REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DES TESTS D'HOMOGÉNÉITÉ ET D'INDÉPENDANCE

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DES TESTS D'HOMOGÉNÉITÉ ET D'INDÉPENDANCE

Rapport préparé pour

Environnement Canada
Division Hydrologie
373 Sussex Drive, Block E
Ottawa, Ontario K1A 0H3

par

Jean-Cléophas Ondo
Taha B.M.J. Ouarda
Bernard Bobée

Chaire en hydrologie statistique
Institut national de la Recherche scientifique, INRS-Eau
2800, rue Einstein, C.P. 7500, Sainte-Foy (Québec) G1V 4C7

Rapport de recherche N° R-500

Juin 1997

INRS-Eau, 1997
ISBN 2-89146-394-3

ÉQUIPE DE RECHERCHE

Ont participé à la réalisation de cette étude :

Environnement Canada

Paul Pilon
Klaus Wiebe
Bob Hale

Chaire en Hydrologie statistique
Institut national de le Recherche scientifique, INRS-Eau

Jean-Cléophas Ondo
Taha B.M.J. Ouarda
Bernard Bobée

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Ce rapport a été réalisé dans le cadre d'un contrat accordé à la Chaire en Hydrologie statistique à l'INRS-Eau par la Division Hydrologie d'Environnement Canada. Ce volet présente une revue de littérature des tests d'indépendance et d'homogénéité. Les auteurs du rapport tiennent à exprimer leur reconnaissance à MM. Paul Pilon, Klaus Wiebe et Bob Hale pour leurs commentaires et leurs réflexions. Les auteurs tiennent spécialement à remercier M. Paul Pilon pour avoir suivi de très près le déroulement des travaux. Les auteurs veulent aussi remercier leur collègue Luc Perreault de la Chaire en Hydrologie statistique de l'INRS-Eau ainsi que le Professeur Michel Slivitzky pour leurs précieuses suggestions.

1 TESTS STATISTIQUES : NOTIONS GÉNÉRALES

Dans ce chapitre, nous ne présentons pas la théorie des tests statistiques à proprement dit, on ne fait qu'esquisser les points les plus importants, c'est-à-dire présenter les notions générales de la théorie des tests d'hypothèses. Les définitions relatives aux tests d'hypothèses sont généralement conformes à celles que l'on retrouve dans les ouvrages généraux de statistique mathématique. Les références proviennent plus particulièrement de *Hajek et Sidak (1967), Lehmann (1959) et Lachance (1996).*

1.1 Caractéristiques descriptives de l'échantillon

On définit une *population* comme étant l'ensemble Ω fini d'éléments ω, appelés *individus* ayant en commun un caractère auquel on s'intéresse particulièrement. On suppose aussi que ce caractère est numérique et représenté par un nombre *x*, variable d'un élément à l'autre. Pour étudier une population, on se contente en général de prélever dans celle-ci un certain nombre d'éléments. On interprète ainsi les résultats $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de ces prélèvements comme les valeurs d'une suite de variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ayant toutes la même loi de probabilité. L'ensemble $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est appelé un *échantillon* de taille *n* de la population. La suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des états est appelée une réalisation de l'échantillon.

Dans une analyse statistique, il est toujours possible de définir les *moments* d'un échantillon, qui sont des variables aléatoires dont une réalisation donnée est une estimation du moment correspondant de la population. Le moment d'ordre *r* est défini par :

$$m_r^{'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r ,$$

quand $r = 1$, $m_r^{'}$ correspond à la moyenne de l'échantillon. De même, le moment centré d'ordre *r* est définit par :

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^r ,$$

quant $r = 2$, m_r correspond à la variance de l'échantillon.

De plus, on appelle *statistique* sur un échantillon toute fonction mesurable $T = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ de l'échantillon. Les statistiques les plus usitées, sont le *maximum*, le *minimum et* l'*étendue* de l'échantillon qui est la différence des deux statistiques précédentes. On utilise aussi beaucoup $m_1^{'}$ et m_2 (moyenne et variance de l'échantillon).

Dans les caractéristiques d'un échantillon, on peut être intéressé à décider si un échantillon empirique { $x_1, x_2, ..., x_n$ } est compatible avec une hypothèse donnée relative au type d'une loi de probabilité. De plus, on peut s'intéresser aussi à déterminer les caractéristiques de certaines distributions des moments d'un échantillon de taille *n*, tiré d'une population donnée.

D'une façon générale, la nature d'une expérience stochastique ou les résultats d'essais effectués dans le passé nous permettent souvent d'émettre une *hypothèse* relative à l'expérience considérée. Cette hypothèse peut avoir trait soit à un paramètre inconnu ou à la forme d'une loi de probabilité, soit aux caractéristiques de l'échantillon comme l'indépendance des observations. De telles hypothèses statistiques sont alors acceptées ou rejetées en fonction des résultats numériques obtenus lors de l'expérimentation. Un test est donc un procédé permettant de décider si une hypothèse peut être considérée comme vraie ou fausse.

1.2 L'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative

Afin de mieux cerner les notions de base sur les tests d'hypothèses, ce chapitre sera basé sur les tests paramétriques qui ont pour objectif de vérifier des hypothèses relatives à un paramètre d'une loi de probabilité. On suppose que l'on est intéressé à la valeur θ d'un paramètre d'une certaine population. On suppose donc que l'on a formulé une hypothèse sur θ, un échantillon aléatoire est collecté et la valeur de l'estimateur $\hat{\theta}$ est utilisée pour déterminer si l'hypothèse faite sur le paramètre θ $\left(\theta = \theta_0\right)$ est raisonnable.

Un test d'hypothèses se réduit à la confrontation de deux *hypothèses* : l'une, *l'hypothèse nulle* (H_0), qui suppose que la loi de répartition des observations remplit certaines conditions bien définies (dans le cas présent, c'est celle pour laquelle on fixe a priori un paramètre de la population à une valeur particulière, exemple $\theta = \theta_0$), l'autre, *l'hypothèse alternative* (H_1), qui affirme qu'au contraire, tout ou parties de ces conditions sont différentes de celle de l'hypothèse nulle (ici, $\theta \neq \theta_0$).

Un des aspects importants d'un test d'hypothèse est de convenir d'avance (C'est-à-dire avant le prélèvement de l'échantillon dans la population) à quelle condition l'une ou l'autre des hypothèses sera considérée comme vraisemblable.

1.3 Statistique du test et région critique

Tester une hypothèse H_0 relative à un paramètre inconnu signifie qu'on définit une *règle de décision* permettant de se prononcer sur la validité de H_0 au vu des valeurs prises par un échantillon empirique $x_1, x_2, ..., x_n$. La technique employée pour départager les deux hypothèses consiste dans le calcul d'une fonction statistique des observations $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ (ou encore *la statistique du test*) dont la loi exacte ou approximative est connue sous l'hypothèse H_0. On évalue ensuite le rapport critique qui servira à éprouver l'hypothèse H_0.

La valeur de *k* au delà de laquelle on serait incapable de soutenir l'hypothèse H_0 se définit à l'aide de la probabilité suivante:

$$P(\textit{statistique} > k \,/\, H_0 \textit{ est vraie}).$$

Construire un test statistique revient donc à dire que l'on fait un partage de l'axe des nombres réels en deux régions : $I\!R = R \cup \overline{R}$, où *R* est la *région critique ou de rejet* (C'est la région définie par les valeurs de la statistique plus grandes que *k*) et son complément $\overline{R}$ qui est la *région d'acceptation.* En d'autres mots, on conclut au rejet ou à l'acceptation de l'hypothèse nulle selon que la valeur obtenue pour la statistique du test est à l'intérieur d'une région critique (région de rejet) ou non (région d'acceptation). La règle de décision appropriée est donc :

- si $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \in R$, on rejette H_0
- si $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \in \overline{R}$, on n'a aucune raison de rejeter H_0.

Cependant, on ne pourra prendre une telle décision sans oublier que celle-ci est basée sur une information partielle, les résultats d'un échantillon. Il faut donc prendre conscience qu'il y a un certain risque qu'elle soit erronée. Ce risque est donné par le seuil de signification du test.

1.4 Erreurs de type I et II

Étant donné que la décision est basée sur une information partielle, un échantillon, l'application d'un test peut donc conduire à deux types d'erreurs. La première consiste à rejeter l'hypothèse nulle lorsqu'elle est vraie (*erreur de type I* ou encore *erreur de première espèce*). Elle se produit lorsque l'hypothèse nulle étant vraie mais la valeur trouvée pour la statistique du test appartient au domaine de rejet. Cet événement possède une certaine probabilité que l'on appelle *niveau de signification du test* (ou encore *le seuil de signification du test*) et est noté :

$$\alpha = P(Rejeter\ H_0\ /\ H_0\ est\ vraie) = P(\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \in R\ /\ H_0\ est\ vraie);$$

sa valeur est généralement fixée d'avance.

Le second type d'erreur est celui qui consiste à accepter l'hypothèse nulle lorsqu'elle est fausse (*erreur de type II* ou encore *erreur de deuxième espèce*). Elle se produit lorsque la valeur trouvée pour la statistique du test n'appartient pas à la région critique alors que l'hypothèse alternative est vraie. L'erreur de type *II* est quantifiée en probabilité et nous l'identifions par :

$$\beta = P(Accepter\ H_0\ /\ H_0\ est\ fausse) = P(\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \in \overline{R}\ /\ H_0\ est\ fausse);$$

sa valeur dépend non seulement de α, mais aussi de la valeur du paramètre θ. Ainsi, les résultats d'une décision peuvent se présenter de la façon suivante :

		SITUATIONS	
		H_0 VRAIE	H_1 VRAIE
Décisions	Ne pas rejeter H_0	*Bonne décision*	β
	Rejeter H_0	α	*Bonne décision*

La probabilité β varie selon les valeurs qu'on peut donner au paramètre θ. Le graphique de β en fonction de ces différentes valeurs du paramètre donne la courbe d'efficacité du test. Si par contre on trace les valeurs (1 - β) en fonction des différentes valeurs du paramètre, on obtient alors la courbe de *puissance du test* relativement à l'hypothèse alternative. Ce graphique donne la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle H_0, lorsque cette hypothèse est fausse. En principe, un bon test est celui qui rendrait minimale à la fois la probabilité de l'erreur de type *I* et celle de type *II*. Hors, on montre cependant que les valeurs α et β sont étroitement liées. Ainsi, *si* α *augmente alors* β *diminue et si* α *diminue alors* β *augmente*. Cela laisse donc entrevoir que le choix de la statistique du test est très important. De plus, compte tenu du fait que le niveau de signification du test est toujours fixé d'avance, plus β sera petit, plus le test sera puissant.
Une autre propriété que doit posséder un bon test est celle d'être sans erreur systématique relativement à l'hypothèse alternative, c'est-à-dire que la probabilité de rejet de l'hypothèse nulle lorsqu'elle est vraie n'est pas plus grande que lorsqu'elle est fausse $(\alpha \leq 1-\beta)$, ce qui est une nécessité évidente.

Théoriquement, l'hypothèse nulle est généralement acceptée lorsque la valeur de la statistique est proche de la médiane de sa loi de répartition sous l'hypothèse nulle. Ainsi, un test est dit ***unilatéral*** lorsque la région de rejet du test est formée de valeurs toutes situées d'un même côté de la médiane; il est dit ***bilatéral*** lorsque cette région est formée de valeurs situées de part et d'autre de cette médiane. En principe, le choix de la forme unilatérale ou bilatérale d'un test est conditionnée par la puissance de l'une ou l'autre forme relativement à l'hypothèse alternative.

1.5 Généralités sur les tests statistiques

En s'inspirant de ce qui vient d'être dit, chaque procédé de test paramétrique comprend obligatoirement les démarches suivantes :

- *En accord avec le critère à étudier, on définit l'hypothèse* H_0 *ainsi que l'hypothèse alternative* H_1.

- *On se fixe un seuil de signification* α *et une taille de l'échantillon n de telle sorte que ces valeurs soient adaptées au problème en question.*

- *À l'aide d'une statistique* $\varphi(x_1,...,x_n)$ *dont on connaît la distribution si* H_0 *est vraie, on définit la région critique R telle que :*

  $P(\varphi(x_1,...,x_n) \in R / H_0$ *est vraie)* $= \alpha$. *R représente la région des valeurs prises par la statistique* $\varphi(x_1,...,x_n)$ *qui ne vérifient pas* H_0, *tout en étant en accord avec* H_1.

- *On calcule éventuellement la puissance* $(1-\beta)$ *du test ainsi construit.*

- *On effectue une série de n expériences et l'on accepte ou rejette* H_0 *en fonction de la valeur prise par la statistique considérée.*

Il existe d'autres types de tests appelés *tests non paramétriques*. Ces derniers ne mettent en œuvre que des caractéristiques d'ordre (plus grand/plus petit, avant/après, etc.). Leur utilisation ne repose sur aucune hypothèse particulière concernant les paramètres et la forme de la distribution statistique des observations (comme cela est particulièrement le cas avec les tests paramétriques), ce qui leur confère en plus les avantages d'une relative simplicité, et d'être applicables à un large éventail de situations. En particulier, dans de tels tests l'hypothèse nulle se borne à affirmer que les observations sont distribuées de manière indépendante par la même loi de répartition tandis que l'hypothèse alternative met en doute soit l'indépendance des observations, soit l'identité de la loi de répartition. Les conclusions de ces tests possèdent donc une plus grande généralité puisque ces dernières ne sont pas liées à une forme particulière de la loi de répartition qui régit la distribution des observations. Cependant, les tests non paramétriques sont en général moins puissants que les tests paramétriques dont la plus grande efficacité provient de la référence explicite à une distribution théorique. En revanche, l'indication de l'efficacité d'un test non paramétrique est généralement fournie par son efficacité asymptotique. L'usage d'un test non paramétrique est recommandé lorsque ce dernier a une efficacité élevée, c'est-à-dire dont la puissance est presque aussi grande que celle du test paramétrique correspondant le plus puissant.

