

Université du Québec
Institut national de la recherche scientifique
Centre Énergie Matériaux Télécommunications

**ESTIMATION CONJOINTE AUTODIDACTE PAR ÉCHANTILLONNAGE
PRÉFÉRENTIEL DES DIRECTIONS D'ARRIVÉE ET DES DÉLAIS DE
PROPAGATION D'UN CANAL SANS FIL À TRAJETS MULTIPLES**

Par

Maha Abdelkhalek

Mémoire présenté pour l'obtention du grade de
Maître es Sciences, M.Sc.
en télécommunications

Jury d'évaluation

Examineur externe	Prof. Georges Kaddoum ÉTS
Examineur interne	Prof. Douglas O'Shaughnessy INRS-ÉMT
Directeur de recherche	Prof. Sofène Affes INRS-ÉMT

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à exprimer mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance, à mon encadreur Prof. Sofiène Affes qui n'a cessé de me prodiguer ses précieux conseils ainsi que pour son travail de relecture, de correction et d'analyse. Il a su me soutenir et me motiver dans toutes mes démarches sans compter les heures passées à relire tous mes travaux, s'intéressant de près à mes résultats et m'encourageant à préserver dans des voies souvent originales.

Je remercie également les membres de jury, d'avoir accepté juger ce travail.

Je voudrais aussi témoigner ma gratitude envers Souheib, Oussama, Karrar, Fedi, Nina, Oumaima et mes amis de l'INRS et à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Je terminerai ces remerciements par ceux que j'adresse à ma famille qui m'ont accompagnée, aidée, soutenue et encouragée tout au long de ces années d'études.

Résumé

Dans ce mémoire, nous abordons le problème de l'estimation conjointe des angles d'arrivée (AA) et des délais de propagation (ECAD) dans une configuration NDA (de l'anglais "Non Data Aided") où le signal transmis est inconnu à la réception. On applique le maximum de vraisemblance (MV) connu pour atteindre la meilleure performance possible. On commence par la dérivation de la fonction de vraisemblance logarithmique (FVL) dans un scénario totalement autodidacte. La technique d'échantillonnage préférentiel (EP) est utilisée pour réduire la multidimensionnalité du problème de maximisation sans recourir à une solution itérative. De plus, grâce à une approximation très utile, on est capable de réduire la complexité de la technique d'échantillonnage préférentiel originale sans aucune dégradation significative des performances. Les simulations montrent l'avantage indéniable de la nouvelle technique MV EP par rapport aux techniques ECAD existantes et la borne inférieure de Cramèr-Rao (BICR) pour des niveaux moyens et élevés du rapport signal sur bruit (RSB).

Mots-clés ECAD, AA, délais de retard, maximum de vraisemblance, échantillonnage préférentiel.

Abstract

In this work, we tackle the problem of joint angles and delays estimation (JADE) in a non-data aided (NDA) configuration where the transmitted signal is unknown at the receiver. We do so by applying the maximum likelihood (ML) in order to obtain the best performance achievable. To that end, we derive the log-likelihood function (LLF) in a totally blind scenario. The importance sampling (IS) technique is used to reduce the multi-dimensionality of the maximization problem without recurring to an iterative approach. Moreover, owing to a very useful approximation, we are able to further reduce the complexity of the original importance sampling technique without any significant performance degradation. Computer simulations show that the new ML IS technique approaches in estimation performance the DA techniques and the Cramér-Rao lower bound (CRLB) at medium and high SNR levels.

Keywords JADE, angle of arrival (AOA), time delay, maximum likelihood (ML), importance sampling (IS).

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Abstract	vii
Table des matières	ix
Liste des figures	xi
Liste des abréviations	1
Introduction générale	3
1 État de l’art	5
1.1 Problématique	5
1.2 Étude de la littérature	6
1.3 Maximum de vraisemblance	7
2 Estimation autodidacte conjointe des directions d’arrivée et des délais de propagation	9
2.1 Modèle du système	9
2.2 Dérivation de la fonction de vraisemblance concentrée	12
2.3 Maximisation globale de la FVC	14
2.4 Technique d’échantillonnage préférentiel	16
2.4.1 Choix de la fonction d’échantillonnage préférentiel	17
2.4.2 Procédure de génération de variables	21
2.4.3 Génération locale des réalisations requises	23
2.5 Estimation des DP _s et des AA _s	26
2.6 Approximation du coefficient de pondération	27
3 Résultats de simulations	31
3.1 Paramètres de simulations	31
3.2 Choix des paramètres	32
3.2.1 Choix de ρ_0	32
3.2.2 Choix de ρ_1	33
3.2.3 Choix de R	34
3.3 Études de performances du nouvel estimateur ECAD MV-EP NDA	35

Conclusion générale	41
Appendices	43
Références	49

Liste des figures

1.1	Propagation radio dans un environnement multi-trajets.	5
2.1	Configuration géométrique du réseau d'antennes	10
2.2	La fonction de distribution cumulative complémentaire de l'amplitude du ratio entre les éléments hors diagonaux et diagonaux de la matrice $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$	19
2.3	Les FDPs marginales et conditionnelles pour $Q = 2$ et $RSB = 30$ dB: (a) FDP marginale de τ , (b) FDP marginale de θ , (c) les FDPs conditionnelles de τ sachant $\theta_q^{(r)}$	22
2.4	Le diagramme du nouveau algorithme basé sur le concept EP.	25
2.5	La fonction de distribution cumulative complémentaire: (a) FDCC de $ \beta_{\nu, \nu'} $, (b) FDCC de $ \beta_{\nu, \nu'} $	30
3.1	L'impact du paramètre, ρ_0 , sur les performances de la technique proposée pour $K = 128$, $RSB = 30$ dB: (a) AAs, et (b) moyenne de deux trajets AAs (c) DPs (d) moyenne de deux trajets DPs.	33
3.2	L'impact du paramètre, ρ_1 , sur les performances de la technique proposée pour $K = 128$ et $RSB = 30$ dB: (a) AAs, et (b) moyenne de deux trajets AAs (c) DPs (d) moyenne de deux trajets DPs.	34
3.3	L'impact du paramètre, R , sur les performances de la technique proposée pour $K = 128$, $RSB = 30$ dB: (a) AAs, et (b) moyenne de deux trajets AAs (c) DPs (d) moyenne de deux trajets DPs.	35
3.4	REQM pour $\tau = [0.1 T \ 0.5 T]$ et $\theta = [75^\circ \ 120^\circ]$ avec $P = 5$ antennes $K = 128$ symboles.	36
3.5	REQM en fonction du nombre de symboles K pour $\tau = [0.1 T \ 0.5 T]$ et $\theta = [75^\circ \ 120^\circ]$ avec $P = 5$ antennes et $RSB = 0$ dB.	37
3.6	REQM en fonction du nombre des antennes P pour $\tau = [0.1 T \ 0.5 T]$ et $\theta = [75^\circ \ 120^\circ]$ avec $K = 128$ symboles et $RSB = 0$ dB.	38
3.7	REQM en fonction de la séparation temporelle $\Delta\tau$ pour $\tau = [0.1 T \ 0.1 T + \Delta\tau]$ et $\theta = [75^\circ \ 120^\circ]$ avec $K = 128$ symboles, $P = 5$ antennes et $RSB = 0$ dB.	39
3.8	REQM en fonction de la séparation angulaire $\Delta\theta$ pour $\tau = [0.1 T \ 0.5 T]$ et $\theta = [75^\circ \ 75^\circ + \Delta\theta]$ avec $K = 128$ symboles, $P = 5$ antennes et $RSB = 0$ dB.	40

Liste des abréviations

AA	Angle d'Arrivée
BBGA	Bruit Blanc Gaussien Additif
BICR	Borne Inférieure de Cramèr-Rao
DA	Data Aided
DR	Délais de Retard
ECAD	Estimation Conjointe des Angles et des Délais
EMV	Estimation de Maximum de Vraisemblance
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
FDC	Fonction de Distribution Cumulative
FDCC	Fonction de Distribution Cumulative Complémentaire
FDP	Fonction de Densité de Probabilité
FVC	Fonction de Vraisemblance Concentrée
FVL	Fonction de Vraisemblance Logarithmique
IID	Indépendantes et Identiquement Distribuées
IS-ML	Importance Sampling - Maximum Likelihood
MAQ	Modulation d'Amplitude en Quadrature
MI-MUSIC	Multi-Invariance - MUltiple SIgnal Classification
MUSIC	MUltiple SIgnal Classification
MV	Maximum de Vraisemblance
MVI	Maximum de Vraisemblance Itérative
NDA	Non Data Aided
RCCS	Racine Carrée du Cosinus Surélevé
RCEQM	Racine Carrée de l'Erreur Quadratique Moyenne
RCU	Réseau Circulaire Uniforme
RLU	Réseau Linéaire Uniforme
RSB	Rapport Signal Bruit
SAGE	Space-Alternating Generalized Expectation maximization
SIMO	Single Input Multiple Output
TFD	Transformées de Fourier Discrètes

Introduction générale

Les systèmes de communications sans fil de la nouvelle génération nécessitent des techniques avancées pour satisfaire les besoins des utilisateurs. Notamment, les systèmes multi-antennes qui ont une efficacité spectrale très élevée. L'environnement de propagation dans ces systèmes de communication est caractérisé par plusieurs phénomènes (ex., réflexion, diffraction, ...). Ces derniers engendrent une propagation à trajets multiples. Chaque trajet est caractérisé par un délai de propagation, un angle d'arrivée et une amplitude. L'estimation de ces paramètres joue un rôle très important pour maintenir et améliorer la qualité de service dans les systèmes de communication. Dans ce contexte, l'estimation conjointe des angles et des délais de propagation (ECAD) est très utile dans plusieurs domaines, notamment dans les applications militaires (ex. RADAR, SONAR,...) et de communications sans fil. Le canal de transmission sans fil est caractérisé par des paramètres extrêmement importants tels que les angles d'arrivée (AAs) ou les directions d'arrivée (DAs) et les délais de propagation (DPs). Ces deux paramètres sont largement utilisés dans des applications de localisation (Phelan *et al.* (2012)-Golden & Bateman (2007)) dans lesquelles un récepteur GPS n'est pas très utile (Rappaport *et al.* (1996)) . Une estimation précise des AAs est cruciale pour les techniques de formation de voie (Van Der Veen (1998)), tandis que l'estimation des DPs a une

grande importance dans les applications liées à l'égalisation (Chen & Wang (2001)).

Dans ce mémoire, on propose une technique d'estimation conjointe des DPs et des AAs d'un signal inconnu. La nouvelle solution est non itérative et basée sur une estimation à maximum de vraisemblance (MV) en utilisant la technique d'échantillonnage préférentiel (EP). Une partie de ce travail sera présentée dans une version de conférence acceptée récemment ¹ à IEEE CAMSAP'2019 (Abdelkhalek *et al.* (2019)). Ce mémoire est organisé selon cette structure: Dans le premier chapitre, on placera le sujet proposé dans son contexte le plus général. Le deuxième chapitre explique les détails de développement de la nouvelle approche proposée. L'évaluation des performances de notre estimateur est discutée dans le dernier chapitre. La toute dernière partie de ce mémoire est réservée à quelques remarques finales qui concluent ce travail.

1. Noté que la version PDF n'est pas encore disponible en ligne et, par conséquent, elle est jointe dans l'appendice.

Chapitre 1

État de l'art

Dans ce chapitre, on placera le sujet dans son contexte le plus général. On commence par déterminer la problématique. Dans la partie suivante, on décrira les techniques existantes dans la littérature avec lesquelles on va comparer par la suite notre solution.

1.1 Problématique

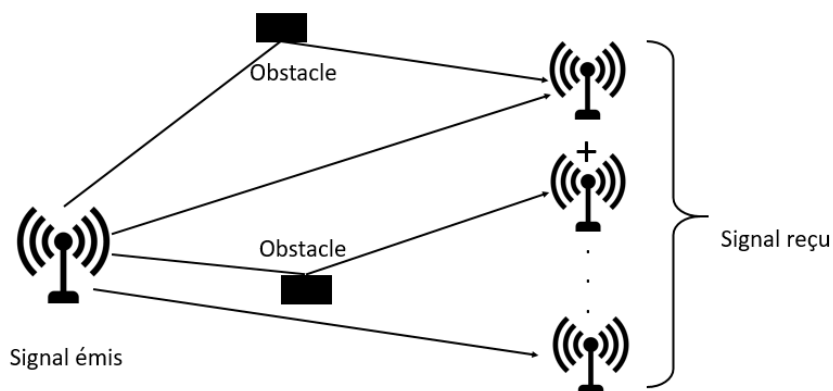


Figure 1.1 – Propagation radio dans un environnement multi-trajets.

Dans un système multi-trajets, le signal radio se propage selon plusieurs chemins générant plusieurs copies du signal transmis. Chaque copie prend un chemin différent de la source vers la destination avec une direction d'arrivée, un délai de retard et un gain complexe différent des autres. En conséquence, le signal à la réception se résume en une combinaison de toutes les copies générées par

les réflexions du signal original. Ce phénomène produit une déformation du signal reçu causant une mauvaise détection du signal transmis.

1.2 Étude de la littérature

Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été proposées pour l'estimation des angles d'arrivée (AAs) et des délais de propagation (DPs). Certains travaux ont abordé le problème de l'estimation où seuls les AAs (Tufts (1983) - Leshem & Kasher (1993) - Reddi (1979) - Viberg & Ottersten (1991) - Ziskind & Wax (1988)) ou les DRs (De Figueiredo & Gerber (1983) - Lichtenstein & Young (1968) - Manickam *et al.* (1994)) sont pris en compte. Cependant, dans le cas où la séparation angulaire ou temporelle est faible, l'estimation disjointe de ces deux paramètres souffre d'une capacité de résolution faible par rapport à l'estimation conjointe (Van Der Veen (1998)). De plus, dans le cas où le nombre des trajets est inférieur au nombre d'antennes à la réception, ces estimateurs sont incapables de détecter tous les trajets. Cependant, l'estimation conjointe de ces deux paramètres offre une meilleure précision et une résolution plus élevée. En effet, plusieurs techniques ECAD ont été étudiées dans la littérature et peuvent être classées en deux grandes catégories: on y trouve des estimateurs de type sous-espace et des estimateurs de type MV. La plupart des techniques sous-espace sont orientées vers une estimation DA (de l'anglais Data Aided) qui nécessitent la connaissance du signal transmis. Parmi ces techniques, on trouve MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) et ESPRIT (Estimation of Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques) (Vanderveen *et al.* (1997), Wang *et al.* (2001), Van Der Veen *et al.* (1998)), (Likai *et al.* (2017)) et l'algorithme MP (Matrix Pencil) (Bazzi & Lisa (2016)) dans le cas multi-porteuse. Récemment, deux techniques de type sous-espace ont abordé le cas NDA (de l'anglais Non Data Aided) où le signal transmis est inconnu à la réception; l'approche MI-MUSIC (Multi-Invariance MUltiple SIgnal Classification) proposée dans (Zhang *et al.* (2010)) qui est basé sur un signal sans mise en forme (i.e., sans filtre). Et le deuxième (Liu & Liu (2016)) est basé sur la technique RISR (Re-iterative Super-Resolution) pour estimer les AAs, la technique de formation de faisceaux LCMP (Linear Constrained Minimum Power) et MUSIC pour estimer les DPs. En pratique, les approches de type sous-espace sont plus attrayantes en raison de leur complexité de calcul réduite. Cependant, elles sont généralement sous-optimales et souffrent d'une dégradation importante des performances (en termes de résolution et de précision) à de faibles niveaux du RSB et/ou des en présence de trajets spatialement et/ou

temporellement rapprochés. Cependant, pour la classe MV, deux estimateurs basés sur une solution itérative ont été introduits jusqu'à présent dans (Wax & Leshem (1997), Fleury *et al.* (1999)) pour un scénario DA. Cependant, comme toute approche itérative, la performance de ces deux estimateurs MV est étroitement liée à la qualité d'estimation initiale des paramètres inconnus. Ainsi, il y a un risque que ces techniques ne convergent pas vers le maximum global de la fonction de vraisemblance logarithmique (FVL) si leurs estimations initiales ne sont pas fiables. En outre, pour les deux estimateurs MV itératifs, une grille d'échantillonnage fixe est sélectionnée pour servir un ensemble contenant le plus grand nombre possible de valeurs candidates pour les DPs et les AAs inconnus. Ensuite, en supposant que tous les vrais paramètres (inconnus) se trouvent exactement sur la grille sélectionnée, IML (Iterative Maximum Likelihood) et SAGE tentent de maximiser la FVL de manière itérative. En conséquence, si les véritables DPs et/ou AAs ne se trouvent pas sur la grille d'échantillonnage, ces techniques ne pourront jamais atteindre le maximum de la fonction coût. Pour une estimation plus précise, il est obligatoire d'utiliser une grille à échantillonnage dense car celle-ci réduit l'écart entre les paramètres réels et leurs plus proches points de la grille. Cela mène cependant à une augmentation excessive de la complexité de calcul. Récemment, on trouve également une solution non itérative de type MV basés sur un signal transmis connu à la réception. Cette approche est introduite dans (Bellili *et al.* (2018)) et utilise la technique EP.

1.3 Maximum de vraisemblance

Le maximum de vraisemblance est une technique d'estimation des paramètres inconnus dans un modèle. Cette technique est appliquée à des variables avec une distribution connue. Le concept de cette technique est de développer une fonction de vraisemblance à partir de la fonction de densité de probabilité puis de maximiser son logarithme par rapport à ses paramètres inconnus dans (Kay (1993)).

Définition: Soit un ensemble d'observations indépendantes $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ d'une variable aléatoire \mathbf{X} ayant une densité de probabilité $f_\alpha(x)$. $\alpha \in A$ est un paramètre inconnu et A est l'ensemble de toutes les valeurs possibles de α .

La fonction de vraisemblance est définie par:

$$L(\alpha; x) = \prod_{i=1}^n f_{\alpha}(x_i). \quad (1.1)$$

L'estimation du maximum de vraisemblance (EMV) de α noté par $\hat{\alpha}$ est la valeur de $\alpha \in A$ qui maximise $L(\alpha; x)$. Puisque **log** est une fonction croissante monotone, la valeur de α qui maximise $L(\alpha; x)$ maximise aussi $\log L(\alpha; x)$. Ainsi, pour trouver $\hat{\alpha}$, il suffit de trouver la valeur de α qui maximise $l(\alpha; x) \equiv \log L(\alpha; x)$. La fonction $l(\alpha; x)$ est appelée la fonction de vraisemblance logarithmique.

Dans ce chapitre, on a présenté la problématique en question, le travail demandé et les techniques ECAD existantes pour pouvoir entamer dans le chapitre suivant le développement de la partie la plus importante dans ce projet ; l'estimation autodidacte conjointe des AAs et des DPs.

Chapitre 2

Estimation autodidacte conjointe des directions d'arrivée et des délais de propagation

Ce chapitre est réservé au développement de notre estimateur. On commence par la définition de notre modèle du système et la dérivation de la fonction de vraisemblance concentrée (FVC) puis sa maximisation. Par la suite, on définit et on applique le concept de la technique d'échantillonnage préférentiel. À la fin, on estime les DPs et les AAs.

