Rapport Scientifique No 352

par

Luc Perreault
Bernard Bobée

Loi Normale :
Propriétés mathématiques et statistiques
Estimation des paramètres et des quantiles X_T de période de retour T

Avril 1992

INRS-Eau
Université du Québec
C.P. 7500
Sainte-Foy, Québec
G1V 4C7

TABLE DES MATIERES

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION

Diverses fonctions de densités de probabilité ont été proposées afin d'effectuer des analyses statistiques sur les débits de rivières dans le but d'estimer les extrêmes (crues ou étiages). Cette estimation est un outil important lors de la planification des aménagements hydrauliques.

Dans ce rapport, on présente la loi normale. Cette loi de probabilité est peu utilisée comme modèle probabiliste dans des études sur les débits, principalement parce qu'elle est symétrique. En effet, il est connu qu'en général les séries de débits possèdent un coefficient d'asymétrie significativement différent de zéro, c'est pourquoi les analystes favorisent l'utilisation de lois ayant au moins un paramètre de forme. Toutefois, la distribution normale demeure un modèle probabiliste intéressant pour différentes raisons.

Premièrement, les propriétés statistiques de cette loi sont très bien connues. En particulier, les estimateurs des paramètres issus de la méthodes du maximum de vraisemblance sont optimaux quelque soit la taille de l'échantillon. Deuxièment, plusieurs variables hydrologiques peuvent être représentées adéquatement par cette loi en s'appuyant sur le théorème de la limite centrale (Lehmann, 1983) : "étant données n variables aléatoires identiquement distribuées, la somme de ces variables, si n est grand, est distribuée selon une loi normale". Ainsi, on peut par exemple supposer que les volumes d'eau, calculés en sommant un ensemble assez grand de débits, suivent approximativement une loi normale. Enfin, cette loi peut être appliquée sur des données transformées. On peut en effet appliquer sur des variables non-normales une normalisation (par exemple la transformation de Box et Cox, 1964) pour ensuite ajuster la loi normale aux données transformées. On peut ainsi tirer partie des propriétés intéressantes que possèdent les estimateurs des paramètres de cette loi.

Nous décrivons premièrement, dans le chapitre I du présent rapport, les propriétés mathématiques et statistiques de cette loi de probabilité. Nous donnons entre autres les principaux moments centrés et non-centrés de cette distribution. Le second chapitre traite de l'estimation des paramètres. Une seule méthode a été retenue puisqu'elle est optimale lorsque les observations proviennent d'une loi normale : la méthode du maximum de vraisemblance. Nous donnons les expressions des estimateurs, leur variance et leur covariance.

Au chapitre III, nous présentons l'estimation des quantiles de la loi normale et le calcul de la variance asymptotique qui y est associée. L'estimation des quantiles est un outil privilégié pour les hydrologues. Ces valeurs, que l'on appelle en hydrologie les événements X_T de période de retour T (ou correspondant à une probabilité au dépassement $1/T$), permettent de planifier efficacement tout dimensionnement d'ouvrage hydraulique.

Les développements théoriques présentés dans ce rapport sont pour la plupart une synthèse de résultats que l'on retrouve dans la littérature au sujet de la loi normale. Ce travail a été effectué dans le but d'intégrer la loi normale au logiciel AJUSTE dans le cadre d'un projet de partenariat entre Hydro-Québec et INRS-Eau.

CHAPITRE 1

PROPRIETES MATHEMATIQUES ET STATISTIQUES DE LA LOI NORMALE

1.1 Définition et propriétés mathématiques

Lorqu'une variable aléatoire X est distribuée selon une loi normale de paramètres μ et σ (> 0), sa fonction de densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad , -\infty < x < +\infty \tag{1.1}$$

La fonction de densité de probabilité de la variable $Z = (X - \mu)/\sigma$ est :

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad -\infty < z < +\infty \tag{1.2}$$

et ne dépend pas des paramètres μ et σ. Cette distribution est appellée la loi normale standardisée. Puisque

$$Prob\{X \le x\} = Prob\left\{Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} \tag{1.3}$$

de telles probabilités peuvent être calculées à partir des tables de la fonction de distribution de Z, qui est :

$$\Phi(z) = Prob\{Z \le z\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{1.4}$$

On retrouve ces tables dans la plupart des livres de statistique. Celles-ci donnent seulement les probabilités associées aux valeurs positives de Z. Ceci est suffisant puisque la loi normale standardisée est symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire :

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z) \tag{1.5}$$

La figure 1 montre la forme que peut prendre la fonction de densité de probabilité (1.1) pour différentes valeurs du paramètre d'échelle σ, lorsque le paramètre de localisation μ est nul.

