

**ESTIMATION DE L'ÉQUIVALENT  
EN EAU DE LA NEIGE SUR LE  
BASSIN VERSANT DE LA  
GATINEAU PAR MODÉLISATION  
BAYÉSIENNE HIÉRARCHIQUE**

**Chaire industrielle Hydro-Québec/CRSNG  
en hydrologie statistique**

**Rapport de recherche R-740      juin 2004**

**ESTIMATION DE L'ÉQUIVALENT EN EAU DE LA  
NEIGE SUR LE BASSIN VERSANT DE LA  
GATINEAU PAR MODÉLISATION BAYÉSIENNE  
HIÉRARCHIQUE**

*Par :*

**Ousmane Seidou**

**André St-Hilaire**

**Salaheddine El-Adlouni**

**Anne-Catherine Favre**

**Vincent Fortin**

**Bernard Bobée**

**Chaire industrielle Hydro-Québec/CRSNG en hydrologie statistique**

**INRS-ETE**

**2800 rue Einstein, C.P. 7500, Sainte-Foy (Québec) G1V 4C7**

*Rapport présenté à :*

**HYDRO-QUÉBEC**

**Rapport de recherche R-740**

**Juin 2004**

**Référence**

Seidou, O. St-Hilaire, A. El-Adlouni, S. Favre, A-C. Fortin, V. Bobée, B. (2004). Estimation de l'équivalent en eau de la neige sur le bassin versant de la Gatineau par modélisation Bayésienne hiérarchique. INRS-ETE, rapport de recherche R-740, 49 pages.

# TABLE DES MATIÈRES

---

LISTE DES TABLEAUX.....	i
LISTE DES FIGURES .....	ii
1. Introduction.....	3
2. La modélisation bayésienne .....	6
3. Modèles spatiaux utilisés en modélisation bayésienne .....	8
3.1. Les processus spatiaux gaussiens (GRP : « gaussian random processes »).....	8
3.2. Les modèles linéaires mixtes (lmm : linear mixed models) .....	10
3.3. Les champs gaussiens aléatoires (GRF: gaussian random fields).....	11
3.4. Les champs de markov aléatoires (MRF:markov random fields).....	11
4. Le krigeage .....	13
5. Application .....	15
5.1 Notations .....	15
5.2 Le krigeage ordinaire.....	15
5.3 Le processus spatial gaussien .....	16
5.3.1 Niveau 1: les observations .....	16
5.3.2 Niveau 2: les paramètres de la moyenne.....	16
5.3.3 Distributions a priori .....	16
5.4 Les champs de Markov aléatoires (MRF) .....	17
5.5 Implémentation des modèles bayésiens .....	18
5.6 résultats et dicussion.....	18
6. Conclusion.....	20
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	21
LISTE DES SYMBOLES.....	24

## LISTE DES TABLEAUX

---

Tableau 1: Mesures d'équivalent en eau à la mi-mars 1994.....	25
Tableau 2: Mesures d'équivalent en eau à la mi-mars 1995.....	26
Tableau 3: Paramètres du processus spatial gaussien (mars 1994).....	27
Tableau 4: Paramètres des champs de Markov aléatoires (mars 1994).....	28
Tableau 5: Paramètres du processus spatial gaussien (mars 1995).....	29
Tableau 6: Paramètres des champs de Markov aléatoires .....	30
Tableau 7: Volume d'eau emmagasinée sous forme de neige sur le bassin versant .....	31

## LISTE DES FIGURES

---

Figure 1: Zone d'étude .....	32
Figure 2: Mesures d'équivalent en eau en fonction de l'altitude pour mars 1994 et mars 1995 .....	33
Figure 3: Variogrammes (double exponentielle) : (a) mars 1994; (b) mars 1995 .....	34
Figure 4: Z-scores pour quelques prédictions d'équivalent en eau- processus spatial gaussien-mars 1994.....	35
Figure 5: Histogrammes des paramètres du processus spatial gaussien pour mars 1994 (itérations 1001 à 10000) : a) $\beta$ ; b) $\beta_x$ ; c) $\beta_y$ ; d) $\beta_z$ ; e) $\mu[1]$ ; f) $\phi$ g) $\kappa$ h) $\nu$ .....	36
Figure 6: Histogrammes des paramètres du processus MRF pour mars 1994 (itérations 1001 à 10000) : a) $\beta$ ; b) $\beta_x$ ; c) $\beta_y$ ; d) $\beta_z$ ; e) $\mu[1]$ f) $\alpha$ ; g); $\nu$ .....	37
Figure 7: Comparaison des résultats pour mars 1994.....	38
Figure 8: Comparaison des résultats pour mars 1995 .....	39
Figure 9: Contours des résultats pour mars 1994.....	40
Figure 10: Contours des résultats pour mars 1995.....	41
Figure 11: Comparaison des écarts types pour mars 1994 .....	42
Figure 12: Comparaison des écarts types pour mars 1995 .....	43
Figure 13: Histogramme du volume d'eau emmagasiné dans la neige en mars 1994 (itérations 1001 à 10000) : a) GRP b) MRF .....	44
Figure 14: Histogrammes de probabilité du volume d'eau emmagasiné dans la neige en mars 1995 (itérations 1001 à 10000) : a) GRP b) MRF.....	45



## 1. Introduction

---

Dans les régions nordiques, la période de la crue printanière est particulièrement critique pour les producteurs d'énergie hydroélectrique. Il est alors primordial pour les gestionnaires des ouvrages d'obtenir les meilleures prévisions possibles basées sur les conditions météorologiques à venir et sur les conditions existantes sur le bassin versant. Une variable essentielle à évaluer quantitativement durant cette période est le couvert nival.

Les modèles hydrologiques utilisés pour la prévision nécessitent en intrant soit une semi de points représentant la distribution spatiale de l'équivalent en eau de la neige (modèles distribués), soit une moyenne au bassin de cette même variable (modèle global).

Le krigeage est une méthode éprouvée d'interpolation spatiale (e.g. Journel, 1978) qui peut être utilisée pour obtenir une estimation des valeurs d'équivalent en eau à des points où il n'y a pas de mesure. Des méthodes de co-krigeage permettent aussi d'utiliser l'information provenant de variables secondaires. Cependant, cette approche géostatistique classique ne peut pas prendre en compte dans un cadre formel, l'ensemble des incertitudes associées aux variables primaires, secondaires et au lien entre ces variables. Pour ce faire, il est possible d'utiliser l'approche bayésienne.

La principale différence entre l'inférence bayésienne et l'inférence statistique classique se trouve au niveau de l'interprétation des probabilités. En statistique classique, les densités de probabilité représentent le caractère aléatoire des réalisations du processus étudié, les paramètres étant considérés comme fixes. Dans les modèles bayésiens, l'incertitude sur les paramètres et sur les quantités non observées est représentée sous forme de densité de probabilité en conditionnant sur



les données observées. Sa mise en œuvre nécessite la connaissance a priori sur les vecteur des paramètres ( $\theta$ ) et une famille de modèles expliquant les données ( $P(\mathbf{y}|\theta)$ ), pour finalement fournir une mesure (densité de probabilité) de l'incertitude sur  $\theta$  après observation des données ( $P(\theta|\mathbf{y})$ ). Une explication plus technique des bases de cette approche sera donnée à la prochaine section. Les approches bayésiennes ont fait leur apparition en géostatistiques au cours des derniers 15 années (e.g. Christakos, 1990, Zhu et Journel, 1992). Plus récemment, l'amélioration de la puissance de calcul des ordinateurs a permis d'envisager l'application des méthodes bayésiennes hiérarchiques pour des fins d'interpolation spatiale.

Un modèle bayésien est dit hiérarchique s'il est constitué de  $n$  sous modèles (ou niveaux) successifs, chacun étant conditionnel aux paramètres des suivants. Le vecteur de paramètres devient donc  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n]$  où  $\theta_i$  est le vecteur de paramètres du niveau  $i$ . On a :

$$P(\theta) = P(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n) = P(\theta_1 | \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n) P(\theta_2 | \theta_3, \dots, \theta_n) \dots P(\theta_i | \theta_{i+1}, \dots, \theta_n) P(\theta_n) \quad [1]$$

Dans ce cas la densité de probabilité conjointe de tous les paramètres est obtenue en multipliant les  $n$  densités de probabilité conditionnelles correspondant aux  $n$  sous modèles. Une telle formulation simplifie considérablement la construction du modèle car chaque sous modèle est consacré à un aspect particulier du phénomène (par exemple la structure spatiale et temporelle) qui peut généralement s'approximer raisonnablement avec des classes de distributions usuelles (e.g. binomiale, normale, poisson, exponentielle). Il s'agira de spécifier pour chaque niveau  $i$  la distribution conditionnelle du paramètre sachant  $\theta_{i+1}, \theta_{i+2}, \dots, \theta_n$ . Le premier niveau est généralement consacré aux erreurs de mesure et le dernier niveau aux hyperparamètres.

La modélisation bayésienne hiérarchique (MBH) connaît un nombre croissant d'applications dans divers domaines. L'avantage de l'approche bayésienne est la

prise en compte efficace de l'incertitude et son aptitude à incorporer des informations hétérogènes, tout en se prêtant naturellement aux problèmes comportant des données manquantes. Quoique non absolument nécessaire, la structure hiérarchique facilite la conception et permet une prise en compte plus facile de la connaissance qu'on possède de la physique du phénomène (Wikle et Royle 2002). Elle s'est révélée être un outil efficace pour la modélisation des processus spatiaux ou spatio-temporels complexes: on trouve des applications intéressantes en météorologie (Berliner et al. 1998; Handcocks et Wallis 1994; Hugues et Guttorp 1994; Wikle et al. 1998, 2001), en hydrologie (Lu et Berliner 1999), en environnement et épidémiologie (Suess et al. 2002) de même qu'expérimentation médicale (Davis & Seaman 2002).

Cette étude a pour objectif d'étudier la faisabilité de l'application des modèles hiérarchiques bayésiens pour interpoler des valeurs d'équivalent en eau de neige obtenus lors de campagnes de mesure sur le terrain.

Cet article est divisé en quatre parties dont la première est consacrée aux fondements de la modélisation bayésienne. Dans la seconde partie, on traite des prédictions spatiales dans un contexte bayésien. On insistera sur les processus spatiaux gaussiens (GRP: Gaussian Random Processes) et les champs de Markov aléatoires (MRF: Markov Random Fields) qui vont être utilisés dans l'application. La troisième partie est une brève description de la très populaire technique du krigeage et de ses variantes. Finalement, les trois techniques (krigeage ordinaire, MRF, GRP) sont appliquées à l'estimation de l'équivalent en eau de la neige sur le bassin versant de la rivière Gatineau situé au Québec, Canada.

## 2. LA MODÉLISATION BAYÉSIENNE

---

Le but de l'inférence statistique est d'utiliser les données disponibles pour tirer des conclusions sur des quantités non observées (paramètres d'un processus, données non observables ou non encore observées). Dans le cas de l'inférence bayésienne, ces conclusions sont données sous forme de densités de probabilités conditionnelles sur les données observées. Le théorème de Bayes s'énonce :

$$P(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \frac{P(\boldsymbol{\theta})P(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})}{P(\mathbf{y})} \quad [2]$$

[1]

où :

- $\boldsymbol{\theta}$  est le vecteur des paramètres du modèle;
- $P(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  est la probabilité conditionnelle du paramètre  $\theta$  étant donné le vecteur des données observées;
- $P(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})$  est donnée par le processus stochastique de paramètre  $\theta$  que suivent les données. L'analyste  $y$  incorporera éventuellement la connaissance physique disponible sur le phénomène étudié;
- $P(\mathbf{y})$  et  $P(\boldsymbol{\theta})$  sont les densités de probabilité à priori des quantités observées et des paramètres.