1.6 Généralités sur les tests d'homogénéité et d'indépendance appliqués sur une série chronologique

Une *série chronologique* (ou série temporelle) est une succession d'observations d'une même grandeur au cours du temps. L'intervalle de temps qui sépare deux observations consécutives est mesuré en unités conventionnelles : heures, jours, semaines, mois, trimestres, années,...
L'emploi des méthodes d'inférence statistique conduit à interpréter chaque observation x_t comme réalisation d'une variable aléatoire X_t, et la chronique $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ comme réalisation d'un processus aléatoire $\{ X_1, X_2, \ldots, X_n \}$.

L'inférence statistique faite sur la chronique $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ repose sur certaines hypothèses fondamentales en statistique. En l'occurrence, il est particulièrement intéressant de vérifier que les observations de la chronique sont ***indépendantes et identiquement distribuées (iid)***. Identiquement distribuées signifie ici que les observations de la chronique sont homogènes.

Le caractère d'indépendance et d'homogénéité des observations sont très importants lorsque nous avons à faire une inférence statistique sur des données qui sont recueillies au cours du temps. Les tests statistiques d'indépendance et d'homogénéité sont plus qu'importants dans de telles études, dans la mesure où les réponses qu'ils fournissent entraînent des décisions parfois importantes dans l'étude des observations ayant cette nature particulière. Dans l'application de ces différents tests, l'hypothèse nulle affirme que les observations de la chronique sont homogènes pour ce qui est des tests d'homogénéité, alors que pour les tests d'indépendance l'hypothèse nulle affirme que les observations de la chronique sont indépendantes. Cependant, la forme de l'hypothèse alternative pour ces deux catégories de tests exige une grande prudence quant à sa formulation.

Pour les différents tests d'indépendance et d'homogénéité présentés dans ce travail, on suppose que les ***données étudiées sont corrigées des erreurs systématiques***. Ainsi, les tests qui seront présentés peuvent être appliqués directement sur les donnés provenant de l'échantillon et non sur les résidus d'un modèle qui aurait permis de représenter ces données

2 TESTS D'HOMOGÉNÉITÉ

Dans une analyse des séries chronologiques, il est important de vérifier l'hypothèse que les observations de la chronique sont identiquement distribuées, cela revient encore à vérifier que les observations de la chronique sont homogènes. La vérification de cette hypothèse est nécessaire avant d'entreprendre toute étude d'inférence statistique. Le caractère d'homogénéité des observations d'une série chronologique est donc une hypothèse fondamentale dans une étude statistique, et mérite d'être traité avec beaucoup de sérieux.

2.1 Définition de la notion d'homogénéité

Le problème d'homogénéité est le suivant : disposant de plusieurs échantillons distincts et indépendants, on veut savoir s'ils sont tirés de la même population. C'est par exemple, le cas où l'on est en présence des observations d'une série chronologique qui ont été prélevées successivement dans une population de nature déterminée, et on se demande si, à un moment donné des prélèvements, la population en question s'est modifiée.
L'hétérogénéité des observations d'une série chronologique peut provenir de plusieurs raisons, entre autres, dans une analyse des caractéristiques d'un phénomène hydrologique :

- *les conditions climatiques sont-elles les mêmes pour une période donnée ?*
- *un fait nouveau est-il venu perturber la population dont l'échantillon est extrait ?*
- *les observations de l'échantillon ont-elles évoluées sous l'influence d'une modification des conditions de leur mesure (déplacement du site, changement d'appareils etc.) ?*
- *assiste-t-on à un changement du climat ?*

En effet, si l'on prend l'exemple du débit d'un cours d'eau, que ce soit en période de crue ou en période d'étiage, celui-ci dépend d'un nombre varié de facteurs naturels ou humains qui sont susceptibles d'être changés au cours des années. Il est donc probable que pour une période donnée, le régime du cours d'eau soit modifié de telle sorte qu'une distribution statistique qui s'ajustait bien sur les données de débits observés, ne le soit plus maintenant; l'échantillon de débits que l'on possède à ce moment précis n'est plus homogène. Tester l'homogénéité d'une série d'observations, revient alors à montrer l'impact sur les observations d'un changement dans les conditions entourant la saisie de ces observations.

Dans la formulation statistique du problème d'homogénéité, on considère k populations aléatoires définies par les k fonctions de répartitions $F_j(x)$, $j = 1,...,k$. On extrait « au hasard » dans chaque population un échantillon de taille n_j. On dispose ainsi de k échantillons indépendants extraits au hasard, de sorte que l'on cherche à vérifier les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0: \; F_1(x) = \ldots = F_j(x) = \ldots = F_k(x) \\ H_1: \; \textit{il existe } i \textit{ et } j \textit{ tels que}: \; F_i(x) \neq F_j(x). \end{cases}$$

En général, cette étude se limite toujours à deux populations, c'est-à-dire $k = 2$. Dans le système précédent, l'hypothèse nulle H_0 affirme que les k échantillons proviennent d'une même population (les observations de la série chronologique sont homogènes), tandis que l'hypothèse alternative met en doute cette assertion (les observations de la série chronologique ne sont pas homogènes).

Les différents tests statistiques qui sont présentés dans la suite, s'inspirent des remarques précédentes et seront rangés en deux catégories : ceux exprimant que l'hétérogénéité des observations de la série chronologique est due à une tendance en saut, et ceux exprimant qu'elle est due plutôt à une tendance en escalier. Toutefois, certains tests présentés dans le contexte d'indépendance sont aussi applicables ici. En effet, si le changement dans la série d'observations ne se produit pas près des extrémités de la série, le test de tendance basé sur le coefficient de corrélation des rangs de *Kendall* devrait le détecter convenablement (*Walsh*, *1962*). Dans la situation où le changement dans la série des observations est dû à la variation de la moyenne de la population de façon cyclique (persistance); les mêmes valeurs observées pourraient se répéter dans la série. Le test de *Wald-Wolfowitz* est donc convenable pour détecter le caractère hétérogène des observations de la série chronologique.

2.2 Tests d'homogénéité appliqués à une tendance en saut

La tendance en saut signifie que dans les observations de la série chronologique, on soupçonne qu'un changement (une cassure ou un saut) a eu lieu à un moment donné dans l'échantillon. On se trouve donc en présence de deux sous-échantillons situés de part et d'autre du changement (saut). Les tests statistiques d'homogénéité présentés dans cette section vérifient que ces sous échantillons proviennent d'une même population.

Soit $\{x_1,\ldots,x_n\}$ la série chronologique, et soient $\{x_{11},x_{12},\ldots,x_{1n_1}\}$ et $\{x_{21},x_{22},\ldots,x_{2n_2}\}$ les sous séries homogènes situées de part et d'autre du saut. En considérant les deux populations aléatoires dont sont issues ces sous séries et, $F_1(x)$ et $F_2(x)$ les fonctions de répartition associées, vérifier l'homogénéité de la série chronologique $\{x_1,\ldots,x_n\}$, revient à tester les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : F_1(x) = F_2(x) \\ H_1 : F_1(x) \neq F_2(x). \end{cases}$$

2.2.1 Tests d'homogénéité de tendance en saut basés sur la fonction de répartition empirique

La fonction de répartition empirique, $\hat{F}(x)$, qui est une estimation, sur l'échantillon, de la fonction de répartition *F(x)* de la population, est définie par :

$$\hat{F}(x) = \frac{\textit{nombre de valeurs} \leq x \textit{ dans l'échantillon}}{\textit{la taille de l'échantillon}}$$

L'idée que $\hat{F}(x)$ ne doit jamais s'écarter trop fortement de *F(x)*, lorsque l'échantillon provient d'une distribution ayant cette fonction de répartition, est fondamentale pour les tests qui vont suivre. Ainsi, tester l'homogénéité des observations de la série chronologique, revient à vérifier les hypothèses du système suivant :

$$\begin{cases} H_0 : F_1(x) = F_2(x) \\ H_1 : F_1(x) \neq F_2(x) \end{cases}$$, ce qui peut encore s'exprimer par :

$$\begin{cases} H_0 : \hat{F}_1(x) = \hat{F}_2(x) \\ H_1 : \hat{F}_1(x) \neq \hat{F}_2(x). \end{cases}$$

Les différents tests qui vont suivre sont essentiellement non paramétriques, on utilise la plus grande différence mesurée entre les deux fonctions de distribution empirique, dans la direction de l'axe des ordonnées.

- **Test de Kolmogorov-Smirnov** (***Kolmogorov-Smirnov two-sample test***, Smirnov (1939))

Ce test est décrit par *Conover (1980)*. On considère que la statistique de ce test sous l'hypothèse nulle d'homogénéité est donnée par :

$$T = \sup_x \left| F_1(x) - F_2(x) \right|$$

Les quantiles d'ordre 1 - α, $w_{1-\alpha}$, de la statistique T sont donnés par *Conover (1980)*.

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

Étape 1 : *Calculer* $\hat{F}_1(x)$ *et* $\hat{F}_2(x)$.

Étape 2 : *Tester l'hypothèse d'homogénéité,* H_0, *en calculant la valeur observée de la statistique sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$T_{obs} = \sup_x \left| \hat{F}_1(x) - \hat{F}_2(x) \right|$$

Étape 3 : *Au seuil de signification* α, *rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$$T_{obs} > w_{1-\alpha}$$

- **Test de Cramer-von Mises** (***Cramer-von Mises Two-sample Test***, Cramer (1928) et von Mises (1931))

Ce test est décrit par *Conover (1980)*. On considère que la statistique du test sous l'hypothèse nulle d'homogénéité, est donnée par :

$$T_2 = \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{x_1^{(i)}}{n_2} - i\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(\frac{x_2^{(i)}}{n_1} - i\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right)^2\right\},$$

où, dans l'échantillon original, $x_j^{(i)}$ est le rang attribué à l'observation i dans le sous-échantillon j de l'échantillon total.

Les quantiles d'ordre 1 - α, $w_{1-\alpha}$, de la statistique T_2 sont donnés par *Conover (1980)*.

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

***Étape 1** : Ordonner les deux sous-échantillons en attribuant un rang à chaque observation.*

***Étape 2** : Calculer T_2.*

***Étape 3** : Tester l'hypothèse d'homogénéité, H_0, en calculant la valeur observée de la statistique suivante :*

$$T_{obs} = T_2$$

***Étape 4** : Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$$T_{obs} > w_{1-\alpha}$$

- **Test du khi-deux** (***Chi-square Test***, Goodman et Kruskal (1954))

Ce test unilatéral est décrit par *Conover (1980)*. L'hypothèse alternative d'homogénéité est que la fonction de répartition empirique du deuxième sous-échantillon est supérieure à celle du premier sous-échantillon. La statistique du test est donnée par :

$K = 4\left(\sup_x\left(\hat{F}_1(x) - \hat{F}_2(x)\right)\right)\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \sim \chi_2^2$ (K suit une loi de Khi-deux à deux degrés de liberté).

Pour les fins d'application, on suivra les étapes suivantes :

***Étape 1** : Calculer K.*

***Étape 2** : Tester l'hypothèse d'homogénéité, H_0, en calculant la valeur observée de la statistique suivante :*

$$K_{obs} = K$$

***Étape 3** : Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$K_{obs} > \chi^2_{(1-\alpha,2)}$, *où,* $\chi^2_{(1-\alpha,2)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\alpha$ *de la loi* χ_2^2.

2.2.2 Tests d'homogénéité appliqués à une tendance en saut et basés sur les moyennes empiriques

La vérification de l'hypothèse d'homogénéité peut se faire aussi à l'aide des tests classiques sur l'égalité de deux moyennes. Pour cela, en s'assurant au départ de la compatibilité des variances des deux sous-échantillons situés de part et d'autre du changement (saut), on peut vérifier l'homogénéité des observations en testant l'égalité des moyennes empiriques associées à chacun de ces sous-échantillons. L'homogénéité des observations de la chronique est vérifié au sens que s'il y a un changement significatif de la moyenne de la population à l'intérieur de la série de base, le caractère d'homogénéité de la série chronologique est compromis, puisqu'alors les observations de la série n'appartiennent pas toutes à une même population. Le caractère non homogène des observations de la chronique se traduit alors par un saut de la moyenne d'amplitude Δ, c'est-à-dire :

$$E(x_i) = \begin{cases} \mu, & i = 1,\dots,m \\ \mu + \Delta, & i = m+1,\dots,n \end{cases},$$

et de variance $Var(x_i) = \sigma_x^2$.

Les tests d'homogénéité basés sur les moyennes visent ainsi à quantifier l'importance d'une hétérogénéité dans la série chronologique. Dans la situation où il est possible de déterminer le paramètre m dans l'expression de $E(x_i)$, en posant μ_1 comme étant la moyenne de la population 1 dont est issu le premier sous-échantillon de la chronique de base, et μ_2 celle de la population 2 dont est issu l'autre sous-échantillon. On estime μ_1 et μ_2 à partir de l'échantillon par :

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} \text{ et}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}$$

Le test d'homogénéité revient alors à vérifier les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

2.2.2.1 Tests paramétriques d'homogénéité

Dans tout ce qui va suivre, σ_1^2 représente la variance de la population 1et σ_2^2 celle de la population 2 ; n_1 est la taille du sous-échantillon provenant de la population 1 et n_2 est celle du sous-échantillon provenant de la population 2.