2.1 Modèle du système

On considère un système SIMO (Single Input Multiple Output) constitué de P antennes. Le lien entre l'émetteur et le récepteur est un canal sans fil à trajets multiples constitué par Q trajets caractérisés par des délais de propagation $\{\tau_q\}_{q=1}^Q$, des directions d'arrivée $\{\theta_q\}_{q=1}^Q$ et des gains complexes $\{\gamma_q\}_{q=1}^Q$ supposés constants mais inconnus. À la destination, le signal reçu à la $p^{\text{ième}}$ antenne peut être écrit sous cette forme:

$$y_p(t) = \sum_{q=1}^Q \gamma_q e^{j\pi\varphi_p(\theta_q)} x(t - \tau_q) + n_p(t), \quad (2.1)$$

où $n_p(t)$ est le bruit blanc gaussien additif (BBGA) avec une moyenne égale à zéro et une variance σ^2 . $\varphi(\theta)$ est une transformation angulaire qui dépend de la géométrie des antennes à la réception.

Dans la littérature, on trouve deux configurations très populaires:

- **Le réseau linéaire uniforme (RLU)**: La figure 2.1b représente un réseau linéaire uniforme constitué de P antennes isotropes alignées et espacées d'une même distance d .
- **Réseau circulaire uniforme(RCU)**: Groupement de P antennes isotropes sous forme d'un cercle et espacées d'une distance d comme représenté dans la figure 2.1a.

$$\varphi_p(\theta) = \begin{cases} d(p-1)\sin(\theta) & (RLU) \\ d \frac{(p-1)\cos(\theta - 2(p-1)\frac{\pi}{P})}{\sin(\frac{\pi}{P})} & (RCU) \end{cases} \quad (2.2)$$

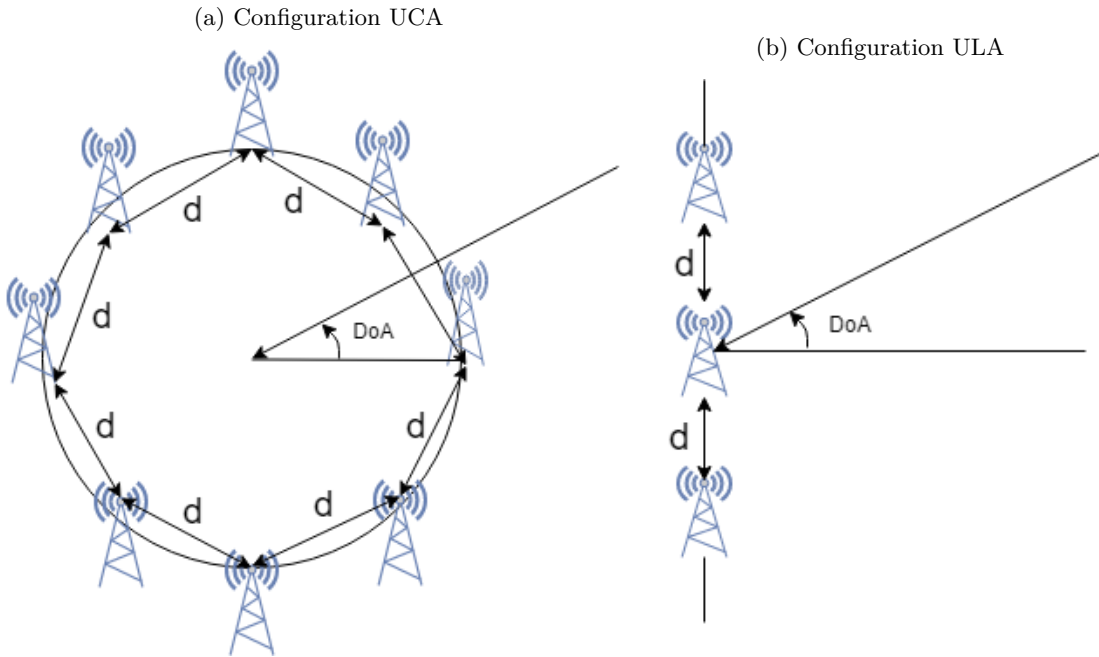


Figure 2.1 – Configuration géométrique du réseau d'antennes

Le signal transmis $x(t)$ s'écrit sous cette forme:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(t - kT), \quad (2.3)$$

où T représente la durée du symbole et $h(t)$ est un filtre de type racine carrée de cosinus surélevé (RCCS) pour mettre en forme une séquence de K symboles transmis $\{c_k\}_{i=0}^{K-1}$. Ces derniers sont générés aléatoirement selon un alphabet M-aire, C^M , avec une probabilité $\{P[a_m] = \frac{1}{M}\}_{a_m \in C^M}$. De plus, on suppose que tous les symboles transmis sont inconnus à la réception. Le signal reçu est

échantillonné avec un taux d'échantillonnage $\zeta = \frac{T}{T_s}$, où T_s est la période d'échantillonnage. On obtient à la sortie du $p^{\text{ième}}$ antenne les M échantillons suivants:

$$y_p(m) = \sum_{q=1}^Q \gamma_q e^{j\varphi_p(\theta_q)} \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(t_m - \tau_q - kT) + n_p(m), \quad (2.4)$$

où $\{t_m\}_{m=1}^M$ sont les instants d'échantillonnage. On regroupe maintenant tous les paramètres inconnus des trajets multiples dans les trois vecteurs suivants: $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q]^T$, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_Q]^T$, et $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_Q]^T$. En outre, on rassemble les échantillons collectés sur tous les éléments d'antennes à un instant donné en un seul vecteur, $\mathbf{y}(m) = [y_1(m), y_2(m), \dots, y_P(m)]^T$, donné par:

$$\mathbf{y}(m) = \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(t_m - \tau_q - kT) + \mathbf{N}(m), \quad (2.5)$$

où $\mathbf{N}(m) = [n_1(m), n_2(m), \dots, n_P(m)]^T$ représente le bruit et:

$$\mathbf{a}(\varphi) \triangleq [1, e^{j\varphi_1(\theta)}, e^{j\varphi_2(\theta)}, \dots, e^{j\varphi_P(\theta)}]^T, \quad (2.6)$$

est le vecteur de direction d'arrivée défini pour n'importe quelle direction θ . L'objectif de ce travail, est l'estimation conjointe de ces paramètres $\{\theta_q\}_{q=1}^Q$ et $\{\tau_q\}_{q=1}^Q$ en utilisant K symboles qui sont inconnus à la réception. Pour cette raison, on rassemble tous les échantillons reçus dans une seule matrice $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(M)]$, définie comme suit:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \text{diag}\{\boldsymbol{\gamma}\} \mathbf{H}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{C} + \mathbf{N}, \quad (2.7)$$

où \mathbf{N} est une matrice de bruit de dimension $(P \times M)$ où les éléments $[\mathbf{N}]_{p,m} = n_p(t_m)$, $\mathbf{C} = \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{c}$ est une matrice $(KM \times M)$ des symboles transmis et $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)]$ est une matrice $(P \times Q)$ contenant les Q vecteurs de direction. Les échantillons retardés de $h(t)$ sont rassemblés dans une matrice $(Q \times KM)$, $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_M]$, où \mathbf{H}_m est donnée par:

$$\mathbf{H}_m \triangleq \begin{pmatrix} h(mT_s - \tau_1) & \dots & h(mT_s - \tau_1 - (K-1)T) \\ h(mT_s - \tau_2) & \dots & h(mT_s - \tau_2 - (K-1)T) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h(mT_s - \tau_Q) & \dots & h(mT_s - \tau_Q - (K-1)T) \end{pmatrix}.$$

2.2 Dérivation de la fonction de vraisemblance concentrée

On commence par dériver la fonction de vraisemblance logarithmique (FVL) pour le problème d'estimation qui dépend de tous les paramètres inconnus $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{c} , et σ^2 . Ensuite, on se concentre sur la fonction de vraisemblance concentrée (FVC) qui dépend uniquement des délais et des angles. Puisque le bruit est supposé être blanc et gaussien, $\mathbf{y}(m)$ est également gaussien, ce qui donne la fonction de densité de probabilité (FDP) suivante:

$$p[\mathbf{y}(m); \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{c}, \sigma^2] = \frac{1}{\pi^P \det \{\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(m)\}} \times \exp \left\{ -[\mathbf{y}(m) - \mathbf{m}_{\mathbf{y}}(m)]^H \mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{-1}(m) [\mathbf{y}(m) - \mathbf{m}_{\mathbf{y}}(m)] \right\}, \quad (2.8)$$

où $\mathbf{m}_{\mathbf{y}}(m) = \mathbb{E}\{\mathbf{y}(m)\}$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(m) = \mathbb{E}\{[\mathbf{y}(m) - \mathbf{m}_{\mathbf{y}}(m)][\mathbf{y}(m) - \mathbf{m}_{\mathbf{y}}(m)]^H\}$ sont, respectivement, la moyenne et la matrice de covariance de $\mathbf{y}(m)$. Sachant que la moyenne du bruit est égale à zéro, i.e., $\mathbb{E}\{\mathbf{n}(m)\} = \mathbf{0}$, d'après (2.4) on aura:

$$\mathbf{m}_{\mathbf{y}}(m) = \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(mT_s - \tau_q - kT), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(m) = \mathbb{E}\{\mathbf{n}(m)\mathbf{n}(m)^H\} = \sigma^2 \mathbf{I}_P. \quad (2.10)$$

En injectant (2.9) et (2.10) dans (2.8), on obtient le résultat suivant:

$$p[\mathbf{y}(m); \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{c}, \sigma^2] = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^P} \times \exp \left\{ \frac{-1}{\sigma^2} \left\| \mathbf{y}(m) - \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(mT_s - kT - \tau_q) \right\|^2 \right\}.$$

De plus, le bruit est également supposé être temporairement blanc, ce qui donne la FDP suivante du vecteur $\mathbf{y} = [\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(M)]^T$:

$$p[\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{c}, \sigma^2] = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{MP}} \times \exp \left\{ \frac{-1}{\sigma^2} \sum_{m=1}^M \left\| \mathbf{y}(m) - \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(mT_s - kT - \tau_q) \right\|^2 \right\}.$$

Par la suite, on définit la FVL qui dépend de $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{c} , et σ^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{c}, \sigma^2) &\triangleq \ln \left(p[\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{c}, \sigma^2] \right) \\ &= -PM \ln(\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{m=1}^M \left\| \mathbf{y}(m) - \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(mT_s - kT - \tau_q) \right\|^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour diminuer le nombre des paramètres inconnus qui caractérisent cette fonction, on la maximise en respectant la variance du bruit. Le paramètre σ^2 estimé est obtenu en différenciant la FVL et en mettant le résultat à zéro pour obtenir:

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{PM} \sum_{m=1}^M \left\| \mathbf{y}(m) - \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(mT_s - kT - \tau_q) \right\|^2. \quad (2.12)$$

Le bruit estimé dans (2.12) peut être injecté dans (2.11) pour obtenir une FVL qui dépend seulement de $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\gamma}$ et \mathbf{c} :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{c}) = \sum_{m=1}^M \left\| \mathbf{y}(m) - \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(mT_s - kT - \tau_q) \right\|^2. \quad (2.13)$$

Maintenant, à l'aide de l'identité de Parseval, la FVL peut être exprimée dans le domaine de fréquence comme suit:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{c}) \approx \sum_{m=1}^M \left\| \mathbf{y}(\omega_m) - \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(\omega_m) e^{-j\omega_m(kT + \tau_q)} \right\|^2, \quad (2.14)$$

où $\{\omega_m = \frac{M-1}{MT_s}\}_{m=1}^M$ est la $m^{\text{ième}}$ fréquence et $\mathbf{y}(\omega_m)$ et $h(\omega_m)$ sont, respectivement, les transformées de Fourier discrètes (TFDs) de $\mathbf{y}(m)$ et $h(m)$. Les échantillons de fréquence des signaux retardés peuvent être écrits sous la forme suivante:

$$\boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau}) \triangleq h(\omega_m) \text{diag}\{\mathbf{f}_m(\boldsymbol{\tau})\} \otimes \mathbf{f}_m^{(K)T}, \quad (2.15)$$

où $\mathbf{f}_m(\boldsymbol{\tau}) = [e^{-j\omega_m\tau_1}, e^{-j\omega_m\tau_2}, \dots, e^{-j\omega_m\tau_Q}]^T$ et $\mathbf{f}_m^{(K)} = [1, e^{-j\omega_m T}, \dots, e^{-j\omega_m(K-1)T}]^T$. La FVL dans (2.14) peut être écrite sous une forme matricielle comme suit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\gamma}}) &\approx \sum_{m=1}^M \|\mathbf{y}(\omega_m) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau})\bar{\boldsymbol{\gamma}}\|^2 \\ &= \|\mathbf{y} - [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})]\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})\bar{\boldsymbol{\gamma}}\|^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

où $\mathbf{y} = [\mathbf{y}(\omega_1)^T \mathbf{y}(\omega_2)^T \dots \mathbf{y}(\omega_M)^T]^T$, $\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{c}$, et $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})$ est une matrice de dimension $(MQ \times KQ)$ définie comme suit:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau}) = [\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{\tau})^T \boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{\tau})^T \dots \boldsymbol{\Phi}_M(\boldsymbol{\tau})^T]^T. \quad (2.17)$$

Vu la complexité de la maximisation de (2.16) selon $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta}$ et $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ à la fois, et pour avoir ainsi une estimation plus simple, on applique la différentielle sur la FVL dans (2.16) et on met le résultat à zéro, pour obtenir le paramètre $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ donné par:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{MLE}} = \left[\underbrace{[\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})]\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})}_{\triangleq \mathbf{D}} \right]^\dagger \mathbf{y}, \quad (2.18)$$

où \mathbf{D}^\dagger est la pseudo-inverse Moore-Penrose de \mathbf{D} donnée par $\mathbf{D}^\dagger = (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}$. En remplaçant $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ dans (2.16) par sa valeur estimée $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{MLE}}$, on obtient la fonction de vraisemblance compressée (FVC) qui dépend uniquement de $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\tau}$:

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{y}^H \mathbf{D} (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \mathbf{y}, \quad (2.19)$$

Les valeurs estimées de $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont ainsi obtenus comme suit:

$$[\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}] = \underset{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}}{\operatorname{argmax}} \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}). \quad (2.20)$$

2.3 Maximisation globale de la FVC

En regardant de plus près la FVC dérivée dans (2.19), on s'aperçoit que trouver une expression analytique de son maximum global est trivialement insoluble à cause de sa non linéarité. En plus, le

problème a une dimension de $2Q$ et la recherche exhaustive sur la grille serait donc prohibitive du point de vue du calcul. Par conséquent, une approche numérique ou empirique doit être envisagée. Dans ce contexte, une solution développée dans (Wax & Leshem (1997)) consiste à utiliser une technique itérative. Malheureusement, cette technique nécessite une bonne initialisation et ne peut pas garantir une meilleure performance, car elle ne peut pas converger vers le maximum global de la fonction FVL. Par conséquent, pour trouver une solution *non-itérative* au problème d'estimation dans (2.19), permettant d'éviter tous les inconvénients des implémentations itératives, on utilise le théorème de maximisation proposé par Pincus dans (Pincus (1962)).

THÉORÈME: Soit S un domaine borné dans un espace Euclidien R^n à n dimensions. Les points sur R^n sont notés par $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Soit $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction continue sur S qui atteint son maximum global exactement en un point $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ sur S .

$$z_i = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\int \dots \int x_i e^{\rho F(\mathbf{x})} dx_1 \dots dx_n}{\int \dots \int e^{\rho F(\mathbf{x})} dx_1 \dots dx_n}. \quad (2.21)$$

La solution proposée dans (2.21) est appliquée à notre problème d'estimation en mettant $n = 2Q$, $\mathbf{x} \triangleq [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}]$, $\mathbf{z} \triangleq [\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}]$, $F(\mathbf{x}) \triangleq \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ et $S = [0, \tau_{max}]^Q \times [0, \pi]^Q$. En conséquence, les valeurs estimées des angles et des délais sont données par:

$$\hat{\tau}_q = \int \dots \int \tau_q \bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}, \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (2.22)$$

$$\hat{\theta}_q = \int \dots \int \alpha_q \bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}, \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (2.23)$$

où $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ est la fonction FVC normalisée définie comme suit:

$$\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) \triangleq \frac{e^{\rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})}}{\int \dots \int e^{\rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})} d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}}, \quad (2.24)$$

où ρ_0 est une valeur très élevée de ρ utilisée pour approximer la limite dans (2.21) Cependant, vu que la fonction $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ dans (2.24) est toujours positive et son intégrale est égale à "1", la FVC *normalisée* peut être considérée comme une fonction de densité de probabilité (FDP). Les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\tau}$ peuvent être supposés conjointement distribués selon $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$. En tenant compte de cette observation, les estimées de Maximum de Vraisemblance (EMVs) dans (2.22) et (2.23)

peuvent être vus comme des espérances statistiques, idem, pour $q = 1, 2, \dots, Q$, on obtient:

$$\hat{\tau}_q = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}} \{\tau_q\} \quad \text{and} \quad \hat{\theta}_q = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}} \{\theta_q\}. \quad (2.25)$$

On obtient une approximation plus précise des espérances présentées dans (2.25) comme suit:

$$\hat{\tau}_q = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tau_q^{(r)} \quad \text{and} \quad \hat{\theta}_q = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \theta_q^{(r)}, \quad (2.26)$$

où $\{\boldsymbol{\tau}^{(r)}\}_{r=1}^R$ et $\{\boldsymbol{\theta}^{(r)}\}_{r=1}^R$ sont les R réalisations aléatoires générées selon $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$. Évidemment, la variance des paramètres estimés obtenus dans (2.26) diminue avec l'augmentation du nombre de réalisations R . En outre, quand le paramètre ρ_0 tend vers l'infini, $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ devient une fonction Dirac-delta localisée autour du vrai maximum de $\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$. Par conséquent, les R réalisations sont générées aux alentours du vrai maximum et les espérances sont également très proches du même maximum.