La spécification de  $P(\boldsymbol{\theta})$  permet d'intégrer la connaissance a priori sur la distribution des paramètres. On suppose en général qu'elle suit une loi dont les paramètres sont appelés *hyperparamètres*. Généralement n'est pas nécessaire d'explicitier  $P(\mathbf{y})$  qui est une simple constante de normalisation dans [1]. Le théorème de Bayes est plus souvent utilisé sous sa forme non normalisée présentée en [2] où le symbole  $\propto$  signifie *est proportionnel à* :

$$P(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) \propto P(\boldsymbol{\theta})P(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \quad [3]$$

La distribution de probabilité conditionnelle pour les quantités non observées  $\tilde{y}$  est donnée par

$$P(\tilde{y} | \mathbf{y}) = \int P(\tilde{y} | \boldsymbol{\theta}) P(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} \quad [4]$$

Le modèle bayésien est dit hiérarchique s'il est constitué de  $n$  sous modèles (ou niveaux) successifs, chacun étant conditionnel aux paramètres des suivants. Le vecteur de paramètres devient donc  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n)$  où  $\theta_i$  est le vecteur de paramètres du niveau  $i$  (voir équation [2]).

Il s'agira de spécifier pour chaque niveau  $i$  la distribution conditionnelle du paramètre sachant  $\theta_{i+1}, \theta_{i+2}, \dots, \theta_n$ . Le premier niveau est généralement consacré aux erreurs de mesure et le dernier niveau aux hyperparamètres.

Pour faire des inférences sur chaque paramètre d'intérêt, il sera nécessaire d'intégrer  $P(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  par rapport à tous les autres paramètres. Sauf dans des cas très simples où la solution est analytique, cette intégration se fait en utilisant les techniques de Monte Carlo par chaîne de Markov (Monte-Carlo Markov Chain, MCMC) dont la plus populaire est l'algorithme de Gibbs ou *Gibbs sampler* (Geman & Geman, 1984), qui est elle-même un cas particulier de l'algorithme de Métropolis-Hasting (Metropolis et al. 1953; Hasting 1970). Les développements continus de la méthode MCMC au cours des 40 dernières années et la disponibilité de programmes informatiques généraux qui la mettent en œuvre a énormément contribué à populariser la modélisation bayésienne dans des disciplines comme l'écologie, les sciences de l'eau et du climat, etc.

### 3. MODÈLES SPATIAUX UTILISÉS EN MODÉLISATION BAYÉSIENNE

---

L'application de l'approche bayésienne hiérarchique en géostatistique nécessite la modélisation spatiale de la variable aléatoire d'intérêt. Ces modèles spatiaux peuvent être utilisés seuls ou comme composants d'un modèle plus large. Trois types de modèles spatiaux sont fréquemment sélectionnés : les processus spatiaux gaussiens (GRP ou « Gaussian Random Process ») lorsque le domaine d'étude est continu, les champs aléatoires gaussiens (GRF: « Gaussian Random Fields ») ou les champs de Markov aléatoires (MRF: « Markov Random Fields ») lorsqu'on s'intéresse aux valeurs du processus en un ensemble de points ou de zones distinctes. Les modèles linéaires mixtes (LMM = « Linear Mixed Models ») sont le cas le plus couramment rencontré du processus GRP dont la moyenne varie linéairement en fonction d'effets fixes (« fixed effects ») et d'effets aléatoires (« random effects »). Il est intéressant de noter que les formules du krigeage peuvent aisément être dérivées dans le cadre des LMM où elles correspondent au meilleur prédicteur linéaire non biaisé ou BLUP (Best Linear Unbiased Predictor). Les modèles linéaires mixtes généralisés (GLMM : Generalized Linear Mixed Models) sont dérivés des LMM en supposant qu'une fonction  $g$  des valeurs du processus peut être décrite par un LMM.

#### 3.1. LES PROCESSUS SPATIAUX GAUSSIENS (GRP : « GAUSSIAN RANDOM PROCESSES »)

Un processus spatial  $y(s)$  où  $s \in D$  est un GRP si  $y(s)$  a une distribution normale de moyenne  $\mu(s)$  et la fonction de covariance  $c_y(s_i, s_j) = COV(y(s_i), y(s_j))$  est connue pour toute paire de points  $s_i$  et  $s_j$ . La principale difficulté dans cette approche est de trouver une forme paramétrique pour  $c_y$  qui permet de représenter adéquatement le problème étudié. On lui donne le plus souvent une forme

paramétrique et on suppose qu'elle dépend uniquement de la distance euclidienne  $d_{ij}$  entre  $s_i$  et  $s_j$  :

$$COV(y(s_i), y(s_j)) = c_y(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) = c_y(d_{ij}; \boldsymbol{\theta}) \quad [5]$$

où  $\boldsymbol{\theta}$  est un paramètre à estimer à partir des données. Tout comme pour le krigeage, on suppose souvent que  $c_y$  ne dépend que de la distance euclidienne entre  $s_i$  et  $s_j$  (cas isotropique). On suppose également que la variance du processus est constante égale à  $\sigma_y^2$  :

$$c_y(d_{ij}; \boldsymbol{\theta}) = \sigma_y^2 r_y(d_{ij}; \boldsymbol{\theta}) \quad [6]$$

$r_y(d_{ij}; \boldsymbol{\theta})$  est alors le coefficient de corrélation entre  $y(s_i)$  et  $y(s_j)$  et peut prendre diverses formes paramétriques. Il est décroissant avec la distance, est égal à 1 quand  $d_{ij} = 0$  et tend vers 0 quand  $d_{ij}$  tend vers l'infini. On peut citer quelques modèles paramétriques couramment utilisés :

- l'exponentielle décroissante (Wikle et Royle 2002; Spiegelhalter et al. 2003):

$$r_y(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) = \exp\left[-\left(\frac{d_{ij}}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right]; \theta_1 > 0; \theta_2 > 0 \quad [7]$$

- la forme sphérique (Wackernagel 2003) :

$$r_y(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) = 1 - \frac{3}{2} \left[ \frac{d_{ij}}{\theta_1} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{d_{ij}}{\theta_1} \right]^3 \quad \text{si } \frac{d_{ij}}{\theta_1} \leq 1 \quad [8]$$

- La forme quadratique (Berger et al. 2001) :

$$r_y(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) = \left[ 1 + \left[ \frac{d_{ij}}{\theta_1} \right]^2 \right]^{-\theta_2}; \theta_1 > 0, \theta_2 > 0 \quad [9]$$

### 3.2 LES MODÈLES LINÉAIRES MIXTES (LMM : LINEAR MIXED MODELS)

Les modèles linéaires mixtes sont un cas particulier de processus spatial gaussien dont la moyenne est une fonction linéaire des variables explicatives (covariables). Ils peuvent aussi être présentés comme une généralisation des modèles linéaires classiques par ajout d'effets aléatoires. Leur formulation la plus courante est:

$$y(s) = \sum_{i=1}^n \beta_i X_i(s) + \alpha(s) + \varepsilon(s) \quad [10]$$

où  $[X_1(s), X_2(s), \dots, X_n(s)]$  est le vecteur de variables explicatives (covariables) au site  $s$ ,  $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$  des paramètres de régression,  $\alpha$  est un processus spatial gaussien de moyenne nulle avec une structure de covariance spatiale et  $\varepsilon$  un processus gaussien représentant le bruit. Banerjee et al. (2004) mentionnent que le terme  $\varepsilon$  peut aussi représenter des variations à courte échelle spatiale et que sa variance peut être une représentation de l'effet de pépité.

Il est commode de représenter l'équation [10] sous forme vectorielle, en posant  $\mathbf{y} = [y(s_1), y(s_2), \dots, y(s_n)]'$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha(s_1), \alpha(s_2), \dots, \alpha(s_n)]'$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon(s_1), \varepsilon(s_2), \dots, \varepsilon(s_n)]'$ ,  $\mathbf{X} = (X_{ij})$  avec  $X_{ij} = X_i(s_j)$ , et  $\mathbf{H} = (H_{ij})$  avec  $H_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ;  $H_{ii} = 1$  :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad [11]$$

Si on note respectivement  $\mathbf{C}_\alpha$  et  $\mathbf{C}_\varepsilon$  les matrices de variance-covariance de  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , le modèle s'écrit hiérarchiquement :

$$[\mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha}] \sim \text{Gau}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{C}_\varepsilon) \quad [12]$$

$$\boldsymbol{\alpha} \sim \text{Gau}(0, \mathbf{C}_\alpha) \quad [13]$$

$\boldsymbol{\alpha}$  étant un processus spatial gaussien, les éléments de  $\mathbf{C}_\alpha$  peuvent prendre toutes les formes paramétriques décrites à la section précédente (équations [7], [8], [9]).

### 3.3. LES CHAMPS GAUSSIENS ALÉATOIRES (GRF: GAUSSIAN RANDOM FIELDS)

Ils sont l'équivalent des GRP dans le domaine discret. Ils s'écrivent :

$$\mathbf{y} \sim \text{Gau}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}_y) \quad [14]$$

où  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]'$ ,  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]'$ .

### 3.4. LES CHAMPS DE MARKOV ALÉATOIRES (MRF: MARKOV RANDOM FIELDS)

Pour des données discrètes ayant une structure de dépendance locale on utilise couramment les MRF (Markov Random Field). Dans ce cas, les valeurs du processus aux  $n$  sites  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  possèdent une structure markovienne. La probabilité conditionnelle de  $y(s_i)$  sachant  $y(s_j)$  ne dépend que des valeurs aux sites voisins :

$$P(y(s_i) | y(s_j), i \neq j) = P(y(s_i) | y(s_j), j \in \text{voisinage}(s_i)) \quad [15]$$

Ces modèles sont couramment utilisés pour la restauration d'image (Geman et Graffigne 1986, Besag 1989), mais aussi pour modéliser la variation du risque de certaines maladies entre différentes régions (Besag et al. 1991, Clayton et Kaldor, 1987). La distribution de probabilité conditionnelle peut être une loi Gamma pour un processus continu à valeurs positives, une multinomiale pour des valeurs discrètes, une loi de poisson pour le nombre d'apparitions d'un phénomène rare, etc. Quand  $y$  est continu, on utilise souvent un GMRF (Gaussian Markov Random Field) qui est à la fois un GRF et un MRF :

$$P(y(s_i) | y(s_1), \dots, y(s_{i-1}), y(s_{i+1}), y(s_n)) = \text{Gau} \left[ \mu_i + \sum_{s_j \in \text{voisinage}(s_i)} v_{ij} (y(s_j) - \mu_j), \sigma_i^2 \right] \quad [16]$$

avec  $v_{ij} \sigma_j^2 = v_{ji} \sigma_i^2$ ,  $v_{ii} = 0$ ,  $v_{ij} = 0$  si  $s_i$  et  $s_j$  ne sont pas voisins, et  $\mu_i \equiv E[y(s_i)]$ .



On peut démontrer (voir par ex. Cressie, 1993) que :

$$\mathbf{y} \sim \text{Gau}(\boldsymbol{\mu}, (\mathbf{I} - \mathbf{V})^{-1} \mathbf{M}) \quad [17]$$

où  $\mathbf{M}$  une matrice diagonale telle que le  $i^{\text{ème}}$  élément de la diagonale est  $\sigma_i^2$ ,  $\mathbf{V}$  une matrice  $n \times n$  contenant les  $v_{ij}$ . Il est nécessaire que  $(\mathbf{I} - \mathbf{V})$  soit une matrice définie positive. La présence d'une inversion de matrice dans l'équation précédente rend l'implémentation numérique naïve d'un GMRF dans un algorithme MCMC peu efficace, mais il est possible d'utiliser le fait que  $\mathbf{V}$  est une matrice creuse pour diminuer considérablement le temps de calcul (Rue 2001, Rue & Turid 2003).