- **Test de normalité** (*Normality test*)

Ce test est décrit par *Lachance (1996)*. Il s'applique dans le cas de grands échantillons $(n_1 \geq 30, n_2 \geq 30)$ et σ_1^2, σ_2^2 étant inconnues. Ainsi, on estime σ_1^2 et σ_2^2 à partir de l'échantillon par :

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1} \text{ et,}$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1}$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

Pour les fins d'application, on suivra les étapes suivantes :

Étape 1 *: S'assurer que la condition des grands échantillons* $(n_1 \geq 30, n_2 \geq 30)$ *est remplie.*

Étape 2 *: Tester l'hypothèse d'homogénéité,* H_0*, en calculant la valeur observée de la statistique sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

***Étape 3** : Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :* $|Z_{obs}| > z_{(1-\alpha/2)}$,

où, $z_{(1-\alpha/2)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\frac{\alpha}{2}$ *de la loi* $N(0,1)$.

- **Test de Student** (***Student test***)

Lachance (1996) décrit ce test qui est applicable pour les petits échantillons $(n_1 \le 30, n_2 \le 30)$ et σ_1^2, σ_2^2 étant inconnues. Ainsi, on estime σ_1^2 et σ_2^2 par s_1^2 et s_2^2. L'hypothèse préalable de ce test est que les deux populations sont distribuées normalement. De plus, pour la variance des deux populations, deux sous-cas peuvent être rencontrés :

1. *les variances des deux populations sont inconnues, mais sont supposées égales (1^er^ cas)*
2. *les variances des deux populations sont inconnues, mais ne sont pas supposées égales (2^e^ cas).*

Pour connaître le cas correspondant à l'application du test de Student, il est nécessaire de commencer par appliquer le ***test de Fisher*** (voir *annexe B*), afin de comparer les variances des deux populations.

Ainsi, si le test de Fisher ne rejette pas l'égalité des variances, c'est le 1^er^ cas qui s'applique et la statistique du test de Student est donnée par :

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_P \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$$ (t suit une loi de Student à $n_1 + n_2 - 2$ degrés de liberté),

où, $s_P = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$ est la racine carrée de la variance combinée.

Si par contre le test de Fisher rejette l'égalité des variances, c'est le 2[e] cas qui s'applique et la statistique du test de Student est donnée par :

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}} \sim t_{(\upsilon)}, \text{ où,}$$

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 (n_1 - 1)(n_2 - 1)}{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 (n_2 - 1) + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 (n_1 - 1)}$$

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

***Étape 1** : S'assurer que la condition des petits échantillons* $(n_1 \leq 30, n_2 \leq 30)$ *est remplie.*

***Étape 2** : Tester la normalité des sous-échantillons.*

***Étape 3** : Tester l'égalité des variances à l'aide du test de Fisher.*

***Étape 4** : Tester l'hypothèse d'homogénéité,* H_0*, en calculant la valeur observée de la statistique sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$t_{obs} = \begin{cases} \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_P \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, & \textit{si le test de Fisher ne rejette pas l'égalité des variances;} \\[2ex] \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}}, & \textit{si le test de Fisher rejette l'égalité des variances.} \end{cases}$$

***Étape 5** : Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité dans les deux situations suivantes :*

1. *Lorsque le test de Fisher ne rejette pas l'égalité des variances, rejeter H_0 si :* $|t_{obs}| > t_{\left(1-\alpha/2, n_1+n_2-2\right)}$.
2. *Lorsque le test de Fisher rejette l'égalité des variances, rejeter H_0 si :* $|t_{obs}| > t_{\left(1-\alpha/2,\ \upsilon\right)}$.

$t_{\left(1-\alpha/2,\ n_1+n_2-2\right)}$ *et* $t_{\left(1-\alpha/2,\ \upsilon\right)}$ *sont respectivement les quantiles d'ordre* $1-\alpha/2$ *des lois* $t_{(n_1+n_2-2)}$ *et* $t_{(\upsilon)}$.

2.2.2.2 Test non paramétrique d'homogénéité

Si les données des sous-échantillons ne proviennent pas des populations distribuées normalement, le test présenté ici sert à tester l'homogénéité des observations de l'échantillon en utilisant les moyennes empiriques.

- **Test de Mann-Whitney** (***Mann-Whitney test***, Wilcoxon (1945))

Ce test est décrit par *Lachance (1996)*. Il permet de faire des inférences sur les médianes des deux populations. Au niveau des hypothèses, il implique que les deux populations dont sont issus les sous-échantillons aient des distributions de même forme et que ces sous-échantillons soient indépendants. On définit les variables u_1 et u_2 telles que :

$$u_1 = t_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

$$u_2 = t_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

On désigne par t_1 le total des rangs du premier sous-échantillon de taille n_1 et par t_2 le total des rangs du second sous-échantillon de taille n_2.

Le test de Mann-Whitney consiste à considérer une statistique, désignée par M telle que :

$$M = \min(u_1, u_2).$$

Pour des sous-échantillons de tailles strictement supérieures à 10 $(n_1 > 10, n_2 > 10)$, on peut montrer que la variable M suit approximativement une distribution normale de moyenne $E(M)$ et de variance $Var(M)$ données par :

$$E(M) = \frac{n_1 n_2}{2}$$

$$Var(M) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12},$$

n_1 étant la taille du plus petit sous-échantillon.

La statistique du test est alors :

$$Z = \frac{M + \frac{1}{2} - E(M)}{\sqrt{Var(M)}} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Pour les fins d'application, on suivra les étapes suivantes :

***Étape 1** : Vérifier que la condition des grands échantillons* $(n_1 > 10, n_2 > 10)$ *est remplie.*

***Étape 2** : Vérifier l'indépendance des sous-échantillons.*

***Étape 3** : Agréger les deux sous-échantillons pour n'en faire qu'un seul de taille* $n = n_1 + n_2$.

***Étape 4** : Ordonner ce nouvel échantillon en accordant un rang à chacune des observations (en cas d'ex aequo, accorder le rang moyen). Calculer en suite la valeur de M.*

***Étape 5** : Tester l'hypothèse d'homogénéité, H_0, en calculant la valeur observée de la statistique sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{M - \frac{n_1 n_2}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

***Étape 7** : Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :* $|Z_{obs}| > z_{(1-\alpha/2)}$,

où, $z_{(1-\alpha/2)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\frac{\alpha}{2}$ *de la loi* $N(0,1)$.

2.2.3 Autres tests d'homogénéité

Dans cette section, on présente des tests d'homogénéité qui font intervenir des caractéristiques statistiques autres que les fonctions de répartition empiriques et les moyennes empiriques.

2.2.3.1 Test de la médiane (*Median Test*)

Ce test est décrit par *Berryman (1984)*. Il vise à contrôler l'identité des deux médianes, à admettre l'exactitude de l'hypothèse nulle d'homogénéité, à mélanger les observations des deux sous-échantillons et à déterminer la médiane x_v de l'échantillon total. Ainsi, on définit :

n_{11} *= le nombre d'observations du premier sous-échantillon qui sont inférieures à* x_v ;

n_{12} *= le nombre d'observations du premier sous-échantillon qui sont supérieures à* x_v ;

n_{21} *= le nombre d'observations du deuxième sous-échantillon qui sont inférieures à* x_v ;

n_{22} *= le nombre d'observations du deuxième sous-échantillon qui sont supérieures à* x_v.

La statistique du test sous l'hypothèse nulle d'homogénéité est alors :

$$\kappa = \frac{n\left(\left|n_{12}n_{21}\right| - \frac{n}{2}\right)^2}{(n_{12}+n_{11})(n_{12}+n_{22})(n_{22}+n_{21})(n_{11}+n_{21})} \sim \chi_1^2 .$$

Pour les fins d'application, on suivra les étapes suivantes :

***Étape 1** : Calculer* κ.

***Étape 2** : Tester l'hypothèse d'homogénéité,* H_0, *en calculant la valeur observée de la statistique suivante :*

$\kappa_{obs} = \kappa$.

***Étape 3** : Au seuil de signification* α, *rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$\kappa_{obs} > \chi^2_{(1-\alpha,1)}$, *où* $\chi^2_{(1-\alpha,1)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\alpha$ *de la loi* χ_1^2.

2.2.3.2 Test des blocs de Wald-Wolfowitz (***Wald-Wolfowitz Runs Test***, Wald et Wolfowitz (1940))

Ce test est décrit par *Berryman (1984)*. C'est un test non paramétrique, il est l'équivalent du test du nombre de séquences homogènes (test d'indépendance contre l'existence d'une tendance). Il consiste ici à ranger par ordre croissant les observations du premier sous-échantillon ainsi que celles du deuxième sous-échantillon. Par définition, on appelle bloc, une suite d'observations appartenant au même échantillon. On considère la variable B donnée par :

B = le nombre de blocs aléatoires.

Pour des sous-échantillons de tailles supérieures ou égales à 20, on peut démontrer que si les deux sous-échantillons indépendants proviennent d'une population homogène de caractère continu, la variable aléatoire B suit approximativement une loi normale de moyenne $E(B)$ et de variance $Var(B)$ données par :

$$E(B) = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1$$

$$Var(B) = \frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}.$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \frac{B + \frac{1}{2} - E(B)}{\sqrt{Var(B)}} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

les étapes d'application de ce test sont données par :

***Étape 1** : S'assurer que les sous-échantillons sont indépendants et que* $(n_1 \geq 20, n_2 \geq 20)$.

***Étape 2** : Agréger les deux sous-échantillons pour n'en faire qu'un seul de taille*

$n = n_1 + n_2$.

***Étape 3** : Ordonner ce nouvel échantillon en accordant un rang à chacune des observations.*

***Étape 4** : Calculer la valeur de B en notant par « + » les résultats du premier sous-échantillon et par « - » ceux du deuxième sous échantillon.*

***Étape 5** : Tester l'hypothèse nulle d'homogénéité en calculant la valeur observée de la statistique sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{B + \frac{1}{2} - \left(\frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1\right)}{\sqrt{\frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}}}$$

***Étape 6** : Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :* $|Z_{obs}| > z_{\left(1-\alpha/2\right)}$,

où, $z_{\left(1-\alpha/2\right)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\frac{\alpha}{2}$ *de la loi* $N(0,1)$.

La série de tests qui va suivre pour clore cette section, est basée sur le fait que les observations de la série chronologique sont indépendantes et proviennent d'une population normale. On pourra aussi utiliser ces tests dans les situations où l'on a un léger doute sur l'acceptation de l'hypothèse de normalité des observations.

En résumé, les propriétés des tests qui sont présentés maintenant sont basées sur l'hypothèse que les observations de la chronique de base sont indépendantes et normalement distribuées de moyenne :

$$E(x_i) = \begin{cases} \mu, & i = 1,\dots,m \\ \mu + \Delta, & i = m+1,\dots,n \end{cases}$$, et de variance $Var(x_i) = \sigma_x^2$.

2.2.3.3 Tests basés sur les déviations cumulées

On présente des tests basés sur les sommes partielles ajustées, où encore les déviations cumulatives à la moyenne :

$$S_k^* = \begin{cases} 0, & si\ k = 0; \\ \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}), & si\ k = 1,\cdots,n \end{cases},$$

la somme partielle standardisée est définie par :

$S_k^{**} = \dfrac{S_k^*}{s_x}$, avec $s_x = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, l'écart-type de la chronique.