2.4 Technique d'échantillonnage préférentiel

À ce stade, un problème pratique doit être abordé concernant la génération des réalisations requises. En effet, $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ est une fonction extrêmement non linéaire et a $2Q$ - dimensions. Notre idée consiste à substituer celle-ci par une autre, assez proche mais beaucoup plus simple à traiter. Le concept d'échantillonnage préférentiel nous permet d'appliquer concrètement une telle idée pour générer $\{\boldsymbol{\tau}^{(r)}\}_{r=1}^R$ et $\{\boldsymbol{\theta}^{(r)}\}_{r=1}^R$. En fait, on peut réécrire (2.22) et (2.23) sous les formes équivalentes suivantes, pour $q = 1, 2, \dots, Q$:

$$\hat{\tau}_q = \int \dots \int \tau_q \frac{\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})}{\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})} \bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}, \quad (2.27)$$

$$\hat{\theta}_q = \int \dots \int \theta_q \frac{\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})}{\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})} \bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}, \quad (2.28)$$

où $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ est une fonction à choisir aussi proche que possible de $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ et permettant en même temps une génération facile des réalisations requises $\{\boldsymbol{\tau}^{(r)}\}_{r=1}^R$ et $\{\boldsymbol{\theta}^{(r)}\}_{r=1}^R$. Dans ce cas, $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\tau}$ peuvent être distribués selon $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$. Par conséquent, les EMVs dans (2.27) et (2.28) sont réécrits

comme suit:

$$\hat{\tau}_q = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \tau_q^{(r)}, \quad (2.29)$$

$$\hat{\theta}_q = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \theta_q^{(r)}, \quad (2.30)$$

où $\eta(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ est défini sous la forme du ratio suivant:

$$\eta(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) \triangleq \frac{\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})}{\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})}. \quad (2.31)$$

2.4.1 Choix de la fonction d'échantillonnage préférentiel

Afin de faciliter le processus de la génération des réalisations, il est nécessaire de séparer les Q paires d'angle et délai. La fonction préférentielle $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ doit être choisie en considérant cette séparation. En d'autres termes, on cherche une fonction $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ qui peut être écrite comme suit:

$$\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) = \prod_{q=1}^Q \bar{g}_q(\theta_q, \tau_q). \quad (2.32)$$

Par conséquent, la génération des réalisations requises peut être effectuée séparément pour chacun des Q paires angle-délais. En d'autres termes, les paires $\{(\theta_q, \tau_q)\}_{q=1}^Q$ sont générés indépendamment en utilisant leurs FDPs correspondants $\{\bar{g}_q(\theta_q, \tau_q)\}_{q=1}^Q$ au lieu de $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ afin de générer aléatoirement les deux vecteurs $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\tau}$ de dimension Q . Cependant, $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ doit être aussi proche que possible de la FVC d'origine, $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$, afin de limiter autant que possible l'énergie de l'erreur et par conséquent les meilleures performances possibles. D'où l'idée de $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ construite à l'aide d'une approximation valide de $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$. En fait, à partir de (2.18), l'expression de \mathbf{D} peut être réécrite comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^H \mathbf{D} &= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})^H [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^H] [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})] \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau}), \\ &= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})^H \left(\mathbf{I}_M \otimes [\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})] \right) \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Remarquons que $\mathbf{I}_M \otimes [\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})]$ est une matrice diagonale par blocs, ce qui nous permet d'obtenir:

$$\mathbf{D}^H \mathbf{D} = \sum_{m=1}^M \Phi_m(\boldsymbol{\tau})^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \Phi_m(\boldsymbol{\tau}). \quad (2.34)$$

Par la suite, d'après (2.15) la $\{l^{\text{ième}}\}_{l=1}^{KQ}$ colonne peut être écrite sous la forme suivante:

$$[\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \Phi_m(\boldsymbol{\tau})]_l = \mathbf{a}(\theta_{l'}) h(\omega_m) e^{-j\omega_m(\tau_{l'} + l''T)}, \quad (2.35)$$

où $\{l' = \lfloor (l-1)/K \rfloor + 1\}_{l' \in [1, 2, \dots, Q]}$ (i.e., l' est égale à la partie entière de la division de $(l-1)$ par K) et $l'' \in [0, 1, 2, \dots, K-1]$ représente le reste de cette division (i.e., $l'' = (l-1) \bmod K$). Ce qui donne le $(l, n)^{\text{ième}}$ élément de $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ sous cette forme:

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}^H \mathbf{D}]_{l,n} &= \sum_{m=1}^M ([\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \Phi_m(\boldsymbol{\tau})]_l)^H [\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \Phi_m(\boldsymbol{\tau})]_n, \\ &= \left(\sum_{m=1}^M |h(\omega_m)|^2 e^{j\omega_m(\tau_{l'} - \tau_{n'} + (l'' - n'')T)} \right) \times \left(\sum_{p=1}^P e^{j(\varphi_p(\theta_{n'}) - \varphi_p(\theta_{l'}))} \right), \end{aligned} \quad (2.36)$$

où $n' = \lfloor (n-1)/K \rfloor + 1$ et $n'' = (n-1) \bmod K$. Tous les éléments diagonaux de $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ ont la même expression:

$$[\mathbf{D}^H \mathbf{D}]_{l,l} = P \sum_{m=1}^M |h(\omega_m)|^2. \quad (2.37)$$

On prévoit que les éléments hors diagonaux de $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ sont très négligeables par rapport aux éléments diagonaux et cela est dû à la superposition destructive (pour $l \neq n$) des exponentiels complexes dans (2.36), ce qui donne l'approximation suivante:

$$\mathbf{D}^H \mathbf{D} \approx P E_h \mathbf{I}_{KQ}, \quad (2.38)$$

où $E_h = \sum_{m=1}^M |h(\omega_m)|^2$ est l'énergie du filtre utilisé. Pour valider cette approximation, on définit un ratio entre les éléments hors diagonaux et ceux diagonaux de la matrice $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ comme suit:

$$\beta_{l,n} \triangleq \frac{\left(\sum_{m=1}^M |h(\omega_m)|^2 e^{j\omega_m(\tau_{l'} - \tau_{m'} + (l'' - m'')T)} \right)}{P \sum_{m=1}^M |h(\omega_m)|^2} \times \left(\sum_{p=1}^P e^{j(\varphi_p(\theta_{m'}) - \varphi_p(\theta_{l'}))} \right).$$

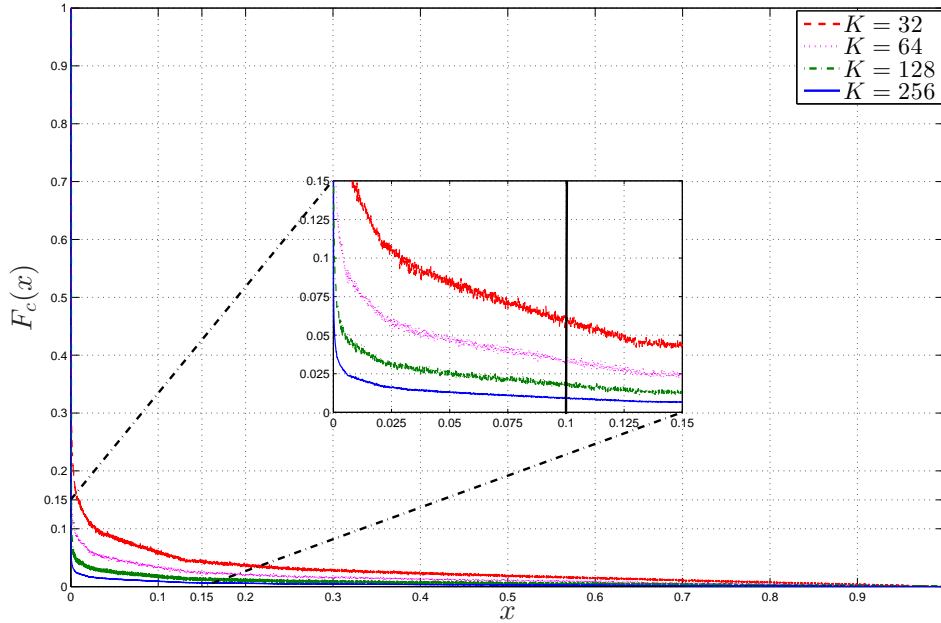


Figure 2.2 – La fonction de distribution cumulative complémentaire de l'amplitude du ratio entre les éléments hors diagonaux et diagonaux de la matrice $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$.

Ce ratio peut être écrit aussi sous cette forme:

$$\beta_{l,n} \triangleq \frac{\left(\sum_{m=1}^M |h(\omega_m)|^2 e^{j\omega_m(\tau_l - \tau_n)} \right) \left(\sum_{p=1}^P e^{j(\varphi_p(\theta_{n'}) - \varphi_p(\theta_l'))} \right)}{P \sum_{m=1}^M |h(\omega_m)|^2}, \quad (2.39)$$

où $\tau_l = \tau_{l'} + l''T$ et $\tau_n = \tau_{n'} + n''T$. Par la suite, on génère un très grand nombre des couples (τ_l, τ_n) et $(\theta_{l'}, \theta_{n'})$ uniformément distribués dans $[0, \tau_{\max} + (K - 1)T]^2$ et $[0, \pi]^2$. Après l'injection de ces réalisations dans (2.39), on calcule et on trace dans la Fig. 2.2 la fonction de distribution cumulative complémentaire (FDCC) de $|\beta_{l,n}|$, i.e., $F_c(x) = Pr[|\beta_{l,n}| \geq x]$.

La Fig. 2.2, montre que les éléments hors diagonaux de $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ sont négligeables par rapport à ceux sur la diagonale puisque $|\beta_{l,n}|$ a une très faible probabilité de dépasser 0.1. De plus, cette approximation devient de plus en plus précise en augmentant le nombre de symboles, où la probabilité de $|\beta_{l,n}| > 0.1$ diminue de 6% à 0.8% quand le nombre de symboles passe de $K = 32$ à $K = 256$. Donc, (2.38) est une approximation valide et précise de $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ pour l'utiliser par la suite dans (2.19)

afin d'obtenir une approximation précise de la FVC comme suit:

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) \approx \frac{1}{PE_h} \mathbf{y}^H \mathbf{D} \mathbf{D}^H \mathbf{y}. \quad (2.40)$$

D'après (2.18), on a $\mathbf{D} = [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})] \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})$. En injectant cette expression dans (2.40), on obtient:

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{PE_h} \left\| \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})^H [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^H] \mathbf{y} \right\|^2. \quad (2.41)$$

Maintenant, en utilisant (2.17) on peut écrire:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})^H [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^H] \mathbf{y} = \sum_{m=1}^M (\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau}))^H \mathbf{y}(\omega_m). \quad (2.42)$$

Par conséquent, on obtient l'approximation de la FVC comme suit:

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) \approx \frac{1}{PE_h} \sum_{l=1}^{KQ} \left| \sum_{m=1}^M [\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{\tau})]_l^H \mathbf{y}(\omega_m) \right|^2. \quad (2.43)$$

En appliquant des manipulations algébriques, la FVC dans (2.43) peut être réécrite sous cette forme:

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) \approx \frac{1}{PE_h} \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^K I_k(\theta_q, \tau_q), \quad (2.44)$$

dans laquelle $I_k(\theta, \tau)$ représente le périodogramme du signal à la $k^{\text{ième}}$ période de symbole et dont l'expression est donnée par:

$$I_k(\theta, \tau) = \left| \sum_{p=1}^P e^{j\varphi_p(\theta)} \sum_{m=1}^M h(\omega_m) y_p^*(\omega_m) e^{-j2\pi\omega_m(\tau+(k-1)T)} \right|^2. \quad (2.45)$$

On peut décomposer la FVC *approximée* dans (2.44) comme étant une superposition des contributions distinctes relatives aux Q paires délai-angle pour chaque période de symbole. Cette propriété peut être exploitée pour la création de la nouvelle pseudo-FDP suivante:

$$\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\exp \left\{ \rho_1 \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^K I_k(\theta_q, \tau_q) \right\}}{\int \cdots \int \exp \left\{ \rho_1 \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^K I_k(\theta'_q, \tau'_q) \right\} d\boldsymbol{\theta}' d\boldsymbol{\tau}'}. \quad (2.46)$$

Le facteur $\frac{1}{PE_h}$ qui se trouve dans (2.44) est inclus dans un nouveau paramètre, $\rho_1 \neq \rho_0$, dont le choix approprié sera discuté par la suite.

2.4.2 Procédure de génération de variables

Grâce à la décomposition linéaire dans (2.44), $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ est *séparable* en termes de paires angle-délai. En effet, on peut facilement montrer que $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ est factorisée comme suit:

$$\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) = \prod_{q=1}^Q \bar{g}_{\theta, \tau}(\theta_q, \tau_q), \quad (2.47)$$

où

$$\bar{g}_{\theta, \tau}(\theta_q, \tau_q) = \frac{\exp \left\{ \rho_1 \sum_{k=1}^K I_k(\theta_q, \tau_q) \right\}}{\iint \exp \left\{ \rho_1 \sum_{k=1}^K I_k(\theta'_q, \tau'_q) \right\} d\theta' d\tau'}. \quad (2.48)$$

D'après (2.47), les Q paires angle-délai $\{(\theta_q, \tau_q)\}_{q=1}^Q$, sont indépendantes et identiquement distribuées (iid). Par conséquent, il sera facile de générer, indépendamment, Q couples de réalisations $(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)})$ selon la distribution de $\bar{g}_{\theta, \tau}(\theta, \tau)$ et les assembler sous la forme de vecteurs de réalisations $\boldsymbol{\theta}^{(r)} = [\theta_1^{(r)}, \theta_1^{(r)}, \dots, \theta_Q^{(r)}]$ et $\boldsymbol{\tau}^{(r)} = [\tau_1^{(r)}, \tau_1^{(r)}, \dots, \tau_Q^{(r)}]$. En ce qui concerne la génération du couple $(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)})$, on fait appel à la théorie des probabilités. Cette dernière permet de factoriser la distribution conjointe $\bar{g}_{\theta, \tau}(\theta, \tau)$ selon deux formes équivalentes d'un produit des FDPs marginales et conditionnelles:

$$\bar{g}_{\theta, \tau}(\theta, \tau) = \bar{g}_{\tau}(\tau) \bar{g}_{\theta|\tau}(\theta|\tau), \quad (2.49)$$

$$\bar{g}_{\theta, \tau}(\theta, \tau) = \bar{g}_{\theta}(\theta) \bar{g}_{\tau|\theta}(\tau|\theta), \quad (2.50)$$

où \bar{g}_{τ} [resp., $\bar{g}_{\theta}(\theta)$] est la FDP marginale de τ [resp. θ] et $\bar{g}_{\tau|\theta}(\tau|\theta)$ [resp., $\bar{g}_{\theta|\tau}(\theta|\tau)$] est la FDP conditionnelle de τ sachant θ [resp., θ sachant τ]. Les deux identités équivalentes dans (2.49) et (2.50) suggèrent deux alternatives pour générer $(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)})$:

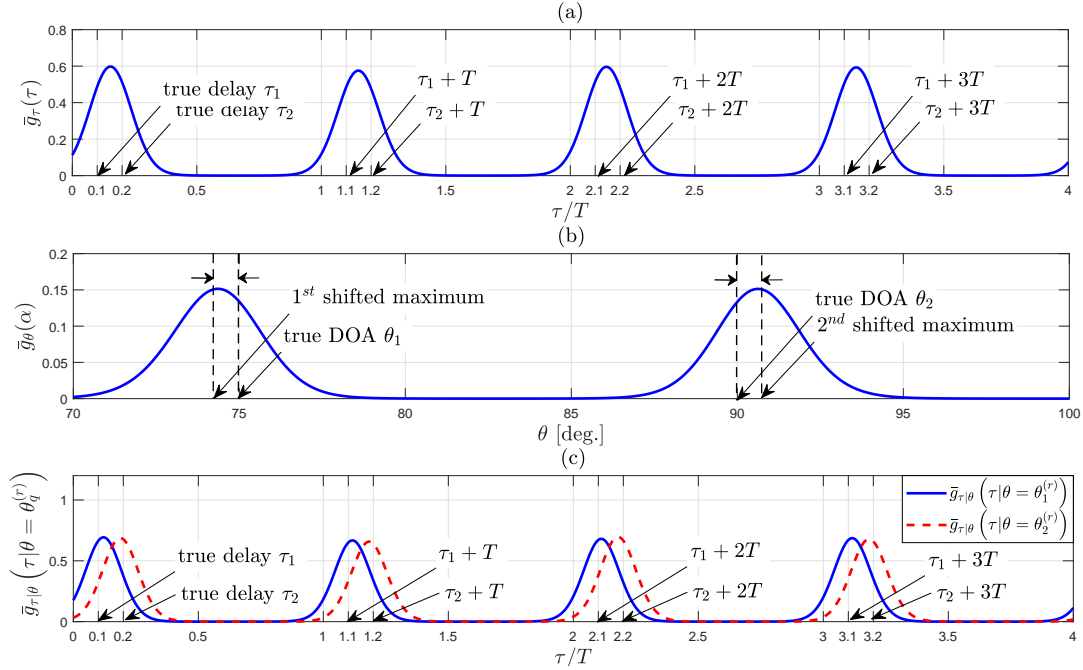


Figure 2.3 – Les FDPs marginales et conditionnelles pour $Q = 2$ et $\text{RSB} = 30$ dB: (a) FDP marginale de τ , (b) FDP marginale de θ , (c) les FDPs conditionnelles de τ sachant $\theta_q^{(r)}$.

1. ALTERNATIVE 1: générer $\theta_q^{(r)}$ en utilisant la FDP marginale de AA, $\bar{g}_\theta(\theta)$, puis utiliser la FDP conditionnelle de τ sachant $\theta_q^{(r)}$, i.e., $\bar{g}_{\tau|\theta}(\tau|\theta = \theta_q^{(r)})$, afin de générer la réalisation du délai de propagation correspondant $\tau_q^{(r)}$.
2. ALTERNATIVE 2: générer $\tau_q^{(r)}$ en utilisant FDP marginale des délais de propagation, $\bar{g}_\tau(\tau)$, puis utiliser la FDP conditionnelle de θ sachant $\tau_q^{(r)}$, i.e., $\bar{g}_{\theta|\tau}(\theta|\tau = \tau_q^{(r)})$, afin de générer la réalisation de l'angle correspondant $\theta_q^{(r)}$.

En pratique, les deux alternatives peuvent être considérées en fonction de la proximité des chemins dans l'espace et/ou dans le temps. En effet, on peut se retrouver dans le cas où les Q chemins ont des délais de propagation très proches, cependant, les chemins sont séparés dans le domaine spatial. La Fig. 2.3 (a) illustre ce phénomène pour deux chemins avec une séparation de délai $|\tau_1 - \tau_2| = 0.1 T$ et à un RSB de 30 dB (avec $\theta_1 = 75^\circ$ et $\theta_2 = 90^\circ$). Par conséquent, ALTERNATIVE 1 est plus appropriée dans ce cas, car "ALTERNATIVE 2" ne permet pas la résolution des délais proches qui sont inévitablement incarnés par un seul lobe principal. Dans le cas inverse, où les angles sont très proches les uns des autres, ALTERNATIVE 2 est une option plus appropriée car la FDP marginale des délais fournit des chemins séparés dans le domaine temporel.

En adoptant à titre d'exemple "ALTERNATIVE 1", la FDP marginale $\bar{g}_\theta(\theta)$, est évaluée comme suit:

$$\bar{g}_\theta(\theta) = \int \bar{g}_{\theta,\tau}(\theta, \tau) d\tau. \quad (2.51)$$

Cette dernière est utilisée pour générer les R réalisations des angles, $\{\boldsymbol{\theta}^{(r)} = [\theta_1^{(r)}, \theta_2^{(r)}, \dots, \theta_Q^{(r)}]^T\}_{r=1}^R$. Les angles générés peuvent être utilisés pour calculer le $q^{i\text{ème}}$ FDP conditionnelle du délai de propagation:

$$\bar{g}_{\tau|\theta}(\tau|\theta = \theta_q^{(r)}) = \frac{\bar{g}_{\tau,\theta}(\tau, \theta_q^{(r)})}{\bar{g}_\theta(\theta_q^{(r)})}, \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (2.52)$$

qui possède exactement un seul lobe principal autour de délai réel τ_q associé à l'angle θ_q comme le montre la Fig. 2.3 (c).

En principe, en se basant sur le résultat du lemme dans (Kay (2005)), la FDP marginale $\bar{g}_\theta(\theta)$ peut être utilisée d'abord pour générer les réalisations requises des AAs $\{\theta_q^{(r)}\}_{r=1}^R \sim \bar{g}_\theta(\theta)$ pour chaque $q = 1, 2, \dots, Q$ comme suit:

1. générer R réalisations $\{u_q^{(r)}\}_{r=1}^R \sim U[0, 1]$ pour $q = 1, 2, \dots, Q$,
2. obtenir $\{\{\theta_q^{(r)} = \bar{G}_\theta^{-1}(u_q^{(r)})\}_{r=1}^R\}_{q=1}^Q$ où $\bar{G}_\theta(\cdot)$ est la FDC associée à $\bar{g}_\theta(\theta)$.