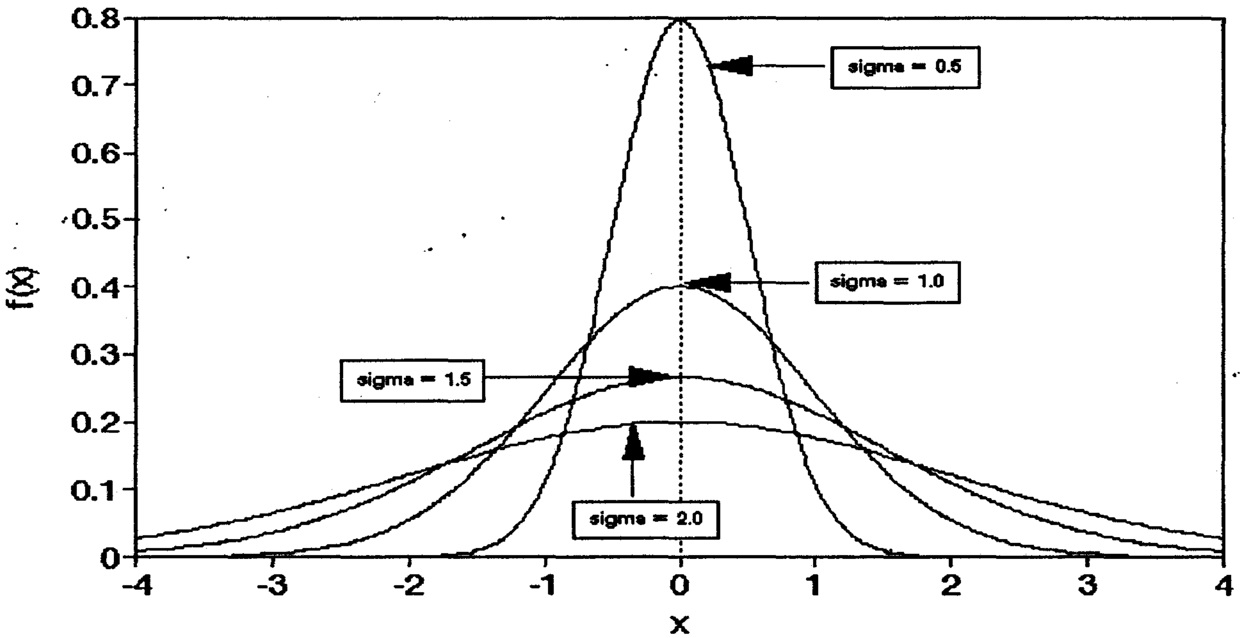

Figure 1. Forme de la f.d.p. de la loi normale pour $\mu = 0$ et différentes valeurs de σ.

1.2 Propriétés statistiques

Les expressions mathématiques des principaux moments centrés ainsi que les coefficients d'asymétrie et d'applatissement de la loi normale sont présentés dans cette section.

Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi normale de paramètres μ et σ (éq. 1.1), et Z distribuée selon une loi normale standardisée (éq. 1.2), c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance unitaire. Alors, le moment non-centré d'ordre 1, $\mu_1'(X)$, de la variable X est donné par:

$$\mu_1'(X) = E(X) = E(\sigma Z + \mu) = \sigma E(Z) + \mu \tag{1.6}$$

où E symbolise l'espérance mathématique. Or, puisque la loi de Z (loi normale standardisée) est symétrique par rapport à zéro, $E(Z) = 0$ (Bickel et Doksum, p. 47) et

$$\mu_1'(X) = \mu \tag{1.7}$$

Ainsi, on peut écrire les moments centrés $\mu_r(X)$ de la variable X comme suit :

$$\mu_r(X) = E[(X - E(X))^r] = E[(X - \mu)^r] = \sigma^r E(Z^r) \tag{1.8}$$

Puisque la loi de Z est symétrique par rapport à zéro (éq. 1.5), cette expression s'annule lorsque r est impair (Bickel et Doksum, p. 47). Les moments centrés d'ordre impair, $\mu_r(X)$, de la loi normale sont donc nuls.