- **Test basé sur la somme partielle standardisée**

Buishand (1982) décrit ce test. Pour tester l'homogénéité des observations de la chronique, on peut utiliser une statistique basée sur la somme partielle standardisée. Pour cela, on définit la statistique suivante :

$$Q = \max_{0 \le k \le n} \left| S_k^{**} \right|$$

Les quantiles d'ordre 1 - α, $q_{1-\alpha}$, de la statistique Q sont donnés par *Buishand (1982).*

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

Étape 1 *: Calculer Q.*

Étape 2 *: Tester l'hypothèse d'homogénéité, H_0, en calculant la valeur observée de la statistique suivante :*

$$Q_{obs} = Q.$$

Étape 3 *: Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$$Q_{obs} > q_{1-\alpha}.$$

- **Test basé sur l'étendue des sommes cumulées standardisées**

Ce test comme le précédent est présenté par *Buishand (1982)*. La statistique du test qui sert à tester l'homogénéité des observations de la série chronologique est donnée par :

$$R = \max_{0 \le k \le n}\left(S_k^{**}\right) - \min_{0 \le k \le n}\left(S_k^{**}\right).$$

Les quantiles d'ordre 1 - α, $r_{1-\alpha}$, de la statistique Q sont donnés par *Wallis et O'connell (1973).*

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

Étape 1 *: Calculer R.*

Étape 2 *: Tester l'hypothèse d'homogénéité, H_0, en calculant la valeur observée de la statistique suivante :*

$$R_{obs} = R.$$

Étape 3 *: Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$$R_{obs} > r_{1-\alpha}.$$

2.2.3.4 Tests basés sur le rapport de vraisemblance de Worsley

- **Test basé sur la statistique de Student**

Ce test est aussi décrit par *Buishand (1982).*Dans l'expression de

$$E(x_i) = \begin{cases} \mu, & i = 1,\ldots,m \\ \mu + \Delta, & i = m+1,\ldots,n \end{cases},$$

il a été vu que s'il est possible de déterminer le paramètre m (l'endroit où on soupçonne une cassure dans la chronique), alors les tests non paramétriques et les tests paramétriques basés sur les moyennes empiriques permettaient de tester l'homogénéité des observations de la chronique en vérifiant l'hypothèse que $\Delta = 0$ (H_0), contre l'hypothèse que $\Delta \neq 0$ (H_1). Si maintenant le paramètre m ne peut être déterminé avec exactitude, il est possible de tester l'homogénéité de la série chronologique en utilisant la statistique suivante :

$$W = \max_{1 \le k \le n-1} \left| t_k \right|,$$

où t_k dénote la valeur observée de la statistique de Student, obtenue en testant la moyenne des k premières observations de la chronique contre la moyenne des *(n - k)* dernières observations. Les quantiles d'ordre 1 - α, $w_{1-\alpha}$, de la statistique *W* sont donnés par *Worsley (1979).*

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

***Étape 1** : Calculer W.*

***Étape 2** : Tester l'hypothèse d'homogénéité,* H_0, *en calculant la valeur observée de la statistique suivante :*

$$W_{obs} = W$$

***Étape 3** : Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$$W_{obs} > w_{1-\alpha}$$

- **Test basé sur les sommes cumulées pondérées et standardisées**

Ce test est décrit par *Buishand (1982)*. La somme cumulée pondérée est définie par :

$$Z_k^* = \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} S_k^*, \qquad k = 1,\ldots n-1.$$

La somme cumulée pondérée standardisée est donnée par :

$$Z_k^{**} = \frac{Z_k^*}{s_x}, \text{ avec } s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

La statistique du test est alors :

$$V = \max_{1 \le k \le n-1} \left| Z_k^{**} \right|$$

Les quantiles d'ordre 1 - α, $v_{1-\alpha}$, de la statistique V sont donnés par *Worsley (1979).*

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

***Étape 1** : Calculer V.*

***Étape 2** : Tester l'hypothèse d'homogénéité, H_0, en calculant la valeur observée de la statistique suivante :*

$$V_{obs} = V$$

***Étape 3** : Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$$V_{obs} > v_{1-\alpha}$$

2.2.3.5 Tests basés sur les procédures bayesiennes

Les procédures bayesiennes pour la détection du saut de la moyenne peuvent aussi se prêter à une analyse de l'homogénéité des observations d'une série chronologique. Dans un contexte de tests bayesiens, il est assumé que la variance σ_x^2 est connue. Les différents tests présentés ici sont dérivés de la statistique de Gardner . Cette statistique teste le saut de la moyenne en un point connu de l'échantillon des données. Elle est donnée par :

$$\widetilde{G} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{S_k^*}{\sigma_x} \right)^2 ,$$

où p_k est la probabilité a priori que le saut de la moyenne survienne juste après la $k^{ième}$ observation de la chronique $(k = 1,\dots,n-1)$. Si σ_x^2 n'est pas connu, on peut utiliser son estimation à partir de l'échantillon.

- **Test basé sur l'indépendance des p_k par rapport aux** k

Ce test est décrit par *Buishand (1982)*. Dans la situation où les p_k sont indépendants des *k*, la statistique de Gardner devient une distribution uniforme a priori et sert à tester l'homogénéité des observations d'une série chronologique. Cette dernière statistique est donnée par :

$$U = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(S_k^{**} \right)^2 .$$

Les quantiles d'ordre 1 - α, $u_{1-\alpha}$, de la statistique *U* sont donnés par *Buishand (1982).*

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

Étape 1 *: Calculer U.*

Étape 2 *: Tester l'hypothèse d'homogénéité, H_0, en calculant la valeur observée de la statistique suivante :*

$$U_{obs} = U$$

Étape 3 *: Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$$U_{obs} > u_{1-\alpha} .$$

- **Test basé sur la proportionnalité des p_k par rapport aux $1/[k(n-k)]$**

Ce test est aussi présenté par *Buishand (1982)*. Dans la situation où les p_k sont proportionnels aux $1/[k(n-k)]$, la statistique de *Gardner* qui sert à tester l'homogénéité des observations de la série chronologique est donnée par :

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} \left(Z_k^{**}\right)^2$$

Les quantiles d'ordre 1 - α, $a_{1-\alpha}$, de la statistique A sont donnés par *Buishand (1982).*

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

***Étape 1** : Calculer A.*

***Étape 2** : Tester l'hypothèse d'homogénéité, H_0, en calculant la valeur observée de la statistique suivante :*

$$A_{obs} = A.$$

***Étape 3** : Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$$A_{obs} > a_{1-\alpha}.$$

2.3 Tests d'homogénéité appliqués à une tendance en escalier

La tendance en escalier est une généralisation de la tendance en saut : on suppose cette fois qu'il y a dans l'échantillon des données, non pas une seule cassure, mais plusieurs. On se trouve donc en présence de k sous-échantillons, déterminés de part et d'autre des cassures, et on veut vérifier si ces k sous-échantillons proviennent d'une même population. On veut alors vérifier les hypothèses du système général suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : F_1(x) = \ldots = F_j(x) = \ldots = F_k(x) \\ H_1 : il\ existe\ i\ et\ j\ tels\ que :\ F_i(x) \neq F_j(x). \end{cases}$$

Les tests présentés ici sont donc des généralisations pour k sous-échantillons des tests de tendance en saut présentés à la section 2.2.

2.3.1 Tests d'homogénéité appliqués à une tendance en escalier et basés sur la fonction de répartition empirique

Les tests présentés dans cette section sont analogues au test de Kolmogorov-Smirnov pour deux sous-échantillons. Ainsi, tester l'homogénéité des observations de la série chronologique, revient à vérifier les hypothèses du système général, ce qui revient encore à vérifier les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \hat{F}_1(x) = \ldots = \hat{F}_j(x) = \ldots = \hat{F}_k(x) \\ H_1 : il\ existe\ i\ et\ j\ tels\ que : \hat{F}_i(x) \neq \hat{F}_j(x). \end{cases}$$

- **Test de Birnbaum-Hall (k = 3)** (***Birnbaum-Hall test***, Birnbaum et Hall (1960))

Ce test est décrit par *Conover (1980)*. Les hypothèses de ce test, équivalentes à celles du système général, sont les suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : F_1(x), \ldots, F_j(x), \ldots, F_k(x)\ sont\ identiques\ les\ unes\ des\ autres \\ H_1 : au\ moins\ deux\ fonctions\ de\ répartition\ ne\ sont\ pas\ identiques. \end{cases}$$

La statistique du test est alors :

$$T = \sup_{x,i,j} \left| F_i(x) - F_j(x) \right|.$$

Les quantiles d'ordre 1 - α, $w_{1-\alpha}$, de la statistique T (dans le cas de trois sous-échantillons de tailles égales) sont présentés par *Conover* (*1980*).

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

Étape 1 *: Calculer les* $\hat{F}_i(x)$, $(i = 1,\ldots,k)$.

Étape 2 *: Tester l'hypothèse d'homogénéité,* H_0, *en calculant la valeur observée de la statistique sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$T_{obs} = \sup_{x,i,j}\left|\hat{F}_i(x) - \hat{F}_j(x)\right|$$

Étape 3 *: Au seuil de signification* α, *rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$T_{obs} > w_{1-\alpha}$.

- **Test unilatéral de Smirnov à k (k > 2) sous-échantillons** (***One-sided k-Sample Smirnov Test,*** Conover (1965))

Ce test est décrit par *Conover (1980)*. Les hypothèses de ce test, équivalentes à celles du système général, sont les suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : F_1(x) = \ldots = F_j(x) = \ldots = F_k(x) \\ H_1 : il\ existe\ i\ et\ j\ tels\ que : F_i(x) \le F_j(x). \end{cases}$$

La statistique du test est alors :

$$T_2 = \sup_{x,i<j}\left|F_i(x) - F_j(x)\right|.$$

Les quantiles d'ordre 1 - α, $w_{1-\alpha}$, de la statistique T_2 sont présentés par *Conover* (1980).

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

Étape 1 *: Calculer les* $\hat{F}_i(x)$, $(i = 1,\ldots,k)$.

Étape 2 *: Tester l'hypothèse d'homogénéité,* H_0, *en calculant la valeur observée de la statistique sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$T_{2obs} = \sup_{x,i<j} \left|\hat{F}_i(x) - \hat{F}_j(x)\right|$$

Étape 3 *: Au seuil de signification* α*, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$$T_{2_{obs}} > w_{1-\alpha}.$$

- **Test bilatéral de Smirnov à k (k > 2) sous-échantillons** (***Two-sided k-Sample Smirnov Test,*** Conover (1965))

Ce test est décrit par *Conover (1980)*. Les hypothèses de ce test, équivalentes à celles du système général, sont les suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : F_1(x) = \ldots = F_j(x) = \ldots = F_k(x) \\ H_1 : \textit{il existe } i \textit{ et } j \textit{ tels que} : F_i(x) \neq F_j(x). \end{cases}$$

La statistique du test est alors :

$$T_3 = \sup_x \left|F^{(1)}(x) - F^{(k)}(x)\right|,$$

où $F^{(1)}(x)$ est la fonction de répartition du sous-échantillon qui a la plus petite valeur parmi les k sous-échantillons, et $F^{(k)}(x)$ est celle du sous-échantillon qui a la plus grande valeur.

Les quantiles d'ordre 1 - α, $w_{1-\alpha}$, de la statistique T_3 sont donnés par *Conover (1980)*.

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

Étape 1 *: Agréger les k sous-échantillons pour n'en faire qu'un seul de taille $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ et accorder un rang à chaque observation.*

Étape 2 *: Pour le sous-échantillon ayant le plus petit rang, calculer sa fonction de répartition empirique : $\hat{F}^{(1)}(x)$. De même, pour le sous-échantillon ayant le plus grand rang, calculer sa fonction de répartition empirique : $\hat{F}^{(k)}(x)$. Évaluer ensuite T_3.*

Étape 3 *: Tester l'hypothèse d'homogénéité, H_0, en calculant la valeur observée de la statistique sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$T_{3_{obs}} = \sup_x \left| \hat{F}^{(1)}(x) - \hat{F}^{(k)}(x) \right|.$$

Étape 4 *: Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$$T_{3_{obs}} > w_{1-\alpha}$$

2.3.2 Tests d'homogénéité appliqués à une tendance en saut basés sur les moyennes empiriques

Dans le présent contexte, le caractère non homogène des observations de la chronique se traduit par plusieurs sauts de la moyenne d'amplitude Δ_i, c'est-à-dire :

$$E(x_i) = \begin{cases} \mu, & i = 1,\dots,m_1 \\ \mu + \Delta_1, & i = m_1 + 1,\dots,m_2 \\ & \vdots \\ \mu + \Delta_l, & i = m_l + 1,\dots,n \end{cases} \text{, et de variance } Var(x_i) = \sigma_x^2.$$

Les tests d'homogénéité basés sur les moyennes visent toujours à quantifier l'importance d'une hétérogénéité dans la série chronologique. Dans la situation où il est possible de déterminer les paramètres m_i dans l'expression de $E(x_i)$, en posant μ_i comme étant la moyenne de la population i dont est issu le i^e sous-échantillon de la chronique de base. Le test d'homogénéité basé sur les moyennes revient alors à vérifier les hypothèses, équivalentes au système général suivantes :

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \ldots = \mu_i = \ldots = \mu_k \\ H_1: il\ existe\ i\ et\ j\ tels\ que : \mu_i \neq \mu_j \end{cases}$$

Les tests utilisés ici sons essentiellement non paramétriques.

- **Test de Kruskal-Wallis** (***Kruskal-Wallis test***, Kruskal et Walis (1952))

Ce test est décrit par *Berryman (1984)*. Dans l'échantillon original, $R(x_{ij})$ est le rang de l'observation *j* issue du *i*e sous-échantillon, $R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R(x_{ij})$, $i = 1,2,\ldots k$, est la somme des rangs des éléments du *i*e sous-échantillon dans l'échantillon total. La statistique du test de Kruskal-Wallis est donnée par :

$$T = \frac{1}{S^2}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - \frac{n(n+1)^2}{4}\right),$$

$$\text{où,} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(R(x_{ij})\right)^2 - n\frac{(n+1)^2}{4}\right).$$

Dans la situation où les sous-échantillons ont des tailles assez grandes *(> 5),* on peut montrer que la statistique *T* suit approximativement une loi de Khi-deux à *k-1* degrés de liberté.

Pour les fins d'application de ce test, nous suivrons les étapes suivantes :

Étape 1 *: Ordonner l'échantillon original en accordant un rang à chacune des observations (en cas d'ex aequo, accorder le rang moyen). Calculer en suite la valeur de T.*

***Étape 2** : Tester l'hypothèse d'homogénéité, H_0, en calculant la valeur observée de la statistique sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$T_{obs} = T.$$

***Étape 3** : Au seuil de signification α, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$\kappa_{obs} > \chi^2_{(1-\alpha,\, k-1)}$, *où* $\chi^2_{(1-\alpha,\, k-1)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\alpha$ *de la loi* χ^2_{k-1}.