2.4.3 Génération locale des réalisations requises

Dans cette section, on explique tous les détails nécessaires pour une implémentation plus facile et plus pratique du nouveau algorithme proposé. On rappelle que tous les angles et délais de propagation sont confinés, respectivement, dans ¹ $[0, \pi]$ et $[0, \bar{\tau}_{\max}]$ (où $\bar{\tau}_{\max}$ peut prendre une valeur aussi élevée que désiré).

L'algorithme proposé commence par l'évaluation du périodogramme, $I(\theta_i, \tau_j)$, défini dans (2.45) en multiples points (θ_i, τ_j) de la grille avec des pas de discrétisation relativement larges $\Delta_\theta^{\text{broad}}$ et $\Delta_\tau^{\text{broad}}$. Ensuite, les intégrales sont approximées par des sommes discrètes, pour obtenir la FDP conjointe, $\bar{g}_{\theta,\tau}(\theta, \tau)$, dans (2.48) à chaque point de la grille (i.e., $\forall(\theta_i, \tau_j) \in [0, \pi] \times [0, \bar{\tau}_{\max}]$) comme suit:

$$\bar{g}_{\theta,\tau}(\theta_i, \tau_j) = \frac{\exp\{\rho_1 I(\theta_i, \tau_j)\}}{\sum_i \sum_j \exp\{\rho_1 I(\theta_i, \tau_j)\} \Delta_\tau^{\text{broad}} \Delta_\theta^{\text{broad}}}, \quad (2.53)$$

1. Pour RCU, les angles doivent être confinés dans $[0, 2\pi]$.

à partir de laquelle la FDP marginale des angles est calculée comme suit:

$$\bar{g}_\theta(\theta_i) = \sum_j \bar{g}(\theta_i, \tau_j) \Delta_\tau^{\text{broad}} \quad \forall \theta_i \in [0, \pi]. \quad (2.54)$$

Les valeurs estimées initiales des angles $\{\hat{\theta}_q^{(0)}\}_{q=1}^Q$, dans (2.54) représentent les points discrets des angles qui correspondent aux plus larges Q maximums de (2.54). Par la suite, pour chaque $q = 1, 2, \dots, Q$, la FDP conditionnelle du $q^{\text{ième}}$ délai correspondant à la $q^{\text{ième}}$ valeur estimée initiale de l'angle $\hat{\theta}_q^{(0)}$ est directement obtenue comme suit:

$$\bar{g}_{\tau|\theta}(\tau_j | \theta = \hat{\theta}_q^{(0)}) = \frac{\bar{g}_{\theta, \tau}(\hat{\theta}_q^{(0)}, \tau_j)}{\bar{g}_\theta(\hat{\theta}_q^{(0)})} \quad \forall \tau_j \in [0, \bar{\tau}_{max}]. \quad (2.55)$$

Les valeurs estimées initiales $\hat{\tau}_q^{(0)}$, pour le $q^{\text{ième}}$ délai dans (2.55) représentent les points discrets, τ_j qui correspondent aux maximums de (2.55). Ensuite, on fixe Q nouveaux intervalles pour les angles et les délais afin de générer des réalisations *locales*, $\{\theta_q^{(r)}\}_{r=1}^R$ (resp. $\{\tau_q^{(r)}\}_{r=1}^R$), aux alentours des vrais angles (resp. vrais délais). Ces intervalles sont centrés aux alentours de $\hat{\tau}_q^{(0)}$ et $\hat{\theta}_q^{(0)}$, respectivement comme suit:

$$D_{\hat{\tau}_q^{(0)}} = [\hat{\tau}_q^{(0)} - \delta_\tau, \hat{\tau}_q^{(0)} + \delta_\tau] \quad (2.56)$$

$$D_{\hat{\theta}_q^{(0)}} = [\hat{\theta}_q^{(0)} - \delta_\theta, \hat{\theta}_q^{(0)} + \delta_\theta] \quad (2.57)$$

Maintenant, pour générer ces réalisations *locales*, on applique les étapes suivantes, pour chaque $q = 1, 2, \dots, Q$:

- **Étape 1:** Évaluer la FDP conjointe, $\bar{g}_{\theta, \tau}(\theta'_i, \tau'_j)$, *localement* avec les nouveaux points de la grille $(\theta'_i, \tau'_j) \in D_{\hat{\theta}_q^{(0)}} \times D_{\hat{\tau}_q^{(0)}}$ comme dans (2.53); mais avec une discrétisation plus petite $\Delta_\tau^{\text{small}} < \Delta_\tau^{\text{broad}}$ et $\Delta_\theta^{\text{small}} < \Delta_\theta^{\text{broad}}$.
- **Étape 2:** Calculer la $q^{\text{ième}}$ FDP marginale de AA *locale* (i.e., $\bar{g}_{\theta, q}(\theta'_i) \forall \theta'_i \in D_{\hat{\theta}_q^{(0)}}$) comme mentionné dans (2.54), i.e.:

$$\bar{g}_{\theta, q}(\theta'_i) = \sum_j \bar{g}(\theta'_i, \tau'_j) \Delta_\tau^{\text{small}} \quad \forall \theta'_i \in D_{\hat{\theta}_q^{(0)}}. \quad (2.58)$$

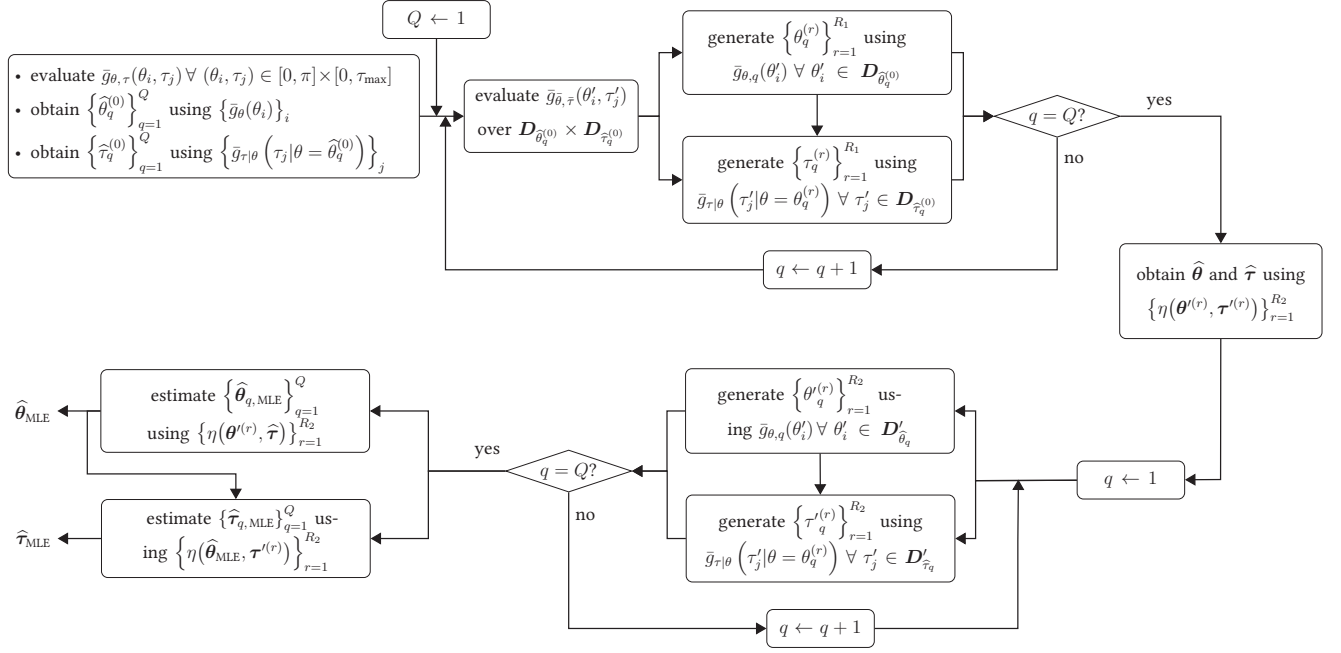


Figure 2.4 – Le diagramme du nouveau algorithme basé sur le concept EP.

— **Étape 3:** Calculer la $q^{\text{ième}}$ FDC des angles *localement* comme suit:

$$\bar{G}_{\theta,q}(\theta'_i) = \sum_{l \leq i} \bar{g}_{\theta,q}(\theta'_l) \Delta_{\theta}^{\text{small}} \quad \forall \theta'_i \in D_{\hat{\theta}_q^{(0)}} \quad (2.59)$$

— **Étape 4:** Générer R réalisations $\{u_q^{(r)}\}_{r=1}^R \sim U[0, 1]$ et inverser $\bar{G}_{\theta,q}(\cdot)$ à l'aide d'une interpolation linéaire afin d'obtenir les R réalisations locales des angles $\{\theta_q^{(r)} = \bar{G}_{\theta,q}^{-1}(u_q^{(r)})\}_{r=1}^R$.

— **Étape 5:** Obtenir la FDP conditionnelle *locale* du $q^{\text{ième}}$ délai à partir de la FDP conjointe locale (évaluée dans l'«ÉTAPE 1») pour chaque $r = 1, 2, \dots, R$ comme suit :

$$\bar{g}_{\tau|\theta}(\tau'_j | \theta = \theta_q^{(r)}) = \frac{\bar{g}_{\theta,\tau}(\theta_q^{(r)}, \tau'_j)}{\bar{g}_{\theta,q}(\theta_q^{(r)})} \quad \forall \tau'_j \in D_{\hat{\tau}_q^{(0)}}. \quad (2.60)$$

— **Étape 6:** Évaluer la $q^{\text{ième}}$ FDC *locale* du délai, $\bar{G}_{\tau,q}(\tau'_j)$, de la même façon que $\bar{G}_{\theta,q}(\theta'_i)$ dans (2.59) et générer la $r^{\text{ième}}$ réalisation du délai $\tau_q^{(r)} = \bar{G}_{\tau,q}^{-1}(u_q^{(r)})$, en faisant appel à l'interpolation linéaire comme auparavant.

2.5 Estimation des DPs et des AAs

Après avoir effectué les six étapes précédentes pour tous les Q chemins, les DPs et les AAs sont estimés à partir de toutes les réalisations générées en utilisant la moyenne *circulaire* au lieu de la moyenne *linéaire* présentée dans (2.29) et (2.30) pour obtenir une estimation plus précise. La moyenne circulaire (Mardia (2014), ch. 2,3) d'une transformation quelconque $f(\Phi)$ d'une variable aléatoire donnée $\Phi \in [-\pi, \pi]$ avec la distribution $p_\Phi(\phi)$ est définie comme $\bar{\phi} \triangleq \angle E\{f(\Phi)e^{j\Phi}\}$. Comme pour la moyenne linéaire dans (2.29) et (2.30), si les R réalisations $\{\phi^{(r)} \sim p_\Phi(\cdot)\}_{r=1}^R$ de Φ sont disponibles, $\bar{\phi}$ peut être estimé comme suit:

$$\hat{\bar{\phi}} = \angle \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R f(\phi^{(r)}) e^{j\phi^{(r)}}, \quad (2.61)$$

où $\angle\{\cdot\}$ retourne l'argument d'un nombre complexe. L'utilisation de la moyenne *circulaire* atténue le biais de l'estimateur, en particulier à un seuil très faible du RSB (Wang *et al.* (2008) - Kay & Saha (2000)). Puisque les réalisations originales, $\tau_q^{(r)}$ et $\theta_q^{(r)}$ sont, respectivement, dans $[0, \tau_{\max}]$ et $[0, \pi]$, il est nécessaire de les transformer dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour appliquer la moyenne *circulaire*. Pour cette raison, on utilise les deux transformations suivantes $\phi_1(\tau_q^{(r)}) = 2\pi \left(\frac{\tau_q^{(r)}}{\tau_{\max}} - \frac{1}{2} \right) \in [-\pi, \pi]$ et $\phi_2(\theta_q^{(r)}) = (2\theta_q^{(r)} - \pi) \in [-\pi, \pi]$. La moyenne circulaire est appliquée en utilisant ces réalisations transformées, i.e., $\{\phi_1(\tau_q^{(r)})\}_{r=1}^R$ et $\{\phi_2(\theta_q^{(r)})\}_{r=1}^R$. Par la suite, les vrais AAs et DPs sont estimés à travers les transformations inverses, $\phi_1^{-1}(\cdot)$ et $\phi_2^{-1}(\cdot)$ [de $\phi_1(\cdot)$ et $\phi_2(\cdot)$], données par $\phi_1^{-1}(\tau) = \tau_{\max} \left(\frac{1}{2\pi}\tau + \frac{1}{2} \right)$ et $\phi_2^{-1}(\theta) = \frac{1}{2}\theta + \frac{\pi}{2}$. Toutes les manipulations liées à l'utilisation de la moyenne circulaire sont résumées comme suit:

$$\hat{\tau}_q = \tau_{\max} \left(\frac{1}{2\pi} \angle \left[\sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \exp \left\{ j 2\pi \left(\frac{\tau_q^{(r)}}{\tau_{\max}} - \frac{1}{2} \right) \right\} \right] + \frac{1}{2} \right), \quad (2.62)$$

$$\hat{\theta}_q = \frac{1}{2} \angle \left[\sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \exp \left\{ j \left(2\theta_q^{(r)} - \pi \right) \right\} \right] + \frac{\pi}{2}. \quad (2.63)$$

Rappelant que le coefficient de pondération $\eta(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)})$ déjà défini dans (2.31) peut être explicitement exprimé comme suit:

$$\eta(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) = \frac{\int \cdots \int \exp \left\{ \rho_1 \sum_{q=1}^Q I(\theta_q, \tau_q) \right\} d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}}{\int \cdots \int \exp \left\{ \rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) \right\} d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}} \times \exp \left\{ \rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \rho_1 \sum_{q=1}^Q I(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) \right\} \quad (2.64)$$

Afin de réduire la complexité de calcul et d'évaluer correctement ce coefficient, on a deux remarques pertinentes. Tout d'abord, il suffit d'évaluer les arguments des quantités complexes dans (2.62) et (2.63). Puisque le ratio des intégrales dans (2.64) est *constant* (i.e; ne dépend pas du compteur de sommation r) et *positif*, il peut être omis et donc n'a pas besoin d'être évalué. Deuxièmement, à cause au choix du paramètre ρ_0 qui doit être très élevé pour respecter la limite dans (2.21), l'évaluation du terme restant dans (2.64) peut causer un débordement. Pour éviter ce problème, on utilise le coefficient de pondération normalisé suivant:

$$\bar{\eta}(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) = \exp \left\{ \rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \rho_1 \sum_{q=1}^Q I(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) - \max_{1 \leq r \leq R} \left[\rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \rho_1 \sum_{q=1}^Q I(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) \right] \right\}, \quad (2.65)$$

au lieu de $\eta(\boldsymbol{\tau}^{(r)}, \boldsymbol{\theta}^{(r)})$ dans (2.62) et (2.63) sans changer le résultat final. De plus, l'utilisation de la fonction \mathcal{L}_c exige l'inversion d'une matrice de dimension $[KQ \times KQ]$ R fois. Cette dernière rend la mise en œuvre pratique de l'implémentation plus complexe, en particulier avec un grand nombre de symboles. Ce dernier rend difficile la mise en œuvre pratique de la technique MV-EP, en particulier avec un grand nombre de symboles. Dans la partie suivante, on montre comment peut-on réduire la complexité de calcul liée à l'évaluation du coefficient $\bar{\eta}(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)})$.

2.6 Approximation du coefficient de pondération

Un problème persistant consiste à inverser une matrice de grande taille. En effet, on rappelle que le coefficient de pondération normalisé dans (2.65) nécessite l'inversion d'une matrice $[KQ \times KQ]$ R fois, ce qui entraîne une charge de calcul additionnelle à notre estimateur qui augmente avec le nombre de symboles. Pour résoudre ce problème, on commence par rappeler la FVC actuelle dans (2.19) où la matrice $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ est construite par Q^2 blocs matriciels, chacun de taille $K \times K$. Notant que la technique EP donne toujours le même résultat en effectuant plusieurs permutations sur les colonnes et les lignes de $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$. En effet, on suppose que \mathbf{B} est une matrice de permutation permettant l'échange de la position des colonnes de la matrice \mathbf{D} . En utilisant le fait que $\mathbf{B} \mathbf{B}^T =$

\mathbf{I}_{KQ} , cela donne:

$$\mathcal{L}_c^{(p)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{y}^H \mathbf{D}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{D}^H \mathbf{D} \mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{D}^H \mathbf{y}, \quad (2.66)$$

qui peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\mathcal{L}_c^{(p)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{y}^H \mathbf{D}^{(p)} (\mathbf{D}^{(p)H} \mathbf{D}^{(p)})^{-1} \mathbf{D}^{(p)H} \mathbf{y}, \quad (2.67)$$

où $\mathbf{D}^{(p)} = \mathbf{D}\mathbf{B}$ représente le résultat de la permutation des colonnes de la matrice \mathbf{D} en utilisant la matrice de permutation \mathbf{B} . En se basant sur les éléments de $\mathbf{D}^{(p)} = \mathbf{D}\mathbf{B}$, on remarque que:

$$[\mathbf{D}^{(p)H} \mathbf{D}^{(p)}]_{l,n} = \left(\sum_{m=1}^M |h(\omega_m)|^2 e^{j\omega_m(\tau_{l'} - \tau_{n'} + (l'' - n'')T)} \right) \times \left(\sum_{p=1}^P e^{j(\varphi_p(\theta_{n'}) - \varphi_p(\theta_{l'}))} \right), \quad (2.68)$$

où $n' = \lfloor (n-1)/Q \rfloor$, $n'' = (n-1) \bmod Q + 1$, $l' = \lfloor (l-1)/Q \rfloor$ et $l'' = (l-1) \bmod Q + 1$. Sous cette forme, on peut obtenir la matrice $\mathbf{D}^{(p)H} \mathbf{D}^{(p)}$ construite à partir des matrices plus petites, chacune de taille $Q \times Q$, comme suit:

$$\mathbf{D}^{(p)H} \mathbf{D}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{(1,1)} & \mathbf{J}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{J}^{(1,K)} \\ \mathbf{J}^{(2,1)} & \mathbf{J}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{J}^{(2,K)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{J}^{(K-1,1)} & \mathbf{J}^{(K-1,2)} & \dots & \mathbf{J}^{(K-1,K)} \\ \mathbf{J}^{(K,1)} & \mathbf{J}^{(K,2)} & \dots & \mathbf{J}^{(K,K)} \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

où les matrices $\mathbf{J}^{(l'',n'')}$ sont données par:

$$[\mathbf{J}^{(l'',n'')}]_{l',n'} = \left(\sum_{m=1}^M |h(\omega_m)|^2 e^{j\omega_m(\tau_{l'} - \tau_{n'} + (l'' - n'')T)} \right) \times \left(\sum_{p=1}^P e^{j(\varphi_p(\theta_{n'}) - \varphi_p(\theta_{l'}))} \right). \quad (2.70)$$