## 4. LE KRIGEAGE

---

Le but du krigeage est d'estimer la valeur  $\tilde{y}(s_0)$  en un site non échantillonné  $s_0$  par une combinaison linéaire optimale des valeurs de  $y$  aux sites échantillonnés  $s_1$  à  $s_n$ . L'optimalité signifie ici l'absence de biais et la minimisation de l'erreur d'estimation. On a donc :

$$\tilde{y}(s_0) = a + \sum_{i=1}^n w_i y(s_i) \quad [18]$$

et on cherche les paramètres  $a$  et  $w_i$  tels que :

$$E(y(s_0) - \tilde{y}(s_0)) = 0 \quad [19]$$

$$VAR(\tilde{y}(s_0) - y(s_0)) = \min_y VAR(\hat{y}(s_0) - y(s_0)) \quad [20]$$

On considère que

$$y(s) = \mu(s) + \delta(s) \quad [21]$$

où  $\mu(s)$  est une structure déterministe pour la moyenne et  $\delta(s)$  est un processus aléatoire spatial stationnaire de second ordre d'espérance nulle et de structure de covariance connue. Selon la forme de la moyenne du processus, on parle de krigeage simple ( $\mu(s)$  est une constante connue), de krigeage ordinaire ( $\mu(s)$  est une constante inconnue) ou de krigeage universel ( $\mu(s) = \sum_{i=1}^p k_i f_i(s)$  est une combinaison linéaire de fonctions  $f_i$  de la position  $s$ ). La dépendance spatiale du processus est généralement décrite par le semi-variogramme  $\gamma(s_i, s_j)$  défini par :

$$2\gamma(s_i, s_j) = VAR(y(s_i) - y(s_j)) \quad [22]$$

On suppose que le semi-variogramme ne dépend que de la distance  $d_{ij}$  entre les deux points  $s_i$  et  $s_j$ . L'utilisation du krigeage sur un jeu de données requiert la spécification préalable de  $\gamma(d_{ij})$  et la qualité de l'interpolation en est très dépendante

## 5. APPLICATION

---

Le krigeage ordinaire et les deux modèles bayésiens ont été utilisés pour estimer l'équivalent en eau de la neige à la mi-mars 1994 et 1995 sur le bassin versant de la rivière Gatineau situé au Québec, Canada. On dispose de 22 valeurs d'équivalent en eau pour chaque campagne de mesures (Tableaux 1 et 2). Les prédictions seront effectuées sur une grille rectangulaire de  $12 \times 12$  points dont les longitudes varient de  $-76.875^\circ\text{E}$  à  $-74.125^\circ\text{E}$  et les latitudes de  $45.125^\circ\text{N}$  à  $47.875^\circ\text{N}$ . La zone d'étude (localisation des stations de mesure, grille de prédiction, limites du bassin versant) est présentée à la Figure 1. Les variables explicatives retenues pour les modèles bayésiens sont les coordonnées géographiques ( $x, y, z$ ). On a tracé à la Figure 2 les mesures d'équivalent en eau en fonction de l'altitude pour les deux campagnes de mesures. La corrélation des mesures avec l'altitude est très nette pour l'année 1994, et médiocre pour 1995.

### 5.1 NOTATIONS

Soit  $m$  le nombre de points de la grille de prédiction et  $n$  ( $< m$ ) le nombre de stations de mesure pour une campagne de mesures donnée (mi-mars 1994 ou 1995). On note  $(XS_i, YS_i, ZS_i), i = 1, \dots, n$  les coordonnées des stations de mesure, et  $(XP_k, YP_k, ZP_k), k = 1, \dots, m$  celles des points de la grille de prédiction,  $EQE_i, i = 1, \dots, n$  les mesures d'équivalent en eau de la neige aux stations et  $E\tilde{Q}E_k, k = 1, \dots, m$  les prédictions sur la grille de mesure.

### 5.2 LE KRIGEAGE ORDINAIRE

Le krigeage ordinaire a été effectué avec le logiciel Vesper 1.6 (Variogram Estimation and Spatial Prediction with Error) développé par le Australian Center for Precision Agriculture (Minasny et al. 2002). Les variogrammes obtenus après

ajustement sont donnés à la Figure 3. On constate que l'ajustement est excellent pour 1994 (Figure 3.a), et moins bien pour 1995 (Figure 3.b).

### 5.3 LE PROCESSUS SPATIAL GAUSSIEN

Le modèle comporte trois niveaux: les observations, la tendance spatiale (paramètres de la moyenne qui est supposée varier linéairement en fonction des coordonnées), et les hyperparamètres.

#### 5.3.1 Niveau 1: les observations

$$EQE \sim N(\mu, C) \quad [23]$$

$$\mu(x, y, z) = \beta + \beta_x x + \beta_y y + \beta_z z \quad [24]$$

$$C(s_i, s_j) = v^{-1} \exp(-\phi(d_{ij})^\kappa) \quad [25]$$

#### 5.3.2 Niveau 2: les paramètres de la moyenne

$$\beta \sim N(\mu_\beta, v_\beta^{-1}) \quad [26]$$

$$\beta_x \sim N(\mu_{\beta_x}, v_{\beta_x}^{-1}) \quad [27]$$

$$\beta_y \sim N(\mu_{\beta_y}, v_{\beta_y}^{-1}) \quad [28]$$

$$\beta_z \sim N(\mu_{\beta_z}, v_{\beta_z}^{-1}) \quad [29]$$

#### 5.3.3 Distributions a priori

$$\phi \sim U(lmin_\phi, lmax_\phi) \quad [30]$$

$$\kappa \sim U(lmin_\kappa, lmax_\kappa) \quad [31]$$

Les distributions a priori des paramètres  $v_\beta, v_{\beta_x}, v_{\beta_y}, v_{\beta_z}$  (resp.  $\mu_\beta, \mu_{\beta_x}, \mu_{\beta_y}, \mu_{\beta_z}$ ) sont des lois gamma (rep. normales). Les hyperparamètres sont choisis de façon à avoir des distributions à supports larges, soit  $\Gamma(0.001, 0.001)$  pour

les paramètres qui suivent la loi gamma  $(\nu_\beta, \nu_\beta, \nu_{\beta_x}, \nu_{\beta_y}, \nu_{\beta_z})$ , et  $N(0, 1E6)$  pour les paramètres suivant une loi normale  $(\mu_\beta, \mu_{\beta_x}, \mu_{\beta_y}, \mu_{\beta_z})$ . Les limites des distributions uniformes pour  $\phi$  et  $\nu$  sont fixées à  $lmin_\phi = 0.01$ ,  $lmax_\phi = 0.8$ .

#### 5.4 LES CHAMPS DE MARKOV ALÉATOIRES (MRF)

Lorsqu'on utilise les MRF, les mesures doivent être rapportées aux points de la grille pour pouvoir raisonnablement supposer que les paramètres sont homogènes. On note  $dx$  et  $dy$  les distances en longitude et latitude entre les points de la grille d'interpolation, et  $VS_i$  l'ensemble des stations de mesure qui sont dans un rectangle de dimensions  $dx$  et  $dy$  centré sur le point  $i$ . on a :

$$E\tilde{Q}E_k = \frac{1}{card(VS_k)} \sum_{i \in VS_k} EQE_i \quad si \quad card(VS_k) \neq 0 \quad [32]$$

Le modèle s'écrit hiérarchiquement :

$$E\tilde{Q}E_k \sim N(\mu_k + \alpha \sum (E\tilde{Q}E_j - \mu_j), \nu^{-1}) \quad [33]$$

$$\mu_k = \beta + \beta_x X_k + \beta_y Y_k + \beta_z Z_k \quad [34]$$

$$\alpha \sim U(lmin_\alpha, lmax_\alpha) \quad [35]$$

Les paramètres  $\beta$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  et  $\beta_z$  sont identiques à ceux de l'équation [24] et ont les mêmes distributions a priori. La limite supérieure de  $\alpha$  pour que la matrice  $(I - V)$  définie dans l'équation [17] soit définie positive est 0.93; Spiegelhalter et al. (2003) suggèrent qu'on donne à  $\alpha$  une distribution a priori proche de cette limite supérieure pour qu'il y'ait une dépendance spatiale significative. On a donc donné au paramètre  $\alpha$  une distribution a priori uniforme entre 0.8 et 0.93.

## 5.5 IMPLÉMENTATION DES MODÈLES BAYÉSIENS

Les deux modèles ont été appliqués en utilisant le logiciel WinBugs (Spiegelhalter et al. 2003) et son extension spatiale GeoBugs (Thomas et al. 2002). Des problèmes de convergence lente de certains paramètres ont été résolus en standardisant les covariables. Pour chaque modèle, des chaînes de taille  $N = 10\,000$  ont été considérées. La convergence des paramètres est testée avec succès avec les critères de Geweke (1992) sur les 9000 dernières itérations (les 1000 premières itérations étant la période de chauffe). Cette méthode divise la chaîne en deux fenêtres et compare pour chaque variable les moyennes des itérations qui se trouvent dans les deux fenêtres. Dans le cas d'une chaîne convergente, la statistique  $Z$  (aussi appelée  $Z$ -score) définie comme l'écart entre les deux moyennes divisée par l'écart-type asymptotique de leur différence suivra la loi normale centrée réduite. Le test consiste à calculer  $Z$  pour les itérations au-dessus d'une valeur  $n$ , et à tracer  $Z$  en fonction de  $n$ . La série est considérée comme convergente si la plupart des valeurs de  $Z$  appartiennent à l'intervalle de confiance à 95% de la loi normale centrée réduite. A titre d'exemple, la Figure 4 montre les  $Z$ -scores pour les neuf premiers points de la grille de prédiction, obtenus avec le GRP pour mars 1994. Ils indiquent que la série a convergé dès la 1000<sup>e</sup> itération. La même démarche appliquée aux autres variables des modèles bayésiens mène à la même conclusion. L'inférence sur les distributions a posteriori des paramètres a été faite sur les 5000 dernières itérations.

## 5.6 RÉSULTATS ET DISCUSSION

Les paramètres du GRP (resp. du MRF) pour mars 1994 sont présentés au Tableau 3 (resp. Tableau 4), et leurs histogrammes à la Figure 5 (resp. Figure 6). Les Tableaux 5 et 6 contiennent les mêmes résultats pour mars 1995. On remarque le paramètre  $\beta_z$  est négatif en 1995, ce qui veut dire que l'équivalent en eau de la neige est décroissant avec l'altitude contrairement à ce qu'on pourrait penser. Dans les Figures 7 à 10, les résultats des trois méthodes (krigeage ordinaire, GRP et MRF) sont cartographiés et comparés. Comme prévu, les résultats obtenus par les modèles

bayésiens montrent une plus nette corrélation avec l'altitude que le krigeage lorsqu'ils sont appliqués aux données de 1994. Les écarts types sont représentés aux Figures 11 et 12. En 1994 (resp. 1995), l'écart-type moyen du GRP est en moyenne 38% (resp. 218%) plus élevé que ceux du krigeage, tandis que les MRF produisent un écart-type moyen 14% plus faible (resp. 269% plus élevés). Le mauvais ajustement du variogramme aux données de mars 1995 (Figure 3.a) introduit des incertitudes supplémentaires qui ne sont pas prises en compte dans la formule de la variance de krigeage, ce qui explique cette hausse importante de l'écart-type. Ce problème ne se pose pas dans le cas des modèles bayésiens, dont les sorties montrent plus d'incertitude pour ce jeu de données.

Finalement, les histogrammes de la quantité d'eau stockée sous forme de neige sur le bassin versant sont données aux Figures 12 (mars 1994) et 13 (mars 1995). Le résultat (moyenne et écart-type) est également résumé au Tableau 7. Les valeurs moyennes sont du même ordre de grandeur pour les trois méthodes, et les MRF donnent une variance légèrement plus élevée comparée à celle fournie par les GRP. Cette incertitude supplémentaire peut être due à la perte de précision lorsque les données mesurées sont rapportées à la grille de prédiction (équation 32).