- **Test de van der Warden pour plusieurs échantillon indépendants (*van der Waerden test*,** van der Warden (1653))

Ce test est décrit par *Conover (1980)*. Il s'applique avec les hypothèses utilisées dans le test de Kruskal-Wallis. On définit :

$A_{ij} = \phi\left(\frac{R(x_{ij})}{n+1}\right)$, ϕ est la fonction de répartition d'une loi normale standardisée. De plus,

$$\overline{A}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}^2\right).$$

La statistique du test est donnée par :

$$T_1 = \frac{1}{S^2}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\overline{A}_i\right)^2 \sim \chi^2_{k-1}.$$

Pour les fins d'application de ce test, on suivra les étapes suivantes :

***Étape 1** : Ordonner l'échantillon original en accordant un rang à chacune des observations (en cas d'ex aequo, accorder le rang moyen). Calculer en suite la valeur de T_1.*

Étape 2 *: Tester l'hypothèse d'homogénéité,* H_0*, en calculant la valeur observée de la statistique sous l'hypothèse nulle comme suit :*

$$T_{1_{obs}} = T_1 .$$

Étape 3 *: Au seuil de signification* α*, rejeter l'hypothèse nulle d'homogénéité si :*

$T_{1_{obs}} > \chi^2_{(1-\alpha,\, k-1)}$, *où* $\chi^2_{(1-\alpha,\, k-1)}$ *est le quantile d'ordre 1-*α *d'une loi de Khi-deux à k-1degrés de liberté.*

2.4 Comparaison des différents tests

Dans ce chapitre, on a présenté un grand nombre de tests statistiques servant à vérifier l'homogénéité des observations d'une série chronologique. Ces derniers utilisaient en majorité l'approximation normale, et ce, dans le but d'accroître leur efficacité. Une façon plus sûre d'accroître l'efficacité des tests présentés serait d'identifier s'il y a une ou plusieurs cassures (sauts) dans l'échantillon des données. Pour cela, on pourra procéder à un examen visuel (en ayant une bonne expérience dans ce domaine) ou théorique. *Cluis et al. (1987)* présentent un bon moyen de déceler s'il y a un ou plusieurs sauts dans les données de la chronique à l'aide de *la fonction cusum*. La comparaison des tests proposés va donc se faire en fonction du nombre de cassures éventuellement décelées dans l'échantillon des données.

Pour les tests d'homogénéité appliqués à une tendance en saut, si les données de l'échantillon proviennent d'une population normale, les tests paramétriques sont plus efficaces que les tests non paramétriques. Les deux tests paramétriques présentés en 2.2.2.1 ont une efficacité comparable pour les situations auxquelles ils s'appliquent $(n < 30 \quad et \quad n \geq 30)$. Si par contre les données de l'échantillon ne proviennent pas d'une population normale, il est préférable d'utiliser les tests non paramétriques. Dans cette catégorie de tests, le test de *Mann-whitney* a une efficacité beaucoup plus élevée que les tests d'homogénéité basés sur la fonction de répartition empirique et les autres tests d'homogénéité présentés (test de la médiane et test des blocs de *wald-*

Wolfowitz), *Berryman (1984)*. De plus, comme les tests basés sur les déviations cumulées, sur le rapport de vraisemblance de *Worsley* et ceux sur les procédures Bayesiennes ont une efficacité comparable au test de *Cramer-von Mises*, d'après *Buishand (1982)*, on peut conclure que le test de *Mann-whitney* est plus efficace que tout autre test non paramétriques. Cependant, les autres tests non paramétriques peuvent avoir une efficacité comparable pour des tailles d'échantillon assez petites (voir les tailles limites qui sont nécessaires à leurs applications).

Pour les tests d'homogénéité appliqués à une tendance en escalier, il ressort d'après *Bobée et al.(1988)* que les tests de *Kruskall-Wallis* et de *van-der-Warden* sont les plus efficaces.

On mentionne cependant qu'il existe d'autres tests d'homogénéité qui ont été présentés par *Faucher et al. (1997)*. D'après *Bobée et al.(1988),* pour les tests d'homogénéité appliqués à une tendance en saut, les tests de *Terry-Hoeffding*, de *van-der-Warden* et de *Bell-Doksum* (voir *Faucher et al. (1997)*) ont une efficacité comparable et sont plus efficaces que le test de *Mann-whitney*. De même que pour les tests d'homogénéité appliqués à une tendance en escalier, le test de *Terpstra-Jonckeere*, présenté dans le rapport des tests de stationnarité, a une efficacité comparable avec celle du test de *Kruskall-Wallis* et *van-der-Warden*.

Pour les tests d'homogénéité appliqués à une tendance en escalier, un test paramétrique pourrait consister à faire une analyse de variance sur les moyennes empiriques des sous-échantillons déterminées de part et d'autre des cassures (sauts) de l'échantillon des données.

3 TESTS D'INDÉPENDANCE

Dans une analyse des séries chronologiques, le caractère d'indépendance des observations est une notion fondamentale en inférence statistique. La vérification de *l'hypothèse d'indépendance* dans une série de données est une chose que l'on doit entreprendre avant toute étude d'inférence statistique.

3.1 Définition de la notion d'indépendance

On parle d'indépendance statistique lorsque la densité de probabilité jointe d'une série chronologique, une collection de *n* variables aléatoires, peut être écrite comme un produit de densités marginales pour chacune des *n* variables aléatoires, c'est-à-dire :

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\ldots f_{X_n}(x_n).$$

L'hypothèse d'indépendance est essentielle pour de nombreux problèmes statistiques. Dans un contexte expérimental, cette hypothèse est souvent garantie, ou presque, soit lorsque les prélèvements sont faits aléatoirement, ou par un procédé qui sert à randomiser, c'est-à-dire que les traitements sont assignés aléatoirement aux unités expérimentales. Dans l'analyse d'une série chronologique, l'hypothèse d'indépendance est cruciale, car les observations de la chronique sont collectées au cours du temps. Dans une telle situation, on peut envisager que les observations ainsi recueillies ne sont pas sans rapport avec le passé. Il est donc normal de suspecter divers types de dépendance affectant les observations de la série chronologique. Ces différents types de dépendance peuvent être représentés par :

1. un *effet de persistance* : une valeur n'est pas indépendante de la ou des valeurs précédentes.
2. un *effet de tendance monotone* : l'espérance mathématique (la moyenne de la série) croit (ou décroît) avec le temps de manière continue.
3. des *effets cycliques* ou *pseudo-cycliques*.

Il s'ensuit que pour vérifier l'indépendance des observations d'une série chronologique, on doit opposer l'hypothèse d'indépendance à des hypothèses alternatives raisonnables et bien spécifiées de telle manière que celles-ci correspondent à l'un de ces trois types de dépendance qui peuvent affecter les observations d'une chronique.
En pratique, dans un échantillon utilisé pour analyser les caractéristiques d'un phénomène hydrologique, les débits d'une rivière par exemple, il serait préférable de considérer le débit maximum annuel afin d'éviter le plus possible le problème de dépendance. En effet, si l'on considère par exemple des débits journaliers, il est probable qu'on introduise une dépendance entre les observations de la chronique.

Dans le présent contexte, si l'on considère l'hypothèse d'indépendance comme étant l'hypothèse nulle, l'hypothèse alternative associée est l'existence de l'un ou l'autre type de dépendance (persistance, tendance ou cyclicité).

3.2 Tests d'indépendance contre l'existence d'une persistance

Dans cette section, tester l'hypothèse d'indépendance va consister à vérifier l'absence d'effet de persistance entre les observations successives de la série chronologique. On veut donc examiner si les valeurs faibles (respectivement élevées) de la chronique ont ou non tendance à suivre des valeurs faibles (respectivement élevées). On présente donc à cet effet les tests non paramétriques d'indépendance, d'application très simple et les tests paramétriques d'indépendance basés en général sur l'autocorrélation d'ordre 1. Les hypothèses à tester sont :

H_0 *: Les observations sont indépendantes;*

H_1 *: les observations sont autocorrélées.*

3.2.1 Tests non paramétriques d'indépendance

Nous partons du fait que s'il existe une autocorrélation entre les observations successives des x_t $(t = 1,...,n)$, on peut s'attendre à ce que des valeurs élevées (respectivement faibles) suivent fréquemment des valeurs élevées (respectivement faibles). Cette remarque inspire les tests qui vont suivre.

- **Test des groupes**

Ce test est décrit par *Malinvaud (1978)*. Pour son application, on considère la variable R telle que :

> *R = le nombre de groupes formés d'observations consécutives toutes supérieures (ou toutes inférieures) à la médiane de la chronique.*

Pour un échantillon (chronique) de taille n supérieure ou égale à 50, on peut montrer que la variable R suit approximativement une distribution normale de moyenne $E(R)$ et de variance $Var(R)$ données par :

$$E(R) = \frac{n+2}{2}$$

$$Var(R) = \frac{n-1}{4}$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \frac{R - E(R)}{\sqrt{Var(R)}} \sim N(0,1)$$ (Z suit une loi normale standardisée).

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1*. Vérifier que la taille n de la chronique est supérieure ou égale à 50.*

Étape 2*. Calculer R, le nombre de groupes formés d'observations consécutives toutes supérieures (ou inférieures) à la médiane de la chronique x_υ donnée par :*

$$x_\upsilon = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & si\ n\ impair \\ \dfrac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}, & si\ n\ pair \end{cases}$$

Étape 3*. Tester l'hypothèse nulle d'indépendance en calculant la valeur observée de la statistique du tests sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{R - \frac{n+2}{2}}{\sqrt{\frac{n-1}{4}}}$$

Étape 4. *Au niveau de signification α, rejeter H_0 si : $|Z_{obs}| > z_{(1-\alpha/2)}$, où,*

$z_{(1-\alpha/2)}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $N(0,1)$.

- **Test de Walis et Moore (*Turning Point Test*)**

Ce test est aussi connu sous le nom de *Test des points de retournement.* Il est décrit par *Malinvaud (1978)*. Pour son application, on considère la variable *P* telle que :

P = le nombre de points de retournement

= le nombre d'observations x_t telles que : $(x_{t+1} - x_t)(x_t - x_{t-1}) < 0$.

$(t = 2,\ldots,n)$

Pour un échantillon (chronique) de taille n supérieure ou égale à 50, on peut montrer que la variable P suit approximativement une distribution normale de moyenne $E(P)$ et de variance $Var(P)$ données par :

$$E(P) = \frac{2}{3}(n-2)$$

$$Var(P) = \frac{16n-29}{90}$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \frac{P - E(P)}{\sqrt{Var(P)}} \sim N(0,1)$$

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1. *Vérifier que la taille n de la chronique est supérieure ou égale à 50.*

Étape 2. *Calculer P, le nombre de points de retournement.*

Étape 3. *Tester l'hypothèse nulle d'indépendance en calculant la valeur observée de la statistique du test sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{P - \frac{2}{3}(n-2)}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}}$$

Étape 4. *Au niveau de signification α, rejeter H_0 si : $|Z_{obs}| > z_{(1-\alpha/2)}$, où,*

$z_{(1-\alpha/2)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\alpha/2$ *de la loi* $N(0,1)$.

- **Test de von Neumann** (***von Neumann Ratio Test***)

Ce test est décrit par *Kendall et al.(1983)*. Pour son application, on considère la variable η appelée *rapport de von Neumann* telle que :

η = *le rapport de la moyenne des carrés des différences successives à la variance de l'échantillon.*

On peut encore écrire :

$$\eta = \frac{n}{n-1}\frac{\sum_{t=1}^{n-1}\left(x_{t+1}-x_t\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(x_t-\bar{x}\right)^2}, \textit{ avec } \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$$

Pour un échantillon $(x_1,\ldots,x_n)$(chronique) de taille n supérieure ou égale à 30, on peut montrer que la variable η suit approximativement une distribution normale de moyenne $E(\eta)$ et de variance $Var(\eta)$ données par :

$$E(\eta) = 2\frac{n}{n-1}$$

$$Var(\eta) = 4\frac{n-2}{(n-1)^2}$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \frac{\eta - E(\eta)}{\sqrt{Var(\eta)}} \sim N(0,1).$$

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1. *Vérifier que la taille n de la chronique est supérieure ou égale à 30.*

Étape 2. *Calculer η, le rapport de von Neumann*

Étape 3. *Tester l'hypothèse nulle d'indépendance en calculant la valeur observée de la statistique du test sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{\eta - 2\frac{n}{n-1}}{\sqrt{4\frac{n-2}{(n-1)^2}}}$$

Étape 4. *Au niveau de signification α, rejeter H_0 si : $|Z_{obs}| > z_{(1-\alpha/2)}$, où,*

$z_{(1-\alpha/2)}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $N(0,1)$.

- **Test de Wald-Wolfowitz** (***Wald-Wolfowitz test***, Wald et Wolfowitz (1943))

Ce test est décrit par *Bobée et al.(1978)*. Pour son application, on considère la variable R donnée par :

$$R = \sum_{t=1}^{n-1} x_t x_{t+1} + x_1 x_n .$$

Pour n strictement supérieure à 40, sous l'hypothèse nulle d'indépendance, R suit approximativement une distribution normale de moyenne $E(R)$ et de variance $Var(R)$ données par :

$$E(R) = \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)^2 - \sum_{t=1}^{n} x_t^2}{n-1}$$

$$Var(R) = \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2 - \sum_{t=1}^{n} x_t^4}{n-1} + \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)^4 - 4\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)^2 \sum_{t=1}^{n} x_t^2 + 4\sum_{t=1}^{n} x_t \sum_{t=1}^{n} x_t^3 + \left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2 - 2\sum_{t=1}^{n} x_t^4}{(n-1)(n-2)} - (E(R))^2$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \frac{R - E(R)}{\sqrt{Var(R)}} \sim N(0,1)$$

Les étapes d'application de ce test sont données par :

***Étape 1** : Vérifier que la taille n de la chronique est supérieure à 40.*

***Étape 2** : Calculer R.*

***Étape 3** : Tester l'hypothèse nulle d'indépendance en calculant la valeur observée de la statistique du test sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{R - \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)^2 - \sum_{t=1}^{n} x_t^2}{n-1}}{\sqrt{\frac{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2 - \sum_{t=1}^{n} x_t^4}{n-1} + \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)^4 - 4\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)^2 \sum_{t=1}^{n} x_t^2 + 4\sum_{t=1}^{n} x_t \sum_{t=1}^{n} x_t^3 + \left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2 - 2\sum_{t=1}^{n} x_t^4}{(n-1)(n-2)} - (E(R))^2}}$$

Étape 4 : *Au niveau de signification α, rejeter H_0 si :* $|Z_{obs}| > z_{\left(1-\alpha/2\right)}$, *où,*

$z_{\left(1-\alpha/2\right)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\alpha/2$ *de la loi* $N(0,1)$.