Grâce à la superposition destructive (pour $l'' \neq n''$) des exponentielles complexes dans (2.68), les matrices non diagonales de $\mathbf{D}^{(p)H} \mathbf{D}^{(p)}$ sont supposées être très petites par rapport aux blocs sur la diagonale. De plus, on a:

$$\mathbf{J}^{(l''_1, l''_1)} = \mathbf{J}^{(l''_2, l''_2)} \quad \forall l''_1, l''_2 \in [1, 2, \dots, K]. \quad (2.71)$$

On obtient donc l'approximation utile suivante:

$$\mathbf{D}_p^H \mathbf{D}_p \approx \mathbf{I}_K \otimes \mathbf{J}^{(1,1)}. \quad (2.72)$$

La matrice approximée $\mathbf{D}^{(p)H} \mathbf{D}^{(p)}$ est maintenant une matrice diagonale par blocs. Par conséquent, le calcul de son inverse peut être obtenu en inversant $\mathbf{J}^{(1,1)}$. Finalement, on peut utiliser le coefficient de pondération approximé suivant:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^{(a)}(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) = \exp \left\{ \rho_0 \mathcal{L}_c^{(p)}(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \rho_1 \sum_{q=1}^Q I(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) \right. \\ \left. - \max_{1 \leq r \leq R} \left[\rho_0 \mathcal{L}_c^{(p)}(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \rho_1 \sum_{q=1}^Q I(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Pour valider cette hypothèse, on évalue deux ratios, le premier entre $[\mathbf{J}^{(l'', n'')}]_{l', l'}$ et $[\mathbf{J}^{(l'', l'')}]_{l', l'}$ et le deuxième entre $[\mathbf{J}^{(l'', n'')}]_{l', n'}$ et $[\mathbf{J}^{(l'', l'')}]_{l', n'}$. On définit donc ces deux ratios comme suit:

$$\beta_{l', l'} = \frac{\sum_{m=1}^M |h(w_m)|^2 e^{jw_m(l'' - n'')T}}{\sum_{m=1}^M |h(w_m)|^2}, \quad (2.74)$$

$$\beta_{l', n'} = \frac{\sum_{m=1}^M |h(w_m)|^2 e^{jw_m(\tau_{l'} - \tau_{n'} + (l'' - n'')T)}}{\sum_{m=1}^M |h(w_m)|^2 e^{jw_m(\tau_{l'} - \tau_{n'})}}. \quad (2.75)$$

On génère un très grand nombre de couples (l'', n'') et $(\tau_{l'}, \tau_{n'})$ uniformément distribués, respectivement, dans $[0, K - 1]^2$ et $[0, \tau_{\max}]^2$. Par la suite, on injecte ces réalisations dans (2.74) et (2.75) pour calculer et tracer la FDCC de $|\beta_{l', l'}|$ et $|\beta_{l', n'}|$ (i.e., $F_c(x) = Pr[|\beta_{l', l'}| \geq x]$ et $F_c(x) = Pr[|\beta_{l', n'}| \geq x]$) dans la Fig.2.5

La Fig. 2.5. montre que les matrices non diagonales de $\mathbf{D}^{(p)H} \mathbf{D}^{(p)}$ sont négligeables par rapport à celles sur la diagonale puisque les deux ratios ont une très faible probabilité de dépasser 0.1. Donc, (2.73) est une approximation valide de $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ pour l'adopter par la suite dans (2.62) et (2.63).

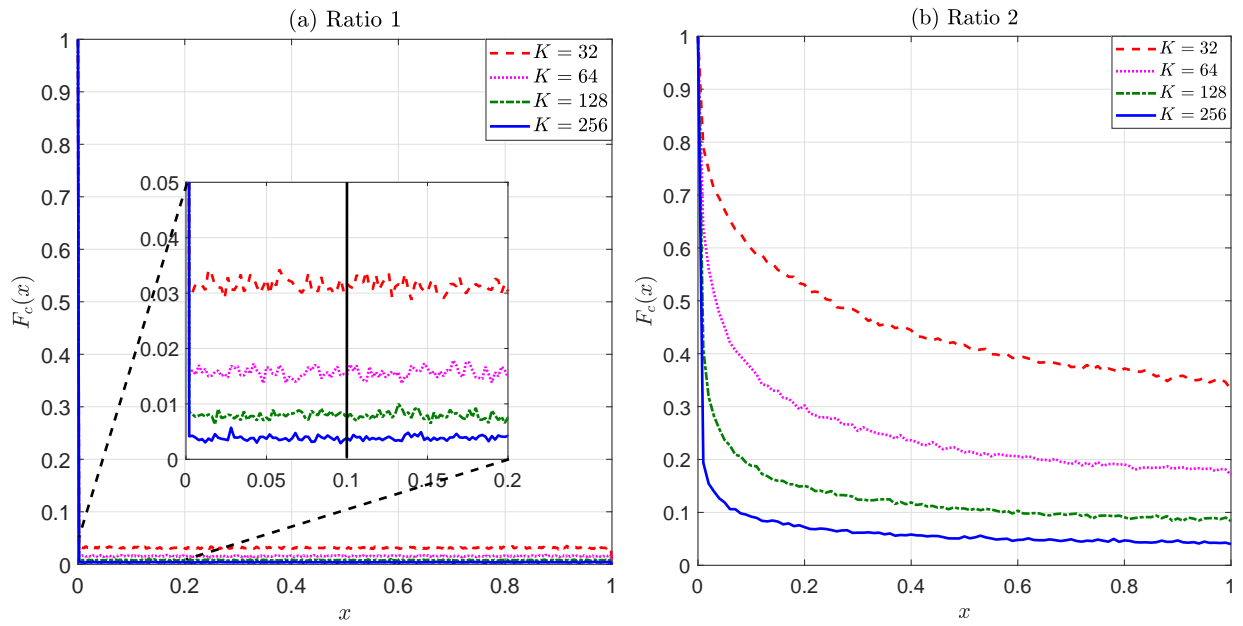


Figure 2.5 – La fonction de distribution cumulative complémentaire: (a) FDCC de $|\beta_{\nu, \nu'}|$, (b) FDCC de $|\beta_{\nu, \nu'}|$.

Après avoir expliqué tous les détails de développement de la nouvelle approche proposée, les techniques utilisées et l'implémentation de notre algorithme, on discute dans le chapitre suivant les résultats obtenus et les performances du nouvel estimateur.

Chapitre 3

Résultats de simulations

Dans ce chapitre, on évaluera les performances de notre estimateur en termes de la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (REQM), d'abord par rapport à la BICR ensuite par rapport à MV-EP dans le cas DA.

3.1 Paramètres de simulations

On considère pour toutes les simulations présentées par la suite un système SIMO constitué de $P = 5$ antennes espacées d'une demi longueur d'onde $\lambda/2$. À la réception de ces antennes, on a $M = 256$ échantillons reçus sur deux trajets ($Q = 2$) ayant la même puissance ($\gamma = [1, 1]$) avec des délais de propagation $\tau_1 = 0.1 T$ $\tau_2 = 0.5 T$ et localisés aux directions $\theta_1 = 75^\circ$ et $\theta_2 = 120^\circ$. Le signal transmis est une séquence de $K = 128$ symboles 4-*MAQ* de période $T = \zeta \times T_s$ où $\zeta = 2$ est le facteur d'échantillonnage et T_s est la période d'échantillonnage. Le filtre utilisé est de type RCCS avec un facteur *roll-off* $\alpha = 0.5$. Le nombre de réalisations générées choisi est $R1 = R2 = 1000$ pour les deux blocs afin de fournir des estimations avec une précision suffisante. Le paramètre ρ_1 est fixé à 15 alors que ρ_0 présumé très élevé est fixé à 1500000. Tous les angles d'arrivé et délais de propagation sont confinés, respectivement, dans $[0, T]$ et $[0, \pi]$. Les Q nouveaux intervalles définis dans (2.56) afin de générer des réalisations locales aux alentours des vrais angles et délais sont fixés, respectivement, à $\delta_\theta = 0.4^\circ$ et $\delta_\tau = 0.009 T$ pour le premier bloc de génération locale et à $\delta'_\theta = 0.3^\circ$ et $\delta'_\tau = 0.008 T$ pour le second. Pour étudier les performances, on définit le REQM pour chaque

$q^{i\grave{e}me}$ délai de propagation et AA, respectivement, comme suit:

$$REQM(T) = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{M_c} (\hat{\tau}_{q,MLE}^{[m]} - \tau_q)^2}{M_c}}, \quad (3.1)$$

$$REQM(deg.) = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{M_c} (\hat{\theta}_{q,MLE}^{[m]} - \theta_q)^2}{M_c}}, \quad (3.2)$$

où $M_c = 500$ représente le nombre de simulations Monte-Carlo et $\hat{\tau}_{q,MLE}^{[m]}$ et $\hat{\theta}_{q,MLE}^{[m]}$ sont, respectivement, les estimations de τ_q et θ_q pour la $m^{i\grave{e}me}$ simulation Monte-Carlo.

3.2 Choix des paramètres

On a déjà mentionné que le paramètre ρ_1 , contrairement à ρ_0 , doit être choisi soigneusement. Le paramètre R , qui représente le nombre de réalisations pour la génération des variables, doit être aussi bien choisi. On fournira dans cette section des lignes directrices sur le choix approprié de ces paramètres.

3.2.1 Choix de ρ_0

Tel que suggéré par le théorème de Pincus, la valeur de ce paramètre devrait être infinie de manière à satisfaire la limite infinie impliquée dans (2.21). Cependant, en pratique, on travaille avec une valeur finie mais suffisamment élevée et optimisée en fonction du comportement observé de l'estimateur. En fait, on constate que pour de faibles valeurs de ρ_0 , les performances de l'estimation sont très médiocres, comme l'illustre la Fig. 3.1. En augmentant ρ_0 , la précision de l'estimateur s'améliore considérablement. Et à partir d'un seuil inférieur, $\bar{\rho}_0$, les performances restent stables, donc, toute valeur de $\rho_0 > \bar{\rho}_0$ peut être utilisée. Tel que suggéré par les Figs. 3.1, la valeur minimale de ρ_0 est $\bar{\rho}_0 = 1000000$ à partir de laquelle l'estimateur fournit la meilleure performance en termes des AAs et des DPs (c'est-à-dire proche de la BICR).

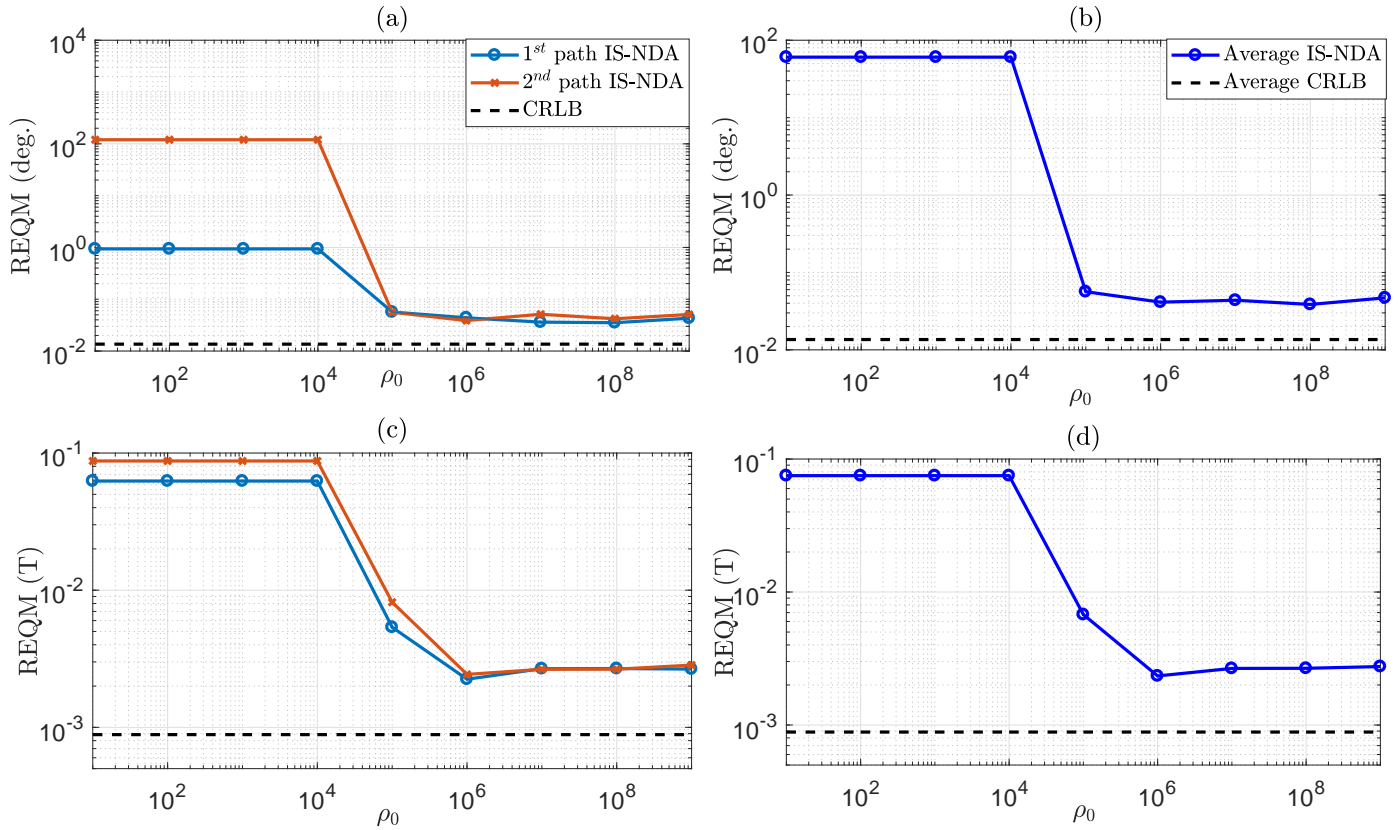


Figure 3.1 – L’impact du paramètre, ρ_0 , sur les performances de la technique proposée pour $K = 128$, $RSB = 30$ dB: (a) AAs, et (b) moyenne de deux trajets AAs (c) DPs (d) moyenne de deux trajets DPs.

3.2.2 Choix de ρ_1

Ce paramètre permet de contrôler la largeur des lobes principaux dans $\bar{g}_\theta(\theta)$ et $\bar{g}_{\tau|\theta}(\tau|\theta)$ qui apparaissent respectivement aux alentours des véritables AAs et DPs (inconnus), $\{\theta_q\}_{q=1}^Q$ et $\{\tau_q\}_{q=1}^Q$. Dans le cas où la valeur de ρ_1 est très élevée, les lobes principaux de $\bar{g}_\theta(\theta)$ sont extrêmement étroits, ce qui rend plus probable le fait que les vrais AAs se situent en dehors de ces lobes. Par conséquent, les réalisations de chaque $q^{\text{ième}}$ angle, θ_q , seront toutes décalées de θ_q , ce qui entraînera un biais d’estimation inévitable. Contrairement à ρ_0 , il existe un seuil maximal, $\bar{\rho}_1$, qui ne devrait pas être dépassé par ρ_1 , comme le montrent les Figs. 3.2 ci-dessous. Remarquons que les performances de l’estimateur se dégradent à partir du moment où ρ_1 dépasse le seuil maximal $\bar{\rho}_1 = 500$.

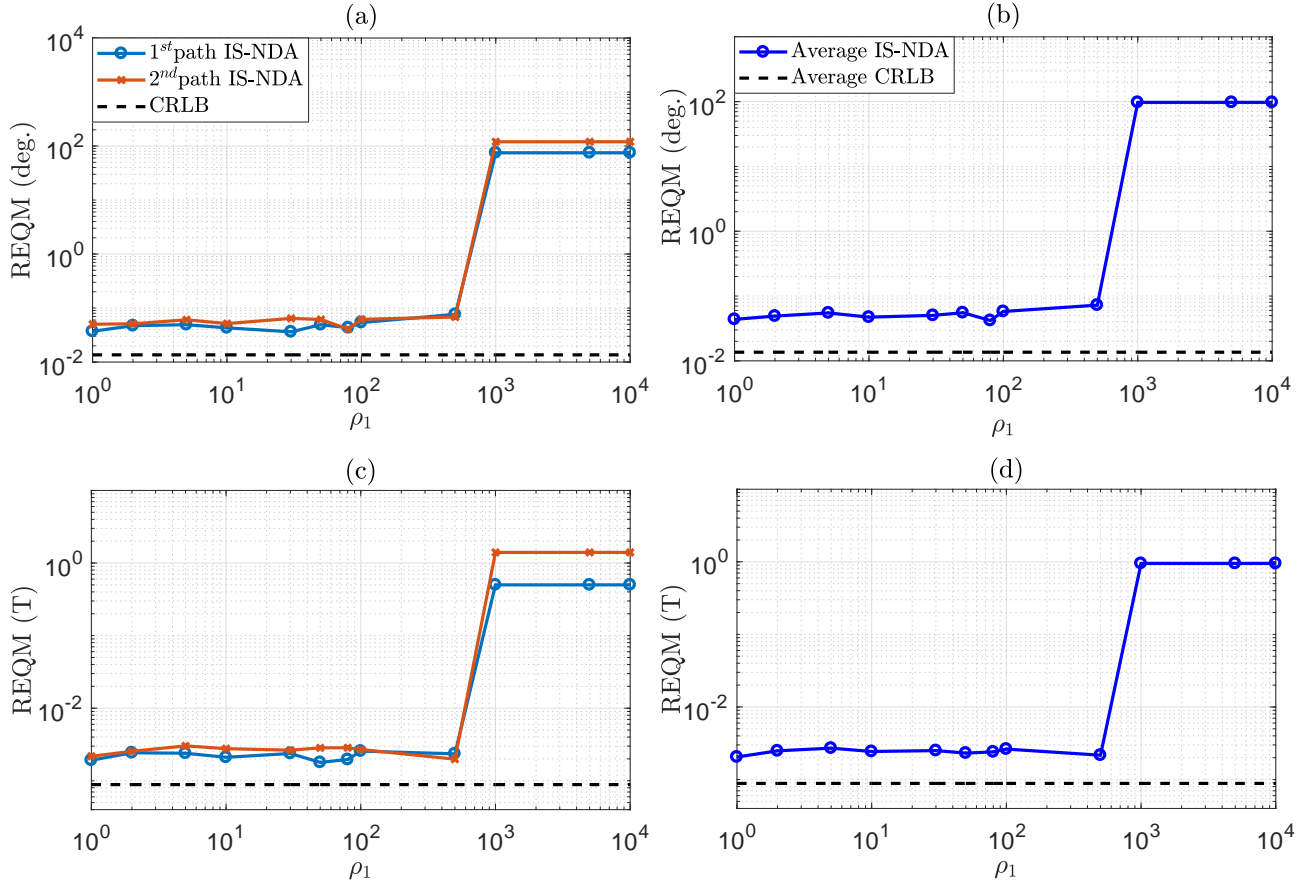


Figure 3.2 – L’impact du paramètre, ρ_1 , sur les performances de la technique proposée nvir pour $K = 128$ et $RSB = 30$ dB: (a) AAs, et (b) moyenne de deux trajets AAs (c) DPs (d) moyenne de deux trajets DPs.