Pour calculer les moments centrés d'ordre pair, posons d'abord

$$Y = \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2 = Z^2 \qquad \text{et} \qquad m = \frac{r}{2} \tag{1.9}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mu_r(X) &= E[(X - \mu)^r] = \sigma^r E(Z^r) \\ &= \sigma^r E(Y^m) = \frac{2^{r/2}\,\Gamma\left[\frac{1}{2}(r+1)\right]}{\Gamma(1/2)} \end{aligned} \tag{1.10}$$

car la variable aléatoire Y est distribuée selon une loi de chi-deux à un degré de liberté (Hogg et Craig, 1978) dont le moment non-centré d'ordre m est donné par :

$$\mu_m(Y) \quad = \quad \frac{2^m \, \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1/2)} \tag{1.11}$$

Par conséquent, à partir de l'équation (1.9) on peut montrer, lorsque X suit une loi normale de fonction de densité de probabilité (1.1), que sa variance est donnée par :

$$\mu_2(X) \quad = \quad \frac{2\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)}\,\sigma^2 \quad = \quad \sigma^2 \tag{1.12}$$

et les moments centrés d'ordre 3 et 4 par :

$$\mu_3(X) \quad = \quad 0 \tag{1.13}$$

$$\mu_4(X) \quad = \quad \frac{4\,\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)}\,\sigma^4 \quad = \quad 3\,\sigma^4 \tag{1.14}$$

Enfin, des équations (1.11), (1.12) et (1.13), on déduit le coefficient d'asymétrie :

$$C_s(X) \quad = \quad \frac{\mu_3(X)}{\mu_2^{3/2}(X)} \quad = \quad 0 \tag{1.15}$$

ainsi que le coefficient d'aplatissement :

$$C_K(X) \quad = \quad \frac{\mu_4(X)}{\mu_2^2(X)} \quad = \quad 3 \tag{1.16}$$

CHAPITRE 2

ESTIMATION DES PARAMETRES DE LA LOI NORMALE

Pour estimer les paramètres de la loi normale, nous considérons uniquement la méthode du maximum de vraisemblance. En effet, il est connu que les estimateurs issus de cette méthode sont optimaux pour cette loi (Johnson et Kotz, 1970; Bickel et Doksum, 1977; Hogg et Craig, 1978; Lehmann, 1983). Les principes généraux de la méthode du maximum de vraisemblance sont décrits à l'annexe A.

Nous présentons dans ce chapitre les développements et les résultats menant aux estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi normale. Les calculs des variances et de la covariance des estimateurs obtenus sont aussi donnés.

2.1 Estimation des paramètres

Soient n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes tirées de la loi normale dont la fonction de densité de probabilité est donnée par (1.1). La vraisemblance logarithmique d'une réalisation $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est donnée par :

$$lnL(\mu, \sigma^2) = -\frac{nln(2\pi\sigma^2)}{2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \tag{2.1}$$

Pour déterminer les estimateurs du maximum de vraisemblance, il suffit de résoudre le système d'équations obtenu en annulant les dérivées partielles, par rapport aux paramètres, de la fonction de vraisemblance logarithmique (voir annexe A). Après quelques calculs, nous obtenons le système suivant :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 - \frac{n}{2\sigma^2} = 0 \tag{2.3}$$

Ce système d'équations admet des solutions explicites pour μ et σ^2 qui sont respectivement:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \tag{2.4}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = s^2 \tag{2.5}$$

On peut vérifier que ces solutions maximisent bien la fonction de vraisemblance. Ainsi, les estimateurs du maximum de vraisemblance de μ et σ^2 sont respectivement la moyenne et la variance de l'échantillon $\bar{X}$ et S^2. Remarquons que si $\bar{X}$ est un estimateur non-biaisé de μ, il en est autrement de S^2 car :

$$E(\hat{\sigma}^2) = E(S^2) = \frac{\sigma^2}{n} E\left(\frac{nS^2}{\sigma^2}\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \tag{2.6}$$

Ce résultat repose sur le fait que la statistique nS^2/σ^2 est distribuée selon une loi de chi-deux à $(n - 1)$ degrés de liberté (Hogg et Craig, 1978, p. 175), donc de moyenne égale à $(n - 1)$. On peut toutefois montrer que cet estimateur converge en probabilité vers la vraie valeur du paramètre, et donc qu'il est convergent. Pour de grandes tailles d'échantillon cet estimateur est pratiquement non-biaisé.

