élément d'Hermite), mais nous ne considérerons que l'approximation linéaire de continuité C^0 (Lagrange). Lorsque les nœuds d'approximations sont les mêmes que les nœuds géométriques, comme c'est le cas pour le $L2$ ici considéré, on dit de l'élément qu'il est isoparamétrique.

4.2.2 Élément bidimensionnel

Dans sa version actuelle, Hydrosim résout les équations de Saint-Venant $2D$ sur un élément bidimensionnel triangulaire à six nœuds ($T6L$), formé de quatre sous-éléments triangulaires à trois nœuds ($T3$). L'approximation est $P_1/P_1\text{Iso}P_2$, c'est-à-dire que la hauteur d'eau est approximée linéairement sur l'élément global alors que les débits le sont sur les sous-éléments. Il est stable en vertu de la condition inf-sup (LBB).

Dans ce travail, lorsqu'il sera question d'un $T6L$ géométrique, on ne considérera que les nœuds sommets de l'élément. Il s'agira dans ce cas d'un élément linéaire. Le sigle $T3$ réfère pour sa part à un sous-élément du $T6L$, également linéaire. Les nœuds milieux du $T6L$ forment les sommets des sous-éléments $T3$ et, les transformations étant linéaires, ils se trouvent au centre des arêtes.

L'élément géométrique $T6L$ est linéaire de transformation (DHATT et TOUZOT, 1984) :

$$\begin{aligned} \tau_{T6L}^e : \boldsymbol{\xi} &\rightarrow \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \overline{N_{T6L}}(\boldsymbol{\xi}) \rangle \{ \mathbf{x}_n \} \\ &\text{où} \\ \langle \overline{N_{T6L}}(\boldsymbol{\xi}) \rangle &:= \langle 1 - \xi - \eta, \xi, \eta \rangle \end{aligned} \quad (4.2)$$

L'approximation est la même, mais s'applique sur chacun des sous éléments.

En annexe B se trouvent les principales propriétés géométriques de cette transformation, en particulier son jacobien et les jacobiens des sous-éléments ($T3$). Notons que ce dernier est constant sur l'élément, ce qui permet une intégration analytique du modèle discrétisé.

4.2.3 Élément tridimensionnel

L'élément tridimensionnel développé est un prisme à base triangulaire, recouvrant la colonne d'eau entière, du fond à la surface. Les arêtes verticales sont perpendiculaires au plan xOy alors que les bases triangulaires suivent l'orientation du fond et de la surface. L'élément de référence est un prisme dont les bases triangulaires sont parallèles. La transformation géométrique s'obtient par une combinaison entre la transformation verticale (4.1) $\langle \overline{N_{L2}}(\zeta) \rangle := \langle a, b \rangle$ et la transformation horizontale

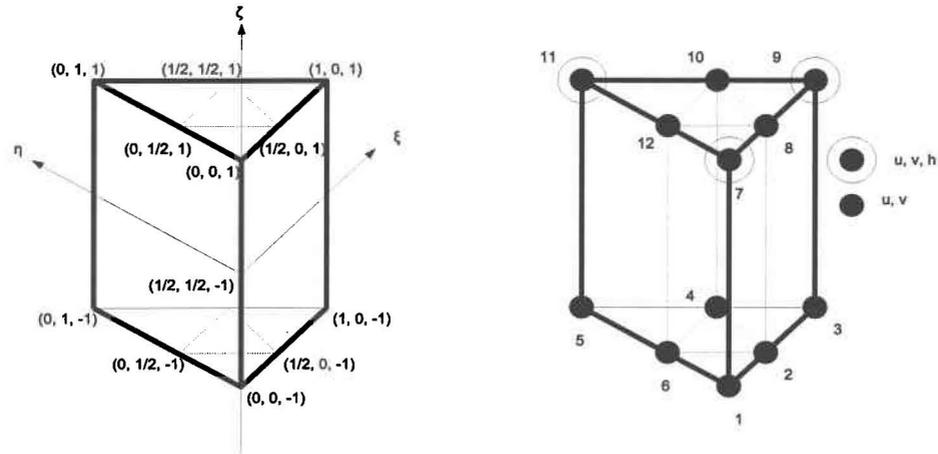


FIG. 4.4 – Élément d’approximation tridimensionnel à 12 nœuds (P_{12L})

(4.2) $\langle \overline{N_{T6L}}(\xi, \eta) \rangle := \langle \lambda, \xi, \eta \rangle$ DHATT et TOUZOT (1984) :

$$\tau_{P_{12L}}^e : \xi \rightarrow \mathbf{x}(\xi) = \langle \overline{N_{P_{12L}}}(\xi) \rangle \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_{f1} \\ x_3 & y_3 & z_{f3} \\ x_5 & y_5 & z_{f5} \\ x_1 & y_1 & z_{s1} \\ x_3 & y_3 & z_{s3} \\ x_5 & y_5 & z_{s5} \end{pmatrix}$$

où

$$\langle \overline{N_{P_{12L}}}(\xi) \rangle := \langle a\lambda, a\xi, a\eta, b\lambda, b\xi, b\eta \rangle$$

Les six nœuds sommets du prisme de base suffisent à déterminer la transformation géométrique, alors que les nœuds supplémentaires permettent d’approximer les vitesses linéairement sur chacun des P_6 . Les deux bases triangulaires ayant la même

projection dans le plan (xOy) , le $P12L$ peut facilement être construit à partir d'un maillage bidimensionnel, à condition de connaître la topographie et le niveau d'eau. Puisqu'elle dépend du niveau d'eau, la géométrie des éléments de référence se modifie avec la solution. En conséquence, le jacobien varie avec la solution. Notons aussi que le jacobien du $P12L$ (annexe B) n'est pas constant sur l'élément.

Bien que seuls les 6 nœuds sommets du $P12L$ soient nécessaire pour définir sa géométrie, nous utiliserons le terme $P12L$ géométrique, pour ne pas confondre avec les sous-éléments ayant eux aussi 6 nœuds. Le $P6$ réfère toujours à un sous-élément du $P12L$.

4.3 Discrétisation

La discrétisation consiste à remplacer, sur chacun des éléments, la fonction inconnue par son approximation. Ceci permet d'obtenir un système de forme $K\{\tilde{\phi}_i\} = \{f\}$ et de travailler sur Ω_h plutôt que sur Ω . Considérons un maillage M de Ω_h et un terme quelconque de 3.2 noté $\int_{\Omega} A(\psi, \phi)d\Omega$. Moyennant l'erreur due à l'approximation géométrique de la frontière, l'intégrale peut être découpée :

$$\int_{\Omega} Ad\Omega \approx \int_{\Omega_h} A(\psi, \phi)d\Omega_h = \sum_{\Omega^e \in M} \int_{\Omega^e} A(\psi, \phi)d\Omega^e \quad \forall \psi \in E(\Omega_h)$$

Le changement de variable τ_{P12L}^e permet d'évaluer ces intégrales sur l'élément de référence Ω^r , où ϕ et ψ sont remplacés par leur approximations :

$$\sum_{\Omega^e \in M} \underbrace{\int_{\Omega^r} A(\{N^\psi\}, \langle N^\phi \rangle) |J^e| d\Omega^r \{\phi_i^e\}}_{K^e}$$

où K^e est la contribution de l'élément e à la matrice globale K . Les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 présentent la forme discrète du système 3.2, la dernière colonne donnant la position

de la contribution au sein de la matrice K et du vecteur f , suite à l'assemblage, décrit à la section suivante.

Tel que développé, le modèle mathématique pourrait permettre la résolution d'un problème non permanent. Or, cela dépasse les objectifs de ce travail. Seul le développement de la forme faible avec ces termes nous intéressait et ce, dans le but d'établir des parallèles entre le développement de la forme faible pour le modèle 3D minimal et les hypothèses formulés lors de l'obtention des équations de Saint-Venant. À partir de ce point, les termes non permanents ne seront plus considérés, nous ne discrétisons le système que pour les problèmes en régime permanent.

4.3.1 Assemblage

La matrice K et le vecteur de sollicitations f sont obtenus après assemblage des différentes contributions élémentaires. L'assemblage consiste à distribuer les lignes de K^e au sein de K , cette distribution étant déterminée par les positions attribuées aux $\langle \phi_i^e \rangle$ et $\{\psi_i^e\}$ dans la matrice globale. Nous n'entrons pas dans les détails de l'assemblage, et renvoyons pour cela au volume de DHATT et TOUZOT (1984).

Aux tableaux 4.1, 4.2 et 4.3, la dernière colonne indique la position des contributions dans la matrice K^e et dans le vecteur f^e . En effet, à l'assemblage, la contribution ira prendre une certaine position correspondant aux termes qu'elle contient. Chaque ligne et colonne de K^e correspond à un degré de liberté, tel que présenté à la figure 4.5, où u , v et h indiquent que les lignes et colonnes concernent ces degrés de libertés. Les vitesses u et v se séparent entre les vitesses au fond et en surface. Par exemple,

$$K^e = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u, u \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u, v \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u, h \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v, u \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v, v \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v, h \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} h, u \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} h, v \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} h, h \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

FIG. 4.5 – Assemblage des contributions élémentaires dans la matrice K^e

en u, u , nous retrouvons :

$$\begin{bmatrix} u, u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [u, u_f] \\ [u, u_s] \end{bmatrix}$$

4.3.2 Changement de variable

La transformation d'une intégration sur l'élément réel (e) vers une intégration l'élément de référence (r) s'effectue par le biais du changement de variable bijectif

τ_{P12L}^e :

$$\int_{\Omega^e} A(\psi(x, y, z), \phi(x, y, z)) d\Omega^e = \int_{\Omega^r} A(\psi(\tau_{P12L}^{e-1}(x, y, z)), \phi(\tau_{P12L}^{e-1}(x, y, z))) |J^e| d\Omega^r$$

Formulation variationnelle faible :		
$\int_A \psi^h \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) dA - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi^h}{\partial x} u + \frac{\partial \psi^h}{\partial y} v \right) d\Omega$		
Forme faible	Contribution élémentaire	Position dans K^e
$-\int_{\Omega} \frac{\partial \psi^h}{\partial x} u d\Omega$	$-\int_{\Omega^r} \{N_{,x}^{\psi^h}\} \langle N^u \rangle J^e d\Omega^r$	h, u
$-\int_{\Omega} \frac{\partial \psi^h}{\partial y} v d\Omega$	$-\int_{\Omega^r} \{N_{,y}^{\psi^h}\} \langle N^v \rangle J^e d\Omega^r$	h, v
$\int_A \psi^h \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) dA$	N'est pas discrétisé (écoulement permanent)	

TAB. 4.1 – Forme discrète de l'équation de continuité

Lorsque l'application A contient une dérivée, celle ci est transformée à l'aide des règles de dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \\ &= [j^e] \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $[j^e]$ est l'inverse de la matrice jacobienne de la transformation $\tau_{P_{12L}}^e$. En annexe B se trouvent les expressions détaillées pour le jacobien, son inverse et son déterminant. Notons que le déterminant du jacobien s'annule pour les éléments déformés, c'est-à-dire ceux à profondeur nulle, ceux ayant trois sommets alignés ou deux sommets identiques. De telles situations ne devraient pas se produire. En contrepartie, la bi-

Formulation variationnelle faible :			
$\int_{\Omega} \left(\psi^u \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w_k \frac{\partial u}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} f_x v \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi^u}{\partial x_j} \tau_{xj} \right) d\Omega$ $- \frac{1}{\rho} \left(\oint_{\Gamma_f} \psi^u \tau_{xz}^f d\Gamma_f + \oint_{\Gamma_s} \psi^u \tau_{xz}^s d\Gamma_s \right) = 0$			
Forme faible	Contribution élémentaire	Position	
		K^e	f
$\int_{\Omega} \psi^u u \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega$	$\int_{\Omega^r} u \{N^{\psi^u}\} \langle N_{,x}^u \rangle J^e d\Omega^r$	u, u	-
$\int_{\Omega} \psi^u v \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega$	$\int_{\Omega^r} v \{N^{\psi^u}\} \langle N_{,y}^u \rangle J^e d\Omega^r$	u, u	-
$\int_{\Omega} \psi^u w_k \frac{\partial u}{\partial z} d\Omega$	$\int_{\Omega^r} w_k \{N^{\psi^u}\} \langle N_{,z}^u \rangle J^e d\Omega^r$	u, u	-
$g \int_{\Omega} \psi^u \frac{\partial h}{\partial x} d\Omega$	$g \int_{\Omega^r} \{N^{\psi^u}\} \langle N_{,x}^h \rangle J^e d\Omega^r$	u, h	-
$\int_{\Omega} \psi^u f_x v d\Omega$	$\int_{\Omega^r} \{N^{\psi^u}\} f_x \langle N^v \rangle J^e d\Omega^r$	u, v	-
$\frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^u}{\partial x} \tau_{xx} d\Omega$	$2 \int_{\Omega^r} \nu \{N_{,x}^{\psi^u}\} \langle N_{,x}^u \rangle J^e d\Omega^r$	u, u	-
$\frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^u}{\partial y} \tau_{xy} d\Omega$	$\int_{\Omega^r} \nu \{N_{,y}^{\psi^u}\} \langle N_{,y}^u \rangle J^e d\Omega^r$	u, u	-
	$\int_{\Omega^r} \nu \{N_{,y}^{\psi^u}\} \langle N_{,x}^v \rangle J^e d\Omega^r$	u, v	-
$\frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^u}{\partial z} \tau_{xz} d\Omega$	$\int_{\Omega^r} \nu \{N_{,z}^{\psi^u}\} \langle N_{,z}^u \rangle J^e d\Omega^r$	u, u	-
	$-\int_{\Omega^r} \nu \{N_{,z}^{\psi^u}\} w_{,x} J^e d\Omega^r$	-	u
$-\frac{1}{\rho} \oint_{\Gamma_f} \psi^u \tau_{xz}^f d\Gamma_f$	$-\frac{1}{H^{\frac{3}{2}}} g \eta_{tot}^2 \oint_{\Gamma_f} \mathbf{u}_f \{N^{\psi^u}\} \langle N^{u_f} \rangle d\Gamma_f$	u, u_f	-
$-\frac{1}{\rho} \oint_{\Gamma_s} \psi^u \tau_{xz}^s d\Gamma_s$	$-\rho_a c_w \oint_{\Gamma_s} \mathbf{w} w_x \{N^{\psi^u}\} d\Gamma_s$	-	u_f
$\int_{\Omega} \psi^u \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega$	N'est pas discrétisé (écoulement permanent)		