3.2.3 Choix de R

Le nombre de réalisations est un paramètre très important pour obtenir une meilleure estimation. Les résultats présentés dans les Figs. 3.3 montrent que les performances de notre nouvelle approche s’améliorent avec des valeurs plus élevées de R car la variance des estimées diminue. De plus, avec un choix commode de ρ_0 et ρ_1 , $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ devient une fonction de Dirac-delta centrée sur le vrai maximum de $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$. Par conséquent, les R réalisations sont générées à proximité du vrai maximum et il en résulte que les espérances sont également proches du même maximum.

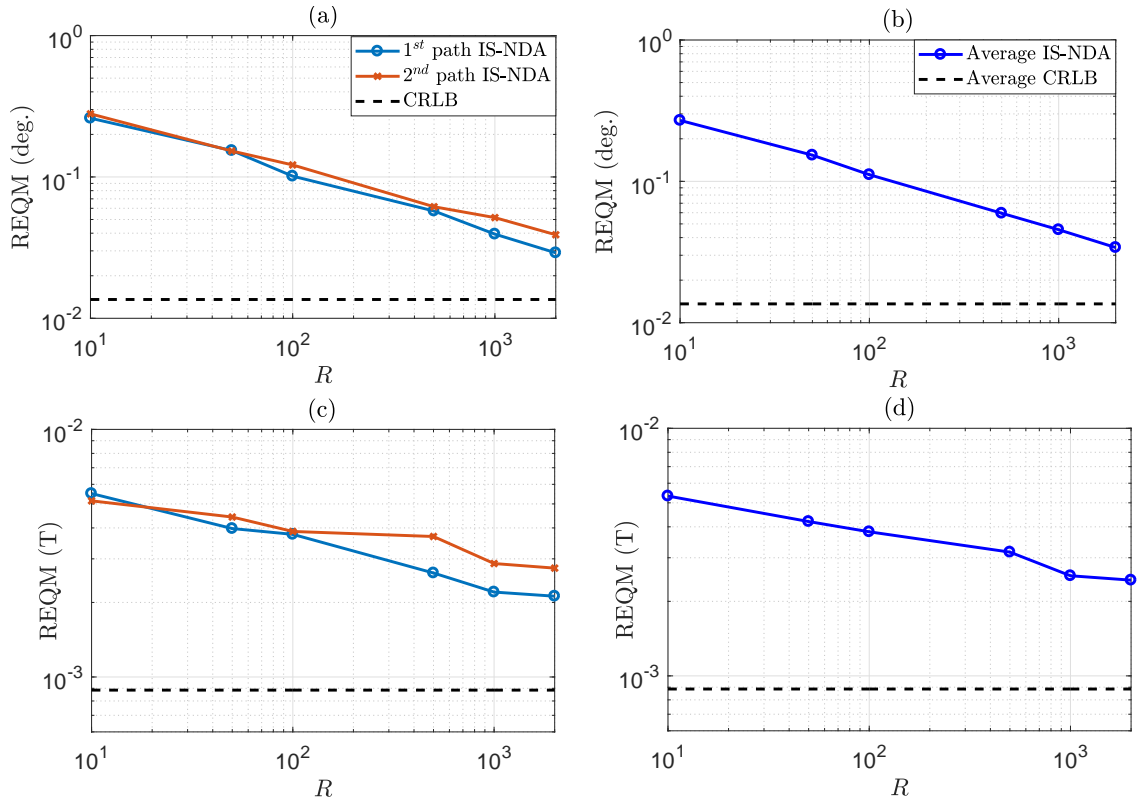


Figure 3.3 – L’impact du paramètre, R , sur les performances de la technique proposée pour $K = 128$, $RSB = 30$ dB: (a) AAs, et (b) moyenne de deux trajets AAs (c) DPs (d) moyenne de deux trajets DPs.

3.3 Études de performances du nouvel estimateur ECAD MV-EP NDA

Dans cette section, on compare notre algorithme avec un estimateur qui utilise les techniques ECAD comme MV-EP dans le cas DA (Bellili *et al.* (2018)). Tous les estimateurs sont comparés aussi à la DA BICR (Van Der Veen *et al.* (1998)) comme référence globale de la meilleure performance possible atteignable en théorie.

Dans la Fig. 3.4, on compare la technique proposée avec DA BICR et l’approche DA MV-EP. On remarque que notre estimateur est proche de la DA BICR. On remarque également que l’approche est aussi performante que la technique DA à des valeurs moyennes et élevées du RSB. Dans la Fig. 3.4 (c), notre approche surpasse l’autre technique à de faibles RSB. Cependant, une détérioration des performances peut être constatée à de faibles RSB. Ceci s’explique par le fait que le périodogramme dans (2.45) présente à des RSB faibles des lobes secondaires plus élevés liés à

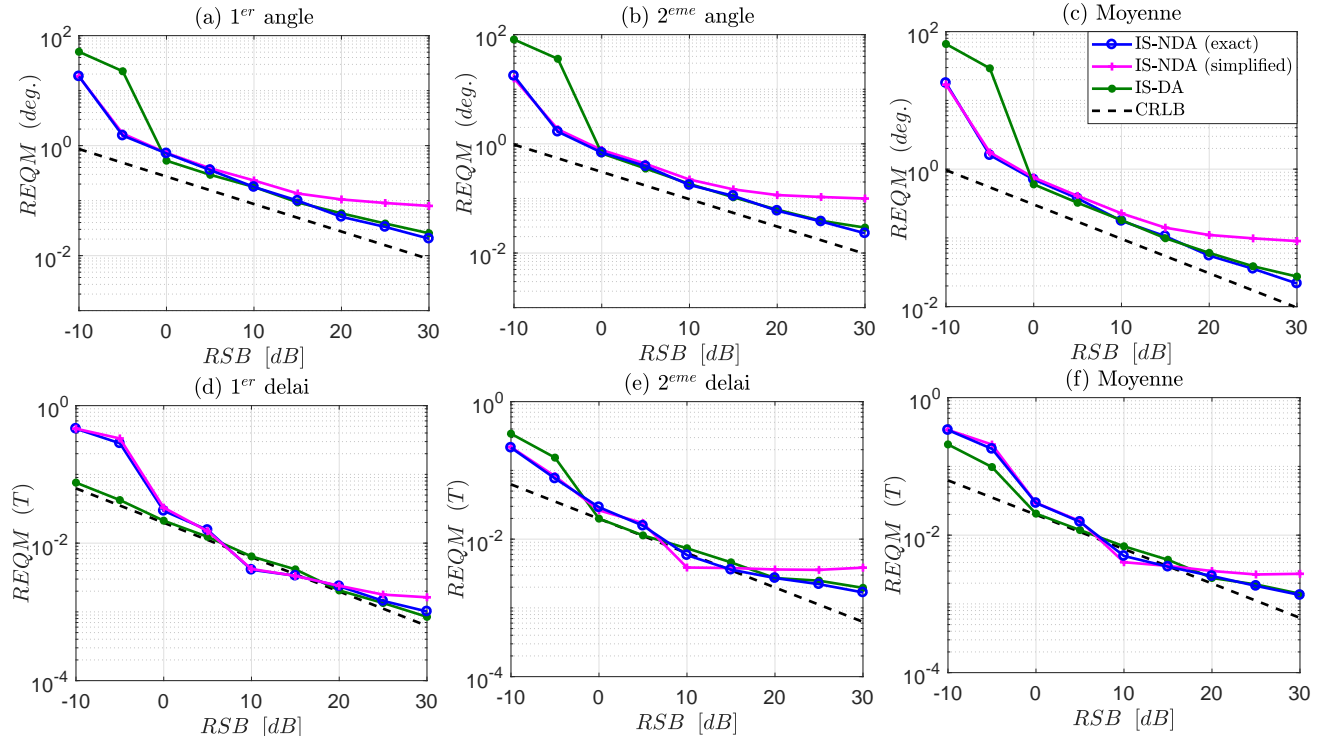


Figure 3.4 – REQM pour $\tau = [0.1 T \ 0.5 T]$ et $\theta = [75^\circ \ 120^\circ]$ avec $P = 5$ antennes $K = 128$ symboles.

la présence du bruit. L'amplitude des lobes secondaires peut être réduite. Cependant, un simple changement de paramètre peut altérer les performances du EP à fort RSB. En effet, pour un RSB élevé, des valeurs élevées de ρ_1 peuvent affecter les lobes principaux du périodogramme, entraînant une détérioration de performances. Ainsi, une optimisation du paramètre ρ_1 en fonction du RSB peut être envisagée. Les résultats montrent également l'efficacité de notre approche simplifiée à de faibles RSB et sa supériorité par rapport à DA surtout en termes d'estimation des angles. Grâce à une approximation du coefficient de pondération, notre approche simplifiée permet un gain énorme en termes de complexité comme déjà expliqué dans le chapitre précédent tout en gardant les mêmes performances.

On évalue également les performances de tous les estimateurs en fonction du nombre de symboles K à un $RSB = 0 \text{ dB}$. Dans ce cas, l'estimation des deux paramètres et la résolution temporelle sont améliorées avec le nombre des échantillons. D'après la Fig. 3.5, on remarque que la technique NDA permet un gain énorme en termes d'efficacité spectrale par rapport à l'approche DA MV-EP. On peut voir clairement qu'avec la même configuration de la Fig. 3.4, à partir de 128 symboles, les deux estimateurs ont pratiquement les mêmes performances. En effet, dans le cas DA, contrairement

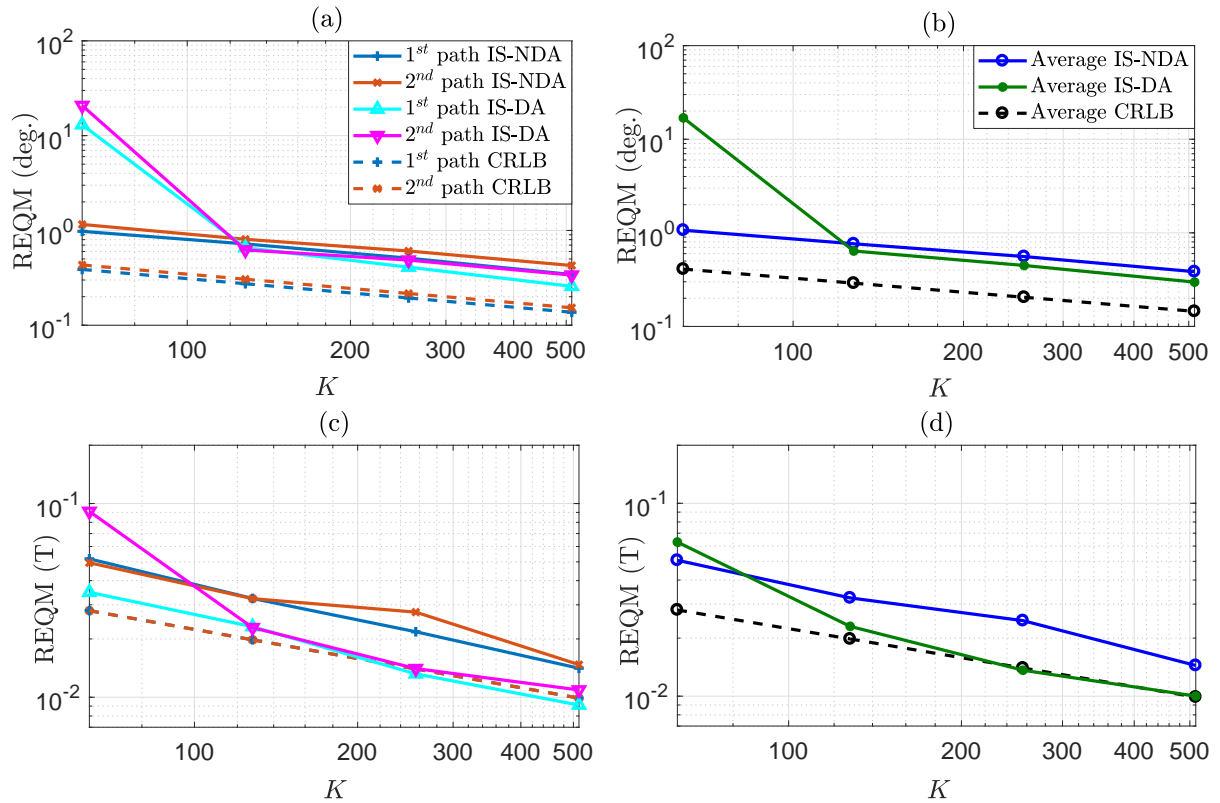


Figure 3.5 – REQM en fonction du nombre de symboles K pour $\tau = [0.1 T \ 0.5 T]$ et $\theta = [75^\circ \ 120^\circ]$ avec $P = 5$ antennes et $RSB = 0$ dB.

à NDA, une partie non négligeable du signal émis est connu à la réception, ce qui diminue le débit de transmission et par conséquent dégrade l'efficacité spectrale. Donc, notre approche est plus performante en termes d'efficacité spectrale grâce à une utilisation optimale de la largeur de bande. De plus, on remarque que notre approche surpasse l'approche DA MV-E surtout en termes d'estimation des angles dans la Fig. 3.5 (b) pour un faible nombre de symboles ($K = 64$).

Par la suite, on évalue ces approches en fonction du nombre des antennes dans la Fig. 3.6. De la même façon que dans le domaine temporelle décrit précédemment, en augmentant le nombre d'antennes, l'estimation des deux paramètres et la résolution spatiale sont améliorées. Dans la Fig. 3.6, on trouve que les deux approches se rapprochent de la BICR à un nombre d'antennes qui dépasse 5. Par contre, dans la Fig. 3.6 (b), notre estimateur surpasse l'estimateur DA pour un nombre d'antennes inférieur à 5.

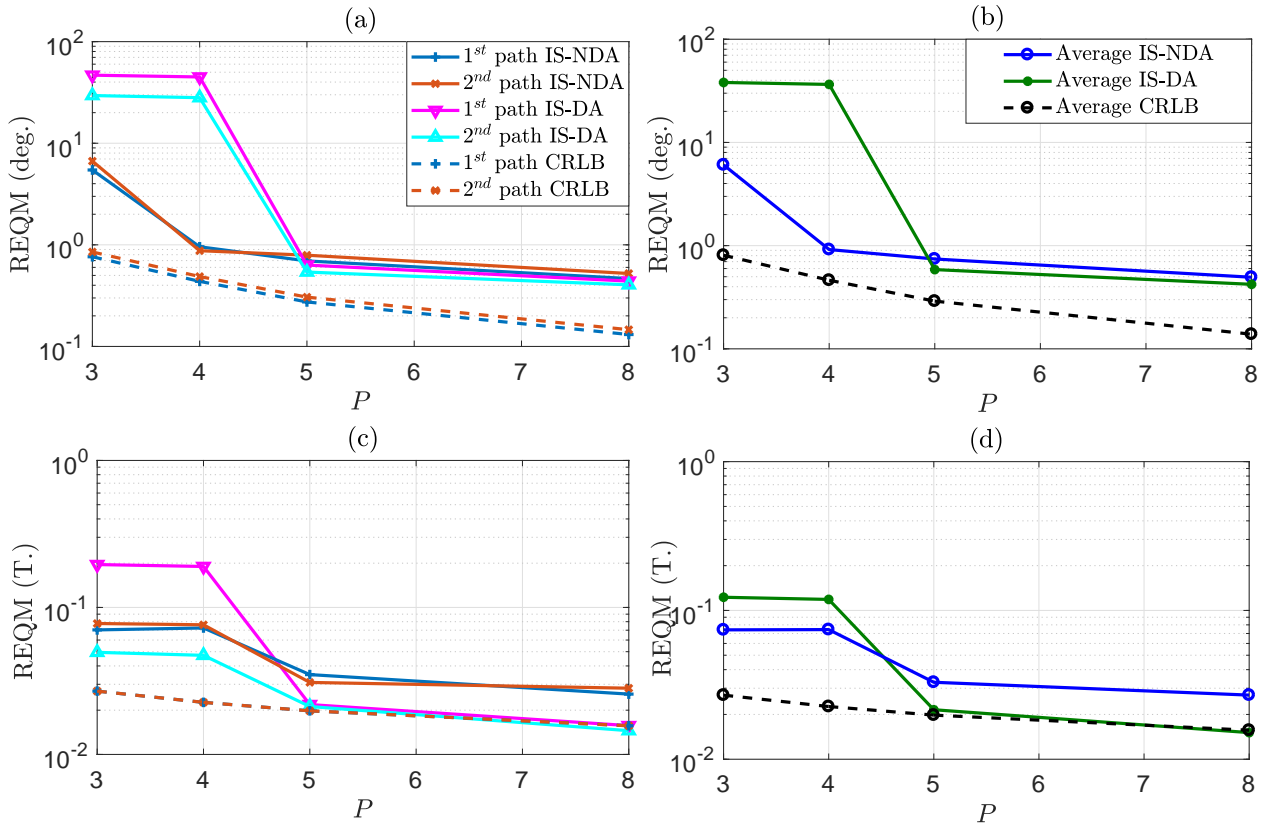


Figure 3.6 – REQM en fonction du nombre des antennes P pour $\tau = [0.1 T \ 0.5 T]$ et $\theta = [75^\circ \ 120^\circ]$ avec $K = 128$ symboles et $RSB = 0$ dB.

On considère par la suite la même configuration en évaluant les deux approches en termes de séparations temporelles et angulaires. Dans la Fig. 3.7, on fixe le premier délai à $\tau_1 = 0.1 T$ et on varie le deuxième délai à $\tau_2 = \tau_1 + \Delta\tau$. Dans ce cas, les performances de la technique DA MV-EP présentées dans la Fig. 3.7 sont sévèrement affectées pour des séparations temporelles inférieures à $0.35 T$. Par contre, notre approche est encore capable d'atteindre la BICR même à des très faibles séparations temporelles de $\Delta\tau = 0.1 T$. Dans la Fig. 3.8, on fixe le premier angle à $\theta_1 = 75^\circ$ et on varie le deuxième angle $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$. Il est remarquable de constater que la technique DA MV-EP observe une détérioration de ses performances en fonction des séparations angulaires surtout en termes d'estimation des angles. Ceci permet ainsi de mettre en valeur la robustesse et la capacité de super-résolution de notre approche et d'apprécier sa supériorité dans des scénarios où les trajets sont faiblement espacés dans les deux domaines temporel et spatial.