## 6. CONCLUSION

---

Deux modèles bayésiens hiérarchiques, à savoir un processus gaussien aléatoire (GRP ou «Gaussian Random Process») et les champs de Markov aléatoires (MRF ou «Markov random Fields»), ont été utilisés avec succès dans cet article pour modéliser l'équivalent en eau de la neige sur le bassin versant de la Gatineau. Ils se sont tous révélés être supérieurs au krigeage ordinaire au niveau de la prise en compte de l'incertitude. L'application a également montré que le GRP donnaient des résultats équivalents sinon supérieurs à ceux des MRF, et sont beaucoup plus faciles à utiliser dans un contexte bayésien. Les résultats des modèles bayésiens, présentés sous forme de densités de probabilités, sont plus complets que la valeur ponctuelle et l'écart-type de l'erreur fournis par le krigeage ordinaire. Ils sont facilement utilisables pour une analyse probabiliste des risques liés à la disponibilité ou l'indisponibilité de l'eau sur le bassin versant (risque d'inondation, de sous-remplissage des réservoirs, etc.) et peuvent aider à gérer de façon optimale les barrages hydroélectriques lors du dégel. De plus, la modélisation bayésienne hiérarchique est une approche flexible et générale qui est de plus en plus accessible avec les progrès des techniques MCMC, et la montée en puissance des ordinateurs. On doit donc s'attendre à ce qu'elle soit de plus en plus utilisée en hydrologie et dans d'autres domaines.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- Banerjee, S., Carlin, B.P. et Gelfand, A.E. 2004. Hierarchical modeling and analysis for spatial data. Monographs on Statistics and applied probability 101. Chapman et Hall. 452 p.
- Berger, J. O., De Oliviera, V., Sansó, B. 2001. Objective Bayesian Analysis of Spatially Correlated Data. *Journal of the American Statistical Association* **96** (456): 1361- 1374.
- Berliner, L.M., Royle, J.A., Wikle, C.K., and Milliff, R.F. 1998. Bayesian methods in atmospheric sciences. *Bayesian statistics* **6**: 83-100.
- Berliner, L.M., Wikle, C.K., and Cressie, N. 2000. Long-Lead Prediction of Pacific SSTs via Bayesian Dynamic Modeling. *Journal of climate* **13**: 3953-3968.
- Besag, J.E. 1989. Toward bayesian image analysis. *Journal of applied statistics* **16**: 395-407.
- Besag, J.E., York, J., and Mollié, A. 1991. Bayesian image restauration with two applications in spatial statistics. *Annals of the institute of statistical mathematics* **43**: 1-59.
- Christakos, G. 1990. A Bayesian /maximum entropy view to the spatial estimation problem. *Mathematical Geology* **22**(7):763-776.
- Clayton, D.G. and Kaldor, J. 1987. Empirical Bayes estimates of age-standardized relative risks for use in disease mapping. *Biometrics* **67**: 671--681.
- Cressie, N. 1993. *Statistics for spatial data*. Wiley, New York.
- Davis, S.R. and Seaman, J.W. 2002. Hierarchical bayesian analysis of the carryover effect in two-period crossover design. *Mathematical and computer modeling* **36**: 129-136.
- Geman, S. and Geman, D. 1984. Stochastic relaxation, Gibbs distribution and the bayesian restauration of images. *IEEE Trnasactions on pattern analysis and Machine Intelligence* **6**: 721-741.
- Geman, S and Graffigne, C. 1986. Markov Random field image models and their application to computer vision. *International Congress of Mathematicians, Berkeley, California. Edited by A. M. Gleason*. 1496-1517.

- Geweke, J. 1992. *Bayesian Statistics 4*, chapter Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, pages 169–193. Oxford University Press, Oxford.
- Handcocks, M.S. and Wallis, J.R. 1994. An approach to statistical spatial-temporal modeling of meteorological fields. *Journal of the American statistical society* **86**: 368-390.
- Hasting, W.K. 1970. Monte-Carlo sampling methods using markov Chains and their applications. *Biometrika* **57**: 97-109.
- Hugues, J.P. and Guttorp, P. 1994. Incorporating spatial dependance and atmospheric data in a model of precipitation. *Journal of applied meteorology* **33**: 1503-1515.
- Lu, Z. and Berliner, L.M. 1999. Markov switching time series with application to daily runoff series. *Water Resources Research* **35**: 523-534.
- Metropolis, N., Rosebluth, A.W., Rosebluth, M.N., teller, A.H., and Teller, E. 1953. Equations of state calculations by fast computing machine. *Journal of chemical physics* **21**: 1087-1091.
- Minasny, B., McBratney, A.B., and Whelan, B.M., 2002. VESPER version 1.5. Australian Center for Precision Agriculture, McMillan Building A05, The University of Sydney, NSW 2006. (<http://www.usyd.edu.au/su/agric/acpa>)
- Rue, H. 2001. Fast sampling of Gaussian Markov Random Fields. *Journal of the Royal statistical society* **63**: 325-338.
- Rue, H. and Turid, F. 2003. Gaussian markov random fields models with application to spatial statistics. Report no. 5-2003. Trondheim, Norway, Norwegian University of Science and Technology.
- Spiegelhalter, D., Thomas, A., Best, N. 2003. and Lunn, D. Winbugs User Manual, version 1.4
- Suess, E.A., Gardner, I.A., and Jonhson, W.O. 2002. Hierarchical bayesian model for prevalence inference and determination of a country's status for an animal pathogen. *Preventive Veterinary Pathogen* **55**: 155-171.
- Thomas, A., Best, N., Arnold, R., and Spiegelhalter, D. 2002. Geobugs user manual. London, UK.

- Wackernagel, H. 2003. Multivariate geostatistics. an introduction with applications. 3<sup>rd</sup> edition. New-york, springer.
- Wikle, C.K., Berliner, C.N., and Cressie, N. 1998. Hierarchical Bayesian Space-Time models . *Environmental and Ecological Statistics* **5**: 117-154.
- Wikle, C.K., Milliff, R.F., Nychka, D., and Berliner, L.M. 2001. Spatio-temporal hierarchical bayesian modeling: tropical ocean surface winds. *Journal of the American Statistical Association* **96**: 382-397.
- Wikle, C.K. and Royle J.A. 2002. Spatial Statistical modeling in biology. *In* EOLSS Publishers Co. Ltd., Encyclopedia of Life Support Systems. [<http://www.eolss.net>]
- Zhu, H. et A. Journal. 1992. Formatting and integrating soft data : Stochastic imaging via the Markov-Bayes algorithm. Dans A. Soares [Éd.]. *Geostatistics-Troia*, (Kluwer):1-12.

## LISTE DES SYMBOLES

---

$\theta$	Vecteur des paramètres
$\alpha$	Processus gaussien avec structure de covariance spatiale
$\mu$	Moyenne du processus
$\delta$	Processus aléatoire spatial de second ordre d'espérance nulle et de structure de covariance connue (krigeage)
$\gamma$	Variogramme
$\phi, \kappa$	Paramètres de la fonction de variance covariance
$\beta, \beta_x, \beta_y, \beta_z$	Paramètres décrivant la variation de la moyenne du processus
$\beta_i$	Paramètres de régression (LMM)
$c_y$	Fonction de variance covariance des données
$\mathbf{C}$	Matrice de variance covariance
$d_{ij}$	Distance entre les points $s_i$ et $s_j$
$\varepsilon$	Processus aléatoire gaussien représentant le bruit (LMM)
$EQE$	Valeur d'équivalent en eau aux stations de mesure
$E\tilde{Q}E$	Valeur d'équivalent en eau aux prédites sur la grille d'interpolation
$\mathbf{I}$	Matrice identité
$r_y$	Fonction de structure des données
$\mathbf{V}$	Matrice des paramètres de dépendance spatiale (GRF)
$X_i$	Covariables (LMM)
$XP_i, YP_i, ZP_i$	Coordonnées géographiques de la grille d'interpolation
$XS_i, YS_i, ZS_i$	Coordonnées géographiques des stations de mesure
$\mathbf{y}$	Vecteur des observations
$\tilde{\mathbf{y}}$	Données non observées ou prédites

**Tableau 1: Mesures d'équivalent en eau à la mi-mars 1994**

Longitude (deg.)	Latitude (deg.)	Altitude (m)	Mesure d'équivalent en eau (cm)
-76.4834	45.6167	137	9.4
-75.4167	45.5667	59	10.4
-75.7	46.1834	270	13
-75.5667	46.5667	251	19
-75.1667	47.2167	381	24.9
-75.1	47.1334	386	24.1
-75.1334	46.9334	381	20.8
-76.3834	46.8667	355	18.3
-76.5	47	395	16.8
-77.05	47.4333	365	13.2
-75.3667	48.1167	450	19.8
-75.1167	46.6334	325	16.3
-76	46.3833	180	11.9
-79.25	47.5667	375	13.5
-77.2833	47.6333	400	20.3
-77.3667	47.85	400	16.8
-78.3	47.8	400	21.3
-74.7167	47.4	452	24.9
-74.6834	47.6834	510	29.7
-75.7833	45.5	80	13.7
-75.95	45.8333	234	9.9
-75.9833	46.7167	230	16

Tableau 2: Mesures d'équivalent en eau à la mi-mars 1995

Longitude (deg.)	Latitude (deg.)	Altitude (m)	Mesure d'équivalent en eau (cm)
-75.4167	45.5667	59	19.6
-75.7833	45.5	80	18.3
-76.4834	45.6167	137	13.5
-76	46.3833	180	11.4
-75.9833	46.7167	230	14.5
-75.95	45.8333	234	6.7
-75.5667	46.5667	251	20.6
-75.7	46.1834	270	9.4
-75.1167	46.6334	325	11
-76.3834	46.8667	355	16.3
-77.05	47.4333	365	16.3
-79.25	47.5667	375	4.8
-75.1667	47.2167	381	18.2
-75.1334	46.9334	381	8.4
-75.1	47.1334	386	23.4
-76.5	47	395	16.5
-77.2833	47.6333	400	23.1
-77.3667	47.85	400	10.8
-78.3	47.8	400	10.5
-75.3667	48.1167	450	9.1
-74.7167	47.4	452	17
-74.6834	47.6834	510	11.2

**Tableau 3: Paramètres du processus spatial gaussien (mars 1994)**

<b>Paramètre</b>	<b>Moyenne</b>	<b>Écart-type</b>
$\beta$	17.23	9.211
$\beta_x$	2.262	1.873
$\beta_y$	1.823	2.715
$\beta_z$	1.912	1.878
$\nu$	0.02856	0.01957
$\phi$	0.4175	0.2315
$\kappa$	0.5832	0.3887



Tableau 4: Paramètres des champs de Markov aléatoires (mars 1994)

Paramètre	Moyenne	Écart-type
$\beta$	17.51	0.9019
$\beta_x$	1.933	0.5497
$\beta_y$	2.365	1.819
$\beta_z$	2.821	1.928
$\nu$	0.1467	0.1135
$\alpha$	0.8974	0.01398

Tableau 5. Paramètres du processus spatial gaussien (mars 1995)

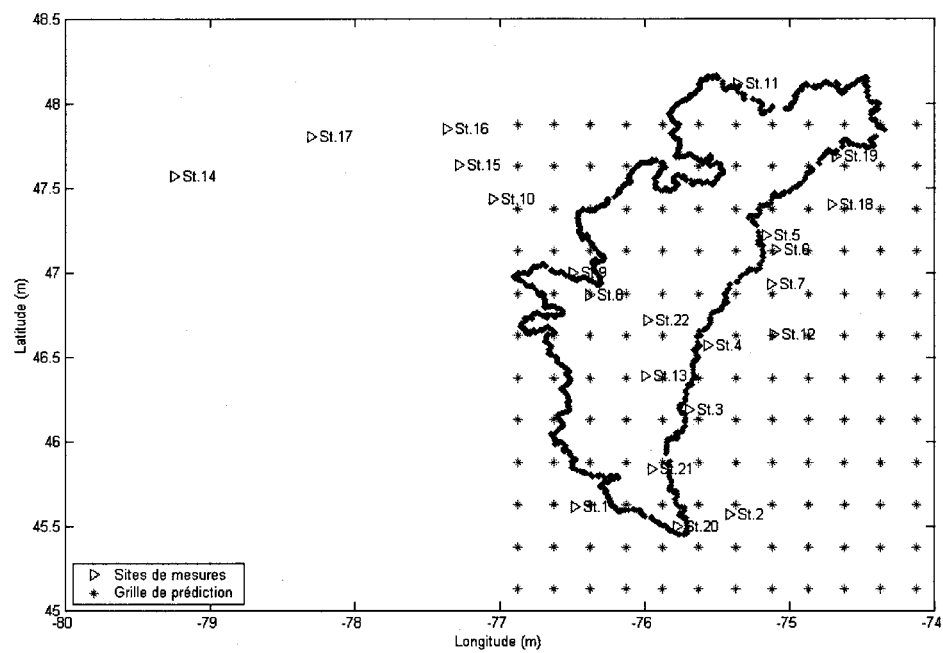
Paramètre	Moyenne	Écart-type
$\beta$	13.44	17.55
$\beta_x$	2.121	2.384
$\beta_y$	2.076	4.043
$\beta_z$	-3.607	3.251
$\nu$	0.010	0.007
$\phi$	0.408	0.231
$\kappa$	0.393	0.257