TAB. 4.2 – Forme discrète de l'équation du mouvement en x

Formulation variationnelle faible :			
$\int_{\Omega} \left(\psi^v \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w_k \frac{\partial v}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} f_y u \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi^v}{\partial x_j} \tau_{yj} \right) d\Omega$ $- \frac{1}{\rho} \left(\oint_{\Gamma_f} \psi^v \tau_{yz}^f d\Gamma_f + \oint_{\Gamma_s} \psi^v \tau_{yz}^s d\Gamma_s \right) = 0$			
Forme faible	Contribution élémentaire	Position	
		K^e	f
$\int_{\Omega} \psi^v u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega$	$\int_{\Omega^r} u \{N^{\psi^v}\} < N_{,x}^v > J^e d\Omega^r$	v, v	-
$\int_{\Omega} \psi^v v \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega$	$\int_{\Omega^r} v \{N^{\psi^v}\} < N_{,y}^v > J^e d\Omega^r$	v, v	-
$\int_{\Omega} \psi^v w_k \frac{\partial v}{\partial z} d\Omega$	$\int_{\Omega^r} w_k \{N^{\psi^v}\} < N_{,z}^v > J^e d\Omega^r$	v, v	-
$g \int_{\Omega} \psi^v \frac{\partial h}{\partial x} d\Omega$	$g \int_{\Omega^r} \{N^{\psi^v}\} < N_{,x}^h > J^e d\Omega^r$	v, h	-
$\int_{\Omega} \psi^v f_y u d\Omega$	$\int_{\Omega^r} \{N^{\psi^v}\} f_c < N^u > J^e d\Omega^r$	v, u	-
$\frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^v}{\partial x} \tau_{yx} d\Omega$	$\int_{\Omega^r} \nu \{N_{,x}^{\psi^v}\} < N_{,y}^u > J^e d\Omega^r$	v, u	-
	$\int_{\Omega^r} \nu \{N_{,x}^{\psi^v}\} < N_{,x}^v > J^e d\Omega^r$	v, v	-
$\frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^v}{\partial y} \tau_{yy} d\Omega$	$2 \int_{\Omega^r} \nu \{N_{,y}^{\psi^v}\} < N_{,y}^v > J^e d\Omega^r$	v, v	-
$\frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^v}{\partial z} \tau_{yz} d\Omega$	$\int_{\Omega^r} \nu \{N_{,z}^{\psi^v}\} < N_{,z}^v > J^e d\Omega^r$	v, v	-
	$\int_{\Omega^r} \nu \{N_{,z}^{\psi^v}\} w_{,z} J^e d\Omega^r$	-	v
$-\oint_{\Gamma_f} \psi^v \tau_{yz}^f d\Gamma_f$	$-\frac{1}{H^{\frac{3}{8}}} g \eta_{tot}^2 \oint_{\Gamma_f} u_f \{N^{\psi^v}\} < N^{vf} > d\Gamma_f$	v, v_f	-
$-\oint_{\Gamma_s} \psi^v \tau_{yz}^s d\Gamma_s$	$-\rho_a c_w \oint_{\Gamma_s} w w_x \{N^{\psi^v}\} d\Gamma_s$	-	v_f
$\int_{\Omega} \psi^v \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega$	N'est pas discrétisé (écoulement permanent)		

 TAB. 4.3 – Forme discrète de l'équation du mouvement en y

jectivité de $\tau_{P_{12}L}$, et, en conséquence, l'existence de $[j^e]$ est assurée pour les éléments non dégénérés.

4.3.3 Conditions limites

Afin d'imposer des conditions de Dirichlet sur le système, les degrés de liberté concernés n'auront aucune ligne d'attribuée au sein de la matrice K à résoudre. En effet, il n'y a pas d'intérêt à inclure une équation pour calculer ces valeurs alors qu'un résultat est déjà connu. Ceci revient à réduire l'espace $E_{\tilde{\phi}}$ parmi lequel la solution discrète est recherchée à l'espace admissible $E_{\tilde{\phi}}^{ad}$ où les valeurs aux limites sont imposées (DHATT et TOUZOT, 1984).

4.4 Vitesse verticale

L'approximation pour la vitesse verticale est P_1 Iso P_2 sur l'horizontale et P_1 sur la verticale, les nœuds d'approximation étant les mêmes que pour les vitesses horizontales. La vitesse verticale est calculée à partir des vitesses horizontales u et v et de la pente au fond en utilisant (3.9). Soit A , A^e et A^r les projections dans le plan horizontal de Ω , Ω^e et Ω^r . Notons que A est un domaine $2D$ subdivisé en éléments réels A^e de forme $T6L$ et définissons $[m]$ comme étant la matrice masse élémentaire :

$$[m] = \int_{A^e} \langle N \rangle \{N\} dA^e$$

La matrice masse globale $[M]$ sur le domaine A est obtenue suite à l'assemblage des matrice masse élémentaires. Pour le fond, nous obtenons, sur chacun des éléments :

$$w_f = u_f \frac{\partial h'}{\partial x} + v_f \frac{\partial h'}{\partial y}$$

$$[m]\{w_{f^e}\} = \int_{A^e} \{N^\psi\} \left(\langle N^{u_f} \rangle \{u_f^e\} \{N_{,x}^{h'}\} \{h'^e\} + \langle N^{v_f} \rangle \{v_f^e\} \{N_{,y}^{h'}\} \{h'^e\} \right) dA^e \quad (4.3)$$

$$[m]\{w_f^e\} = \{q_f^e\} \quad (4.4)$$

ce qui devient, après assemblage des contributions élémentaires :

$$[M]\{w_f\} = \{q_f\} \quad (4.5)$$

Afin de faciliter son inversion, $[M]$ est remplacée par la matrice diagonale de masse, obtenue en sommant les valeurs des lignes de $[M]$ sur sa diagonale. Ceci permet le calcul des vitesses verticales au fond. Notons que les contributions élémentaires au débit au fond $\{q_{f^e}\}$ sont calculées en intégrant de façon analytique le terme de droite de 4.3 sur un élément de référence 2D. Toutefois, les vitesses au fond y sont approximées sur un élément 2D de type *T6L* alors qu'en réalité les degrés de liberté pour les vitesses se trouvent sur un élément triangulaire, mais reposant dans un espace 3D.

La même méthode est utilisée pour trouver les vitesses en surface et nous obtenons :

$$[M]\{w_s\} = \{q_s\} \quad (4.6)$$

où $\{q_s\}$ est obtenu en assemblant les contributions élémentaires suivantes :

$$\{q_s^e\} = \{q_f^e\} - \int_{\Omega^e} \{N\} (\langle N, x \rangle \{u^e\} + \langle N, y \rangle \{v^e\}) d\Omega^e$$

où l'intégration sur l'élément $3D$ provient de la combinaison entre l'intégration sur l'horizontale issue de la formulation variationnelle et l'intégration sur la verticale déjà présente dans (3.9). Elle est ramenée à une intégration sur un élément de référence Ω^r par un changement de variable.

Nous obtenons grâce à (4.5) et (4.6) des expressions pour la vitesse verticale en chacun des nœuds. Munis de l'approximation de ces vitesses, nous retrouvons la vitesse verticale w partout sur le domaine.

4.5 Méthodes de résolution

Le système à résoudre étant non-linéaire, nous pouvons profiter des algorithmes de Newton, GMRES, et Picard déjà implantés au sein de H2D2. Notre problème étant permanent, aucune résolution temporelle n'est utilisée. Notons toutefois qu'un schéma en différences finies pour la discrétisation temporelle avec résolution par l'algorithme d'Euler est disponible au sein de H2D2 et pourrait être mis à profit.

4.6 Intégration numérique

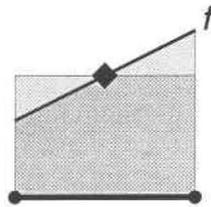
Les contributions élémentaires présentées aux tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 comportent des fractions polynomiales devant être intégrées. C'est la transformation géométrique, à jacobien non constant, qui introduit cette complexité au sein des expressions. Nous présentons ici les méthodes d'intégration numérique utilisées pour calculer les contributions élémentaires.

L'intégration d'une fonction f sur un domaine quelconque Ω peut être approximée par une combinaison des valeurs prises par la fonction à différents points p du

domaine :

$$\int_{\Omega} f d\Omega \approx \sum_p w_i f(p_i)$$

où w_i est le poids associé au point p_i . En appliquant l'égalité précédente au cas particulier où la fonction f est la fonction identité, nous démontrons que la somme des poids doit être égal au volume du domaine sur lequel l'intégration a lieu. Sur



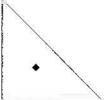
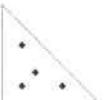
$$\int_{L2} f(x) dx = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$$

FIG. 4.6 – Intégration numérique d'une fonction d'ordre 1 sur un $L2$

un domaine d'intégration simple, tel un $L2$, il est facile de prouver qu'un unique point d'intégration (au centre) permet d'obtenir exactement l'intégrale d'une fonction linéaire (figure 4.6). Ce principe peut être généralisé et, selon la méthode de Gauss (DHATT et TOUZOT, 1984) r points permettent d'intégrer exactement un polynôme d'ordre $m \leq 2r - 1$. Le tableau 4.4 présente différents couples de points pouvant être choisis sur un $L2$. Sur un $T3$, les points d'intégration peuvent être déterminés à l'aide des formules de Hammer (DHATT et TOUZOT, 1984). Une formule d'ordre m intègre exactement tout polynôme formé de monômes de la forme $\xi^i \eta^j$ où $i + j \leq m$. Un schéma d'intégration sur un $T6L$ peut être développé en quadruplant les points présentés pour un $T3$, ce qui équivaut à intégrer sur chacun des sous-éléments.

	Nombre de points r	Coordonnées p_i	Poids w_i
	1	0	2
	2	$1/\sqrt{3}$ $-1/\sqrt{3}$	1 1

TAB. 4.4 – Points d'intégration de Gauss sur un $L2$

	Nombre de points r	Ordre d'intégration m	Coordonnées p_i	Poids w_i
	1	1	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$
	4	3	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$	$\frac{-27}{96}$ $\frac{25}{96}$ $\frac{25}{96}$ $\frac{25}{96}$

TAB. 4.5 – Points d'intégration sur un $T3$ (formules de Hammer)

Finalement, les points d'intégration numérique sur le $P6$ sont obtenus en effectuant le produit entre l'intégration sur le $L2$ vertical et l'intégration sur le $T3$ horizontal. Le tableau 4.6 présente quatre combinaisons de points permettant d'intégrer exactement des monômes de forme $\xi^i \eta^j \zeta^k$ où $i + j \leq m$ et $k \leq n$. L'intégration sur un $P12L$ s'effectue en combinant les points d'intégration se trouvant sur chacun des $P6$.

Afin de construire la matrice K , les expressions discrètes regroupées dans les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 sont intégrées numériquement sur l'élément de référence en utilisant une des combinaisons de points disponibles parmi celles présentées au tableau 4.6. Au chapitre 5, nous présenterons un premier lot de tests effectués pour ces schémas numériques et déterminerons lequel sera utilisé pour la suite.

4.7 Conclusion

Ce chapitre met à profit la méthode des éléments finis afin de transformer le modèle variationnel 3.2 en un système algébrique de forme $K\{\tilde{\phi}_i\} = f$ pouvant être résolu numériquement, pour ainsi trouver les valeurs $\{\phi_i\}$ aux nœuds d'approximation. Nous avons opté pour la méthode de Galerkin standard, qui consiste à choisir les fonctions candidates pour approximer la solution ($\tilde{\phi}$) parmi le même espace que les fonctions de pondération (ψ). Après avoir maillé le domaine avec des éléments $P12L$, nous obtenons un espace $E_{\tilde{\phi}}$ de solutions candidates respectant sur chacun des éléments réels l'approximation choisie et étant continues d'un élément à l'autre. L'imposition de conditions de Dirichlet aux limites revient à réduire l'espace $E_{\tilde{\phi}}$ aux fonctions admissibles. Les éléments réels issus du maillage sont en bijection l'élément de référence et c'est sur ce dernier que le travail s'effectue, d'où l'importance des métriques provenant du changement de variable et présentées à l'annexe B.

Nombre de points horizontaux r_{T3}	Nombre de points verticaux r_{L2}	Ordre horizontal m	Ordre vertical n	Coordonnées p_i	Poids w_i
1	1	1	1	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$	1
4	1	3	1	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0)$ $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0)$ $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 0)$	$-\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$ $\frac{25}{48}$ $\frac{25}{48}$
1	2	1	3	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
4	2	3	3	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1)$ $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -1)$ $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, -1)$ $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, -1)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1)$ $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 1)$ $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1)$	$-\frac{27}{24}$ $\frac{25}{24}$ $\frac{25}{24}$ $\frac{25}{24}$ $-\frac{27}{24}$ $\frac{25}{24}$ $\frac{25}{24}$ $\frac{25}{24}$

TAB. 4.6 – Points d'intégration sur un $P6$

La qualité de la solution discrète obtenue dépend directement de la richesse de $E_{\bar{\phi}}$. Cet espace peut être amélioré en augmentant le degré d'approximation sur chacun des éléments. Nous avons opté dans ce travail pour un élément $P12L$ comportant une approximation P_1/P_1 iso P_2 sur l'horizontale et P_0/P_1 sur la verticale. Le raffinement du maillage mène aussi à l'enrichissement de $E_{\bar{\phi}}$ et plus l'ordre d'approximation est élevé, plus l'erreur diminue rapidement. Des tests de convergence de ce type seront traités au chapitre 5.

L'élément introduit dans ce chapitre vient enrichir H2D2 en améliorant l'approximation des vitesses. En effet, alors que le $T6L$ suppose les vitesses constantes sur la verticale, le $P12L$ les pose linéaires, ce qui diminue l'erreur. Il n'y a pas d'intérêt à augmenter l'ordre d'approximation du niveau d'eau sur la verticale, mais l'élément développé pourrait facilement être réutilisé en améliorant l'approximation des vitesses, en particulier sur la verticale, toujours en conservant le même élément géométrique.

Il va de soit que l'amélioration de la représentation des vitesses sur la verticale amène un coût numérique. Tout d'abord, notons l'augmentation du nombre de degrés de libertés de ce type (vitesses) qui passent de douze sur un $T6L$ à dix-huit sur le $P12L$. Ceci vient agrandir le système matriciel et, en conséquence, ralentir la résolution. Une autre particularité du $P12L$ concerne sa géométrie qui se modifie avec le niveau d'eau. En conséquence, les métriques doivent être recalculées à chaque itération.