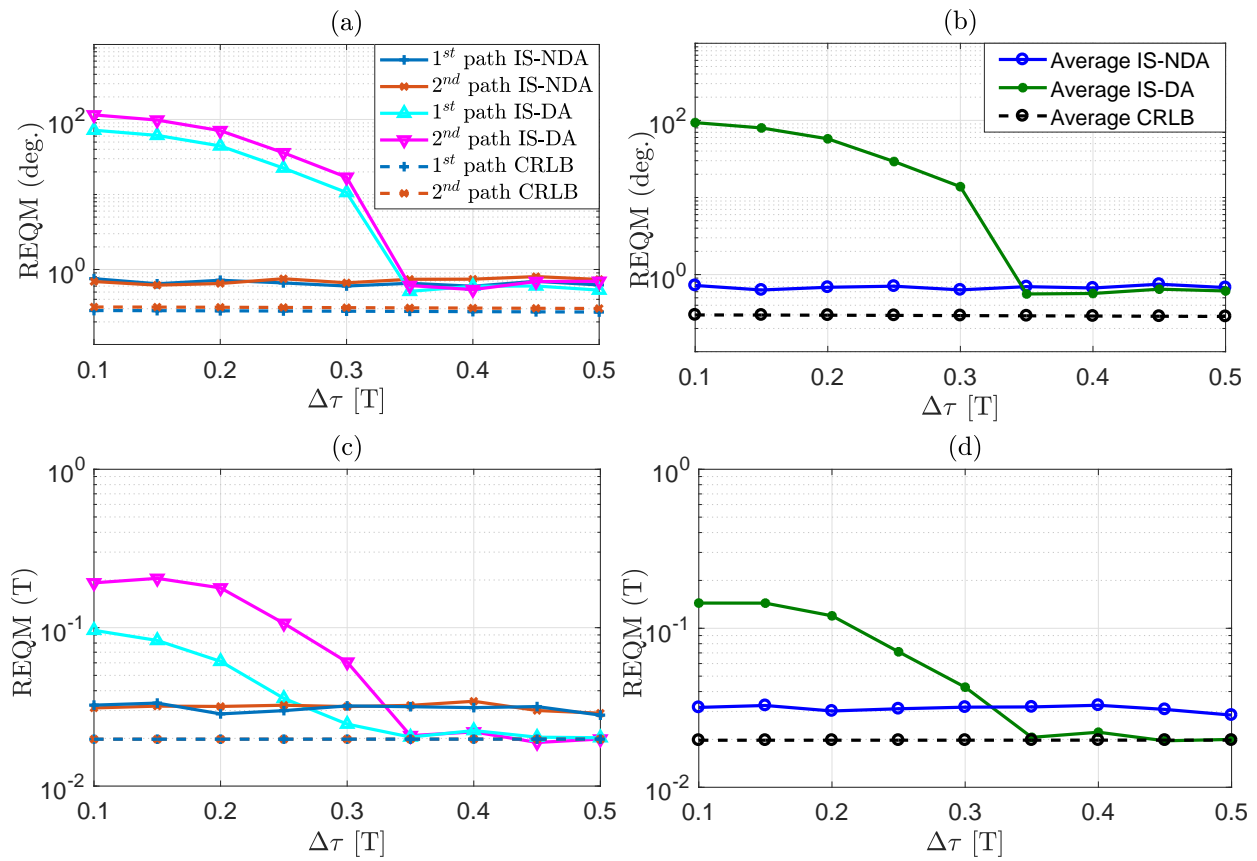


Figure 3.7 – REQM en fonction de la séparation temporelle $\Delta\tau$ pour $\tau = [0.1 T \ 0.1 T + \Delta\tau]$ et $\theta = [75^\circ \ 120^\circ]$ avec $K = 128$ symboles, $P = 5$ antennes et $RSB = 0$ dB.

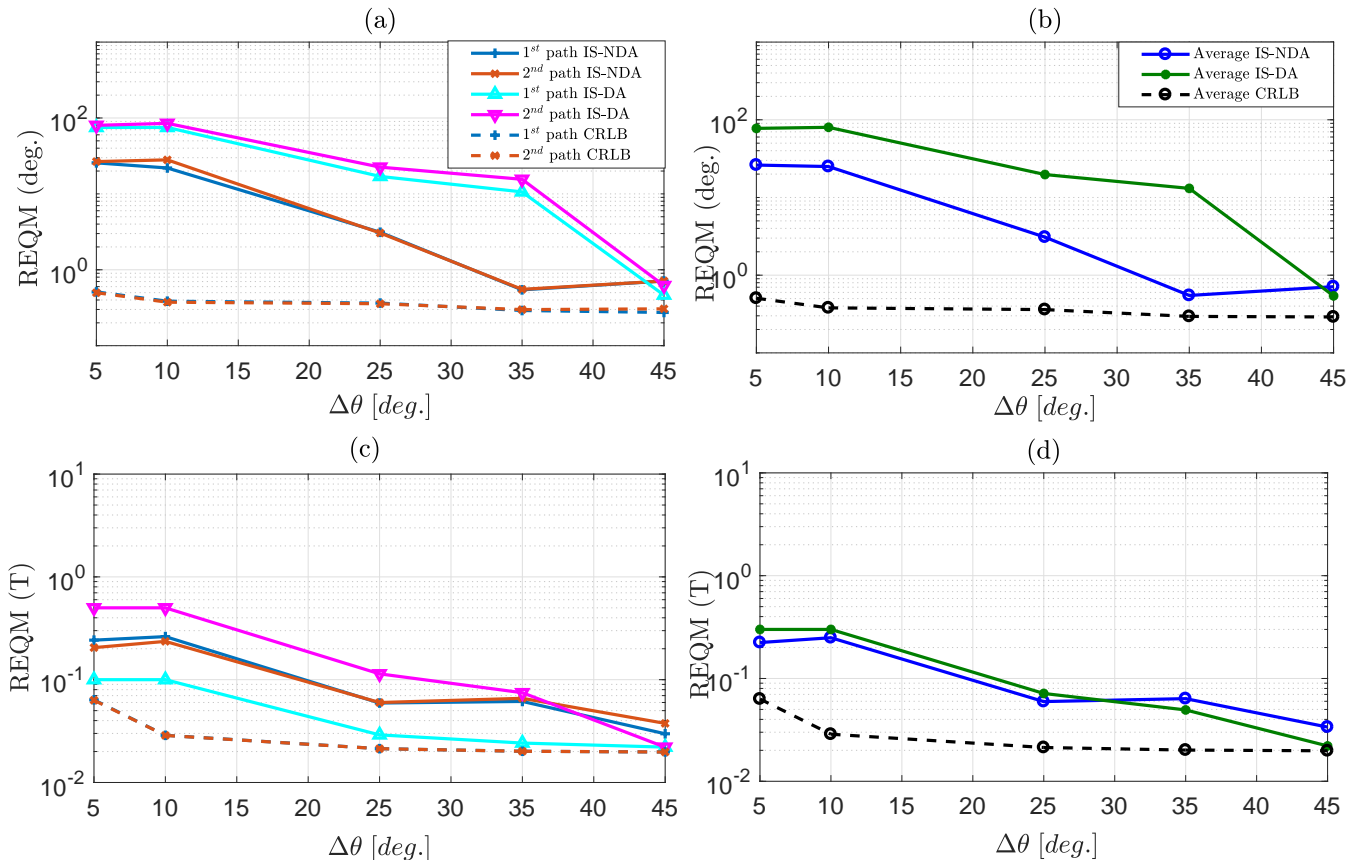


Figure 3.8 – REQM en fonction de la séparation angulaire $\Delta\theta$ pour $\tau = [0.1 T \ 0.5 T]$ et $\theta = [75^\circ \ 75^\circ + \Delta\theta]$ avec $K = 128$ symboles, $P = 5$ antennes et $RSB = 0$ dB.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a abordé le problème de l'estimation conjointe des angles d'arrivée et des délais de propagation dans un canal de transmission sans fil à trajets multiples. On a proposé un nouvel estimateur ECAD MV qui profite de la puissante technique d'échantillonnage préférentiel pour éviter les approches itératives. Cette technique converge vers le maximum global de la fonction de vraisemblance dans un scénario autodidacte sans aucune initialisation. Les résultats de simulations ont montré que le nouvel estimateur MV-EP peut clairement atteindre la BICR et les mêmes performances que les techniques DA sur une large gamme de valeurs utiles du RSB. Pour étendre les résultats présentés précédemment, deux principales perspectives de recherche de ce travail seront proposées: 1) l'estimation conjointe des délais de propagation et des angles d'azimuth et d'élévation; et 2) l'estimation conjointe de ces deux paramètres dans le cas d'un système multi-porteuses.

Appendice

BLIND MAXIMUM LIKELIHOOD JADE IN MULTIPATH ENVIRONEMENT USING IMPORTANCE SAMPLING

Maha Abdelkhalek, Souheib Ben Amor, Sofiène Affes*

INRS-EMT, 6900-800 de la Gauchetiere Ouest, Montreal (Quebec), H5A 1K6.

ABSTRACT

In this paper, we tackle the problem of joint angles and time delays estimation (JADE) in a non-data aided (NDA) scenario where the transmitted signal is unknown at the receiver. We do so by applying the maximum likelihood (ML) in order to obtain the best performance achievable. The importance sampling (IS) technique is used to reduce the multi-dimensionality of the maximization problem without recurring to an iterative option. Computer simulations show that the new ML IS solution approaches the DA techniques and the Cramér-Rao lower bound (CRLB) at medium and high SNR levels.

1. INTRODUCTION

The joint angles and time delays estimation (JADE) problem finds its application in diverse domains ranging from military applications (e.g., radar and sonar) to broadband wireless communication systems. So far, a number of JADE techniques have been reported in the literature and except for the MI-MUSIC approach proposed [5], all the existing solutions are either geared toward data-aided estimation or relies on an estimate of the channel matrix. Roughly speaking, they can be broadly categorized into two major categories: subspace-based and ML-based estimators. Most of the subspace-based techniques are built upon the well-known MUSIC and ESPRIT algorithms [6-7]. In practice, subspace-based approaches are more attractive due to their reduced computational load. However, they are usually suboptimal and suffer from severe performance degradation for low SNR levels. ML approaches [8 -10], however, are known to enjoy higher accuracy. In the specific JADE context, to the best of our knowledge the ML approach has not been addressed so far.

In this paper, we develop a non-iterative ML estimator JADE problem under the NDA scenario that is based on the importance sampling (IS) concept. In this work, we design a separable (i.e., factorisable) joint angle-delay *pseudo-pdf* which allows a very easy generation of the required vector realizations. Computer simulations show that the technique has a comparable performances when compared to the fully DA technique in terms of estimation accuracy.

The rest of the paper is organized as follows: In Section 2, we introduce the system model. In Section 3, we derive the

new NDA ML solution for the underlying estimation problem. In Section 4, we provide the required details regarding the IS technique. In Section 5, we use exhaustive computer simulations to assess the performance of the proposed approach. Finally, we draw out some concluding remarks in Section 6.

The notations adopted in this paper are as follows. Vectors and matrices are represented in lower- and upper-case bold fonts, respectively. Moreover, $\{\cdot\}^T$ and $\{\cdot\}^H$ denote the conjugate and Hermitian (i.e., transpose conjugate) operators. The Euclidean norm of any vector is denoted as $\|\cdot\|$. For any matrix \mathbf{X} , $[\mathbf{X}]_q$ and $[\mathbf{X}]_{l,k}$ denote its q^{th} column and $(l, k)^{th}$ entry, respectively. For any vector \mathbf{x} , $\text{diag}\{\mathbf{x}\}$ refers to the diagonal matrix whose elements are those of \mathbf{x} . Moreover, $\{\cdot\}^*$, $\angle\{\cdot\}$, and $|\cdot|$ return the conjugate, angle, and modulus of any complex number, respectively. $\lceil x \rceil$ is the ceil function defined as $\lceil x \rceil = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$. Finally, j is the pure imaginary number (i.e., $j^2 = -1$), and the notation \triangleq is used for definitions.

2. SYSTEM MODEL

Consider a single input multiple output (SIMO) system equipped with P antennas elements at the receiver side. The transmitted signal goes through a multipath channel consisting of Q different paths that impinge on the receiving antenna array from Q different angles $\{\theta_q\}_{q=1}^Q$, respectively. Each path is also characterized by a propagation delay $\{\tau_q\}_{q=1}^Q$ assumed to be unknown but constant and a path gain $\{\gamma_q\}_{q=1}^Q$. Note that $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_Q) \subset [0, \tau_{\max}]^Q$ where $\tau_{\max} \leq T$. At the destination, the received signal at the output of the p^{th} antenna element is given by:

$$y_p(t) = \sum_{q=1}^Q \gamma_q e^{j\varphi_p(\theta_q)} \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(t - \tau_q - kT) + w_p(t), \quad (1)$$

where $\varphi_p(\theta)$ is a real-valued angular transformations that depend on the array geometry and $w_p(t)$ is an additive white Gaussian noise (AWGN) with zero mean and variance σ^2 . $h(t)$ is the shaping pulse, T is the symbol duration and $\mathbf{c} = [c_0, c_2, \dots, c_{K-1}]^T$ is the vector containing the K transmitted symbols. The latter are generated randomly from a M -ary constellation alphabet, \mathcal{C}^M . Moreover, we assume that all the transmitted symbols are unknown at the receiver side. The received signal is sampled at the rate $\zeta = \frac{T}{T_s}$ where T_s is the sampling period, leading to the following samples at the

*Work supported by the DG and CREATE PERSWADE <www.create-perswade.ca> Programs of NSERC, and a Discovery Accelerator Supplement Award from NSERC.

output of the p^{th} antenna element:

$$y_p(n) = \sum_{q=1}^Q \gamma_q e^{j\varphi_p(\theta_q)} \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(t_n - \tau_q - kT) + w_p(n), \quad (2)$$

where $\{t_n\}_{n=1}^N$ are the time samples. We now group all the unknown multipath parameters in the following three vectors: $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q]^T$, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_Q]^T$, and $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_Q]^T$. We further gather the samples collected across all the antenna elements at a given time instant into a single vector, $\mathbf{y}(n) = [y_1(n), y_2(n), \dots, y_P(n)]^T$, given by:

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(t_n - \tau_q - kT) + \mathbf{w}(n), \quad (3)$$

where $\mathbf{w}(n) = [w_1(n), w_2(n), \dots, w_P(n)]^T$ is the corresponding noise vector and $\mathbf{a}(\varphi) \triangleq [1, e^{j\varphi_1(\theta)}, e^{j\varphi_2(\theta)}, \dots, e^{j\varphi_P(\theta)}]^T$ is the array *steering vector* defined for any direction θ . Our goal in the remainder of this paper is to jointly estimate the parameters $\{\theta_q\}_{q=1}^Q$ and $\{\tau_q\}_{q=1}^Q$ using K symbols that are unknown to the receiver. To that end, we gather all the receiving samples in a single matrix $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(N)]$ as follows:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \text{diag}\{\boldsymbol{\gamma}\} \mathbf{H}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{C} + \mathbf{W}, \quad (4)$$

where \mathbf{W} is the $(P \times N)$ noise matrix with elements $[\mathbf{W}]_{p,n} = w_p(t_n)$, $\mathbf{C} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{c}$ is a $(KN \times N)$ matrix of the transmitted symbols, and $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)]$ is a $(P \times Q)$ matrix containing the Q steering vectors. The delayed samples of the pulse shape $h(t)$ are gathered into a $(Q \times KN)$ matrix, $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_N]$, where \mathbf{H}_n for $n = 1, \dots, N$ is given by:

$$\mathbf{H}_n \triangleq \begin{pmatrix} h(nT_s - \tau_1) & \dots & h(nT_s - \tau_1 - (K-1)T) \\ h(nT_s - \tau_2) & \dots & h(nT_s - \tau_2 - (K-1)T) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h(nT_s - \tau_Q) & \dots & h(nT_s - \tau_Q - (K-1)T) \end{pmatrix}$$

3. BLIND JADE

We start by deriving the log-likelihood function (LLF) for the estimation problem that depends on all the unknown parameters $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{c} , and σ^2 . Then, we focus on the *compressed* likelihood function (CLF) that depends solely on the delays and the angles. Since the noise components are Gaussian distributed and assumed to be spatially and temporally white, it follows that the LLF that depends on $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{c} , and σ^2 :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{c}, \sigma^2) = -PN \ln(\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \left\| \mathbf{y}(n) - \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(nT_s - kT - \tau_q) \right\|^2. \quad (5)$$

We can reduce the number of unknown parameters that characterize the LLF by maximizing it with respect to the noise

variance. To do so, we differentiate the LLF in (5) with respect to σ^2 and injected back into (5) to obtain the LLF that depends only on $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\gamma}$ and \mathbf{c} :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{c}) = \sum_{n=1}^N \left\| \mathbf{y}(n) - \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(nT_s - kT - \tau_q) \right\|^2.$$

Now, owing to the Parseval's identity, the LLF can be expressed in the frequency domain as follows:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{c}) \approx \sum_{n=1}^N \left\| \mathbf{y}(\omega_n) - \sum_{q=1}^Q \gamma_q \mathbf{a}(\theta_q) \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(\omega_n) e^{-j\omega_n(kT + \tau_q)} \right\|^2. \quad (6)$$

where $\{\omega_n = \frac{n-1}{NT_s}\}_{n=1}^N$ is the n^{th} frequency bin and $\mathbf{y}(\omega_n)$ and $h(\omega_n)$ are the DFTs of $\mathbf{y}(n)$ and $h(n)$, respectively. The frequency samples of the delayed signals can be written in the following form:

$$\boldsymbol{\Phi}_n(\boldsymbol{\tau}) \triangleq h(\omega_n) \text{diag}\{\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\tau})\} \otimes \mathbf{f}_n^{(K)T}, \quad (7)$$

where $\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\tau}) = [e^{-j\omega_n\tau_1}, e^{-j\omega_n\tau_2}, \dots, e^{-j\omega_n\tau_Q}]^T$ and $\mathbf{f}_n^{(K)} = [1, e^{-j\omega_n kT}, \dots, e^{-j\omega_n(K-1)T}]^T$. It follows that the LLF in (6) can be written in a matrix form as:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}) \approx \left\| \mathbf{y} - [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})] \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau}) \bar{\boldsymbol{\gamma}} \right\|^2, \quad (8)$$

where $\mathbf{y} = [\mathbf{y}(\omega_1)^T \mathbf{y}(\omega_2)^T \dots \mathbf{y}(\omega_N)^T]^T$, $\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \text{diag}\{\boldsymbol{\gamma}\} \otimes \mathbf{c}$, and $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau}) = [\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{\tau})^T \boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{\tau})^T \dots \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\tau})^T]^T$ is a $(NQ \times KQ)$ matrix. By differentiating the LLF in (8) and setting the result to zero, we obtain the ML estimates of $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ which is given by:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{MLE}} = \left[\underbrace{[\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})] \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})}_{\triangleq \mathbf{D}} \right]^\dagger \mathbf{y}, \quad (9)$$

where \mathbf{D}^\dagger is the Moore-Penrose pseudo-inverse of \mathbf{D} given by $\mathbf{D}^\dagger = (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}$. Injecting $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{MLE}}$ back into (8) leads to the CLF which depends only on $\boldsymbol{\theta}$ and $\boldsymbol{\tau}$:

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{y}^H \mathbf{D} (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \mathbf{y}, \quad (10)$$

and the joint ML estimates of $\boldsymbol{\theta}$ and $\boldsymbol{\tau}$ are hence obtained as the solution to the following optimization problem:

$$[\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}] = \underset{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}}{\text{argmax}} \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}). \quad (11)$$

Note that the CLF, $\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$, is a non-linear function of the delays and the angles. Hence, finding its maximum *analytically* is intractable. Therefore, to find a *non-iterative* solution to the estimation problem in (11), we use the maximization theorem introduced by Pincus in [11]. The latter, when applied to our estimation problem, leads to the following ML estimates (MLEs) of the delays and angles:

$$\hat{\tau}_q = \int \dots \int \tau_q \bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}, \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (12)$$

$$\hat{\theta}_q = \int \dots \int \theta_q \bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}, \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (13)$$

where $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ is the *normalized* CLF defined as:

$$\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) \triangleq \frac{e^{\rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})}}{\int \dots \int e^{\rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})} d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}}. \quad (14)$$

By noticing that $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ in (14) is nonnegative and integrates to one, the *normalized* CLF can be considered as a pdf. Taking this observation under consideration, the MLEs in (12) and (13) can be seen as statistical expectations, i.e., for $q = 1, 2, \dots, Q$, which leads to the following results:

$$\hat{\tau}_q = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tau_q^{(r)} \quad \text{and} \quad \hat{\theta}_q = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \theta_q^{(r)}, \quad (15)$$

where $\{\boldsymbol{\tau}^{(r)}\}_{r=1}^R$ and $\{\boldsymbol{\theta}^{(r)}\}_{r=1}^R$ are R random realisations generated according to $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$.