Tableau 6: Paramètres des champs de Markov aléatoires

Paramètre	Moyenne	Écart-type
$\beta$	14.02	1.47
$\beta_x$	1.436	1.02
$\beta_y$	3.006	3.37
$\beta_z$	-3.98	3.82
$\nu$	0.016	0.012
$\alpha$	0.897	0.014

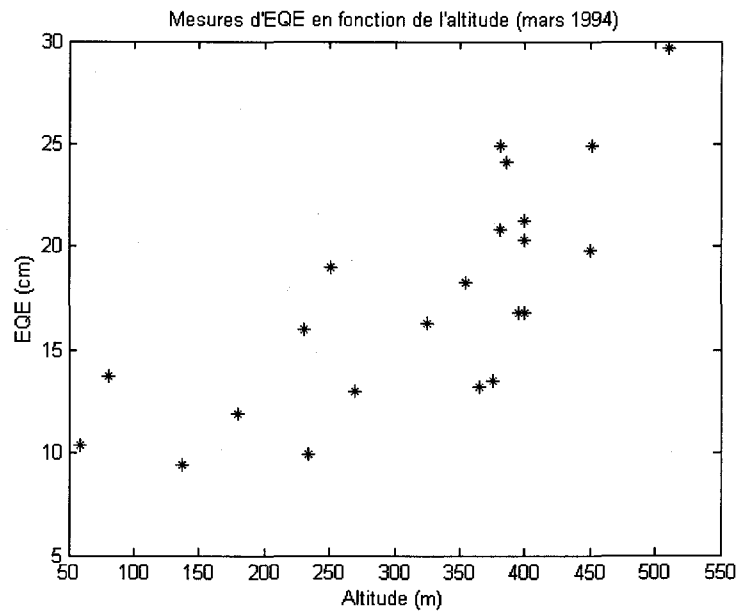
**Tableau 7: Volume d'eau emmagasinée sous forme de neige sur le bassin versant**

	<b>Mars 1994</b>		<b>Mars 1995</b>	
	Moyenne (hm <sup>3</sup> )	Écart-type (hm <sup>3</sup> )	Moyenne (hm <sup>3</sup> )	Écart type(hm <sup>3</sup> )
Krigeage	3.87E+5		2.89E+5	
GRP	3.93E+5	0.13E+5	2.95E+5	0.28E+5
MRF	3.99E+5	0.23E+5	3.21E+5	0.64E+5



**Figure 1: Zone d'étude**

(a)



(b)

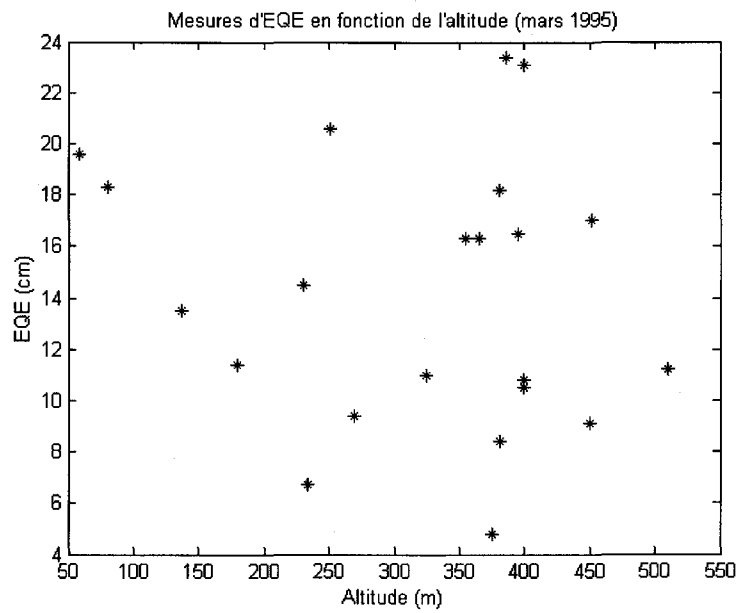
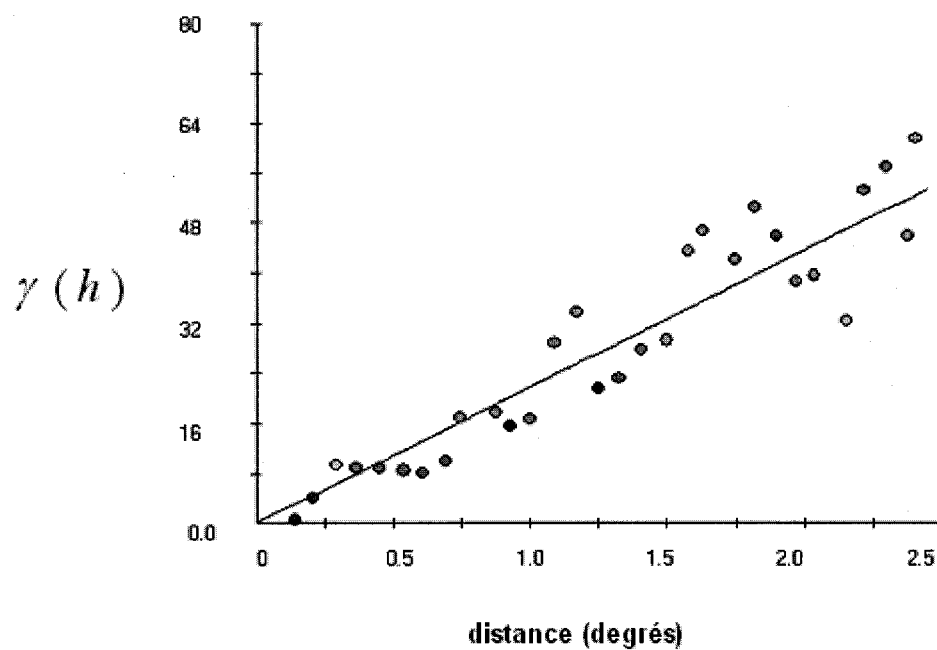


Figure 2: Mesures d'équivalent en eau en fonction de l'altitude pour mars 1994 et mars 1995

(a)



(b)

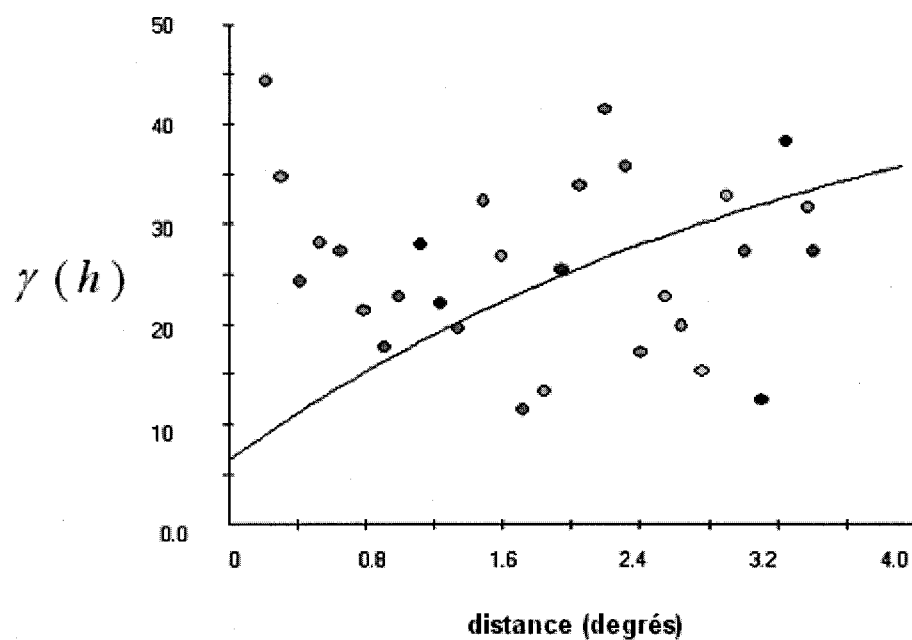
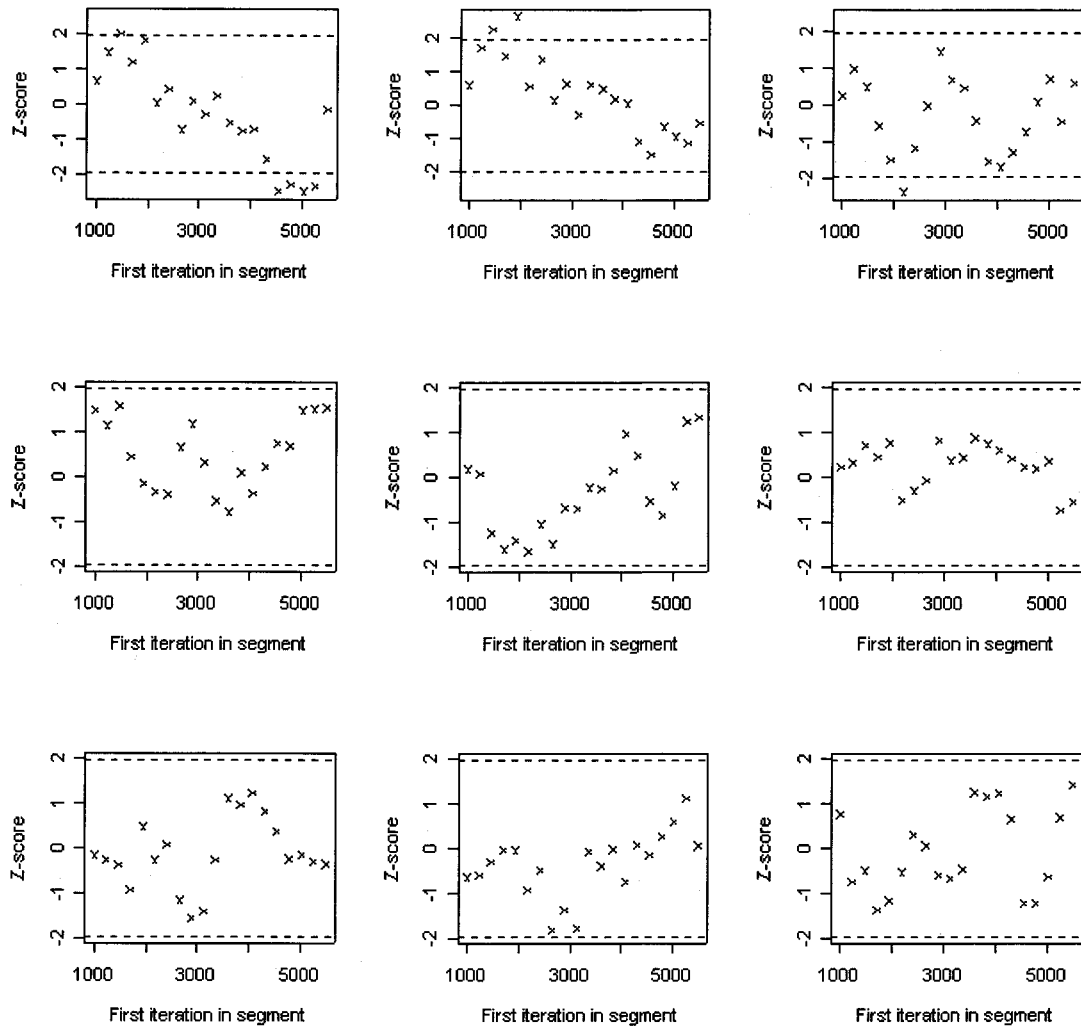
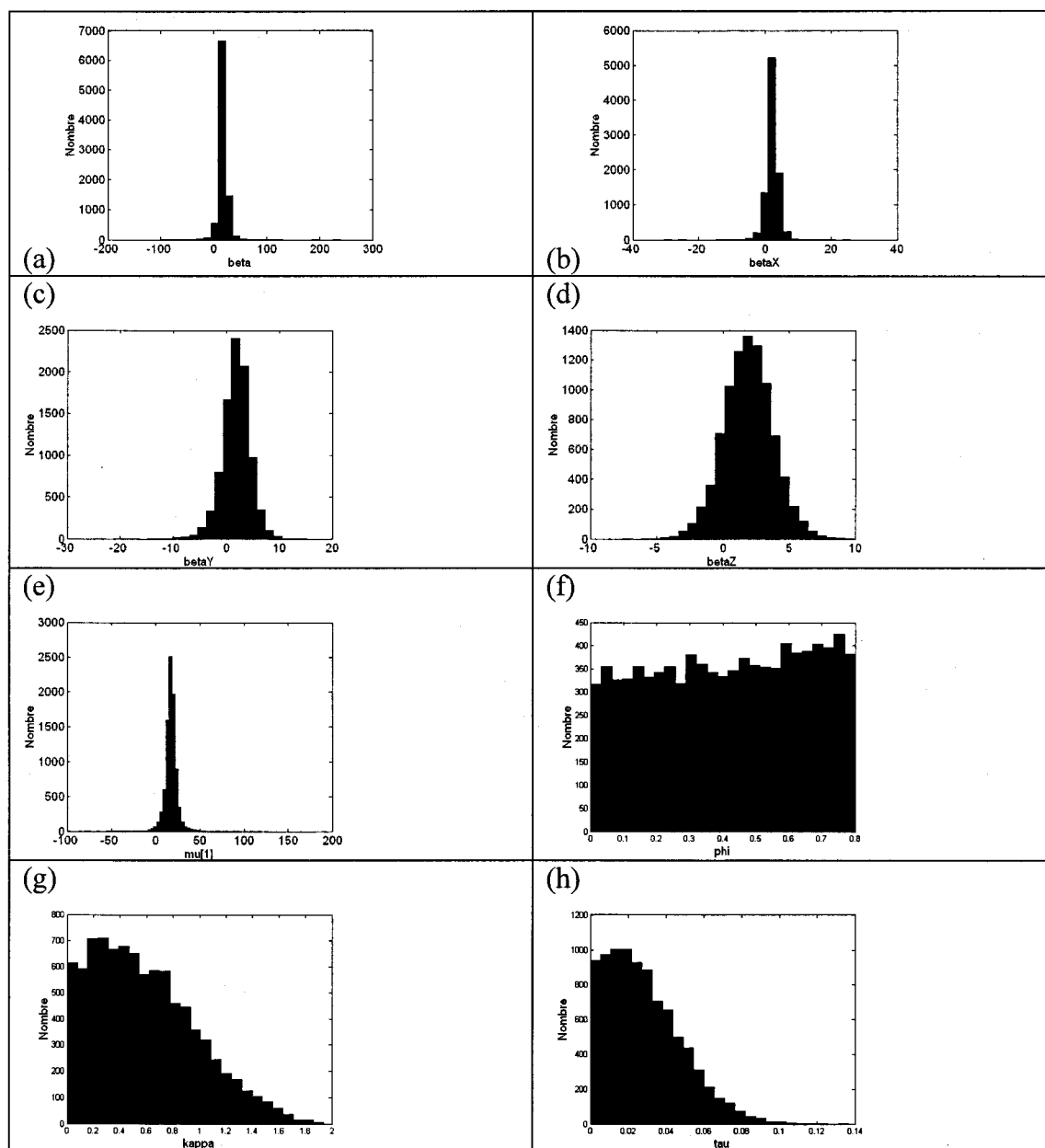