Lorsque le jacobien est constant, les termes de convection sont les expressions à intégrer pour lesquelles l'ordre est le plus élevé. Ils sont composés de monômes en $\xi^i \eta^j \zeta^k$ tels que $i + j \leq 3$ et $k \leq 3$. Le schéma d'intégration à 12 points de Gauss permet d'intégrer exactement ce type d'expression. Or, le jacobien n'est constant que pour les domaines à profondeur constante. Et même si la profondeur est constante au départ, il est fort probable que les itérations de résolution feront varier le niveau d'eau

formant ainsi des éléments à bases triangulaires non parallèles et, en conséquence, à jacobien non constant. Les expressions à intégrer ne sont donc pas polynomiales et ne peuvent être intégrées exactement à l'aide des schémas numériques introduits. L'erreur d'intégration diminue toutefois lorsque le nombre de points d'approximation augmente. Notons à ce sujet que le schéma d'intégration est défini pour un $P6$, et quadruplé pour obtenir un schéma sur le $P12L$. Il demeure le même pour le niveau d'eau (approximé sur l'élément global) que pour les vitesses (approximées sur les sous-éléments). Bref, les vitesses sont mieux représentées que les niveaux d'eau par les fonctions de discrétisation, mais par simplicité, le schéma numérique d'intégration est le même pour ces deux types de variables.

Chapitre 5

Implantation

L'élément tridimensionnel développé fut implanté au sein de H2D2, un logiciel né de la fusion entre Hydrosim (HENICHE ET AL., 2000b), un simulateur hydrodynamique bidimensionnel et Dispersim (HENICHE ET AL., 2001) un modèle de transport et diffusion. H2D2 est développé en Fortran, et certaines sections, concernant principalement l'encapsulation de fonctions et l'utilisation d'entrées et sorties, sont en C++. Bien que le Fortran soit essentiellement un langage procédural, des concepts de programmation orientée objet furent introduits, ce qui facilite l'ajout de nouveaux modules et algorithmes. Une trentaine de modules composent H2D2 dont certains relèvent de la lecture des fichiers de commande, du calcul de convection-diffusion ou des algorithmes de résolution matricielle, pour n'en citer que quelques exemples. Dans ce chapitre nous nous concentrerons sur les modules implantant les éléments géométriques, l'intégration numérique et les éléments d'approximation. Finalement, nous présenterons quelques tests de validation de la programmation. Nous utilisons ici un

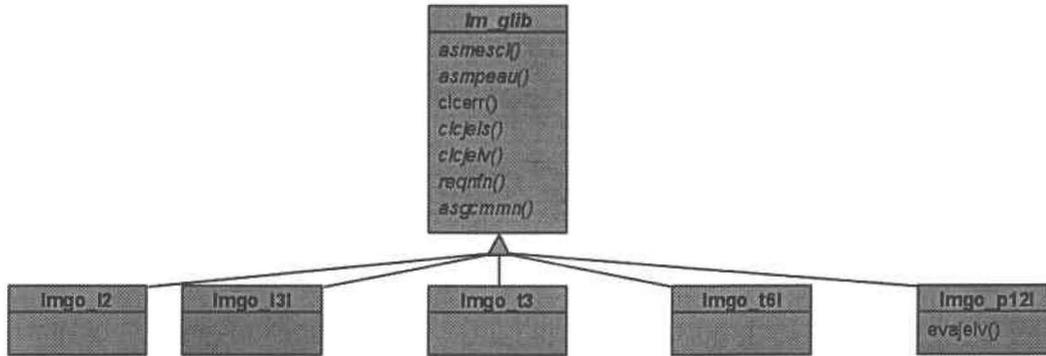


FIG. 5.1 – Diagramme de classes des éléments géométriques

langage et des schémas inspirés de la programmation orientée objet et référons pour plus de détails au volume de AMBLER (2004).

5.1 Élément géométrique

Les modules d'élément géométrique regroupent les fonctionnalités liées à la géométrie des éléments et sont indépendants de l'approximation. La classe abstraite *lm_glib* (figure 5.1) détermine l'interface à redéfinir pour tout élément géométrique. La principale fonctionnalité de ce module est *clcjelv()* qui permet de calculer les métriques constantes des éléments géométriques de volume. L'appel à cette fonctionnalité s'effectue de façon virtuelle par l'intermédiaire de l'interface de *lm_glib* et n'a lieu qu'une seule fois, peu après la lecture du maillage. Pour l'élément *T6L*, cinq métriques sont calculées, soit les quatre membres de j_{T6L} (B.2) ainsi que le déterminant du jacobien.

Nous avons implanté le module *lmgo_p12l* représentant l'élément géométrique *P12L* développé au chapitre précédent. La géométrie du *P12L* a la particularité de

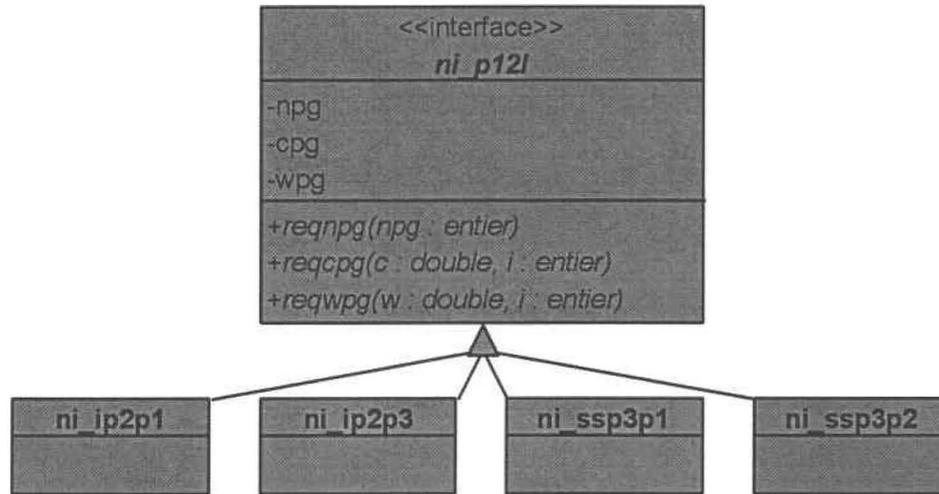


FIG. 5.2 – Diagramme de classes des schémas d'intégration numérique

varier en cours de résolution en fonction du déplacement du niveau d'eau. La fonction *clcjelv()* calcule les métriques constantes, qui correspondent (voir tableaux B.5 et B.6) aux métriques du *T6L*. Les fonctionnalités du module *lmgo_p12l* dépassent l'interface minimale exigée par *lm_glib* en implantant *evajelv()*, une fonction spécifique pour cet élément à géométrie variable. L'élément d'approximation utilisera *evajelv()* (figure 5.4) afin d'obtenir l'évaluation en un point donné des membres de j_{P12L} , de j_{P6} et les déterminants des jacobiens.

5.2 Intégration numérique

Un module pour l'intégration numérique, nommé *ni_p12l*, a été mis en place et il implante les différents schémas d'intégration du tableau 4.6. Ces derniers furent regroupés dans un module indépendant afin de séparer la définition du schéma d'inté-

gration numérique du calcul des contributions élémentaires. Cette implantation facilite le passage d'un schéma d'intégration à un autre et rend ces derniers disponibles pour tous les éléments d'approximation.

Les schémas d'intégration numérique sont implantés pour un P_{12L} en appliquant les points d'intégration du tableau 4.6 sur chacun des sous-éléments. Le premier schéma est implanté par ni_ip2p1 et comporte un point d'intégration sur chacun des P_6 , pour un total de quatre points d'intégration. Les schémas d'intégrations qui suivent sont respectivement implantés dans ni_ip2p3 , ni_ssp3p1 et ni_ssp3p3 , où $ssp3$ indique P_3 sur chacun des sous-éléments horizontaux.

La figure 5.2 présente l'interface commune aux différents schémas d'intégration numérique. Il s'agit de classes simples, retournant le poids et la coordonnée de chacun des points d'intégration ainsi que le nombre de point d'intégration.

5.3 Élément d'approximation

Les éléments d'approximation présents dans H2D2 permettent de représenter un système d'équations différentielles sous une forme matricielle en assemblant les différentes contributions élémentaires. Dans le cadre de ce travail, nous avons implanté $ns_macro3d$ représentant les équations de Navier-Stokes pour un élément géométrique $lmgo_p12l$. D'autres éléments d'approximation sont, par exemple, $cd2d_bse$ pour la convection-diffusion sur un T_3 et $sv2d$ pour les équations de Saint-Venant 2D sur un T_6L .

En plus de définir un ensemble de fonctionnalités devant être implantées par les éléments d'approximation, la classe de base lm_elib fait tout le travail d'échange avec les autres modules dépendants des éléments d'approximation. De façon transparente,

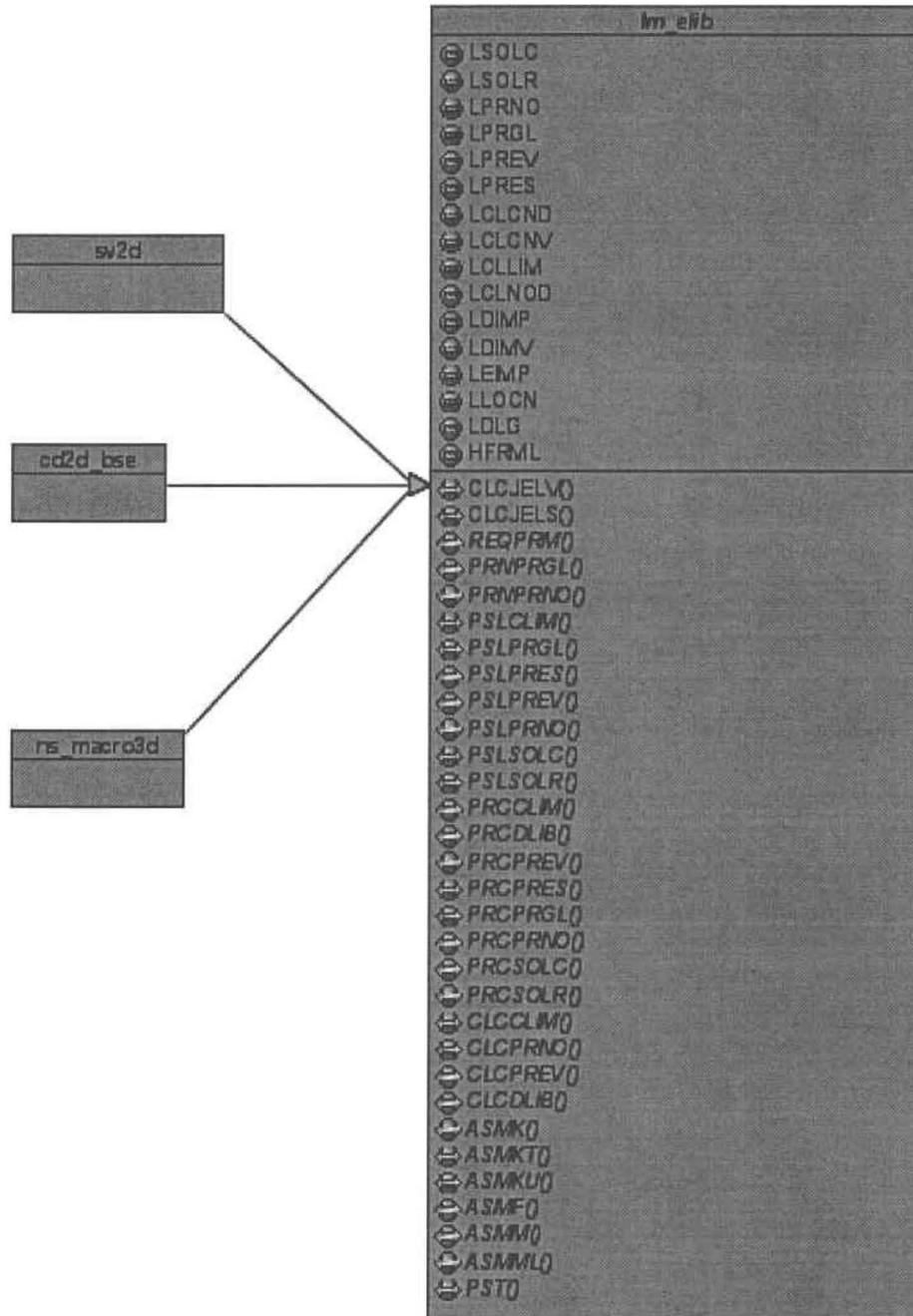


FIG. 5.3 – Diagramme de classes des éléments d'approximation de base

implanter un élément d'approximation revient à redéfinir les fonctionnalités abstraites de *lm_elib* listées dans le diagramme de classe 5.3.

Les éléments d'approximation contiennent une liste d'attributs, la plupart étant des tables permettant entre autres de stoker les degrés de liberté (*dlg*), propriétés globales (*prgl*), les propriétés nodales (*prno*), les propriétés élémentaires de volume et de surface (*prev* et *pres*), ainsi que les sollicitations concentrées et réparties (*solc* et *solr*). Un manuel du programmeur (GIASSON, 2006) fut rédigé afin de détailler ces différents attributs. Notons toutefois trois propriétés nodales furent ajoutées à l'élément d'approximation développé afin de définir la vitesse verticale. Il s'agit des débits verticaux au fond (q_f) et en surface (q_s) ainsi que l'élément de la matrice masse diagonalisée.

La fonction *reqprm()* est utilisée afin de remplir les différents attributs de la classe mère à l'aide des paramètres définis par la classe héritière. Viennent ensuite, dans la séquences d'appel, les fonctions d'impression (*prn*), de pré-calcul (*pre*), de calcul (*clc*), d'assemblage (*asm*) et de post-traitement (*pst*). Le pré-calcul n'a lieu qu'une seule fois et ce qui y est calculé doit être indépendant des degrés de libertés. Le calcul de la matrice masse diagonale se trouve à cet endroit. Les fonctions de calcul (*clc*) se trouvant dans une boucle de résolution, elles sont appelées à plusieurs reprises et peuvent dépendre des degrés de libertés. Les propriétés nodales correspondant aux débits verticaux au fond $\{q_f\}$ et en surface $\{q_s\}$ (section 4.4) sont déterminées à cet endroit.