A partir de l'expression (2.6), on peut facilement déterminer une estimateur non-biaisé de σ^2 pour des tailles d'échantillon finies. En effet, si l'on considère $S_{nb}^2 \;=\; n/(n-1)S^2$, d'après (2.6) $E(S_{nb}^2) = \sigma^2$. Ainsi, on a que

$$S_{nb}^2 \;=\; \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right] \;=\; \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{2.7}$$

est un estimateur non-biaisé du paramètre σ^2 pour toute taille d'échantillon.

S'appuyant sur le fait que la loi normale appartient à la classe des lois exponentielles, on peut montrer que les estimateurs $\overline{X}$ et S_{nb}^2 sont des statistiques conjointement exhaustives et complètes (Hogg et Craig, 1978) pour les paramètres μ et σ^2. Ceci implique, puiqu'ils sont non-biaisés, que ces estimateurs sont optimaux (estimateurs de variance minimum parmi les estimateurs non-biaisés).

2.2 Variance et covariance des estimateurs $\overline{X}$ et S_{nb}^2

Soit un échantillon aléatoire de taille n $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tiré d'une loi normale de fonction de densité de probabilité (1.1). Dans cette section, nous déterminons la variance et la covariance des estimateurs $\overline{X}$ et S_{nb}^2 des paramètres μ et σ^2. Les détails permettant d'obtenir les résultats présentés ici peuvent être trouvés dans les ouvrages cités en référence.

Considérons la moyenne de l'échantillon $\overline{X}$, l'estimateur de μ. La variance de cette statistique est obtenue en s'appuyant sur le fait que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On a :

$$\begin{aligned} Var(\overline{X}) \;&=\; Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) \;=\; \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i) \\ &=\; \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \;=\; \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Déterminons maintenant la variance de l'estimateur sans biais S_{nb}^2 de σ^2. Rappelons tout d'abord que la statistique nS^2/σ^2, où S^2 est définie à l'équation (2.5) pour une réalisation $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'échantillon aléatoire, est distribuée selon une loi de chi-deux à $(n - 1)$ degrés de liberté et que

$$S_{nb}^2 = \frac{n}{n-1} S^2 \tag{2.9}$$

Sachant qu'une loi de chi-deux à $(n - 1)$ degrés de liberté est en fait une loi Gamma de paramètres $\alpha = 1/2$ et $\lambda = (n-1)/2$ (Hogg et Craig, 1978) dont la fonction de densité de probabilité $g(x)$ est donnée sous sa forme générale par :

$$g(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, \qquad x > 0 \quad , \tag{2.10}$$

on peut montrer (Hogg et Craig, 1978) que la statistique S_{nb}^2 est distribuée aussi selon une loi Gamma, mais de paramètres $\alpha = \frac{n-1}{2\sigma^2}$ et $\lambda = \frac{n-1}{2}$. Ainsi, puisque la variance d'une variable aléatoire suivant une loi Gamma est donnée par λ/α^2, on en déduit que:

$$Var(S_{nb}^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \tag{2.11}$$

Enfin, on peut montrer que la covariance entre des estimateurs $\overline{X}$ et S_{nb}^2 est nulle (Hogg et Craig, 1978, pp. 173-175) et que l'on a :

$$Cov(\overline{X}, S_{nb}^2) = 0 \tag{2.12}$$

CHAPITRE 3

ESTIMATION D'UN ÉVÉNEMENT DE PÉRIODE DE RETOUR T X_T ET CALCUL DE LA VARIANCE

Le quantile d'ordre p, X_p , est la valeur dont la probabilité au non-dépassement est p. Plus précisément, X_p est tel que

$$Prob\{X \leq X_p\} = p \tag{3.1}$$

En hydrologie l'estimation des quantiles est utilisée fréquemment, en particulier pour analyser les séries de débits maximums annuels. Dans ce contexte, les hydrologues définissent le débit X_T de période de retour T comme étant la valeur dont la probabilité au dépassement est $1/T$ où T est une intervalle de temps donné. Ainsi, X_T est tel que

$$Prob\{X > X_T\} = \frac{1}{T} \tag{3.2}$$

La connaissance de cette valeur est importante pour le dimensionnement de nouveaux ouvrages hydrauliques et pour la gestion d'ouvrages déjà existants.