Figure 3: Variogrammes (double exponentielle) : (a) mars 1994; (b) mars 1995



**Figure 4: Z-scores pour quelques prédictions d'équivalent en eau- processus spatial gaussien- mars 1994.**





**Figure 5: Histogrammes des paramètres du processus spatial gaussien pour mars 1994 (itérations 1001 à 10000) : a)  $\beta$ ; b)  $\beta_x$ ; c)  $\beta_y$ ; d)  $\beta_z$ ; e)  $\mu[1]$ ; f)  $\phi$  g)  $\kappa$  h)  $\nu$**

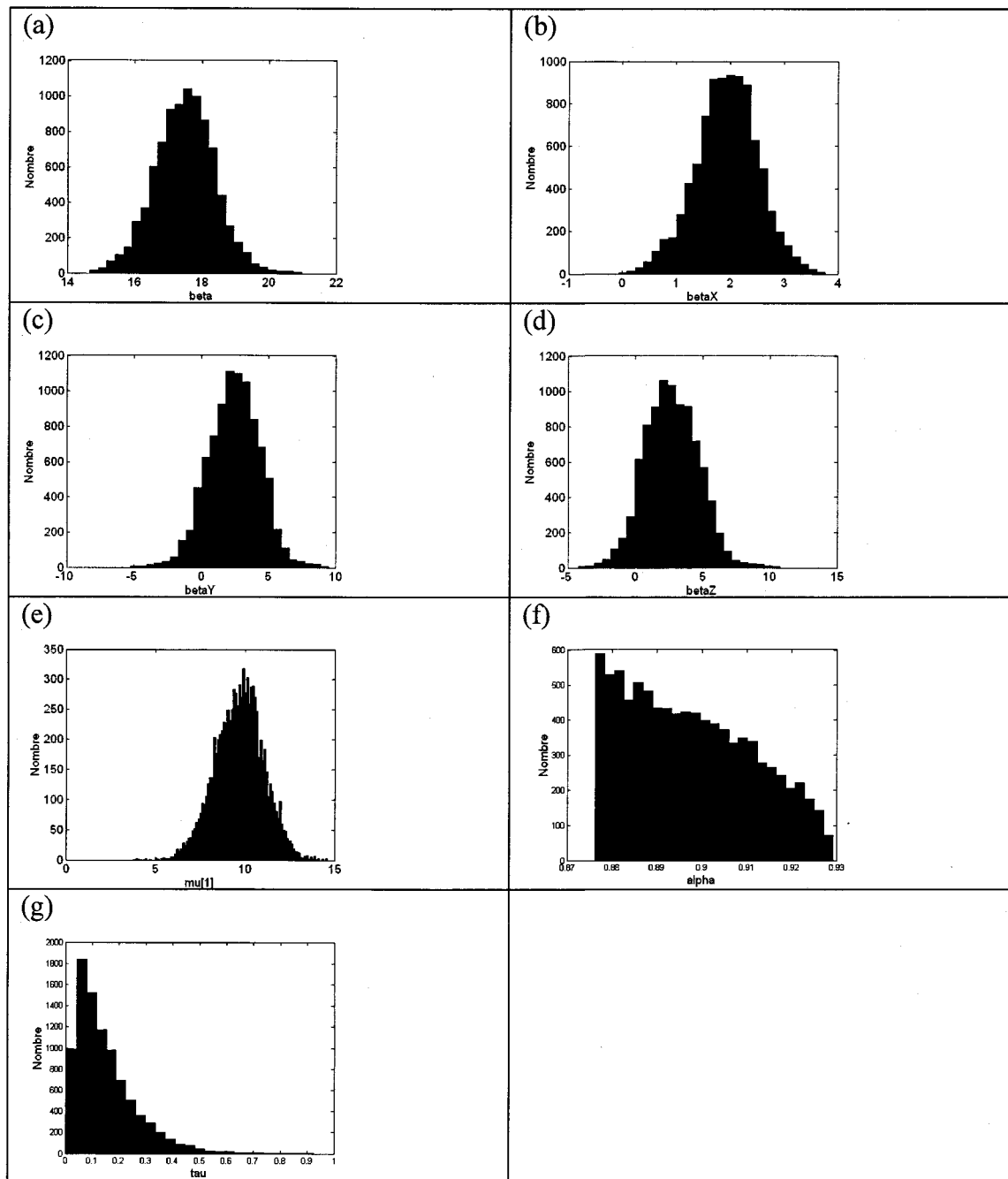


Figure 6: Histogrammes des paramètres du processus MRF pour mars 1994 (itérations 1001 à 10000) : a)  $\beta$ ; b)  $\beta_x$ ; c)  $\beta_y$ ; d)  $\beta_z$ ; e)  $\mu[1]$  f)  $\alpha$ ; g)  $\nu$