Les fonctionnalités d'assemblage (*asmX*) sont sans aucun doute celles où le plus grand effort de calcul a lieu. Qu'il s'agisse d'assembler la matrice K , utilisée par l'algorithme de Picard, la matrice tangente K_t pour l'algorithme de Newton ou la matrice Ku pour la résolution avec GMRES, il faudra itérer sur les éléments et, pour

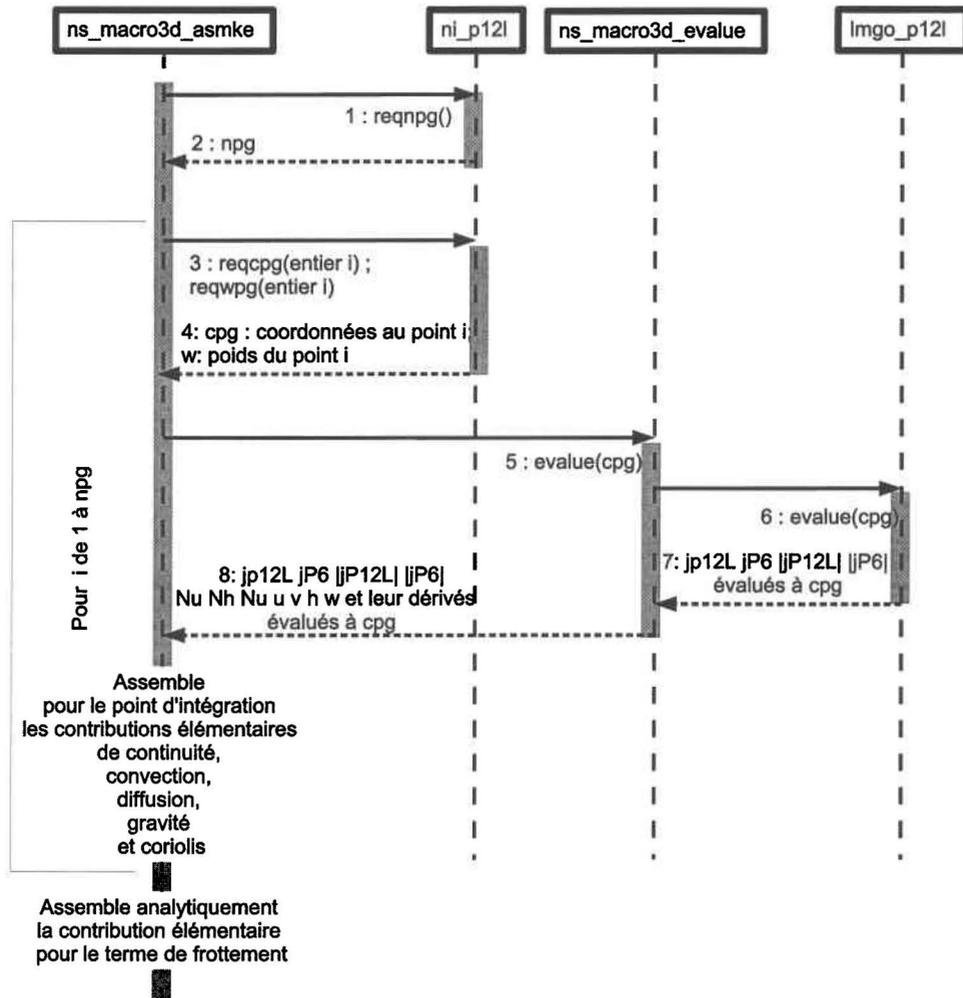


FIG. 5.4 – Séquence d'appels pour la fonction *asmke()*

chacun d'eux, déterminer la matrice de contribution élémentaire K^e à l'aide de la fonction privée *asmke*. Dans le module *ns_macro3d*, les contributions élémentaires décrites à la section 4.3 sont calculées via une intégration numérique en mettant à profit le module *ni_p12l*. La figure 5.4 illustre la série d'appels effectués par *asmke* en insistant sur l'intégration numérique. Le travail lié seulement à l'approximation est regroupé dans *evaluate* et indépendant du travail de *asmke* qui concerne spécifiquement les équations de Navier-Stokes. Un ensemble de fonctionnalités privées aident *evaluate* à évaluer, en un point donné, les fonctions d'approximations (N^u , N^h), leur dérivés ($N_{,x}^u$, $N_{,y}^u$, $N_{,z}^u$, $N_{,x}^h$, $N_{,y}^h$), les degrés de liberté (u , v , h) et la vitesse verticale (w). Pour leur part, les métriques (j_{P6} , j_{P12L} , $|J_{P6}|$, $|J_{P12L}|$) sont évaluées en un point par la fonction *evaluate* de l'élément géométrique.

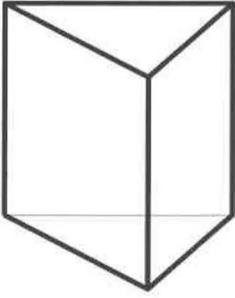
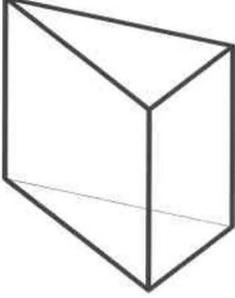
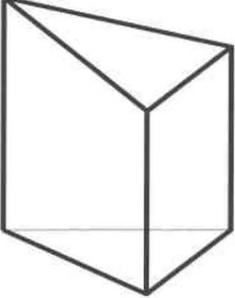
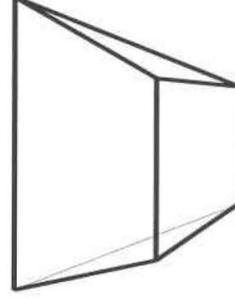
Le terme de droite (f) est assemblé par *asmf()*, où a lieu une intégration des sollicitations réparties sur les éléments de volume. Notons que la géométrie des *P12L* se modifie avec la solution et, qu'en conséquence, les sollicitations réparties ne peuvent pas être traitées comme dans les autres modules d'approximation utilisant des éléments à géométrie indépendante de la solution.

5.4 Validation de la programmation

Une série de tests furent implantés afin de valider les sections programmées. Les structures de tests produisent un résultat de type erreur/succès après avoir comparé le résultat obtenu à une solution validée. La structure a été mise en place de façon à faciliter le lancement automatique de lots de tests et ces derniers sont toujours disponibles pour valider d'éventuelles modifications au code.

Paramètres des tests	Variables testés
<ul style="list-style-type: none"> - Élément - Point d'évaluation p_i 	Évaluation au point p_i de : <ul style="list-style-type: none"> - j_{P6} - j_{P12L} - j_{P6} - j_{P12L}

TAB. 5.1 – Paramètres des test de *lmgo_p12l_evalue()*

Référence	Parallélogramme	Trapèze	Quelconque
			
Fond et surface parallèles entre eux et perpendiculaires aux parois	Fond et surface parallèles	Fond perpendiculaire aux parois	Fond et surface non parallèles et non perpendiculaires aux parois

TAB. 5.2 – Types d'éléments utilisés pour les tests d'évaluation et d'intégration

Paramètres des tests	Variabes testés
– Schéma d'intégration	– $\int_{\Omega^r} J_{P12L} d\Omega^r$
– Élément	– $\int_{\Omega^e} f d\Omega^e$
– Fonction f	

TAB. 5.3 – Paramètres des test de $ni_p12l_evaluate()$

Le premier module de test développé (tableau 5.1) permet de valider la fonction $lmgo_p12l_evaluate()$ en différents points d'intégration. Au moins un point d'intégration par sous-élément fut validé et les quatre différents types d'éléments du tableau 5.2 fournissent les résultats escomptés.

Les différents schémas d'intégration numérique sur un $P12L$ furent eux aussi validés (tableau 5.3). Rappelons que, selon le schéma choisi, l'intégration numérique ne sera garantie exacte que pour les polynômes d'un certain ordre. Puisqu'il s'agit d'une fonction linéaire, $|J_{P12L}|$ peut être intégrée exactement pour chacun des schémas, ce qui fut validé avec succès sur les éléments tests en comparant, pour chacun d'eux, le résultat de l'intégration au volume de l'élément. Différentes fonctions furent aussi intégrées sur les éléments, telle la fonction identité, une fonction nulle, ainsi qu'une fonction linéaire sur la verticale. Bien entendu, les fonctions pouvant être intégrés exactement sont limités et, à titre d'exemple, les fonctions exponentielles intégrées sur un élément ne fournissent pas des résultats exacts.

La fonction $evaluate$ du module ns_macro_3D fut elle aussi validée, pour différents trios élément/valeurs nodales /points d'intégration (tableau 5.4). Des résultats

Paramètres des tests	Variables testés
<ul style="list-style-type: none"> - Élément - Valeurs des degrés de liberté aux noeuds - Point d'intégration p_i 	Évaluation au point p_i de : <ul style="list-style-type: none"> - $N^u N^h$ - $N^u_{,x} N^u_{,y} N^u_{,z}$ - $N^h_{,x} N^h_{,y} N^h_{,z}$ - $u v h$ - $u_{,x} v_{,x} h_{,x}$ - $u_{,y} v_{,y} h_{,y}$ - $u_{,z} v_{,z} h_{,z}$ - $j_{P6} j_{P12L}$ - j_{P6} - j_{P12L}

TAB. 5.4 – Paramètres des test de `ns_macro3d_evaluate()`

Paramètres des tests	Variables testés
<ul style="list-style-type: none"> – Maillage – Terme – Solution initiale – Conditions limites – Algorithme de résolution – Schéma d'intégration 	Selon le cas : <ul style="list-style-type: none"> – Solution pour les degrés de liberté – Test de convergence

TAB. 5.5 – Paramètres des test de *ns_macro3d*

exacts furent obtenus pour les degrés de liberté constants ou linéaires sur l'élément d'approximation.

Afin de tester le nouvel élément d'approximation, nous avons profité d'une structure déjà en place (détaillée dans GIASSON (2006)) permettant de générer des fichiers de maillages, conditions limites, propriétés nodales et sollicitations pour ensuite appeler *H2D2* en activant ou désactivant l'assemblage de certains termes. L'activation et la désactivation de termes permet de tester individuellement la continuité, la convection, la dissipation et la gravité. L'utilisation de différentes conditions limites nous a permis de valider le code pour des cas sans écoulement (piscine), des canaux entraînés et des écoulements de Couette. De façon générale, il est difficile de trouver des solutions exactes aux équations de Navier-Stokes, permettant ainsi d'effectuer des tests. Or, notre intérêt n'étant ici aucunement physique, nous avons testé les termes diffusifs en remplaçant les vitesses par des fonctions exponentielles. Ainsi, les conditions

limites furent facilement posées et les équations du mouvement furent équilibrées en posant des sollicitations, assemblées dans le membre de droite f . Les sollicitations nécessaires furent obtenues sans difficulté puisque les fonctions exponentielles sont invariantes devant l'opérateur de dérivation. De telles équations n'étant pas linéaires, la solution obtenue n'est évidemment pas la solution exacte. Toutefois, nous avons pu valider le taux de convergence du système en comparant les solutions issues de différents raffinements de maillage.

Les schémas d'intégration P^1 sur la verticale ont causé des problèmes lors des tests sur l'élément d'approximation. En fait, ces schémas n'ont qu'un seul point sur la verticale, lequel est en $\zeta = 0$. En annulant ainsi ζ , les termes assemblés pour les vitesses au fond et en surface sont identiques, ce qui cause des problèmes de pivots nuls dans les résolutions. Ce type de problème ne survient pas avec les schémas d'intégration P^3 sur la verticale et c'est pour ces derniers que nous avons opté. Ce schéma à 2 points sur la verticale et un point par sous-élément horizontal (*lmg0_ip2p3*) a donné de bons résultats et il a été conservé pour la simulation présentée au chapitre suivant.

5.5 Conclusion

L'implantation effectuée dans ce travail concerne principalement trois volets, soient l'élément géométrique, l'intégration numérique et l'élément d'approximation. La balance du travail, telle la résolution matricielle ou la lecture des fichiers de commande, était déjà bien en place au sein de H2D2 et n'a pas été modifiée. Ce développement répond ainsi aux objectifs standards de programmation orientée objet qui ont guidé l'implantation, soit la production de code réutilisable, profitant au maximum des ou-

tils déjà en place. Ces mêmes objectifs furent appliqués lors du développement des modules de test.

Le nouvel élément géométrique spécialise la classe abstraite *lm_glib* en redéfinissant les fonctions abstraites, mais surtout, en ajoutant la fonction publique *evaluate()* pour l'évaluation en un point des métriques variant en fonction de la solution.

Concernant l'intégration numérique, aucune structure n'existait à ce sujet dans H2D2. Les modules d'intégration créés pourront facilement être réutilisés par d'autres modules. De plus, il est facile de passer d'un schéma d'intégration numérique à un autre. Les tests ont permis de constater une incompatibilité entre le module *ns_macro3d* et les schémas d'intégration étant P_1 sur la verticale. Cette incompatibilité provient du fait que les mêmes termes sont assemblés pour les degrés de liberté au fond et en surface, ce qui occasionne un pivot nul lors de la résolution. Les schémas concernés sont toutefois valables et demeurent disponibles pour de nouveaux éléments d'approximation. Leur validité a d'ailleurs été vérifiée pour l'intégration de fonctions test sur différents éléments géométriques.

L'élément d'approximation *ns_macro3d*, héritier de la classe abstraite *lm_elib*, a été implanté pour représenter les équations de Navier-Stokes sur un $P12L$. L'ensemble des fonctionnalités abstraites de *lm_elib* ont dû être implantées pour le nouvel élément d'approximation. Le cœur du travail se trouve dans l'assemblage où les contributions élémentaires sont calculées en tirant profit du module d'intégration numérique.

Les nouvelles sections de code ont été validées à l'aide de modules de test. Il est important de noter que les tests effectués n'ont pas nécessairement une cohérence physique, leur seul but étant de déceler des erreurs de programmation. Ainsi, lors des tests d'application, présentés au chapitre suivant, nous avons une confiance suffisante

en notre implantation pour nous concentrer sur la physique du problème et comparer les résultats aux équations utilisées.

Chapitre 6

Application à un canal en courbe

Afin de comparer la réponse du modèle à un écoulement documenté, nous avons effectué une simulation hydrodynamique sur le canal en courbe décrit par STEFFLER et JIN (1993). Cet exemple a été choisi pour sa géométrie simple, et parce que des profils longitudinaux, transversaux et verticaux des vitesses mesurées sont disponibles. Nous pouvons aussi comparer nos travaux à ceux de SECRETAN et DUBOS (2005) qui ont effectué des simulations sur ce canal en utilisant une version des équations de Saint-Venant où le terme de dispersion était remplacé par une valeur mesurée.

Nous présentons d'abord le canal et les différentes simulations de comparaison. Ensuite, nous décrivons les paramètres de simulation et analysons les répartitions des vitesses longitudinales et transversales ainsi que la variation des vitesses sur la profondeur.

6.1 Description générale des travaux de comparaison

6.1.1 L'expérience de STEFFLER et JIN (1993)

Le canal décrit par STEFFLER et JIN (1993) et représenté à la figure 6.1 est de section rectangulaire de $1,07m$ de largeur avec une pente de $0,00083$ dans la direction longitudinale. Il forme une courbe de 270 degrés ayant un rayon de $3,66 m$ mesuré au centre de la section. Les auteurs ont obtenu des résultats expérimentaux et des résultats de simulation sur ce canal. L'écoulement mesuré atteint un premier maximum de vitesse à l'entrée de la courbe sur la paroi intérieure. La distribution demeure ensuite relativement uniforme jusqu'à 60 degrés où la vitesse maximale se dirige vers la paroi extérieure. La vitesse atteint son maximum à la sortie de la courbe sur la paroi extérieure, pour ensuite devenir plutôt uniforme. Les vitesses varient de $0,26 m/s$ à $0,42 m/s$.