Nous présentons, dans ce chapitre, l'estimation des quantiles (débits de période de retour T) de la loi normale ainsi que la détermination des variances qui y sont associées.

Soit un échantillon aléatoire x_1, x_2, ..., x_n de taille n (par exemple des débits maximums annuels mesurés sur n années) tiré d'une loi dont la de fonction de densité de probabilité est donnée en (1.1). Alors, par définition, X_T est tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{X_T}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \frac{1}{T} \tag{3.3}$$

Cette équation n'ayant pas de solution explicite, le problème peut être simplifié en se ramenant à la loi standardisée (éq. 1.2). En effet, on a :

$$X_T \;=\; \mu + \sigma Z_T, \quad \text{car} \quad Prob\{X > X_T\} \;=\; Prob\{Z > Z_T\}, \tag{3.4}$$

où Z_T est le quantile correspondant de la loi normale centrée-réduite, c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance unitaire.

Ainsi, pour estimer X_T, il suffit de remplacer dans l'équation (3.4) les paramètres μ et σ par leurs estimateurs respectifs $\overline{X}$ et S_{nb} présentés au chapitre 2, et Z_T par sa valeur extraite de la table de la loi normale. Toutefois, dans le contexte du développement d'un logiciel d'ajustement automatique comme AJUSTE, nous désirons éviter l'entrée des valeurs de cette table dans le programme. C'est pourquoi, nous utilisons plutôt l'approximation $\tilde{Z}_T$ suivante (Abramovitz et Stegun, 1972, p. 933) :

$$\tilde{Z}_T \;=\; Y_T - \frac{c_0 + c_1 Y_T + c_2 Y_T^2}{1 + d_1 Y_T + d_2 Y_T^2 + d_3 Y_T^3} \tag{3.5}$$

où :

$$\begin{array}{lllllll} Y_T & = & \sqrt{\ln(T^2)} & & & & \\ c_0 & = & 2.515517 & & d_1 & = & 1.432788 \\ c_1 & = & 0.802853 & & d_2 & = & 0.189269 \\ c_2 & = & 0.010328 & & d_3 & = & 0.001308 \end{array}$$

Nous obtenons alors, en distinguant les quantiles Z_T positifs ($1/T \leq 0.5$) et négatifs ($1/T > 0.5$) et en utilisant la symétrie par rapport à l'origine de la loi normale standardisée, l'estimateur du débit de période de retour T :

$$\hat{X}_T \;=\; \begin{cases} \overline{X} + S_{nb}\tilde{Z}_T, & \text{pour } \dfrac{1}{T} \leq 0.5 \\[2ex] \overline{X} - S_{nb}\tilde{Z}_{1-1/T}, & \text{pour } \dfrac{1}{T} > 0.5 \end{cases} \tag{3.6}$$

En appliquant le théorème de la limite centrale (Lehmann, 1983) à la statistique $\hat{X}_T$, on déduit la variance asymptotique de cet estimateur :

$$Var(\hat{X}_T) \;=\; \left(\frac{\partial X_T}{\partial \mu}\right)^2 Var(\overline{X}) + \left(\frac{\partial X_T}{\partial \sigma^2}\right)^2 Var(S^2_{nb}) + 2\left(\frac{\partial X_T}{\partial \mu}\right)\left(\frac{\partial X_T}{\partial \sigma^2}\right) Cov(\overline{X}, S^2_{nb}) \tag{3.7}$$

Après avoir évalué les dérivées partielles, l'équation (3.7) se réduit à :

$$Var(\hat{X}_T) \;=\; Var(\overline{X}) + \left(\frac{Z_T}{2\sigma}\right)^2 Var(S^2_{nb}) \tag{3.8}$$

puisque la covariance est nulle (voir Section 2.2). En remplaçant $Var(\overline{X})$ et $Var(S^2_{nb})$ par les expressions obtenues au Chapitre 2, on obtient finalement après quelques calculs :

$$Var(\hat{X}_T) \;=\; \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{Z_T^2}{2(n-1)}\right] \tag{3.9}$$

CONCLUSION

Ce rapport effectue un rappel de quelques propriétés mathématiques et statistiques de la loi normale. Une seule méthode d'estimation des paramètres a été présentée puisqu'elle est optimale dans ce cas : la méthode du maximum de vraisemblance. Pour cette méthode d'estimation l'étude théorique des variances et de la covariance des estimateurs a été effectuée. De plus, nous avons déterminé l'estimateur du quantile X_T et sa variance asymptotique.