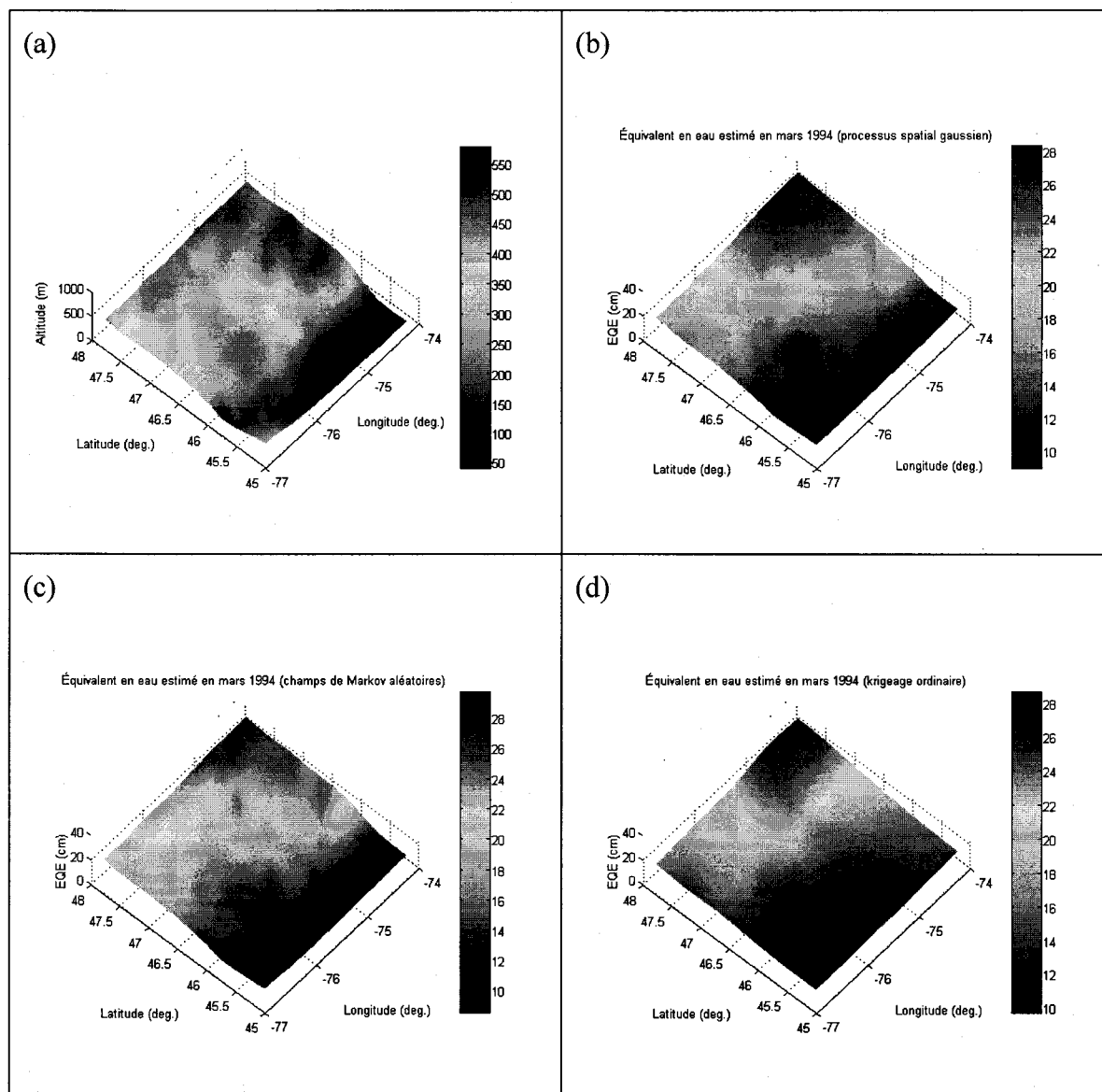


Figure 7: Comparaison des résultats pour mars 1994

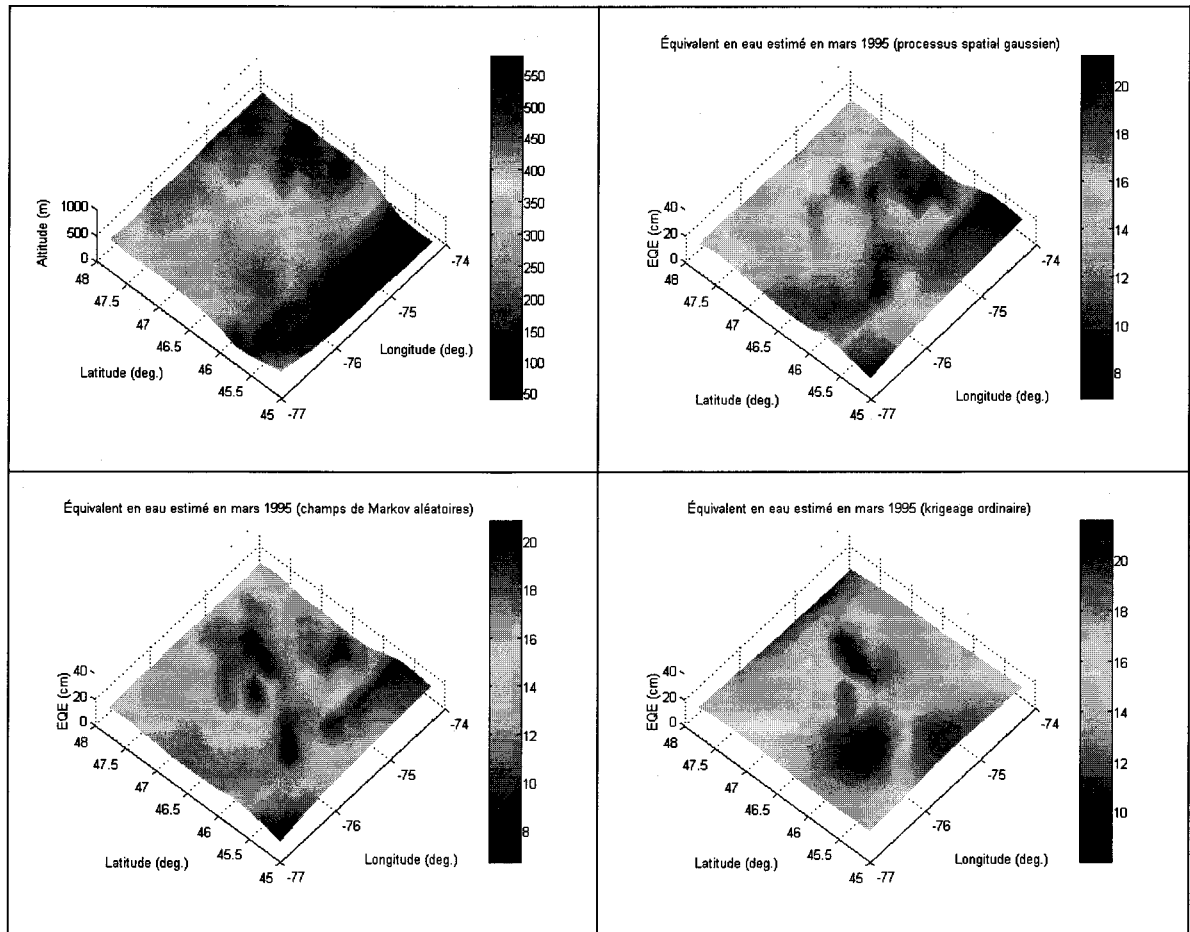


Figure 8: Comparaison des résultats pour mars 1995

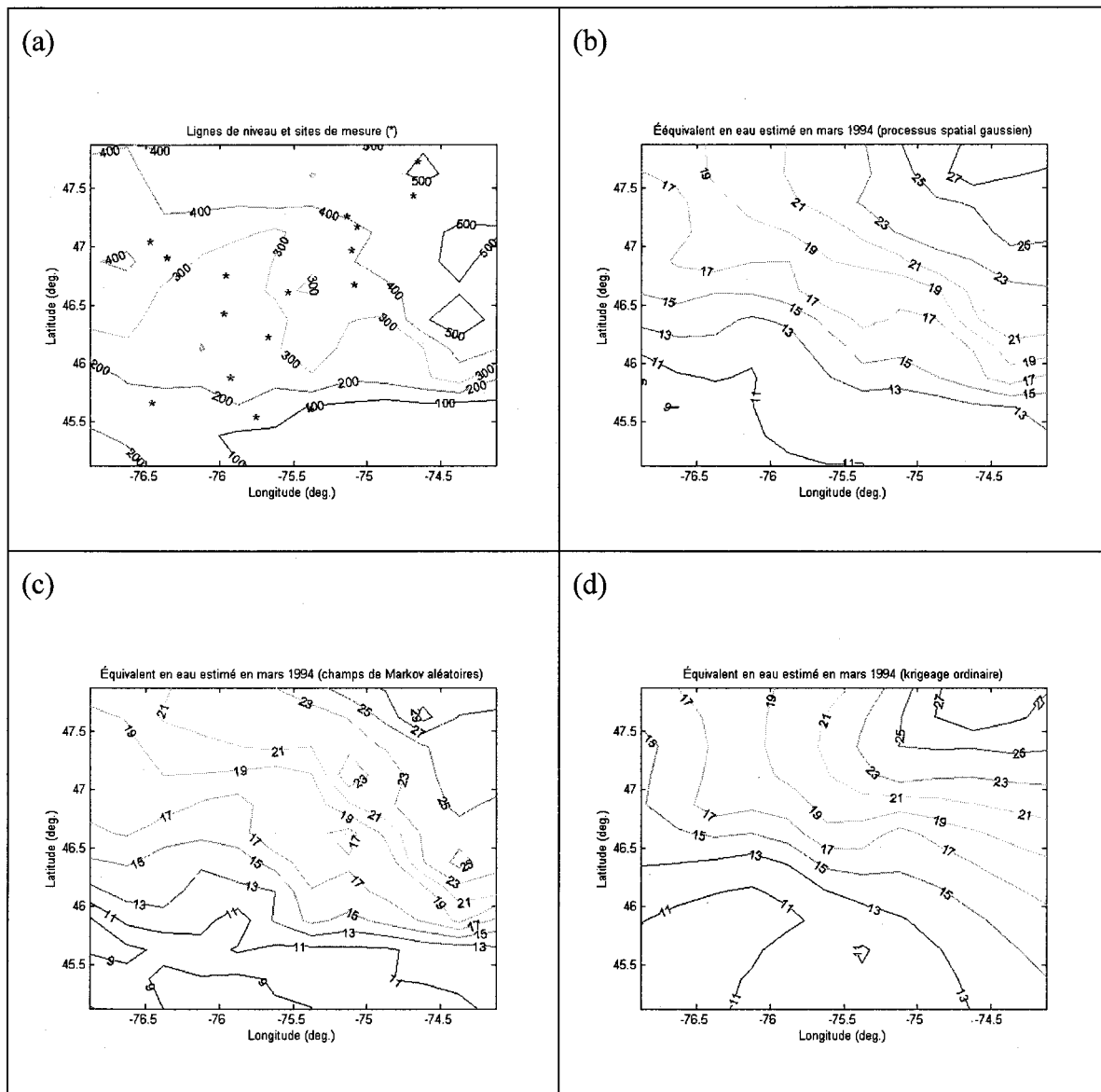


Figure 9: Contours des résultats pour mars 1994

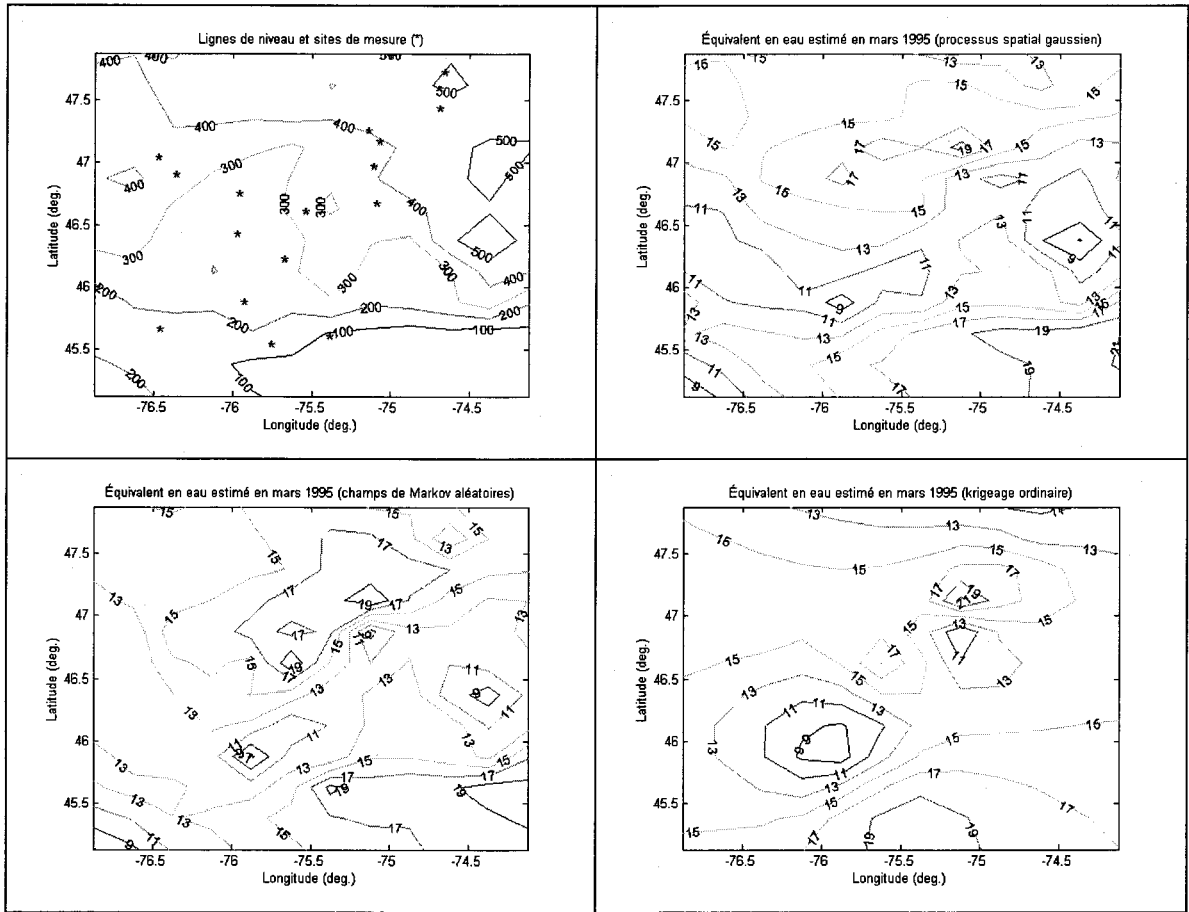


Figure 10: Contours des résultats pour mars 1995

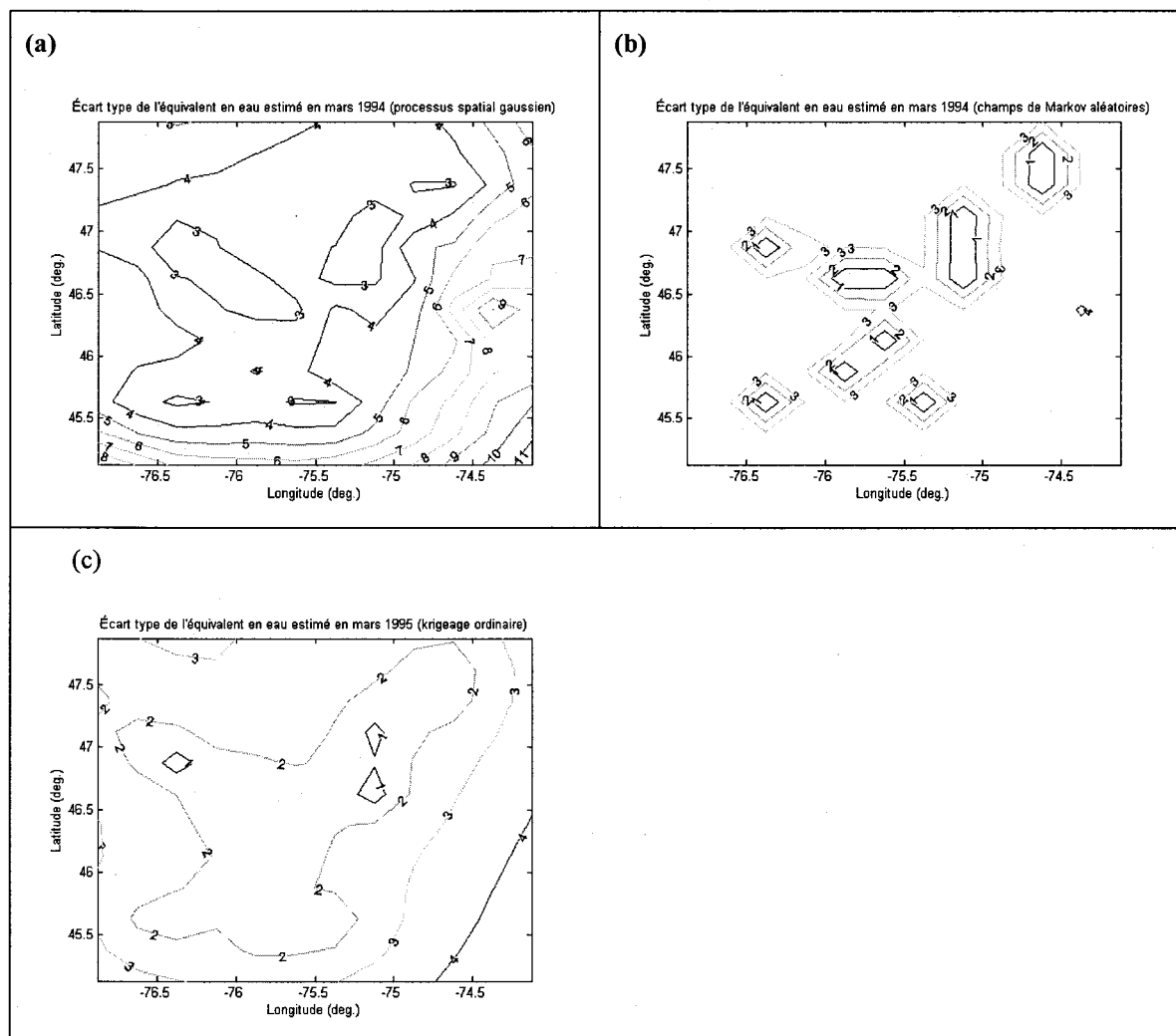


Figure 11: Comparaison des écarts types pour mars 1994

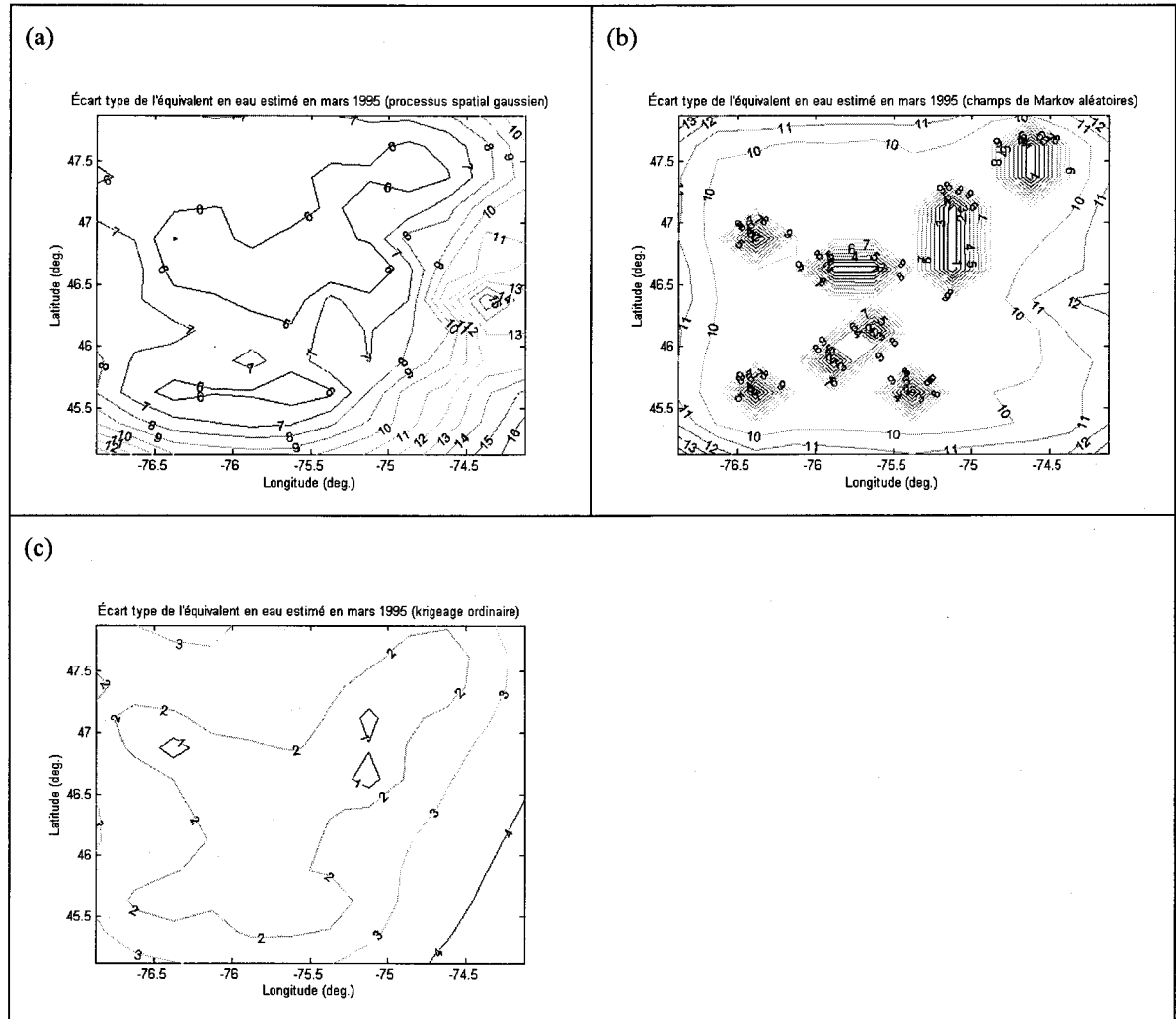