6.1.2 Simulation de référence $2D$

Les résultats pour les équations de Saint-Venant $2D$ furent d'abord obtenus avec Hydrosim, il s'agit de la simulation de référence, le but étant de mesurer l'amélioration obtenue avec le nouvel élément par rapport aux résultats antérieurs avec Hydrosim. L'écoulement obtenu est présenté à la figure 6.3. À 30 degrés, on remarque une inversion des champs de vitesses, les plus élevés passant de l'intérieur à l'extérieur de la courbe. Par la suite, le profil de vitesse demeure similaire jusqu'en sortie, où le gradient latéral de vitesse est perdu. Le module de la vitesse varie de $0,31 m/s$ à $0,42 m/s$. Nous nous comparerons à ces résultats pour mesurer l'impact de l'ajout d'une composante tridimensionnelle au modèle.

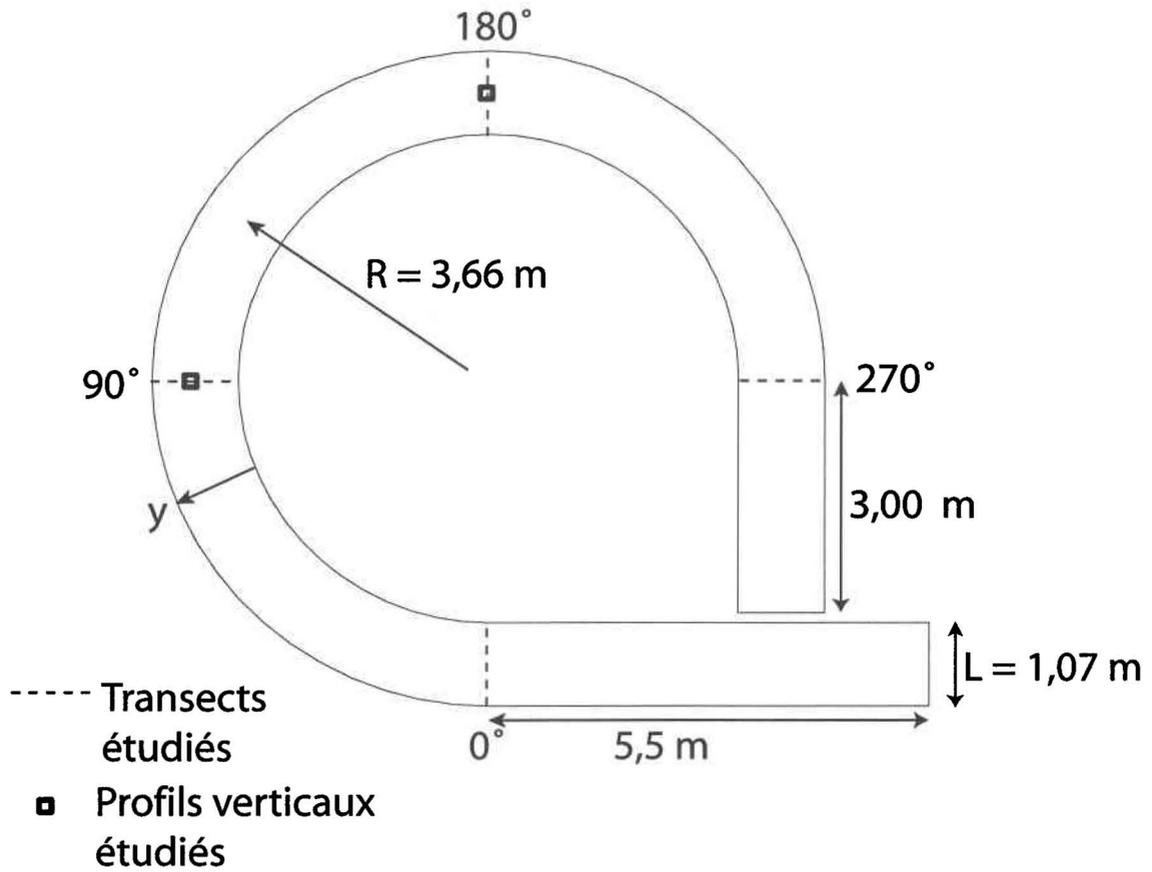


FIG. 6.1 – Description du canal courbe (STEFFLER et JIN, 1993)

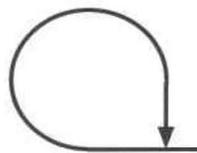


FIG. 6.2 – Sens de l'écoulement



FIG. 6.3 – Isosurfaces du module de la vitesse, simulation de référence 2D (Hydrosim)



FIG. 6.4 – Isosurfaces de vitesse, simulation avec dispersion (d’après SECRETAN et DUBOS (2005)

6.1.3 Simulation 2D avec dispersion

SECRETAN et DUBOS (2005) ont simulé l’écoulement sur le canal en courbe en introduisant un terme de dispersion non constant aux équations de Saint-Venant 2D. Le terme de dispersion appliqué sur le domaine a été déterminé à partir des résultats mesurés de STEFFLER et JIN (1993). L’écoulement obtenu, (figure 6.4), variant de 0,30 m/s à 0,43 m/s a une amplitude légèrement supérieure à l’écoulement d’Hydro-

sim mais toujours inférieure aux résultats mesurés. Pour la suite, nous référerons à la simulation avec dispersion pour décrire le travail de SECRETAN et DUBOS (2005).

6.2 Simulation avec le $P12L$

6.2.1 Paramètres de simulation

Pour les simulations avec le nouvel élément $3D$, des conditions limites en niveau d'eau furent imposées en entrée et en sortie, soit un niveau d'eau de $1,0614\ m$ en entrée et de $1,0396\ m$ en sortie, correspondant respectivement à des profondeurs de $0,0614\ m$ et de $0,0610\ m$ étant donné la géométrie du canal. Ces conditions limites furent choisies afin de se conformer aux résultats de SECRETAN et DUBOS (2005), quoique ces derniers imposaient en entrée une sollicitation en débit de $0,0240\ m^3/s$, la hauteur d'eau étant plutôt un résultat de simulation. Pour leur part STEFFLER et JIN (1993) imposent un débit en entrée de $0,0235\ m^3/s$ sur ce canal, ce qui correspond au débit entrant mesuré.

La viscosité laminaire (ν_l), constante sur le domaine, est fixée à 10^{-6} alors que la viscosité turbulente (ν_t) est pilotée par la longueur de mélange (l_m) fixée à $0,01m$. Afin de stabiliser le schéma numérique, nous ajoutons une viscosité numérique (ν_n), variant selon la taille de maille. C'est le nombre de Peclet, fixé à 5 dans notre simulation, qui permet de calibrer cette viscosité, selon une relation inverse (HENICHE ET AL., 2000a). Puisqu'il s'agit d'un cas théorique, nous avons laissé tomber la contrainte due au vent et le champ de frottement de Manning constant à $n = 0,0123$ utilisé pour la simulation avec dispersion a été repris.

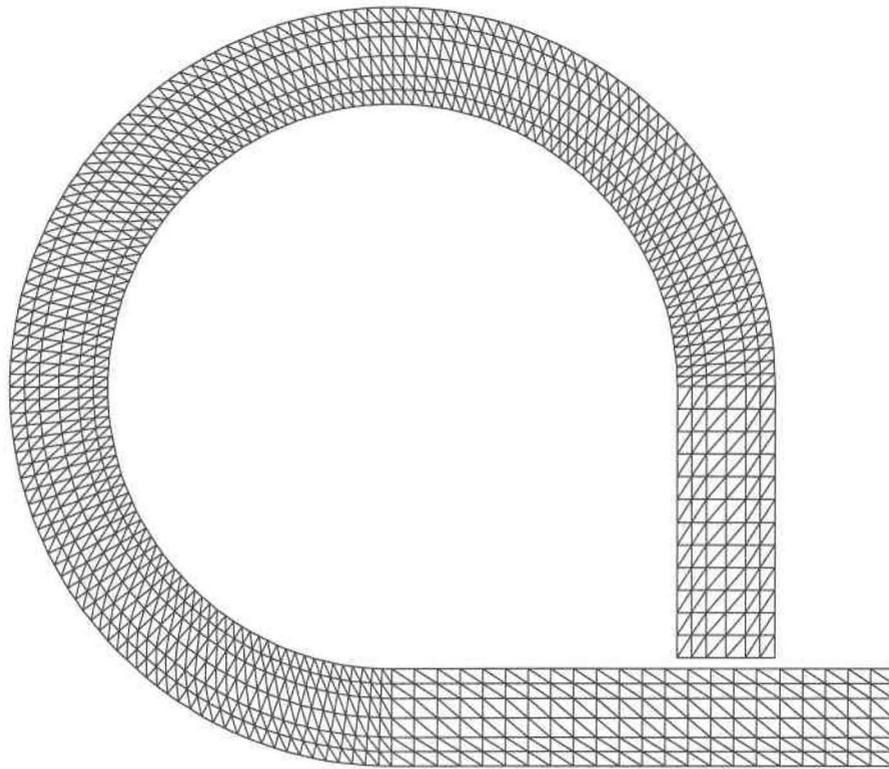


FIG. 6.5 – Maillage utilisé pour les simulations numériques

Nous avons repris le maillage triangulaire de SECRETAN et DUBOS (2005), formé de 2028 éléments $T6L$ et illustré à la figure 6.5, mais l'élément utilisé est le $P12L$, soit notre nouvel élément dont la géométrie verticale est dépendante du niveau d'eau et de la topographie du fond.

6.2.2 Description générale de l'écoulement simulé

À l'amorce de la courbe, l'écoulement simulé (figure 6.6) comporte un minimum local sur la paroi extérieure ainsi qu'un maximum local à l'intérieur de la courbe. Pour

FIG. 6.6 – Isosurfaces de vitesse, simulation *P12L*

la suite, les vitesses décroissent sur la paroi intérieure alors qu'elles croissent sur la paroi extérieure et le profil s'inverse aux alentours de 130 degrés où les vitesses deviennent supérieures à l'extérieur et inférieures à l'intérieur de la courbe. Les vitesses maximales et minimales sont respectivement atteintes sur les parois extérieures et intérieures, peu après la sortie de la courbe. Les gradients de vitesses diminuent vers la fin du canal. Cette description de l'écoulement correspond à la description de l'écoulement mesuré sur le canal, toutefois, les vitesses simulées variant entre $0,32 \text{ m/s}$ et $0,41 \text{ m/s}$, n'atteignent pas les amplitudes mesurées.

Le débit simulé obtenu en entrée et en sortie est de $0,0225 \text{ m}^3/\text{s}$ donc légèrement inférieur au débit de $0,0240 \text{ m}^3/\text{s}$ imposé en condition limite entrante dans la simulation avec dispersion et celui de $0,0235 \text{ m}^3/\text{s}$ mesuré sur le canal. En diminuant le champ de frottement, nous obtenons un débit similaire à celui mesuré avec une légère augmentation des vitesses, mais les profils demeurent les mêmes que ceux présentés dans les sections qui suivent.

6.2.3 Vitesses longitudinales

Les vitesses longitudinales sont comparées à la figure 6.7 aux vitesses mesurées, ainsi qu'aux vitesses obtenues avec la simulation de référence et la simulation avec dispersion. Nous y avons indiqué les vitesses le long de quatre différents transects, de la paroi extérieure ($-y/L = -1.0$) à la paroi intérieure ($-y/L = 1.0$) du canal. La vitesse mesurée est la vitesse moyenne sur la colonne. De même, la vitesse simulée avec le $P12L$ variant linéairement sur la verticale, la vitesse présentée est la vitesse moyenne entre le fond et la surface.

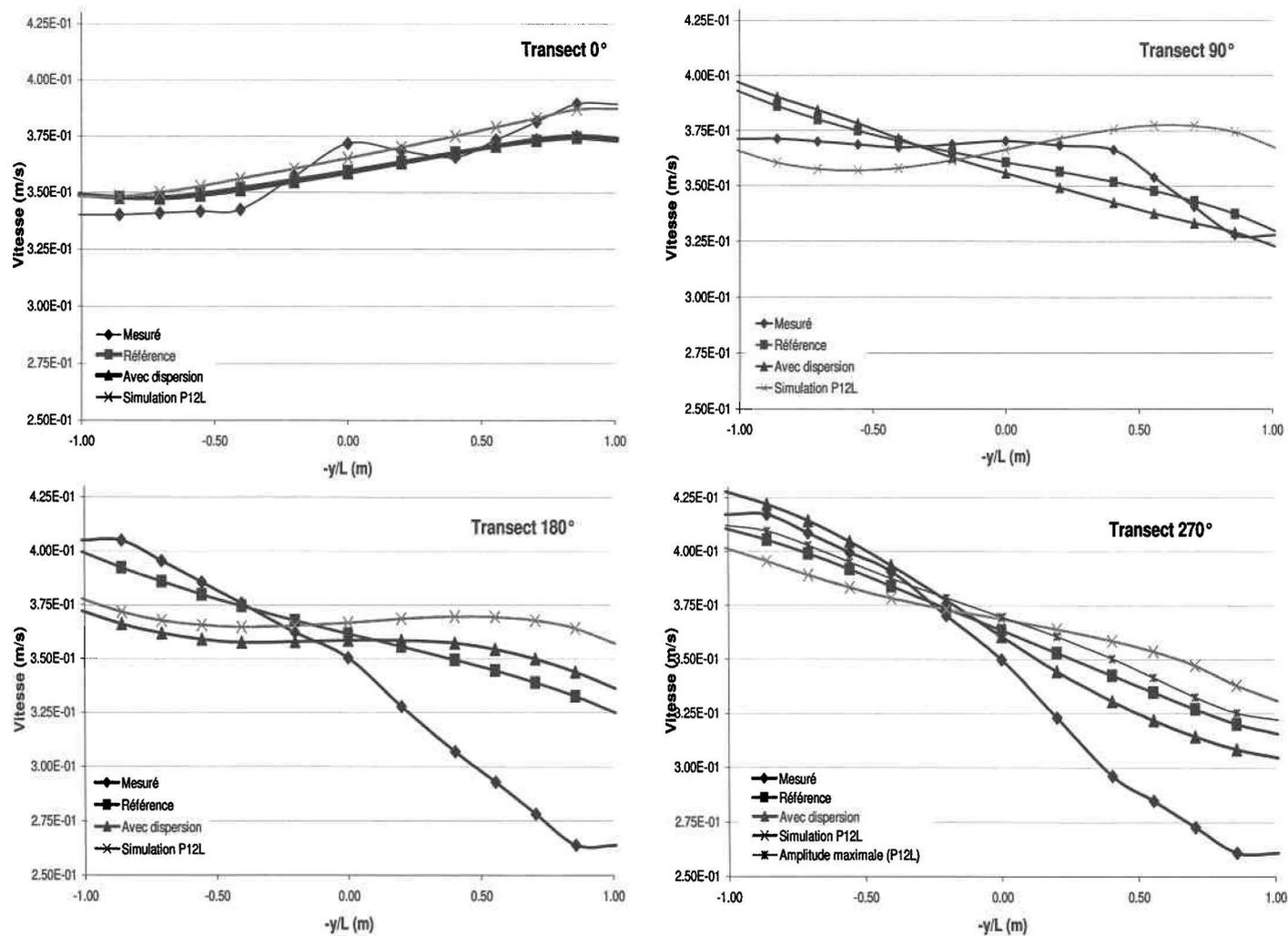


FIG. 6.7 – Profil des vitesses longitudinales (m/s) sur différents transects

À 0 degrés, notre amplitude dépasse celle obtenue dans toutes les autres simulations, se rapprochant des résultats mesurés. Toutefois, à 90°, l'amplitude est nettement inférieure aux résultats mesurés et n'atteint même pas les valeurs obtenues dans la simulation de référence. Le profil est par contre décroissant près des parois et croissant à l'intérieur, comme c'est le cas avec les résultats mesurés, ce qui ne se retrouve pas dans les deux autres profils simulés, qui sont plutôt linéaires. Le profil longitudinal obtenu à 180 degrés est très proche des résultats de la simulation avec dispersion. Nous échappons à la linéarité de la simulation de référence, sans toutefois atteindre l'amplitude mesurée. Finalement, à 270 degrés, l'amplitude est nettement insuffisante. Dans notre simulation, l'amplitude maximale des vitesses sur le transect se retrouvent en sortie de courbe, mais 0,5 m après le profil 270 degrés. Il s'agit d'un léger décalage de l'écoulement simulé par rapport à l'écoulement mesuré.