3.2.2 Tests paramétriques d'indépendance

Les observations de la chronique sont autocorrelées, s'il existe un *coefficient d'autocorrélation d'ordre* θ différent de zéro. Il est donc naturel d'établir un test d'indépendance sur ces coefficients d'autocorrélation ρ_θ, avec :

$$\rho_\theta = \frac{E(x_t - \bar{x})(x_{t+\theta} - \bar{x})}{Var(x)}$$

Ce test sera basé sur une estimation du coefficient d'autocorrélation d'ordre θ noté r_θ, et est donné par :

$$r_\theta = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t x_{t+\theta} - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)^2}, \quad \text{où } x_{t+\theta} = x_{t+\theta-n} \text{ pour toutes valeurs } t+\theta > n.$$

r_θ constitue non seulement un estimateur naturel de ρ_θ, mais il est aussi une fonction symétrique des n valeurs observées de la chronique.

La loi de distribution d'un ensemble de plusieurs ρ_θ est connue mais elle est rarement utilisé en pratique, les tests étant établis généralement sur un seul coefficient, le plus souvent celui du premier ordre. On estime donc que pour l'analyse des débits de crue annuels, il n'est pas nécessaire de considérer des coefficients d'autocorrélation d'ordre supérieure à 1. Les tests paramétriques qui vont suivre, sont basés sur ρ_θ et on suppose que les observations de la chronique proviennent d'une population normale.

- **Test de Ljung-Box** (***Ljung-Box Test***, Ljung et Box (1978)) $(n > 40)$

Ce test est décrit par *Jeff et al. (1994)*. Il est le seul dans ceux que nous présentons qui utilise un coefficient d'autocorrélation d'ordre supérieur à 1. Comme il a été mentionné, les observations d'une chronique sont indépendantes si les coefficients d'autocorrélation sont différents de zéro. Alors, vérifier l'indépendance des observations contre l'existence d'une autocorrélation revient à faire le test suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_\theta = 0 \\ H_1 : \textit{aumoins un } \rho_i \neq 0 \end{cases}$$

La statistique du test Q_θ est calculée en fonction de la taille n de l'échantillon. Pour n supérieures à 40, *Ljung et Box (1978)* ont suggéré que,

$$Q_\theta = n(n+2)\sum_{t=1}^{\theta} \frac{\rho_t^2}{(n-t)} \sim \chi_\theta^2 \text{ (} Q_\theta \text{ suit une loi de Khi-deux à } \theta \text{ degrés de liberté)}$$

Pour une chronique composée d'observations sur une base annuelle, les auteurs suggèrent de prendre $\theta = 5$.

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1 *: Vérifier la normalité des observations de la chronique.*

Étape 2 *: Tester l'hypothèse nulle d'indépendance en calculant la valeur observée de la statistique du test sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Q_{\theta_{obs}} = n(n+2)\sum_{t=1}^{\theta} \frac{r_t^2}{(n-t)}$$

Étape 3 : *Au niveau de signification α, rejeter H_0 si : $Q_{\theta_{obs}} \notin \left[\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\theta)}, \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\theta)} \right]$, où,*

$\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\theta)}$ *et* $\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\theta)}$ *sont respectivement les quantiles d'ordre* $1-\frac{\alpha}{2}$ *et* $\frac{\alpha}{2}$ *d'une loi* χ^2_θ.

- **Test de Box-Pierce** (***Box-Pierce Test***, Box et Pierce (1970)) $(n < 40)$

En étant toujours dans les mêmes hypothèses du test précédent, pour un échantillon de taille inférieure à 40, *Box et Pierce (1970)* ont suggéré que,

$$Q_\theta = n\sum_{t=1}^{\theta} \rho_t^2 \sim \chi^2_\theta$$

Pour une chronique composée d'observations sur une base annuelle, les auteurs suggèrent de prendre $\theta = 5$.

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1 *: Vérifier la normalité des observations de la chronique.*

Étape 2 *: Tester l'hypothèse nulle d'indépendance en calculant la valeur observée de la statistique du test sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Q_{\theta_{Obs}} = n\sum_{t=1}^{\theta} r_t^2$$

Étape 3 : *Au niveau de signification α, rejeter H_0 si : $Q_{\theta_{obs}} \notin \left[\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\theta)}, \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\theta)} \right]$, où,*

$\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\theta)}$ *et* $\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\theta)}$ *sont respectivement les quantiles d'ordre* $1-\frac{\alpha}{2}$ *et* $\frac{\alpha}{2}$ *d'une loi* χ^2_θ.

- **Test de Bartlett** (***Bartlett test***, Bartlett (1935))

Ce test est décrit par *Llamas (1993)*. Pour son application, on considère les séries A et B suivantes :

série $A : x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$

série $B : x_2, x_3, \dots, x_n$.

On pose ρ_1, le coefficient de corrélation entre ces deux séries (c'est l'équivalent du premier coefficient d'autocorrélation de la série x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Tester l'hypothèse d'indépendance, revient donc à faire le test suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \rho_1 = 0 \\ H_1 : \rho_1 \neq 0 \end{cases}$$

La statistique du test est $T = \rho_1 \dfrac{\sqrt{n-3}}{\sqrt{1-\rho_1^2}}$, elle suit une distribution de Student à n-3 degrés de liberté.

Afin d'accroître l'efficacité de ce test, *Bartlett (1935)* suggère de prendre le nombre υ de degrés de liberté tel que :

$$\upsilon = (n-3)\frac{1 - r_A r_B}{1 + r_A r_B}.$$

Comme $r_A \approx r_B \approx r_1$, alors : $\upsilon = (n-3)\dfrac{(1-r_1^2)}{(1+r_1^2)}$.

Ainsi, la statistique finale du test est :

$T = \dfrac{\rho_1 \sqrt{\upsilon}}{\sqrt{1-\rho_1^2}} \sim t_{(\upsilon)}$ (T suit une loi de Student à υ degrés de liberté).

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1. *Arranger la chronique initiale afin d'obtenir les séries A et B.*

Étape 2. *Calculer le coefficient de corrélation* r_1 *entre ces deux séries.*

Étape 3. *Tester l'hypothèse nulle suivante avec la statistique T en calculant la valeur observée de la statistique du test suivante :*

$$T_{obs} = \frac{r_1\sqrt{\upsilon}}{\sqrt{1-r_1^2}}$$

Étape 4. *Au niveau de signification* α*, rejeter* H_0 *si :* $|T_{obs}| > t_{(1-\alpha/2,\, \upsilon)}$*, où,*

$t_{(1-\frac{\alpha}{2},\, \upsilon)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\frac{\alpha}{2}$ *d'une loi* $t_{(\upsilon)}$.

- **Test d'Anderson** (***Anderson test***, Anderson (1941))

Ce test est décrit par *Bobée et al.(1978)*. Il est conçu pour des séries circulaires, c'est-à-dire lorsque la dernière valeur de la série chronologique est suivie par la première. Pour une chronique de taille *n*, le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1, r_1, est donné par :

$$r_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} - \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Pour des échantillons de taille *n* issus de populations normales, il est possible de montrer (d'après *Anderson, 1941*) que, sous l'hypothèse nulle, r_1 suit approximativement une loi normale de moyenne $E(r_1)$ et de variance $Var(r_1)$ données par :

$$E(r_1) = \frac{-1}{n-1}$$

$$Var(r_1) = \frac{n-2}{(n-1)^2}$$

La statistique du test sous l'hypothèse nulle (indépendance des observations) est alors :

$$Z = \frac{r_1 - E(r_1)}{\sqrt{Var(r_1)}} \sim N(0,1).$$

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1 : *Vérifier que les observations de la chronique proviennent d'une loi normale.*

Étape 2 : *Tester l'hypothèse nulle d'indépendance avec la statistique Z en calculant sa valeur observée suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{r_1 + \frac{1}{n-1}}{\sqrt{\frac{n-2}{(n-1)^2}}}$$

Étape 4 : *Au niveau de signification α, rejeter H_0 si : $|Z_{obs}| > z_{(1-\alpha/2)}$, où,*

$z_{(1-\alpha/2)}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $N(0,1)$.

- **Test de Brock, Dechert et Scheinkman** (***BDS Test,*** Brock et al. (1986))

Le test BDS est décrit par *Brock et al. (1986)*. Dans ce test, l'hypothèse nulle d'indépendance est définie en utilisant le concept de la corrélation spatiale. Pour déterminer cette corrélation spatiale, la série chronologique x_t $(t = 1,...n)$ doit être « embeded » dans un espace de dimension *m,* en construisant le vecteur suivant :

$$x_t^m = \left[x_t, ..., x_{t-m+1}\right] \; t = 1,2,...n - m + 1.$$

Le concept de « embeded » a été suggéré par *Takens (1980)*. La motivation derrière ce concept est de créer *m* nouveaux vecteurs, de telle manière qu'on puisse examiner la corrélation dans un contexte spatial. La dépendance des x_t $(t = 1,...n)$ est alors examiné à travers le concept de la corrélation intégrale, qui est une mesure de la distance entre les points de l'espace de dimension *m*. Pour chaque dimension de l'espace, *m*, on choisit un epsilon ε et la corrélation intégrale est alors définie par :

$$C(\varepsilon,m,n) = \frac{1}{(n-m+1)(n-m)} \sum_{n \neq s} I\left[x_t^m, x_t^s; \varepsilon\right],$$

où, *t* et *s* varient de 1 à *n-m+1.*

$$I\left[x_t^m, x_t^s; \varepsilon\right] = \begin{cases} 1, & si \left\|x_t^m - x_t^s\right\| \leq \varepsilon \\ 0, & ailleurs. \end{cases},$$

$\| \ \|$ étant la norme métrique et la valeur maximale de cette norme est donnée par :

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq m-1} |x_t|.$$

Brock et Baek (1991) ont démontré que sous l'hypothèse nulle d'indépendance, la statistique BDS suit approximativement une loi normale centrée réduite si $\frac{n}{m} > 200$, sinon elle suit une loi τ dont les quantiles d'ordre $\alpha - 1$ sont donnés par *Brock et al.(1991).* Cette statistique s'écrit :

$$W(\varepsilon,m,n) = \frac{\sqrt{n}\left\{C(\varepsilon,m,n) - C(\varepsilon,1,n)^m\right\}}{\sqrt{V}}$$

où, la variance V est définie par :

$$V = 4\left\{K(\varepsilon)^m + 2\left[\sum_{t=1}^{m-1} K(\varepsilon)^{m-t} C(\varepsilon)^{2t} + (m-1)^2 C(\varepsilon)^{2m} - m^2 K(\varepsilon) C(\varepsilon)^{2m-2}\right]\right\},$$

avec, $C(\varepsilon) = E\left\{I\left[x_i, x_j; \varepsilon\right]\right\}$ et $K(\varepsilon) = E\left\{I\left[x_i, x_j; \varepsilon\right] I\left[x_j, x_k; \varepsilon\right]\right\}$ définis de façon similaire.

On voit dans la formule précédente que la statistique BDS dépend uniquement de la grille des valeurs de ε et de m. Une façon classique de calculer ces valeurs serait de convertir les valeurs de la chronique, $x_t, (t = 1,...n)$, dans un intervalle unitaire, $[0,1]$. Ainsi, la grille des valeurs sera choisie comme suit : $\varepsilon_t = 0.9^t$ *et* $m = t + 1$.

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1 : *Transformer les observations de la chronique dans l'intervalle* $[0,1]$.

Étape 2 : *Choisir une grille de valeurs pour* $\varepsilon_t = 0.9^t$ *et* $m = t + 1$.

Étape 3 *: Tester l'hypothèse d'indépendance en calculant la valeur observée de la* *statistique sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = W(\varepsilon, m, n).$$

Étape 4 : *Au niveau de signification α, rejeter H_0 dans les deux situations suivantes :*

1. *Lorsque* $\frac{n}{m} > 200$, *si nous avons :* $|Z_{obs}| > z_{\left(1-\alpha/2\right)}$, *où,* $z_{\left(1-\alpha/2\right)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\frac{\alpha}{2}$ *de la loi* $N(0,1)$.

2. *Lorsque* $\frac{n}{m} < 200$, *si nous avons* $Z_{obs} > \tau_{\alpha-1}$, *où* $\tau_{\alpha-1}$ *est le quantile d'ordre* $\alpha - 1$ *de la loi* τ.

3.3 Indépendance contre l'existence d'une tendance

Le caractère d'indépendance entre les observations d'une chronique peut aussi être détruit par un effet de tendance, c'est-à-dire que la moyenne des valeurs observées croît (ou décroît) avec le temps.

Cette section présente les différents tests d'indépendance contre l'existence d'une tendance monotone. Les hypothèses à tester sont :

H_0 : les observations sont indépendantes ;

H_1 : il existe une tendance dans les observations.