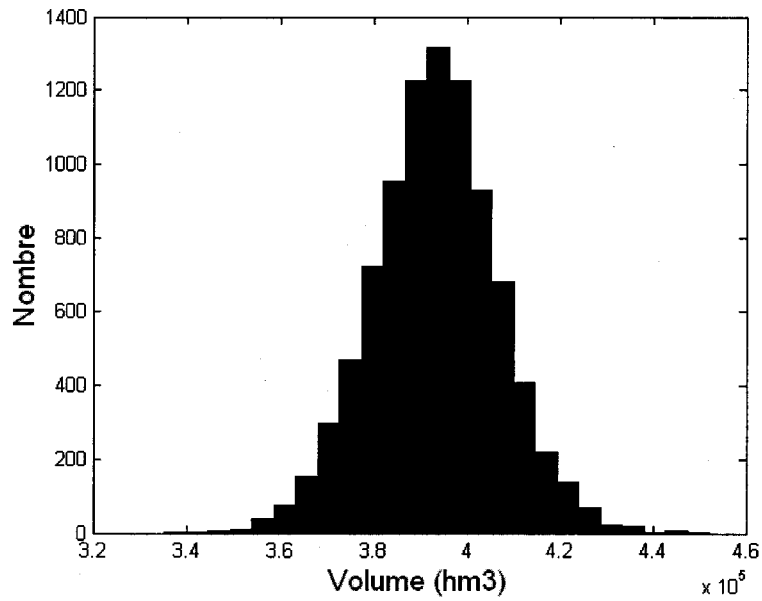


Figure 12: Comparaison des écarts types pour mars 1995



(a)



(b)

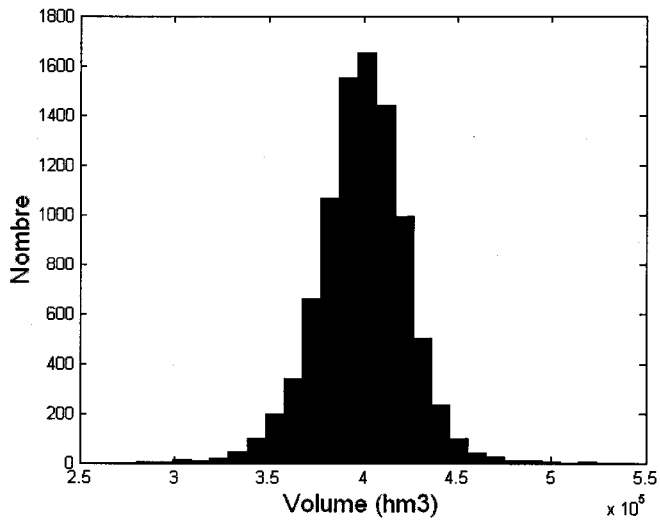
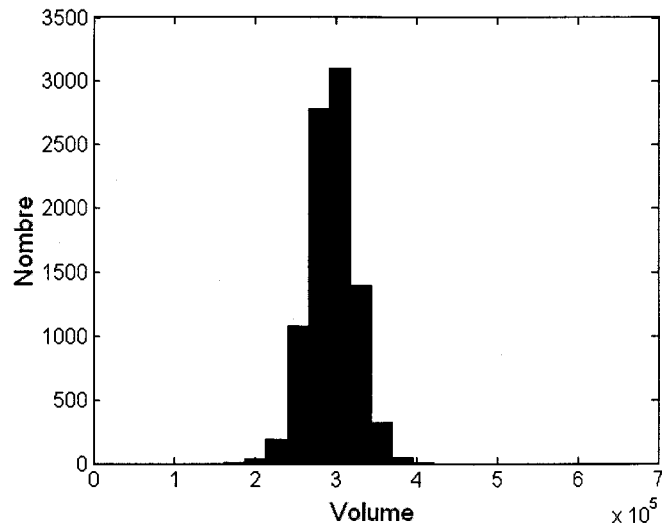
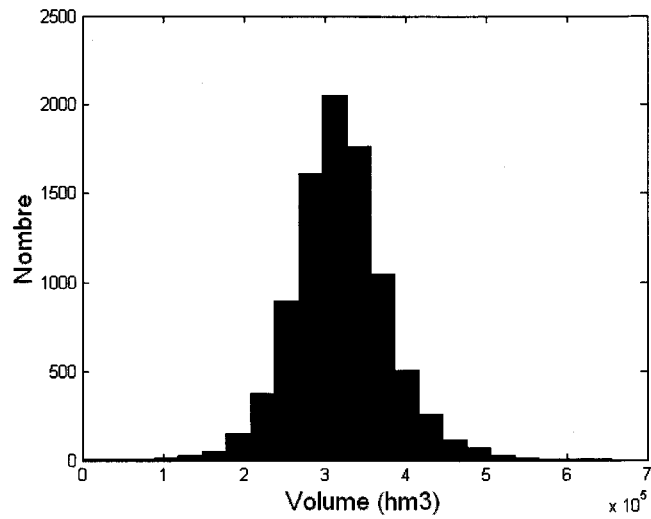


Figure 13: Histogramme du volume d'eau emmagasiné dans la neige en mars 1994 (itérations 1001 à 10000) : a) GRP b) MRF

a)



(b)



**Figure 14: Histogrammes de probabilité du volume d'eau emmagasiné dans la neige en mars 1995 (itérations 1001 à 10000) : a) GRP b) MRF**