6.2.4 Vitesses transversales

Les vitesses transversales obtenues sur les différents transects se retrouvent à la figure 6.8. Il s'agit des vitesses en surface afin de mieux se comparer aux résultats mesurés disponibles. Pour les simulations de référence et avec dispersion, nous considérons les vitesses moyennes puisqu'il s'agit de modèles 2D. Comme l'indique l'axe y de la figure 6.1, nous considérons une vitesse positive lorsque l'écoulement va vers la paroi extérieure et négative lorsqu'il va vers la paroi intérieure du canal.

Les vitesses transversales sont nettement inférieures dans la simulation que dans l'écoulement mesuré, mais les caractéristiques y sont préservées. Par exemple, les vitesses transversales se dirigent vers l'intérieur de la courbe à 0 degré et à l'extérieur sur les autres profils. De plus, elles sont supérieures dans le profil 270 degrés qu'à

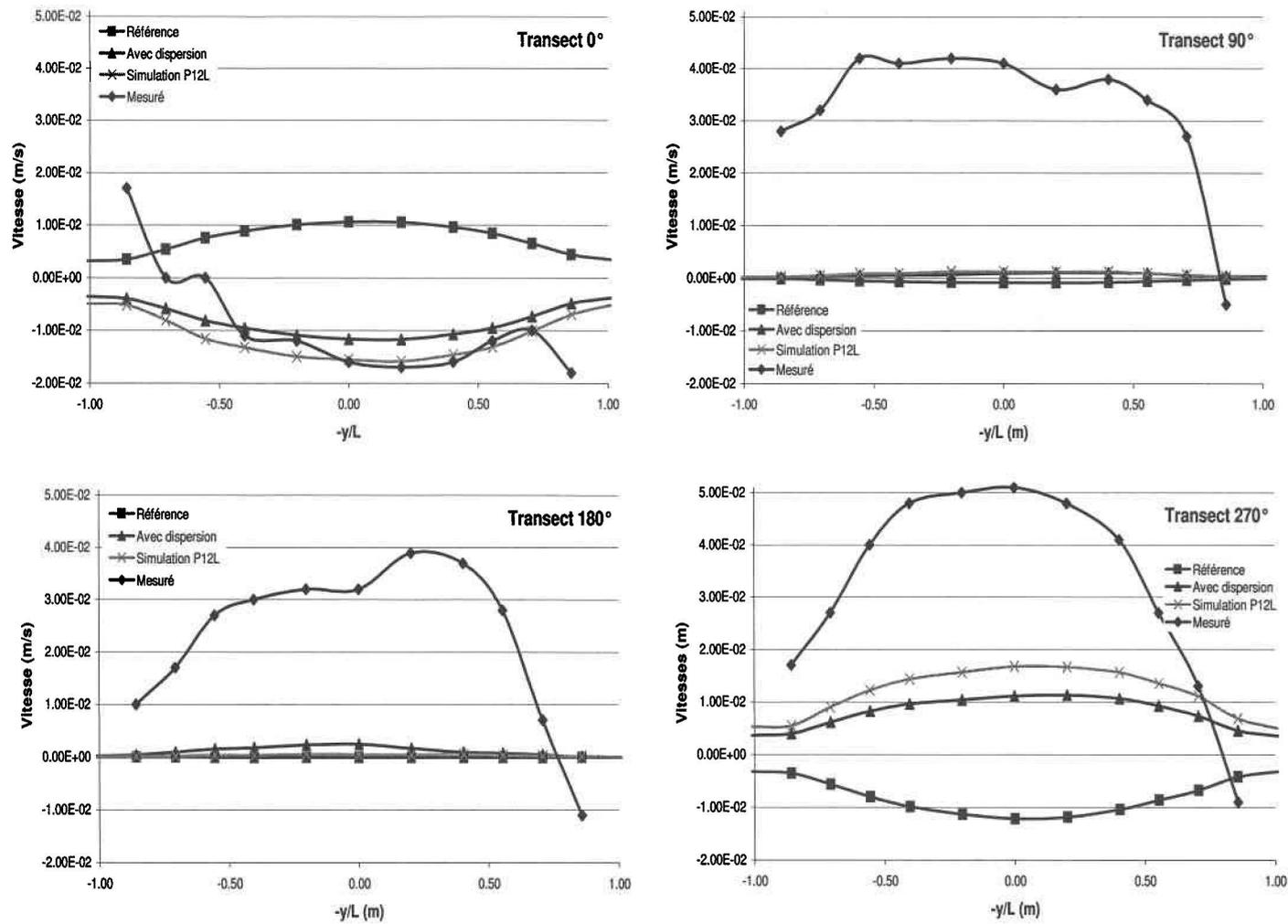


FIG. 6.8 – Profil des vitesses transversales (m/s) sur différents transects

180 et 90 degrés. Nos vitesses à 0 degré, sont elles aussi plus importantes, ce qui ne se retrouve pas dans les mesures. Dans tous les cas, nos simulations représentent mieux l'écoulement secondaire que la simulation de référence. L'amélioration de la représentation de l'écoulement secondaire, est environ du même ordre de grandeur que celui obtenu dans la simulation avec dispersion, mis à part à 180 degrés, où la simulation avec dispersion semble mieux représenter l'écoulement secondaire, en demeurant toutefois nettement inférieure aux résultats mesurés.

Nous n'avons pas les valeurs mesurées aux parois, mais, cette dernière étant imperméable, les vitesses normales y sont nécessairement nulles. En ce qui concerne les simulations, le débit entrant dans le système sur une paroi est balancé par le débit sortant sur l'autre paroi, bien que, localement, l'écoulement ne soit pas tangent à la paroi. Ce phénomène s'explique par le fait que l'imperméabilité des parois est imposé au système sous forme faible, par le biais d'une condition limite naturelle.

6.2.5 Variation verticale des vitesses

Contrairement à la simulation de référence, le modèle implanté permet une variation de la vitesse sur la verticale. La figure 6.9 présente le profil vertical des vitesses longitudinales et transversales sur 2 points du domaine. Nous avons choisi des points aux transects 90° et 180° car, à ces endroits, les mesures varient beaucoup sur la verticale, le profil étant plus uniforme aux deux autres transects. Vu notre dispersion des vitesses longitudinales plus faible sur les transects, nous avons choisi nos points au centre du canal, à $-y/L = 0$ pour avoir des vitesses du même ordre que les résultats mesurés.

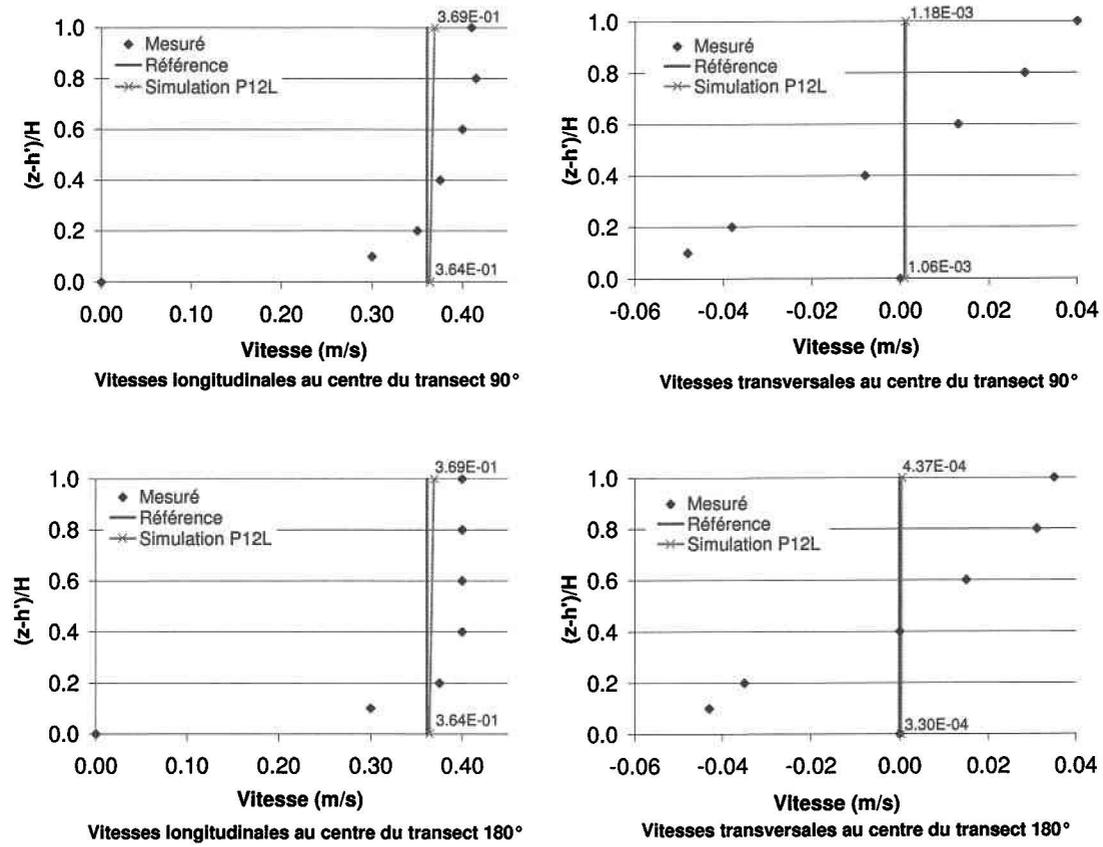


FIG. 6.9 – Profils verticaux des vitesses longitudinales et transversales (m/s) au centre ($-y/L = 0$) des transects 90° et 180°

Contrairement aux résultats mesurés, les vitesses ne s'annulent pas au fond. Si tel était le cas, les degrés de libertés au fond seraient inutiles. Nous considérons plutôt qu'il y a une couche limite liée à la rugosité du fond, dont l'influence se retrouve discrétisée par le terme de friction. Comme sur l'horizontale, les variations des vitesses sur la verticale n'ont pas l'amplitude des résultats mesurés, mais dépassent évidemment la simulation de référence qui utilise un profil constant.

6.2.6 Vitesse verticale

Dans la simulation avec le $P12L$, la vitesse verticale est approximée linéairement, sur l'horizontale comme sur la verticale. Les résultats pour les vitesses au fond et en surface sur les différents transects sont présentés à la figure 6.10. Les vitesses verticales ont été calculées à l'aide de l'expression (3.9). Ainsi, w_f étant le produit entre la pente (constante sur le domaine étudié) et les vitesses horizontales au fond, elle est supérieure aux endroits où les vitesses horizontales sont maximales. Par exemple, sur le profil à 180° , la vitesse verticale au fond est supérieure à l'extérieur de la paroi et diminue vers l'intérieur de la paroi. Notons que les profils aux transects 0° et 270° ont les mêmes comportements, mais l'échelle choisie ne permet pas de les représenter. La vitesse en surface w_s est obtenue en sommant la vitesse au fond à l'intégrale, sur la verticale, du gradient des vitesses horizontales. C'est aux endroits où les gradients de vitesses sont les plus forts que la vitesse en surface atteint ses maximums, soit près des parois, aux transects 0° et 270° . Aucun résultat de comparaison n'est disponible pour les vitesses verticales, mais les valeurs obtenues semblent très faibles. Cela est peut-être dû à l'approximation verticale linéaire, qui représente mal la physique du milieu. Bien que nous ayons un ordre d'approximation plus élevé que dans un système $2D$,