Les tests présentés ici sont essentiellement non paramétriques. En effet, l'hypothèse alternative d'indépendance est l'existence d'une *tendance monotone*. En revanche, ces tests ne permettent pas de déceler l'existence d'une tendance d'abord croissante puis décroissantes, si l'hypothèse d'indépendance venait à être rejetée. Toutefois, comme l'existence d'une tendance se traduit par le fait que la moyenne des observations est une fonction variant lentement dans le temps, le fait d'accepter l'hypothèse nulle ici, implique que la chronique est stationnaire (car sans tendance croissante ni décroissante).

- **Test de Forster et Stuart** (***Foster and Stuart test***, Foster et Stuart (1954))

Ce test est décrit par *Berryman (1984)*. Pour son application, on considère la variable D telle que :

$$D = u_r + v_r,$$

où : u_r = le nombre d'observations telles que $x_t > x_{t'}$, (t < t');

v_r = le nombre d'observations telles que $x_t < x_{t'}$, (t < t').

Pour une chronique de taille n supérieure ou égale à 40, on peut montrer que la variable D suit approximativement une distribution normale de moyenne $E(D)$ et de variance $Var(D)$ données par :

$$E(D) = 0$$

$$Var(D) = 2\log(n - 0.8756).$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \begin{cases} \dfrac{D - E(D) - \frac{1}{2}}{\sqrt{Var(D)}}, & si\ D > E(D) \\ \\ \dfrac{-D + E(D) + \frac{1}{2}}{\sqrt{Var(D)}}, & si\ D < E(D) \end{cases} \qquad \text{et, } Z \sim N(0,1).$$

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1 *: Vérifier que la taille de la chronique est supérieure ou égale à 40.*

Étape 2 *: Calculer D, comme spécifié plus haut.*

Étape 3 *: Tester l'hypothèse nulle d'indépendance en calculant la valeur observée de la statistique sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = \begin{cases} \dfrac{D - \frac{1}{2}}{\sqrt{2\,log(n - 0.8756)}}, & si\ D > E(D) \\[2ex] \dfrac{-D + \frac{1}{2}}{\sqrt{2\,log(n - 0.8756)}}, & si\ D < E(D) \end{cases}$$

Étape 4 : *Au niveau de signification α, rejeter H_0 si : $|Z_{obs}| > z_{(1-\alpha/2)}$, où, $z_{(1-\alpha/2)}$ est le quantile d'ordre $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ de la loi $N(0,1)$.*

- **Test de Cox-Stuart**

Ce test est décrit par *Conover (1980)*. Pour son application, on considère la variable R telle que :

$$R = \sum_{t=1}^{\frac{n}{2}} R_t \,,$$

avec $R_t = \begin{cases} 1, & si \left(x_t - x_{\frac{n}{2}+t} \right) > 0 \\ 0, & autrement \end{cases}$

Pour une chronique de taille supérieure ou égale à 20, sous l'hypothèse nulle d'indépendance, R suit approximativement une distribution normale de moyenne $E(R)$ et de variance $Var(R)$ données par :

$$E(R) = \frac{n}{2}$$

$$Var(R) = \frac{n}{4}$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \frac{R - E(R)}{\sqrt{Var(R)}} \sim N(0,1).$$

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1 *: Vérifier que la taille n de la chronique est supérieure ou égale à 20.*

Étape 2 *: Calculer R.*

Étape 3 *: Tester l'hypothèse nulle d'indépendance en calculant la valeur observée de la statistique suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{R - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$$

Étape 4 : *Au niveau de signification* α*, rejeter* H_0 *si :* $|Z_{obs}| > z_{\left(1-\alpha/2\right)}$*, où,* $z_{\left(1-\alpha/2\right)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\dfrac{\alpha}{2}$ *de la loi* $N(0,1)$.

- **Test des différences positives (*The Difference-Sign test*)**

Ce test est décrit par *Kendall et al.(1983)*. Pour son application, on considère la variable N définie par :

N *= le nombre des différences* $(x_t - x_{t-1})$ qui sont positives.

Pour une chronique de taille supérieure ou égale à 12, on peut montrer que la variable N suit approximativement une distribution normale de moyenne $E(N)$ et de variance $Var(N)$ données par :

$$E(N) = \frac{n-1}{2}$$

$$Var(N) = \frac{n+1}{12}$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \begin{cases} \dfrac{N - E(N) - \dfrac{1}{2}}{\sqrt{Var(N)}}, & si\ N > E(N) \\ \\ \dfrac{-N + E(N) + \dfrac{1}{2}}{\sqrt{Var(N)}}, & si\ N < E(N) \end{cases} \qquad \text{et, } Z \sim N(0,1).$$

Les étapes d'application de ce test sont données par :

***Étape 1** : Vérifier que la taille de la chronique est supérieure ou égale à 12.*

***Étape 2** : Calculer N, comme spécifié plus haut.*

***Étape 3** : Tester l'hypothèse nulle d'indépendance avec la statistique Z en calculant la valeur observée de la statistique du test suivante :*

$$Z_{obs} = \begin{cases} \dfrac{N - \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n+1}{12}}}, & si\ N > \dfrac{n-1}{2} \\ \dfrac{N - \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n+1}{12}}}, & si\ N < \dfrac{n-1}{2} \end{cases}$$

***Étape 4 :** Au niveau de signification α, rejeter H_0 si : $|Z_{obs}| > z_{(1-\alpha/2)}$, où, $z_{(1-\alpha/2)}$ est le quantile d'ordre $1-\dfrac{\alpha}{2}$ de la loi $N(0,1)$.*

- **Test des rangs de Spearman** (***Spearman Rank Correlation Test***) ($n \geq 20$)

Ce test est décrit par *Malinvaud (1978)*.Il est l'analogue du test précédent si on range les observations de la chronique en ordre croissant et que l'on compare le nouvel ordre à l'ordre original. En cas de tendance accentuée, les deux ordres seront corrélés. Si v_t désigne le rang attribué à l'observation *t* dans le nouvel ordre, on peut alors calculer le coefficient de corrélation des rangs de Spearman qui est donné par :

$$r_s = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{t=1}^{n} (v_t - t)^2$$

Pour un échantillon (chronique) de taille n supérieure ou égale à 20, on peut montrer que la variable r_s suit approximativement une distribution normale de moyenne $E(r_s)$ et de variance $Var(r_s)$ données par :

$$E(r_s) = 0$$

$$Var(r_s) = \frac{1}{n-1}$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \frac{r_s - E(r_s)}{\sqrt{Var(r_s)}} \sim N(0,1).$$

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1 *: Vérifier que la taille n de la chronique est supérieure ou égale à 20.*

Étape 2 *: Calculer r_s, le coefficient de corrélation de Spearman.*

Étape 3 *: Tester l'hypothèse nulle d'indépendance en calculant la valeur observée de la statistique du test sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{r_s}{\sqrt{\frac{1}{n-1}}}$$

Étape 4 : *Au niveau de signification α, rejeter H_0 si : $|Z_{obs}| > z_{(1-\alpha/2)}$, où, $z_{(1-\alpha/2)}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $N(0,1)$.*

- **Test des rangs de Spearman** ($n < 20$)

C'est le même test présenté précédemment pour une taille d'échantillon strictement inférieure à 20. Il est également décrit par *Malinvaud (1978)*. Pour les chroniques plus courtes, sous l'hypothèse nulle, on utilise la statistique T suivante :

$$T = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} \sim t_{(n-2)}$$

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1 *: Vérifier que la taille de la chronique est inférieure à 20.*

Étape 2 *: Tester l'hypothèse nulle d'indépendance avec la statistique T en calculant sa valeur observée suivante :*

$$T_{obs} = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$$

Étape 3: *Au niveau de signification α, rejeter H_0 si : $|T_{obs}| > t_{(1-\alpha/2,\upsilon)}$, où,*

$t_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\dfrac{\alpha}{2}$ *d'une loi* $t_{(\upsilon)}$.

- **Test des rangs de kendall** (***Kendall Rank Correlation Test***)

Ce test est décrit par *Kendall et al. (1983)*. Pour son application, on considère la variable τ donnée par :

$$\tau = 1 - \frac{4Q}{n(n-1)},$$

où : Q = le nombre de valeurs pour lesquelles $x_{t'} < x_t$ lorsque $t' < t$

Pour n supérieur ou égale à 30, sous l'hypothèse nulle d'indépendance, τ suit approximativement une distribution normale de moyenne $E(\tau)$ et de variance $Var(\tau)$ données par :

$$E(\tau) = 0$$

$$Var(\tau) = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}.$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \frac{\tau - E(\tau)}{\sqrt{Var(\tau)}} \sim N(0,1).$$

Les étapes d'application de ce test sont données par :

Étape 1 *: Vérifier que la taille n de la chronique est supérieure ou égale à 30.*

Étape 2 *: Calculer* τ

Étape 3 *: Tester l'hypothèse nulle d'indépendance en calculant la valeur observée de la statistique du test sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}}$$

Étape 4 : *Au niveau de signification* α, *rejeter* H_0 *si :* $|Z_{obs}| > z_{(1-\alpha/2)}$, *où,* $z_{(1-\alpha/2)}$ *est le quantile* *d'ordre* $1-\frac{\alpha}{2}$ *de la loi* $N(0,1)$.

3.4 Indépendance contre l'existence d'un effet cyclique

Dans un échantillon de données chronologiques, il peut arriver que les observations possèdent un caractère cyclique, par exemple : le cycle des saisons. Cette caractéristique peut aussi compromettre le caractère d'indépendance des observations de la chronique.

Dans cette section, tester l'hypothèse d'indépendance va consister à vérifier l'absence de cycles entre les observations successives de la série chronologique. Le test présenté à cet effet est non paramétrique. Les hypothèses à tester sont :

H_0 *: Les observations sont indépendantes;*

H_1 *: il existe un effet cyclique dans les données.*

- **Test de Mann-Whitney saisonnier**

Ce test est présenté par *Berrymann (1984)*. Si la série d'observations possède s saisons, on divise les groupes d'observations de chaque saison en deux parties. Il faut que les séparations soient consistantes d'une saison à l'autre. On pose alors la variable suivante :

$$US = \sum_{i=1}^{s} U_i ,$$

où : U_i est la statistique de *Mann-Whitney* à l'intérieur de chaque saison.

Pour une taille d'échantillon supérieure ou égale à 40, US suit approximativement une distribution normale de moyenne $E(US)$ et de variance $Var(US)$ données par :

$$E(US) = \sum_{i=1}^{s} E(U_i)$$

$$Var(US) = \sum_{i=1}^{s} Var(U_i).$$

La statistique du test est alors :

$$Z = \frac{US - E(US)}{\sqrt{Var(US)}} \sim N(0,1)$$ (Z suit une loi normale de moyenne 0 et de variance égale à 1).

Les étapes d'application de ce test sont données par :

***Étape 1** : Vérifier que la taille n est supérieure ou égale à 40.*

***Étape 2** : Calculer* US, $E(US) = \sum_{i=1}^{s} E(U_i)$ *et* $Var(US) = \sum_{i=1}^{s} Var(U_i)$. *(Voir le test de Mann-Whitney dans le chapitre traitant des tests d'homogénéité).*

***Étape 3** : Tester l'hypothèse nulle d'indépendance en calculant la valeur observée de la statistique du test sous l'hypothèse nulle suivante :*

$$Z_{obs} = \frac{US - \sum_{i=1}^{s} E(U_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{s} Var(U_i)}}$$

***Étape 4 :** Au niveau de signification* α*, rejeter* H_0 *si :* $|Z_{obs}| > z_{(1-\alpha/2)}$*, où,* $z_{(1-\alpha/2)}$ *est le quantile d'ordre* $1-\frac{\alpha}{2}$ *de la loi* $N(0,1)$.

3.5 Comparaison des différents tests

Dans ce chapitre, le problème d'indépendance des observations d'une série chronologique a été étudié. Les différents tests présentés, utilisaient en majorité l'approximation normale, et ce, dans le but d'accroître leur efficacité. En principe, pour accroître l'efficacité d'un test visant à vérifier l'indépendance des observations d'une série chronologique, il faut être capable de bien identifier au départ l'hypothèse alternative d'indépendance la plus probable. On sait cependant qu'une telle hypothèse peut être représentée par l'un des types de dépendance suivants :

1. l'existence d'une persistance ;
2. l'existence d'une tendance ;ou
3. l'existence d'une cyclicité.

Pour y arriver, il faut chercher à déceler le type de dépendance qui est susceptible d'être présent dans l'échantillon de données que l'on a à étudier. Pour cela, on peut soit procéder à une identification visuelle (en ayant une très bonne expérience dans le domaine d'étude) ou théorique. En effet, *Cluis et al. (1987)* présentent un moyen efficace pour déceler une tendance monotone dans les données de la chronique à l'aide de la *fonction cusum* et de certains tests statistiques. Pour déceler une persistance ou des cycles dans les données de la chronique, on peut utiliser les résultats de *Cluis et al. (1987)* ou la méthode présentée à *l'annexe A*. Le test d'indépendance que l'on appliquera après cette étape aura une bonne efficacité dans la mesure où il rejettera l'hypothèse d'indépendance avec une probabilité élevée quand l'effet détecté (persistance, tendance ou cyclicité) intervient. La comparaison des différents tests est effectuée en fonction de l'hypothèse alternative d'indépendance :

Pour les tests d'indépendance contre l'existence d'une persistance, si les données de l'échantillon proviennent d'une population normale, les tests paramétriques sont plus efficaces que les tests non paramétriques. Dans cette catégorie de tests, d'après *Kendall et al. (1983)*, le test d'*Anderson* est plus efficace que le test de *Bartlett* (aucune comparaison n'ayant été faite avec le test de *jung-Box* et *Box-Pierce* et celui de *Brock et al.*). Si par contre les données de l'échantillon ne proviennent pas d'une population normale, les tests non paramétriques sont les plus indiqués bien que le test d'*Anderson* soit encore applicable, car il est robuste, c'est-à-dire que la loi de répartition de sa statistique n'est modifiée que de façon négligeable par un changement de la loi de répartition des données adoptée dans l'hypothèse nulle. Dans la liste des tests non paramétriques, le test de *Wald-Wolfowitz* est le plus efficace (*Kendall et al., 1983*). Cependant, les autres tests non paramétriques peuvent avoir une efficacité comparable pour des tailles d'échantillon assez petites (voir les tailles limites nécessaire à leurs applications).