4. IMPORTANCE SAMPLING CONCEPT

Since, $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ is $2Q$ -dimensional and extremely non-linear, one interesting solution to generate the required realisations is by using a different distribution than the one of interest. The importance sampling concept allows us to practically apply such idea to generate $\{\boldsymbol{\tau}^{(r)}\}_{r=1}^R$ and $\{\boldsymbol{\theta}^{(r)}\}_{r=1}^R$. In fact, we can rewrite (12) and (13) in the following equivalent forms, for $q = 1, 2, \dots, Q$:

$$\hat{\tau}_q = \int \dots \int \tau_q \frac{\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})}{\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})} \bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}, \quad (16)$$

$$\hat{\theta}_q = \int \dots \int \theta_q \frac{\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})}{\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})} \bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\tau}, \quad (17)$$

where $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ is a function to be chosen as close as possible to $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ and allowing at the same time an easy generation of the required realizations $\{\boldsymbol{\tau}^{(r)}\}_{r=1}^R$ and $\{\boldsymbol{\theta}^{(r)}\}_{r=1}^R$. In this case, both $\boldsymbol{\theta}$ and $\boldsymbol{\tau}$ can be alternatively considered as jointly distributed according to $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$. Hence, the MLEs in (16) and (17) are rewritten as:

$$\hat{\tau}_q = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \tau_q^{(r)}, \quad \hat{\theta}_q = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \theta_q^{(r)}, \quad (18)$$

where $\eta(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ is defined as the following ratio:

$$\eta(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) \triangleq \frac{\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})}{\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})}. \quad (19)$$

The importance function $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ must be separable in terms of the Q angle-delay pairs $\{(\theta_q, \tau_q)\}_{q=1}^Q$. In other words, we aim to find a function $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ that can be written as follows:

$$\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) = \prod_{q=1}^Q \bar{g}_q(\theta_q, \tau_q). \quad (20)$$

Consequently, each of $\{(\theta_q, \tau_q)\}_{q=1}^Q$ are generated independently using their corresponding pdfs $\{\bar{g}_q(\theta_q, \tau_q)\}_{q=1}^Q$ instead of using $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ to generate Q -dimensional random vectors

$\boldsymbol{\theta}$ and $\boldsymbol{\tau}$. However, we have always to keep in mind that $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ should be as close as possible to the original CLF, $\bar{\mathcal{L}}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$, in order to obtain the best achievable performance. Since $\mathbf{I}_N \otimes [\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})]$ is a block-diagonal matrix, it follows that:

$$\mathbf{D}^H \mathbf{D} = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\Phi}_n(\boldsymbol{\tau})^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Phi}_n(\boldsymbol{\tau}). \quad (21)$$

The $\{l^{th}\}_{l=1}^{KQ}$ column of $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Phi}_n(\boldsymbol{\tau})$ can be written as:

$$[\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Phi}_n(\boldsymbol{\tau})]_l = \mathbf{a}(\theta_{l'}) h(\omega_n) e^{-j\omega_n(\tau_{l'} + l''T)}, \quad (22)$$

where $\{l' = \lfloor (l-1)/K \rfloor + 1\}$ and l'' is the remainder of dividing $l-1$ by the number of symbols K (i.e., $l'' = (l-1) \bmod K$). It follows that the $(l, m)^{th}$ entry of $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ is given by:

$$[\mathbf{D}^H \mathbf{D}]_{l,m} = \left(\sum_{n=1}^N |h(\omega_n)|^2 e^{j\omega_n(\tau_{l'} - \tau_{m'} + (l'' - m'')T)} \right) \times \left(\sum_{p=1}^P e^{j(\varphi_p(\theta_{m'}) - \varphi_p(\theta_{l'}))} \right), \quad (23)$$

where $m' = \lfloor (m-1)/K \rfloor + 1$ and $m'' = (m-1) \bmod K$. Note that the diagonal elements of $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ have the same expression:

$$[\mathbf{D}^H \mathbf{D}]_{l,l} = P \sum_{n=1}^N |h(\omega_n)|^2. \quad (24)$$

Due to the destructive superposition (for $l \neq m$) of the complex exponentials in (23), the off-diagonal entries of $\mathbf{D}^H \mathbf{D}$ are expected to be very small compared to its diagonal ones. Thus we obtain the following useful approximation:

$$\mathbf{D}^H \mathbf{D} \approx P E_h \mathbf{I}_{KQ}, \quad (25)$$

where $E_h = \sum_{n=1}^N |h(\omega_n)|^2$ is the energy of the pulse shaping filter. Next, we inject it in (10) to obtain the following accurate approximation for the CLF:

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) \approx \frac{1}{P E_h} \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^K I_k(\theta_q, \tau_q), \quad (26)$$

in which $I_k(\theta, \tau)$ is the periodogram of the signal at the k^{th} symbol period given by:

$$I_k(\theta, \tau) = \left| \sum_{p=1}^P e^{j\varphi_p(\theta)} \sum_{n=1}^N h(\omega_n) y_p^*(\omega_n) e^{-j2\pi\omega_n(\tau + (k-1)T)} \right|^2, \quad (27)$$

Owing to the decomposition of the *approximate* CLF in (26) into separate contributions pertaining each to one of the Q angle-delay pairs at each symbol period, we exploit it below as a new pdf:

$$\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\exp \left\{ \rho_1 \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^K I_k(\theta_q, \tau_q) \right\}}{\int \dots \int \exp \left\{ \rho_1 \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^K I_k(\theta'_q, \tau'_q) \right\} d\boldsymbol{\theta}' d\boldsymbol{\tau}'}. \quad (28)$$

The factor $\frac{1}{P E_h}$ involved in (26) is absorbed within the new design parameter, $\rho_1 \neq \rho_0$.

Due to the linear decomposition in (26), $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ is *separable* in terms of the angle-delay pairs. Indeed, it can be easily shown that $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$ factorizes as follows:

$$\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) = \prod_{q=1}^Q \bar{g}_{\theta, \tau}(\theta_q, \tau_q), \quad (29)$$

where:

$$\bar{g}_{\theta, \tau}(\theta, \tau) = \frac{e^{\rho_1 \sum_{k=1}^K I_k(\theta, \tau)}}{\iint e^{\rho_1 \sum_{k=1}^K I_k(\theta', \tau')} d\theta' d\tau'}. \quad (30)$$

From (29), the Q angle-delay pairs, $\{(\theta_q, \tau_q)\}_{q=1}^Q$, are independent and identically distributed (iid). Therefore, to generate each couple of realizations $\boldsymbol{\theta}^{(r)}$ and $\boldsymbol{\tau}^{(r)}$ according to the multidimensional distribution $\bar{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$, one can easily generate, independently, Q couples of realizations $(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)})$ according to the common bivariate distribution $\bar{g}_{\theta, \tau}(\theta, \tau)$ and forms the realizations vector $\boldsymbol{\theta}^{(r)} = [\theta_1^{(r)}, \theta_1^{(r)}, \dots, \theta_Q^{(r)}]$ and $\boldsymbol{\tau}^{(r)} = [\tau_1^{(r)}, \tau_1^{(r)}, \dots, \tau_Q^{(r)}]$. As far the generation of the couple $(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)})$ is concerned, we start by computing the marginal pdf, $\bar{g}_{\theta}(\theta)$, that is evaluated as follows:

$$\bar{g}_{\theta}(\theta) = \int \bar{g}_{\theta, \tau}(\theta, \tau) d\tau. \quad (31)$$

The latter is used to generate the R angle realizations, $\{\boldsymbol{\theta}^{(r)} = [\theta_1^{(r)}, \theta_2^{(r)}, \dots, \theta_Q^{(r)}]^T\}_{r=1}^R$. The generated angles can be used to compute the q^{th} conditional delay pdf:

$$\bar{g}_{\tau|\theta}(\tau|\theta = \theta_q^{(r)}) = \frac{\bar{g}_{\tau, \theta}(\tau, \theta_q^{(r)})}{\bar{g}_{\theta}(\theta_q^{(r)})}. \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (32)$$

The conditional pdf in (32) is used to generate the R angle realizations, $\{\boldsymbol{\tau}^{(r)} = [\tau_1^{(r)}, \tau_1^{(r)}, \dots, \tau_Q^{(r)}]\}_{r=1}^R$.

After generating the realisations for all the Q paths, the TDs and AoAs are estimated by using the *circular* sample mean which are given by:

$$\hat{\tau}_q = \tau_{\max} \left(\frac{1}{2\pi} \angle \left[\sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \exp \left\{ j 2\pi \left(\frac{\tau_q^{(r)}}{\tau_{\max}} - \frac{1}{2} \right) \right\} \right] \right) + \frac{1}{2}, \quad (33)$$

$$\hat{\theta}_q = \frac{1}{2} \angle \left[\sum_{r=1}^R \eta(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) \exp \left\{ j \left(2\theta_q^{(r)} - \pi \right) \right\} \right] + \frac{\pi}{2}. \quad (34)$$

Recall that the weighting coefficient $\eta(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)})$ was earlier defined in (19). In order to greatly reduce the computational load of this coefficient, we can use the following *normalized* weighting coefficient:

$$\bar{\eta}(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) = \exp \left\{ \rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \rho_1 \sum_{q=1}^Q I(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) \right. \\ \left. - \max_{1 \leq r \leq R} \left[\rho_0 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}^{(r)}) - \rho_1 \sum_{q=1}^Q I(\theta_q^{(r)}, \tau_q^{(r)}) \right] \right\}. \quad (35)$$

5. SIMULATION RESULTS

In the following we assess the performance of the proposed IS-based ML estimator in terms of the root mean square error (RMSE) with a total number of Monte-Carlo runs $M_c = 500$. In our simulation, we consider a SIMO system composed of one source, one destination and $Q = 2$ paths. The transmitted sequence consists of 128 symbols taken from a QPSK constellation. The pulse shaping function is a SRRC with a roll-off factor $\alpha = 0.5$. The design parameter, ρ_1 , is set to 60, and ρ_0 , which must be sufficiently high, is set to 8000.

In Fig. 1, we compare the proposed technique against the DA CRLB [7] and a DA algorithm (i.e., DA IS) presented in [10]. We observe that NDA ML IS performs as good as

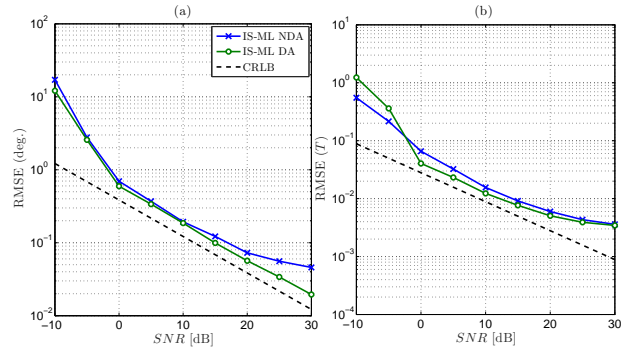


Fig. 1. RMSE for TDs and AoAs joint estimation vs SNR with $K = 128$ symbols, $\alpha = 0.51$, $Q = 2$, and QPSK: (a) RMSE of the AoAs and (b) RMSE of the delays.

the DA technique for medium and high SNR values. However a performance deterioration can be seen at low SNR. The latter stems from the fact that extremely low SNR, the periodogram in (26) exhibits higher secondary lobes related to presence of noise. The amplitude of the secondary lobes can be reduced by adjusting the parameter ρ_1 . However, for high SNR, larger values of ρ_1 can affect the main lobes of the periodogram leading to a performance deterioration.

6. CONCLUSION

In this paper, we proposed a new JADE ML estimator that take advantage of the powerful importance sampling concept. The new estimator achieves the global maximum of the likelihood function in a blind scenario. Simulation results showed that clear the new IS-based ML estimator can achieve the same performance as the DA techniques over wide range of useful SNR values.

7. REFERENCES

- [1] C. Nerguizian, C. Despins, and S. Affes, "Geolocation in mines with an impulse response fingerprinting technique and neural networks", *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 5, no. 3, pp. 603-611, Mar. 2006.

- [2] C. Nerguizian, C. Despins and S. Affes, "Method and system for indoor geolocation using an impulse response fingerprinting technique," U.S. Patent 7630943 B2, Dec. 8, 2009.
- [3] A. Jaffe and M. Wax, "Single-site localization via maximum discrimination multipath fingerprinting", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 62, no.7, pp. 1718-1728, Apr. 2014.
- [4] A. Gaber and A. Omar "A Study of Wireless Indoor Positioning Based on Joint TDOA and DOA Estimation Using 2-D Matrix Pencil Algorithms and IEEE 802.11ac," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, Vol. 14, No. 5, pp. 2440-2454, May 2015.
- [5] X. Zhang, G. Feng, and D. Xu, "Blind direction of angle and time delay estimation algorithm for uniform linear array employing multi-invariance music," *Prog. Electromagn. Res. Lett.*, vol. 13, no. 2, pp. 11-20, Feb. 2010.
- [6] Y. Wang, J. Chen, and W. Fang, "TST-MUSIC for joint DOA-delay estimation", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 49, no. 4, pp. 721-729, Apr. 2001.
- [7] M. Vanderveen, A. Vanderveen, and A. Paulraj, "Joint angle and delay estimation using shift-invariance techniques," *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 46, no. 2, pp. 405-418, Feb. 1998.
- [8] M. Wax and A. Leshem, "Joint estimation of time delays and directions of arrival of multiple reflections of a known signal", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 45, no. 10, pp. 2477-2477, Oct. 1997.
- [9] B. H. Fleury, M. Tschudin, R. Heddergott, D. Dahlhaus, and I. K. Pedersen, "Channel parameter estimation in mobile radio environments using the sage algorithm," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 17, no.3, pp. 434-450, Mar. 1999.
- [10] F. Bellili, S.-B. Amor, S. Affes, and A. Ghayeb, "Maximum likelihood joint angle and delay estimation from multipath and multicarrier transmissions with application to indoor localization over IEEE 802.11ac radio," *IEEE Trans. Mobile Comput.*, vol. 17, no. 1, pp. 201-217, 2018.
- [11] M. Pincus "A closed form solution for certain programming problems", *Oper. Res.*, pp. 690-694, 1962.
- [12] S. Kay and S. Saha, "Mean likelihood frequency estimation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 48, no. 7, pp. 1937-1946, July 2000.
- [13] S. Saha and S. M. Kay, "Maximum likelihood parameter estimation of superimposed chirps using Monte Carlo importance sampling," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 2, pp. 224-230, Feb. 2002.
- [14] S. M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB*, Springer, 2005.

Références

- Abdelkhalek M, Ben Amor S & Affes S (December 15-18, 2019). Blind maximum likelihood jade in multipath environment using importance sampling. *IEEE CAMSAP'2019, Le Gosier, Guadeloupe, French West Indies*.
- Bazzi, Ahmad SDTM & Lisa (2016). Single snapshot joint estimation of angles and times of arrival: A 2d matrix pencil approach. *2016 IEEE International Conference on Communications (ICC)*, pages 1–6.
- Bellili F, Ben Amor S, Affes S & Ghayeb A (2018). Maximum likelihood joint angle and delay estimation from multipath and multicarrier transmissions with application to indoor localization over ieee 802.11 ac radio. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 18(5):1116–1132.
- Chen JT & Wang YC (2001). Performance analysis of the parametric channel estimators for mlse equalization in multipath channels with awgn. *IEEE Transactions on Communications*, 49(3): 393–396.
- De Figueiredo R & Gerber A (1983). Separation of superimposed signals by a cross-correlation method. *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, 31(5):1084–1089.
- Fleury BH, Tschudin M, Heddergott R, Dahlhaus D & Pedersen KI (1999). Channel parameter estimation in mobile radio environments using the sage algorithm. *IEEE Journal on selected areas in communications*, 17(3):434–450.
- Golden SA & Bateman SS (2007). Sensor measurements for wi-fi location with emphasis on time-of-arrival ranging. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 6(10):1185–1198.
- Kay S & Saha S (2000). Mean likelihood frequency estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(7):1937–1946.
- Kay SM (1993). *Fundamentals of statistical signal processing*. Prentice Hall PTR.
- Kay SM (2005). *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB*.
- Leshem A & Kasher A (1993). Maximum likelihood direction finding using clustering methods. *Proc. ICSP*, pages 1210–1214.
- Lichtenstein M & Young T (1968). The resolution of closely spaced signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, 14(2):288–293.
- Likai G, Ying W & Ruirui L (2017). Reduced-dimensional music algorithm for joint angle and delay estimation based on l2 norm constraint in multipath environment. *2017 International Conference on Electronic Industry and Automation (EIA 2017)*, Atlantis Press.

- Liu L & Liu H (2016). Joint estimation of doa and tdoa of multiple reflections in mobile communications. *IEEE Access*, 4:3815–3823.
- Manickam, Thulasinath G, Vaccaro RJT & W D (1994). A least-squares algorithm for multipath time-delay estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(11):3229–3233.
- Mardia KV (2014). *Statistics of directional data*. Academic press.
- Phelan BR, Lenzing EH & Narayanan RM (2012). Source localization using unique characterizations of multipath propagation in an urban environment. *2012 IEEE 7th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM)*, IEEE, pages 189–192.
- Pincus M (1962). *A closed form solution for certain programming problems*. pages 690–694.
- Rappaport TS, Reed JH & Woerner BD (1996). Position location using wireless communications on highways of the future. *IEEE communications Magazine*, 34(10):33–41.
- Reddi S (1979). Multiple source location—a digital approach. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, (1):95–105.
- Tufts D (1983). Estimating the angle of arrival of multiple plane waves. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 19:135–139.
- Van Der Veen AJ (1998). Algebraic methods for deterministic blind beamforming. *Proceedings of the IEEE*, 86(10):1987–2008.
- Van Der Veen AJ, Vanderveen MC & Paulraj A (1998). Joint angle and delay estimation using shift-invariance techniques. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(2):405–418.
- Vanderveen MC, Papadias CB & Paulraj A (1997). Joint angle and delay estimation (jade) for multipath signals arriving at an antenna array. *IEEE Communications letters*, 1(1):12–14.
- Viberg M & Ottersten B (1991). Sensor array processing based on subspace fitting. *IEEE Transactions on signal processing*, 39(5):1110–1121.
- Wang H, Kay S & Saha S (2008). An importance sampling maximum likelihood direction of arrival estimator. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(10):5082–5092.
- Wang YY, Chen JT & Fang WH (2001). Tst-music for joint doa-delay estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(4):721–729.
- Wax M & Leshem A (1997). Joint estimation of time delays and directions of arrival of multiple reflections of a known signal. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(10):2477–2484.
- Zhang X, Feng G & Xu D (2010). Blind direction of angle and time delay estimation algorithm for uniform linear array employing multi-invariance music. *Progress In Electromagnetics Research*, 13:11–20.
- Ziskind I & Wax M (1988). Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36(10):1553–1560.