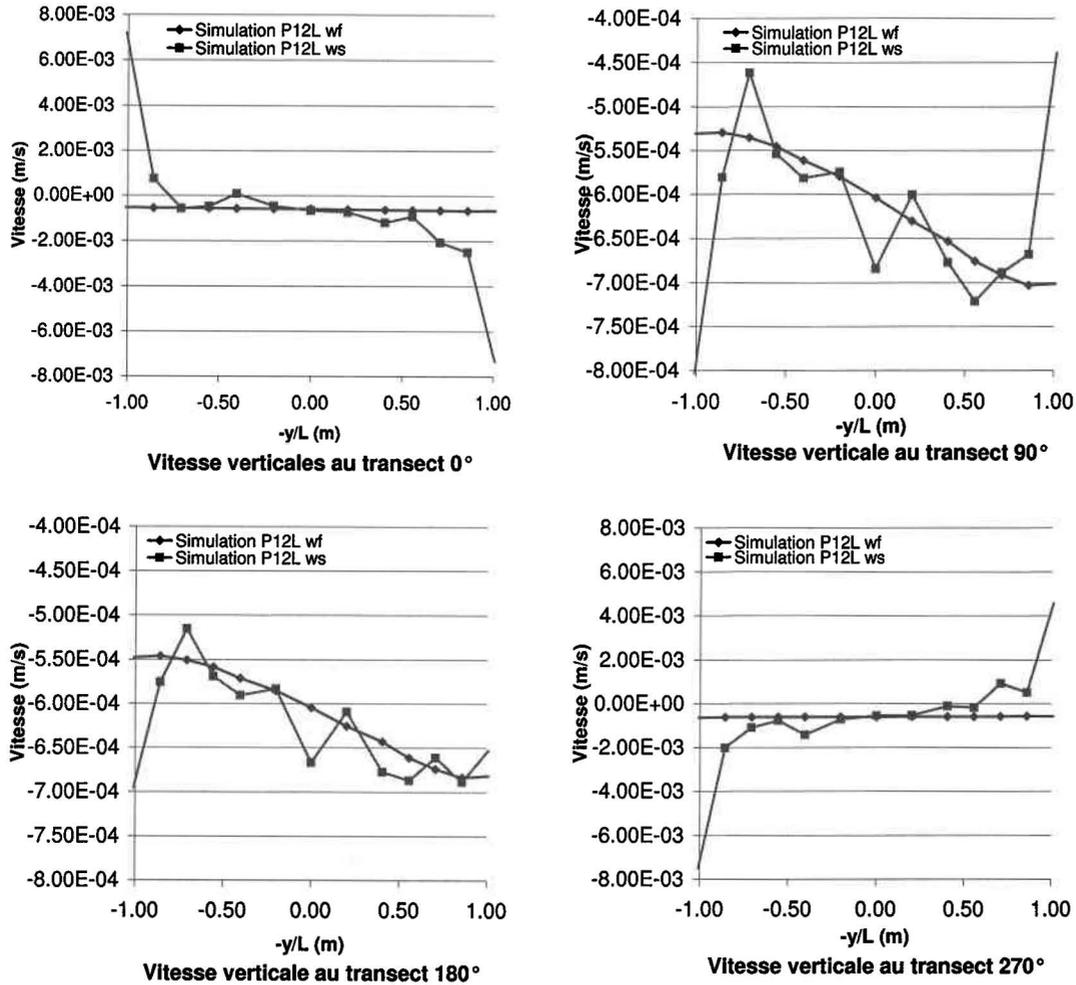


FIG. 6.10 – Profil de la vitesse verticale (en m/s) au fond (w_f) et en surface (w_s) sur les différents transects.

peu d'information additionnelle semble être obtenue. Une approximation quadratique sur la verticale serait plus près du phénomène physique et permettrait sans doute d'obtenir une meilleure représentation des vitesses verticales.

6.3 Conclusion

Nous avons simulé l'écoulement sur le canal de STEFFLER et JIN (1993) et comparé les résultats obtenus aux valeurs mesurées, à une simulation de référence 2D et au travail de SECRETAN et DUBOS (2005) qui introduisent des valeurs de dispersion mesurées dans les équations bidimensionnelles. L'écoulement simulé représente bien la physique, sans toutefois en capter toute l'essence. À prime abord, les vitesses et niveau d'eau étant au moins aussi bien représentés qu'en 2D, nous pouvons conclure une cohérence dans notre modèle mathématique et une justesse dans son implantation numérique, tant au niveau de la construction de l'élément, que de l'intégration numérique et l'assemblage. Lorsque comparés à l'écoulement de référence, les profils longitudinaux des vitesses perdent la forme linéaire se rapprochant ainsi des résultats mesurés pour l'allure générale, quoique contrastes entre les vitesses simulées manquent d'amplitude. À ce sujet, la simulation ne rejoint même pas les résultats 2D de référence. L'amplitude peut être retrouvée en augmentant la viscosité numérique, mais nous obtenons alors un écoulement très proche de l'écoulement de référence, et, comme ce dernier, ne représentant pas les vitesses transversales. Notons qu'au niveau des amplitudes SECRETAN et DUBOS (2005) parviennent à une meilleure représentation.

Un gain évident du modèle est la représentation des vitesses transversales. Bien que les ordres de grandeurs mesurés ne soient pas atteints, la physique du phénomène, en particulier les directions, est bien représentée. À ce sujet, il s'agit d'un gain évident

par rapport au modèle $2D$ et les résultats rappellent ceux obtenus dans la simulation avec dispersion.

Les vitesses varient sur la verticale, quoique très faiblement si on compare ces variations aux résultats mesurés. Il s'agit tout de même d'une amélioration par rapport à la simulation de référence. De même, le modèle permet une représentation des vitesses verticales qui, quoique très faibles, ont le comportement souhaité. Le modèle pourrait être amélioré en approximant la vitesse verticale de façon quadratique, ce qui représenterait mieux la physique du milieu.

La construction automatique de l'élément $3D$ à partir d'un maillage $2D$, de la topographie et du niveau d'eau s'est fait de façon dynamique et tout à fait transparente. Il s'agit là d'une qualité intéressante du module développé et l'intégration à Modeleur permet l'utilisation de différents outils de gestion et visualisation $2D$.

En bref, la simulation montre que le modèle répond bien sur un cas physique, améliorant la représentation de l'écoulement secondaire. L'amélioration équivaut à celle obtenue dans la simulation avec dispersion, sans toutefois nécessiter l'introduction de résultats mesurés au sein du modèle. Finalement, les outils $2D$ disponibles au sein de Modeleur peuvent facilement être mis à profit pour les simulations $3D$, ce qui répond à un des objectifs de base du développement.

CONCLUSION

Le premier objectif de ce travail consistait à comparer différents modèles hydrodynamiques au niveau des hypothèses posées lors du développement mathématique. Les équations de Navier-Stokes sont le point de départ des modèles et, dans la plupart des cas, l'hypothèse de pression hydrostatique est posée. Les modèles $3D$ étudiés, en particulier celui de LECLERC (1985), ne considèrent pas la vitesse verticale comme une inconnue du problème, mais la récupèrent plutôt à l'aide d'une pré-intégration de l'équation de la continuité. Au niveau des modèles $2D$, les équations de Saint-Venant sont les plus souvent utilisées. C'est ce système que résout Hydrosim (HENICHE ET AL., 2000b), qui sera utilisé comme simulation de référence. Toujours en $2D$, nous avons étudié le modèle de STEFFLER et GHAMRY (2005), qui ajoutent des équations supplémentaires au système de Saint-Venant afin de faire varier les vitesses sur la verticale, ainsi que celui de SECRETAN et DUBOS (2005), qui introduisent un terme de dispersion. Les résultats obtenus par STEFFLER et GHAMRY (2005) semblent intéressants, mais ils passent pour cela d'un système à trois inconnues (u, v, h) à un système à dix inconnues. Plutôt que d'ajouter une telle complexité à un modèle $2D$, nous avons souhaité simplifier au maximum le modèle $3D$.

Se situant dans un contexte de résolution par éléments finis, nous proposons un élément à base triangulaire, aux arêtes verticales, recouvrant la colonne d'eau entière,

du fond à la surface. Un tel élément a l'avantage de permettre l'augmentation du degré d'approximation des vitesses sur la verticale, tout en tirant profit des maillages bidimensionnels. En effet, en connaissant le niveau d'eau et la topographie, le maillage $3D$ peut directement être décliné à partir d'un maillage $2D$. Afin de mettre en place l'élément, nous avons traversé les étapes habituelles, c'est-à-dire, le développement du modèle mathématique, de la formulation variationnelle et de la forme discrète.

Au niveau du modèle mathématique, nous utilisons les équations de Navier-Stokes avec l'hypothèse de pression hydrostatique. La vitesse verticale est déterminée à l'aide des vitesses horizontales suite à une intégration de l'équation de la continuité. Afin de situer notre modèle, nous avons aussi développé le modèle de Saint-Venant standard, en effectuant une intégration sur la verticale des équations de Navier-Stokes.

Au chapitre 3, avons présenté la forme faible du modèle $3D$. Il est intéressant de noter que le passage à la forme faible, lequel fait apparaître des intégrales de contour, rappelle sur certains points l'intégration verticale du modèle $3D$ pour l'obtention d'un modèle mathématique $2D$. Le chapitre 4 présente la discrétisation du problème à l'aide de la méthode des éléments finis. L'élément considéré, un prisme à base triangulaire à 12 noeuds (P_{12L}), se décomposant en quatre prismes à 6 noeuds est P_1/P_1 Iso P_2 sur l'horizontale, et P_0/P_1 sur la verticale. Par rapport à l'élément bidimensionnel implanté dans Hydrosim pour les équations de Saint-Venant, un $T6L$, nous gagnons un ordre d'approximation plus élevé pour les vitesses sur la verticale. Toutefois, il n'est plus possible d'avoir une intégration exacte (analytique) puisque le jacobien du P_{12L} n'est pas constant. Nous avons contourné le problème en mettant à profit des principes d'intégration numérique. Nous avons opté pour un schéma d'intégration à 1 point par sous-élément sur l'horizontale, et 2 points sur la verticale. Un tel schéma

permet d'intégrer exactement des fonctions polynomiales d'ordre 3 sur la verticale et d'ordre 1 par sous-élément sur l'horizontale.

Au stade de l'implantation, nous avons profité au maximum des structures déjà en place. En particulier, la structure virtuelle a permis de développer un nouvel élément sans toucher à la lecture du maillage, ni aux algorithmes de résolution matricielle. Nous avons toutefois dû spécialiser l'élément géométrique afin que les métriques puissent être recalculées lorsque le niveau d'eau change. De plus, l'élément d'approximation a été spécialisé pour assembler les équations de Navier-Stokes 3D et afin de mettre à profit le nouveau module d'intégration numérique.

Après avoir validé la programmation en général, l'élément a été testé sur un canal en courbe et les résultats ont été mis en parallèle avec :

- les résultats mesurés par STEFFLER et JIN (1993) sur le canal ;
- les résultats obtenus suite à une simulation 2D avec Hydrosim ;
- les résultats obtenus par SECRETAN et DUBOS (2005), pour des équations de type Saint-Venant 2D, mais avec introduction d'un terme de dispersion calculé à partir des résultats mesurés.

L'écoulement modélisé avec le nouvel élément d'approximation a essentiellement la bonne forme, quoique les contrastes des vitesses n'atteignent pas les amplitudes mesurées. Une certaine variation des vitesses sur la verticale est captée, mais le principal gain concerne la modélisation des vitesses transversales. À ce sujet, l'amélioration équivaut à celle obtenue dans la simulation avec dispersion, sans toutefois nécessiter l'introduction de résultats mesurés au modèle. Il s'agit clairement pour nous d'un pas intéressant. Pour la suite, une meilleure approximation de la vitesse verticale, plus près du phénomène physique, pourrait améliorer la représentation de l'écoulement. L'élément d'approximation développé dans ce travail pourrait facilement être spécialisé en

ce sens. Dans un autre ordre idée, l'hypothèse de pression hydrostatique pourrait être revue afin de mesurer son impact et tenter d'introduire un terme de pression dans le modèle.

En bref, après avoir étudié différents modèles mathématiques représentant l'écoulement, nous avons développé un élément tridimensionnel minimal pour les équations de Navier-Stokes hydrostatiques. Nous avons implanté cet élément au sein de H2D2 et avons dû, au passage, ajouter un module d'intégration numérique. Finalement, les simulations sur un canal en courbe ont permis de conclure que l'élément développé répond de façon cohérente, ce qui valide l'implantation du modèle.

En vue de mieux capter l'essence de l'écoulement sur la verticale, ce travail clos une première phase de développement. Les composantes logicielles développées sont maintenant prêtes pour recevoir d'autres types d'approximation, ce qui viendra sans doute raffiner encore plus la représentation de l'écoulement.

Annexe A

COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE

A.1 Règle de Leibniz

Soit $z_1 = z_1(x, y, t)$ et $z_2 = z_2(x, y, t)$, la règle de Leibniz KAPLAN (1984) est utilisée afin d'intégrer verticalement les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, y, z) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{z_1}^{z_2} f(t, x, y, z) dz \right) \\ &\quad - f(t, x, y, z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \\ &\quad + f(t, x, y, z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

A.2 Théorème de la divergence

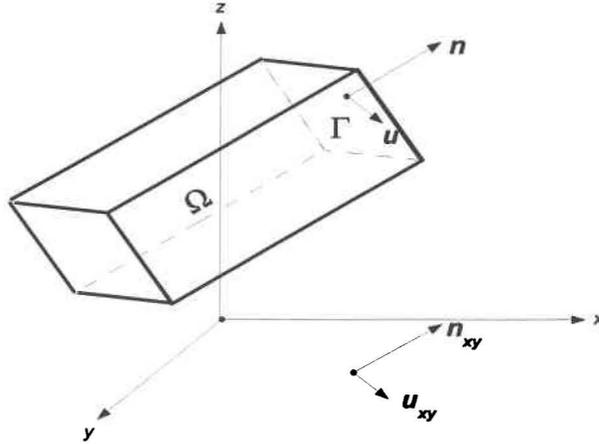
Le théorème de la divergence, aussi connu sous le nom de théorème de Gauss, associe le flux d'une quantité de matière à travers une frontière fermée Γ au taux de variation de la densité de cette matière au sein du volume Ω formé par Γ .

Théorème A.2.1 (Théorème de la divergence). *Soit $u = (u, v, w)$ un champ vectoriel sur \mathbb{R}^3 où u, v et w appartiennent à $C^1(\mathbb{R}^3)$. Soit Γ une surface de \mathbb{R}^3 lisse par morceaux et formant le volume compact Ω dans \mathbb{R}^3 de normale extérieure \mathbf{n} , alors :*

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}(u) d\Omega$$

La preuve de ce résultat classique du résultat intégral permet de déduire (KAPLAN, 1984) :

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} u dy dz &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz \\ \iint_{\Gamma} v dz dx &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy dz \\ \iint_{\Gamma} w dx dy &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial z} dx dy dz \end{aligned}$$

FIG. A.1 – Projection dans le plan xOy

et, plus particulièrement :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{u}_{xy} \cdot \mathbf{n}_{xy} d\Gamma = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega \quad (\text{A.2})$$

où $\mathbf{u}_{xy} = (u, v)$ et \mathbf{n}_{xy} sont respectivement les projections dans le plan xOy de \mathbf{u} et de la normale. Rappelons que, par définition, $\|\mathbf{n}\| = 1$, mais rien n'indique que sa projection \mathbf{n}_{xy} est normalisée. En fait, $\|\mathbf{n}_{xy}\| = 1$ si et seulement si \mathbf{n} n'a pas de composante verticale.