Tous les développements théoriques ont été effectués dans le but d'introduire cette loi dans le logiciel AJUSTE. La méthode d'estimation du maximum de vraisemblance a été intégrée au programme AJUSTE (logiciel permettant de faire l'ajustement automatique d'une distribution théorique choisie à une série de données observées). Ce logiciel fournit aussi les quantiles estimés pour 21 probabilités au dépassement ainsi que les intervalles de confiance asymptotiques associés à ces événements pour divers niveaux de confiance. Ces intervalles sont efficaces lorsque la taille de l'échantillon est assez grande. Pour de petits échantillons ($n = 10, 20$), il serait préférable d'utiliser un intervalle de confiance exact tel que proposé par Stedinger (1983).

En tentant de faire le point sur la loi normale, ce travail devrait permettre de faciliter l'utilisation en pratique de cette loi de probabilité qui possède d'intéressantes propriétés.

BIBLIOGRAPHIE

Abramowitz, M. et Stegun, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Funtions*. Dover Publications, Inc., New York.

Bickel, P.J. et Doksum, K.A. (1977). *Mathematical Statistics : Basic Ideas and Selected Topics*. Holden-Day, Oakland, California.

Box, G.E.P. et Cox, D.R. (1964). An analysis of transformations (with discussion). *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **26**, 211-246.

Hogg, R.V. et Craig, A.T. (1978). *Introduction to Mathematical Statistics*. Macmillan Publishing Co., New York.

Johnson, N.L. et Kotz, S. (1970). *Continuous Univariate Distributions-I : Distributions in Statistics*. Wiley, New York.

Lehmann, E.L. (1983). *Theory of Point Estimation*. Wiley, New York.

Stedinger, J.R. (1983). Confidence intervals for design events. *Journal of Hydraulic Engineering*, **109**, 13-27.

ANNEXE A

DESCRIPTION DE LA METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Dans cette section nous décrivons brièvement la méthode d'estimation considérée dans le présent rapport. Pour plus de détail, nous vous invitons à consulter les ouvrages cités.

Méthode du maximum de vraisemblance

Soit un échantillon aléatoire de taille n $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tiré d'une loi $F(x; \theta_1, \theta_1, \ldots, \theta_k)$ à k paramètres. Les estimateurs du maximum de vraisemblance sont obtenus en maximisant par rapport à $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ la fonction suivante :

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \tag{A.1}$$

où $f(.)$ est la fonction de densité de probabilité de la loi $F(.)$.

En pratique, pour des raisons de simplicité, on maximise plutôt le logarithme de cette fonction:

$$lnL(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \sum_{i=1}^{n} lnf(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \tag{A.2}$$

Remarquons que la fonction de vraisemblance $L(.)$ et son logarithme $lnL(.)$ atteignent leur maximum aux mêmes valeurs de θ_1, θ_2, ..., θ_k puisque $\frac{\partial LnL}{\partial \theta_i} = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta_i}$. Maximiser (A.1) ou (A.2) est donc équivalent.

Pour déterminer les estimateurs du maximum de vraisemblance, il suffit alors de résoudre le système d'équations :

$$\frac{\partial lnL(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_1} = 0$$
$$\frac{\partial lnL(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_2} = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial lnL(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_k} = 0$$

Souvent, ce système n'admet pas de solution explicite et il faut le résoudre numériquement. En général, on utilise une méthode itérative de type Newton-Raphson.

Les propriétés asymptotiques des estimateurs issus de la méthode du maximum de vraisemblance sont bien connues. En particulier, ces estimateurs sont convergents, asymptotiquement non-biaisés et asymptotiquement efficaces (voir Lehmann, 1983). De plus, si la fonction de vraisemblance admet un seul maximum, les variables aléatoires $\sqrt{n}(\hat{\theta}_1 - \theta_1)$, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_2 - \theta_2)$, ..., $\sqrt{n}(\hat{\theta}_k - \theta_k)$ sont asymptotiquement distribuées selon une loi normale multivariée de moyenne $(0, 0, \ldots, 0)$ et de matrice variance-covariances Σ dont les éléments correspondent à ceux de l'inverse de la matrice d'information de Fischer I_f :

$$(I_f)_{ij} = -E\left(\frac{\partial^2 lnL(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right) \quad , (i,j) \in \{1,2,\ldots,k\}^2 \tag{A.3}$$