Pour les tests d'indépendance contre l'existence d'une tendance, les tests disponibles sont essentiellement du type non paramétrique. D'après *Bobée et al. (1988)* le test des rangs de *Spearman* et le test des rangs de Kendall sont l'un et l'autre très efficaces et possèdent la même efficacité asymptotique. La remarque concernant les autres tests non paramétriques reste encore valable ici.

Pour tester l'indépendance contre la cyclicité, le test saisonnier de *Mann-Whitney* est le seul disponible.

En pratique, il n'est pas interdit d'utiliser plusieurs tests pour vérifier l'indépendance des observations d'une série chronologique. On peut cependant considérer le caractère d'indépendance des observations d'une chronique comme étant suffisamment bien établi si l'application d'un test de persistance et celle d'un test de tendance conduisent tous deux à l'acceptation de l'hypothèse nulle d'indépendance. Ce choix paraît d'autant plus justifié que l'un et l'autre des tests permettent éventuellement de mettre en évidence deux formes extrêmes de persistance, l'une à brève échéance (d'un terme à l'autre) et l'autre à longue échéance. Toutefois, comme le test de persistance est indépendant du test de tendance, le test de tendance pourrait être appliqué en premier lieu.

Dans les observations d'une série chronologique, il peut aussi arriver qu'on détecte deux des trois effets de dépendance mentionnés. Les tests applicables à cette situation sont détaillés dans *Berryman (1984)*.

4 CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail, différents tests ont été étudiés pour vérifier d'une part l'hypothèse d'homogénéité et d'autre part, l'hypothèse d'indépendance des observations d'une série chronologique. Des conclusions spécifiques ont été présentées dans chaque chapitre quant au choix des tests les plus performants sur des bases purement théoriques. De ces conclusions, nous pouvons retenir les choses qui suivent.

D'abord, pour la vérification de l'hypothèse d'homogénéité, il est nécessaire d'examiner à l'avance le nombre de cassures qui sont susceptibles d'être présentes dans l'échantillon des données. Pour cela, on pourra procéder à un examen visuel (en ayant une bonne connaissances pratique dans le domaine), ou utiliser les courbes de *double-masse* et de la fonction *cusum* présentées par *Cluis et al. (1988)*. La détection préalable du nombre de cassures aura pour avantage d'accroître l'efficacité du test que l'on appliquera à cet effet. Ainsi, si nous n'avons détecter qu'une seule cassure, les tests de *Studen*t et de *Normalité* sont les plus indiqués dans l'éventualité où les observations des sous-échantillon proviennent d'une population normale, sinon, c'est le test de *Mann-Whitney* qui est le plus indiqué.
Si par contre nous avons détecté plusieurs cassures, les tests de *Kruskall-Wallis* et de *van-der-Warden* sont les plus indiqués.

Pour la vérification de l'hypothèse d'indépendance, il est important de bien définir l'hypothèse alternative d'indépendance la plus probable. On doit pour cela identifier, le type de dépendance le plus probable d'être présent dans l'échantillon des données, à l'aide de la méthode proposée par *Cluis et al. (1988)*, ou celle proposée à *l'annexe A*. Ainsi, le test d'indépendance que l'on appliquera aura une bonne efficacité dans la mesure où il rejettera l'hypothèse d'indépendance avec une probabilité élevée quand le type de dépendance détecté (persistance, tendance monotone ou cyclicité) intervient. Si c'est l'effet de persistance que l'on a décelé dans la série d'observations, le test d'*Anderson* est le plus indiqué dans l'éventualité où l'échantillon des observations de la série provient d'une population normale. On peut aussi appliquer le test de *Ljung-Box* et *Box-Pierce* ou celui de *Brock et al.* Si par contre les observations de la série ne proviennent pas d'une population normale, le test de *Wald-Wolfowitz* est le plus indiqué quoique les autres tests non paramétriques présentés peuvent avoir une puissance comparable pour les tailles d'échantillons nécessaires à leur application. Si c'est l'effet de tendance que l'on a décelé dans l'échantillon des données, les tests non paramétriques de *Spearman* et de *Kendall* sont les plus indiqués. Si c'est plutôt l'effet de cyclicité qui a été décelé dans les observations de la série chronologique, le test saisonnier de *Mann-Whitney* est le candidat idéal applicable à cette dernière situation.

Dans l'étude de la vérification de l'hypothèse d'indépendance des observations d'une série chronologique, il peut aussi arriver que l'on décèle deux ou trois types de dépendance dans l'échantillon des données. Les tests applicables à cette situation n'ont pas été présentés dans ce travail. Toutefois, cet aspect du problème d'indépendance est traité par *Berryman (1984)*. On pourra donc si nécessaire appliquer les tests qu'il suggère à cet effet.

5 RÉFÉRENCES

Anderson, R.L. (1941). *Distribution of the serial correlation coefficient.* Ann. Math. Stat. 8 (1) : 1-13.

Bobée B., P. Boucher et H. Demard (1978). *Demande en eau des résidences : analyse statistique des débits de pointe*, Rapport scientifique No 90 I.N.R.S.-Eau.

Berryman, D. (1984). *Détection des tendances dans les séries temporelles de paramètres de la qualité de l'eau à l'aide de tests non paramétriques*, thèse de maîtrise I.N.R.S.-Eau.

Birnbaum, Z. W. et R. A. Hall (1960). Small sample distribution for multi-sample statistics of the Smirnov type. Annals of Mathematical Statistics, 31 : 710-720.

Bobée B., D. Berryman, D. Cluis et J. Haemmerli (1988). *Non parametric tests for trend detection in water quality time series.* Water Ressources Bulletin, Vol. 24, No. 3 p.545-556.

Bouvier, Ch. (1983). *Étude des effets de dépendance dans une série chronologique. Application à l'étude des séquences de jours de pluies.* Cah. ORSTOM, sér. Hydrol., vol. XX, n^0 2, 1983

Brock, W.A., W. Dechert et J. Scheinkman (1986). *A test of independence based on the correlation dimension.* SSRI Report #8702, Departement of Economics, University of Wisconsin, University of houston, and University of Chicago.

Brock, W.A. et E.G. Baek (1991). *Some theory of statistical inference for nonlinear science.* Review of Economic Studies 58 : 697-716.

Buishand, T.A. (1982). *Some methods for testing the homogeneite of rainfall records*. Journal of hydrology, 58, p. 11-27.

Cluis, D., C. Laberge et C. Houle (1987). *Détection des tendances en qualité de l'eau*, Rapport scientifique No 229 I.N.R.S.-Eau.

Conover, W.J. (1980). *Pratical Nonparametrics*, John Wiley Pub. Second edition.

Conover, W.J. (1965). Several *k*-sample Kolmogorov-Smirnov tests. The annals of Mathematical Statistics, 36 : 1019-1026 (6.3).

Cramer, H. (1928). On the composition of elementary errors. Skandinavisk Aktuarietidskrift 11, 13-74 and 141-180 (6.1).

Cramer, M. (1958). *Mathematical methods of statistics*. Princeton university Press, Princeton.

Faucher, D., T.B.M.J. Ouarda et B, Bobée (1997). Revue bibliographique des tests de stationnarité. Rapport scientifique No 449 I.N.R.S.-Eau

Foster, F.G. et A. Stuart (1954). Distribution-free tests in time-series based on the breaking of records, Jour. Roy. Stat. Soc. Série B, vol. XVI, n° 1.

Goodman, L.A. et W.H. Kruskal (1954). *Measures of association for cross-classifications*. Journal of the american Statistical Association, 49, 732-764 (correction appears in Vol. 52, p. 578) (4.4).

Hajek, J. et Z. Sidak (1967). *Theory of rank Test*, Academic Press.

Jeff , B., W. Cromwell, C. Labys et T. Michel (1994). *Univariate tests for time series models*. A sage University Paper, 99.

Kendall, M., A. Stuart et J.K. Ord (1983). *The advanced theory of statistics*, 4e ed., Griffin & Co.

Kruskal, W. H. et W. A. Wallis (1952). Use of ranks on one-criterion variance analysis. Journal of the American Statistical Association, 47, 583-621. Addendum : Ibid. (1953), 907-911 (5.6).

Lehmann, E. L. (1959). *Testing Statistical Hypotheses*, Wiley.

Ljung, G. M., et G. E. P. Box (1978). On a measure of the lack of fit in time series models. Biometrika 65 : 297-303.

Llamas, J. (1993). *Hydrologie générale*. Gaétan Morin, ed

Lachance, M. (1996). *Statistique de base*, notes de cours I.N.R.S.-Eau.

Malinvaud, E. (1978). *Méthodes statistiques de l'économétrie* (4e partie), 3e éd., Dunod.

von Mises, R. (1931). Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. F. Deuticke, Leipzig (6.1).

Smirnov, N. V. (1939). Estimate of deviation between empirical distribution functions in two independent samples. (Russian) Bulletin Moscow Univ., 2 : 2, 3-16.

Takens, F. (1980). *Detecting strange attractors in turbulence*, in D. Rand and B.S. Yound (eds), dynamical systems and turbulence. Lecture notes in mathematics 898. Berlin : Springer-Verlag.

van der Warden, B. L. (1953). Testing a distribution function. Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (A), 56 (Indagationes Mathematicae 15), 201-207.

Wald, A. et J. Wolfowitz (1940). On a test whether two samples are from the same population. The Annals of Mathematical Statistics, 11, 147-162.

Wald, A. et J. Wolfowitz (1943). An exact test for randomness in the nonparametric case based on serial correlation. Annals of Mathematical Statistics, 14 : 378-388.

Wilcoxon, F. (1945). Individual comparaisons by ranking methods. Biometrics, 1, 80-83.

Wallis, J. R. et P. E. O'Connell (1973). Firm reservoir yield- How reliable are historie hydrological records ? Hydrol. Sci. Bull., 18 : 347-365.

Walsh, J.E. (1962). *Handbook of Nonparametric Statistics*, van Nostrand

Worsley, K.J. (1979). *On the likelihood ratio test for a shift in location of normal population.* J. Am. Stat. Assoc., p. 365-367.

ANNEXE A : DÉTECTION DES EFFETS DE PERSISTANCE ET DE CYCLICITÉ DANS L'ÉCHANTILLON DE DONNÉES.

Bouvier (1983) propose un moyen de détecter la présence de persistance ou de cyclicité dans l'échantillon de données à l'aide d'un corrélogramme. Par définition, le coefficient d'autocorrélation d'ordre θ se défini comme suit :

$$r_\theta = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t x_{t+\theta} - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)^2}, \quad \text{où } x_{t+\theta} = x_{t+\theta-n} \text{ pour toutes valeurs } k+\theta > n.$$

En prenant différentes valeurs θ, Le <u>*corrélogramme*</u> est la représentation de la suite des r_θ en fonction de θ. L'interprétation des diverses allures caractéristiques du corrélogramme aidera à déceler la présence d'un effet de persistance ou de cyclicité dans les données de la chronique.

PRÉSENCE D'UN EFFET CYCLIQUE

On suspectera la présence d'un effet cyclique dans une série de données, si le corrélogramme présente le paterne d'une fonction périodique de période *T*. La périodicité du corrélogramme signifie que les termes de la chronique à l'étude sont affectés d'un mouvement cyclique dont la période est égale à la période T.

PRÉSENCE D'UN EFFET DE PERSISTANCE

On suspectera la présence d'un effet de persistance dans une série de données, si le corrélogramme présente le paterne d'une fonction décroissante. Le fait que les coefficients d'autocorrélation décroissent en fonction de leur ordre signifie que la dépendance qui peut exister entre les valeurs successives décroît lorsqu'augmente l'intervalle de temps séparant les observations considérées.

ANNEXE B : TEST DE FISHER.

Pour comparer les variances de deux populations nous pouvons appliquer le test de *Fisher*.

Les hypothèses du test de *Fisher* sont les suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

La statistique de ce test sous l'hypothèse nulle est donnée par :

$F = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}$ (F suit approximativement une loi de *Fisher* à $(n_1 - 1)$ et $(n_2 - 1)$ degrés de liberté).

On estime σ_1^2 et σ_2^2 à partir de l'échantillon par :

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1} \text{ et,}$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1}$$

Au seuil de signification α, on rejettera l'hypothèse nulle d'égalité des variances si :

$$F_{Obs} \notin \left[F_{\left(\alpha/2,\ n_1-1,\ n_2-1\right)}, F_{\left(1-\alpha/2,\ n_1-1,\ n_2-1\right)} \right],$$

où $F_{\left(\alpha/2,\ n_1-1,\ n_2-1\right)}$ et $F_{\left(1-\alpha/2,\ n_1-1,\ n_2-1\right)}$ sont respectivement les quantiles d'ordre $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ de la loi $F_{(n_1-1,\ n_2-1)}$.