A.3 Intégrale projetée

Soit Γ une surface dans \mathbb{R}^3 , pouvant être représentée de la façon suivante :

$$z = f(x, y) \text{ où } (x, y) \in A$$

La région A de \mathbb{R}^2 est en réalité la projection dans le plan xOy de Γ . Si Γ est lisse et que A forme un compact de \mathbb{R}^2 , l'aire de la surface Γ est donnée par la formule

suivante (KAPLAN, 1984) :

$$\iint_A \sec \gamma dx dy = \iint_A \sqrt{1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}} dx dy$$

où $\gamma = \gamma(x, y)$ est l'angle formé entre l'axe vertical et la normale \mathbf{n} à la surface Γ au point $(x, y, f(x, y)) \in \Gamma$. Soit $u_{xy} = u(x, y)$, nous pouvons calculer l'intégrale sur la surface projetée :

$$\int_{\Gamma} u(x, y) d\Gamma = \int_A u(x, y) \sqrt{1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}} dA \quad (\text{A.3})$$

Annexe B

MÉTRIQUES

Cet annexe présente les métriques des différents éléments du chapitre 4. Le jacobien J correspond au changement de variable de l'élément de référence vers l'élément réel : $[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}]$. Son inverse j représente pour sa part les $[\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}]$ et est utilisé lors de la dérivation en chaîne. Finalement, le déterminant du jacobien est principalement utilisé lors des transformations d'intégrales. Ce dernier doit être non nul pour assurer l'existence de j .

L'élément unidimensionnel est un $L2$, soit un élément linéaire (P_1) à 2 noeuds. Le jacobien d'un tel élément est constant.

L'élément bidimensionnel considéré est un $T6L$ formé de quatre sous-éléments à 3 noeuds. Le $T6L$ comporte une approximation $P_1/P_1\text{Iso}P_2$, soit linéaire sur l'élément global pour les niveaux d'eau, et linéaire par sous-élément pour les vitesses. Les métriques $2D$ sont constantes sur l'élément. Le déterminant du jacobien ne s'annule que si les trois noeuds sont alignés, ce qui inclut le cas particulier où deux noeuds sont identiques. Des éléments comportant ces particularités sont dits déformés et sont invalides.

L'élément $3D$ utilisé est un $P12L$ avec une approximation $P_1/P_1\text{Iso}P_2$ sur l'horizontale et P_0/P_1 sur la verticale. Il s'agit d'un $T6L$ horizontal augmenté d'une approximation linéaire des vitesses sur la verticale. Le $P12L$ se divise en quatre sous-éléments $P6$. Les métriques $3D$ varient d'un point à l'autre sur l'élément, sauf si la profondeur y est constante. En plus des cas où le $|J_{T6L}|$ s'annule, le déterminant $3D$ s'annulera lorsque la profondeur P est nulle. Ainsi, un élément $3D$ ne sera valide que si sa projection $2D$ l'est aussi et que la profondeur est positive en chacun de ses noeuds. Le tableau B.3 définit d'abord quelques variables nécessaires à la définition des métriques, alors que les tableaux qui suivent présentent les métriques du $P12L$ et de ses sous-éléments.

J_{L2}	$\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{x_2 - x_1}{2}$
$ J_{L2} $	$\frac{x_2 - x_1}{2}$
\dot{J}_{L2}	$\frac{1}{ J_{L2} }$

TAB. B.1 – Métriques d'un $L2$

J_{T6L}	$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$
J_{T3}	$\frac{1}{2} J_{T6L}$
$ J_{T6L} $	$(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$
$ J_{T3} $	$\frac{ J_{T6L} }{4}$
\dot{J}_{T6L}	$\frac{1}{ J_{T6L} } \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$
\dot{J}_{T3}	$2\dot{J}_{T6L}$

TAB. B.2 – Métriques sur le $T6L$ et le $T3$

	$\lambda = 1 - \xi - \eta$ $a = \frac{1 - \zeta}{2}$ $b = \frac{1 + \zeta}{2}$ $z_i(\zeta) = az_{f_i} + bz_{s_i}$
Profondeur	$P_1 = z_{s_1} - z_{f_1}$ $P_2 = z_{s_2} - z_{f_2}$ $P_3 = z_{s_3} - z_{f_3}$ $P = (1 - \xi - \eta)P_1 + \xi P_2 + \eta P_3 = P_1 + \xi(P_2 - P_1) + \eta(P_3 - P_1)$

TAB. B.3 – Définition des variables pour les métriques du *P12L*

J_{P12L}	$\begin{bmatrix} -a & a & 0 & -b & b & 0 \\ -a & 0 & a & -b & 0 & b \\ -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\xi}{2} & -\frac{\eta}{2} & \frac{\lambda}{2} & \frac{\xi}{2} & \frac{\eta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_{s1} \\ x_2 & y_2 & z_{s2} \\ x_3 & y_3 & z_{s3} \\ x_1 & y_1 & z_{f1} \\ x_2 & y_2 & z_{f2} \\ x_3 & y_3 & z_{f3} \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{T6L}^{1,1} & J_{T6L}^{1,2} \\ J_{T6L}^{2,1} & J_{T6L}^{2,2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} z_2(\zeta) - z_1(\zeta) \\ z_3(\zeta) - z_1(\zeta) \end{matrix} \\ 0 & 0 & \frac{P}{2} \end{bmatrix}$
J_{P6^k} $k = 1, 2, 3$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{T6L}^{1,1} & J_{T6L}^{1,2} \\ J_{T6L}^{2,1} & J_{T6L}^{2,2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \frac{1}{2} J_{P12L}^{1,3} \\ \frac{1}{2} J_{P12L}^{2,3} \\ J_{P12L}^{3,3} \end{matrix} \end{bmatrix}$
J_{P6^4}	$-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{T6L}^{1,1} & J_{T6L}^{1,2} \\ J_{T6L}^{2,1} & J_{T6L}^{2,2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} -\frac{1}{2} J_{P12L}^{1,3} \\ -\frac{1}{2} J_{P12L}^{2,3} \\ J_{P12L}^{3,3} \end{matrix} \end{bmatrix}$

TAB. B.4 – Jacobien du $P12L$ et du $P6$

$ J_{P12L} $	$\frac{P J_{T6L} }{2}$
$ J_{P6} $	$\frac{ J_{P12L} }{4}$

TAB. B.5 – Déterminant du jacobien du $P12L$ et du $P6$

j_{P12L}	$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{T6L}^{1,1} & j_{T6L}^{1,2} \\ j_{T6L}^{2,1} & j_{T6L}^{2,2} \end{bmatrix} & j_{P12L}^{1,3} \\ 0 & 0 & j_{P12L}^{3,3} \end{bmatrix}$ <p>où</p> $c_1 = j_{T6L}^{1,1}(z_{f_1} - z_{f_2}) + j_{T6L}^{1,2}(z_{f_1} - z_{f_3})$ $c_2 = j_{T6L}^{1,1}(z_{s_1} - z_{s_2}) + j_{T6L}^{1,2}(z_{s_1} - z_{s_3})$ $c_3 = j_{T6L}^{2,1}(z_{f_1} - z_{f_2}) + j_{T6L}^{2,2}(z_{f_1} - z_{f_3})$ $c_4 = j_{T6L}^{2,1}(z_{s_1} - z_{s_2}) + j_{T6L}^{2,2}(z_{s_1} - z_{s_3})$ $j_{P12L}^{1,3} = \frac{1}{P}(c_1 + c_2 + \zeta(-c_1 + c_2))$ $j_{P12L}^{2,3} = \frac{1}{P}(c_3 + c_4 + \zeta(-c_3 + c_4))$ $j_{P12L}^{3,3} = \frac{2}{P}$
j_{P6^k} $k = 1, 2, 3$	$2 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{T6L}^{1,1} & j_{T6L}^{1,2} \\ j_{T6L}^{2,1} & j_{T6L}^{2,2} \end{bmatrix} & j_{P12L}^{1,3} \\ 0 & 0 & j_{P12L}^{3,3} \end{bmatrix}$
j_{P6^4}	$-2 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{T6L}^{1,1} & j_{T6L}^{1,2} \\ j_{T6L}^{2,1} & j_{T6L}^{2,2} \end{bmatrix} & j_{P12L}^{1,3} \\ 0 & 0 & j_{P12L}^{3,3} \end{bmatrix}$

 TAB. B.6 – Inverse du jacobien du $P12L$ et du $P6$

Bibliographie

- Alcrudo, F., 2002. A State of the Art Review on Mathematical Modelling of Flood Propagation. Workshop Report : Investigation of extreme flood processes and uncertainty (IMPACT), Wallingford.
- Ambler, S., 2004. *The Object Primer : Agile Modeling-Driven Development with UML 2.0*. Cambridge University Press, Cambridge, 3ième édition.
- Audusse, E., 2005. A Multilayer Saint-Venant Model : Derivation and Numerical Validation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 5(2) :189–214.
- Bois, P.-A., 2000. *Introduction à la mécanique théorique des fluides*. Universités Physique. Paris.
- Buil, N., 1999. *Modélisation tridimensionnelle du transport de polluants dans les écoulements à surface libre*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard-Lyon I.
- Casulli, V. et G. S. Stelling, 1998. Numerical Simulation of 3D Quasi-Hydrostatic, Free-Surface Flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(7) :678–686.

- de Saint-Venant, B., 1871. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, 73 :147–157.
- Dhatt, G. et G. Touzot, 1984. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Les presses de l'Université Laval, Québec.
- Dubos, V., 2001. *Validation des vitesses d'un modèles hydrodynamique bidimensionnel; Prise en compte de la variabilité des profils verticaux des vitesses par un terme de dispersion*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec, Québec.
- Ferrari, S. et F. Saleri, 2004. A new two-dimensional shallow water model including pressure effects and slow varying bottom topography. *Esaim - Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38(2) :211–234.
- Gerbeau, J.-F. et B. Perthame, 2001. Derivation of Viscous Saint-Venant System for Laminar Shallow Water; Vumerical Validation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 1(1) :89–102.
- Giasson, M., 2006. *H2D2 : Manuel du programmeur*. Worl Wide Web, <http://www.gre-ehn.inrs-ete.quebec.ca/H2D2/documentation-technique>.
- Heniche, M., 1995. *Modélisation tridimensionnelle par éléments finis d'écoulements à surface libre*. Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne.
- Heniche, M., Y. Secretan, P. Boudreau, et M. Leclerc, 2000a. A Two-Dimensional Finite Element Drying-Wetting Shallow Water Model for Rivers and Estuaries. *Advances in Water Ressources*, 23 :359–372.

- Heniche, M., Y. Secretan, P. Boudreau, et M. Leclerc, 2002. Dynamic Tracking of Flow Boundaries in Rivers with Respect to Discharge. *Journal of Hydraulic Research*, 40(5) :589–597.
- Heniche, M., Y. Secretan, et M. Leclerc, 2000b. HYDROSIM 1.0a06, Guide d'utilisation. Rapport INRS-Eau R482-G2.
- Heniche, M., Y. Secretan, et M. Leclerc, 2001. DISPERSIM 1.0a02 : Guide d'utilisation. Rapport INRS-Eau R558-G2F.
- Herouin, E., 1991. Modélisation des écoulements complexes à surface libre en milieu naturel. Rapport de DEA de Mécanique des Fluides, Université Claude Bernard (Lyon1).
- Hirsh, C., 1988. *Numerical Computation of Internal and External Flows*, tome 1 de *Wiley Series in Numerical Methods in Engineering*.
- INRS-Eau, 1997. Simulation hydrodynamique et bilan sédimentaire des rivières Chicoutimi et des Ha! Ha! suite aux crues exceptionnelles de juillet 1996. Rapport présenté à la Commission scientifique et technique sur la gestion des barrages No. R487, INRS-Eau.
- Kaplan, W., 1984. *Advanced Calculus*. Addison-Wesley.
- Koçyigit, M. B., R. A. Falconer, et B. Lin, 2002. Three-Dimensional Numerical Modelling of Free Surface Flows with Non-Hydrostatic Pressure. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40 :1145–1162.

- Leclerc, M., 1985. *Modélisation tridimensionnelle des écoulements à surface libre par éléments finis : application au lac St-Jean (Québec)*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- Leclerc, M., B. Doyon, Y. Secretan, M. Heniche, M. Lapointe, et P. Boudreau, 1998. Simulation hydrodynamique et analyse morphodynamique de la rivière Montmorency dans le secteur des Îlets. Pour le compte de la ville de Beauport. Rapport INRS-Eau R522a.
- Miglio, E., A. Quarteroni, et F. Saleri, 1999. Finite Element Approximation of Quasi-3D Shallow Water Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174 :355–369.
- Morin, J., M. Mingelbier, J. A. Bechara, O. Champoux, Y. Secretan, M. Jean, et J. J. Frenette, 2003. Emergence of New Explanatory Variables in Large Rivers : the St. Lawrence Experience. *Special issue of the Canadian Water Resources Journal.*, 28(2) :249–272.
- Robert, J.-L., 1983. *Modélisation tridimensionnelle des écoulements à surface libre, permanents et non-permanents, par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université Laval.
- Rodi, W., 1984. *Turbulence models and their application in hydraulics. A state of the art review*. Institute F.F.H.U.O Karlsruhe, Karlsruhe.
- Roy, Y., Y. Secretan, et Coll, 2000. MODELEUR 1.0a07, Guide d'utilisation. Rapport INRS-Eau R482-G3F.

- Secretan, Y. et V. Dubos, 2005. Modélisation de la variabilité verticale des vitesses dans un modèle hydrodynamique 2D horizontal. *Revue européenne des éléments finis*, 14(1) :115–138.
- Sinha, S. K., P. Sotiropoulos, et A. J. Odgaard, 1998. Three-Dimensional Numerical Model for Flow through Natural Rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(1) :13–24.
- Steffler, P. et H. Ghamry, 2005. Two-Dimensional Depth-Averaged Modeling of Flow in Curved Open Channel. *Journal of Hydraulic Research*, 43(1) :44–55.
- Steffler, P. M. et Y. C. Jin, 1993. Depth Averaged and Moment Equations for Moderately Shallow Free Surface Flow. *Journal of Hydraulic Research*, 31(1) :5–17.
- Stelling, G. S. et M. M. Busnelli, 2001. Numerical Simulation of the Vertical Structure of Discontinuous Flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 37(1) :23–43.
- Tome, M. F. et S. McKee, 1994. GENSMAC : A Computational Marker and Cell Method for Free Surface Flows in General Domains. *Journal of Computational Physics*, 110(1) :171–186.
- Ye, J. et J. A. McCorquodale, 1998. Simulation of Curved Open Channel Flows by 3D Hydrodynamic Model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(7) :687–698.
- Yuan, H. L. et C. H. Wu, 2004. An implicit three-dimensional fully non-hydrostatic model for free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 46 :709–733.

Zhang, B., 1992. *Modélisation d'écoulements à surface libre avec fronts mobiles par éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Compiègne.