

**APPROCHE BAYESIENNE POUR
L'ÉTUDE DES RÉSEAUX DE
STATION DE MESURE DU COUVERT
NIVAL**

Rapport final

Rapport de recherche R-738

Mai 2004

**APPROCHE BAYESIENNE POUR L'ÉTUDE DES RÉSEAUX DE
STATION DE MESURE DU COUVERT NIVAL**

par

André St-Hilaire

Christiane Jacques

Marc Serre

Ousmane Seidou

Dominique Tapsoba

Vincent Fortin

Bernard Bobée

Chaire industrielle Hydro-Québec / CRSNG en Hydrologie statistique

Institut national de la recherche scientifique (INRS)

Centre Eau, Terre et Environnement

2800 rue Einstein CP 7500 Sainte-Foy (Québec) G1V 4C7

Rapport de recherche R-738

Mai 2004

Référence

St-Hilaire, A., C. Jacques, M. Serre, O. Seidou, D. Tapsoba et V. Fortin. 2004. Approche bayésienne pour l'étude des réseaux de station de mesure du couvert nival. INRS-ETE, rapport de recherche R-738, 25 pages et 2 annexes.

ÉQUIPE DE RECHERCHE

INRS-Eau, Terre et Environnement

André St-Hilaire	Professeur sous octroi, chargé de projet
Anne-Catherine Favre	Professeur, coordinatrice du projet Bayes pour la Chaire en hydrologie statistique
Christiane Jacques	Agente de recherche
Ousmane Seidou	Stagiaire post-doctoral
Patrick Gagnon	Stagiaire

HYDRO-QUÉBEC

Dominic Tapsoba	Chercheur, chargé de projet
Vincent Fortin	Chercheur
Luc Perreault	Chercheur, coordinateur du projet Bayes pour Hydro-Québec

UNIVERSITY OF NORTH CAROLINA, CHAPEL HILL.

Marc Serre	Professeur
------------	------------

TITULAIRE DE LA CHAIRE EN HYDROLOGIE STATISTIQUE

INRS-Eau, Terre et Environnement

Bernard Bobée

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	i
Liste des tableaux	ii
Liste des figures.....	iii
1.0 Introduction	1
2.0 Description des approches de krigeage Bayésien.....	2
2.1 Approche BMU (Bayesian Markov Updating).....	6
2.2 Approche Bayésienne Hiérarchique	8
2.3 l'approche BME (Bayesian Maximum Entropy).....	11
3.0 Étude de cas : Krigeage BME des équivalents en eau : bassin versant de la Gatineau....	14
3.1 Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire	14
3.2. Analyse de l'impact de la densité du réseau de mesures	22
Conclusion.....	27
Références :	28
Annexe a: comparaison de l'approche BME et krigeage ordinaire	30
Annexe B. comparaison de l'évolution de l'écart-type selon la dégradation du réseau de stations de mesure	39

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1. Nombre de stations de mesure du couvert nival lors des campagnes d'échantillonnage sélectionnées pour l'étude sur le bassin versant de la rivière Gatineau.....	15
--	----

LISTE DES FIGURES

Figure 1. Régression entre l'altitude et les mesures d'équivalent en eau de la neige pour l'ensemble des suivis faits à la mi-mars.	17
Figure 2. Régression entre l'altitude et les mesures d'équivalent en eau de la neige pour l'ensemble des suivis faits en avril.	17
Figure 3. Mesures ponctuelles d'équivalent en eau de la neige (mm) sur le bassin versant de la Gatineau, mi-mars 1984.	18
Figure 4. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, mi-mars 1984.	19
Figure 5. Mesures ponctuelles d'équivalent en eau de la neige (mm) sur le bassin versant de la Gatineau, fin avril 1994.	20
Figure 6. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1994.	21
Figure 7. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire pour un réseau dégradé (13 des 17 points de mesure), avril 1979.	22
Figure 8. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire pour un réseau dégradé (9 des 17 points de mesure), avril 1979.	23
Figure 9. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire pour un réseau dégradé (5 des 17 points de mesure), avril 1979.	23
Figure 10. Comparaison du taux de changement de l'écart-type des équivalents en eau associé à une diminution du nombre de points (de 17 à 13) pour le suivi d'avril 1979.	24
Figure 11. Comparaison du taux de changement de l'écart-type des équivalents en eau associé à une diminution du nombre de points (de 13 à 9) pour le suivi d'avril 1979.	25

1.0 INTRODUCTION

Ce rapport présente les travaux réalisés dans le cadre d'un des thèmes de recherche du projet de Recherche et Développement Coopératif (RDC) de la Chaire en hydrologie statistique portant sur l'analyse Bayésienne (numéro de dossier CRDCJ 249429-01). Ce projet comprenait quatre thèmes principaux :

- La gestion des réseaux de mesure et la valeur de l'information
- La prévision hydrologique
- L'analyse de la probabilité des crues
- Les changements climatiques

Le présent rapport collige les résultats d'une étude liée au premier thème de recherche. Il s'agit de développer et adapter des outils d'interpolation spatiale bayésienne permettant de caractériser l'incertitude associée à une densité plus ou moins importante de stations de mesure de variables hydro-climatiques servant d'intrants au modèle de prévision d'apports d'Hydro-Québec. Le rapport comprend trois parties. Dans un premier temps (section 2), une brève description de certaines approches de krigeage bayésien est donnée. Par la suite (section 3), une étude de cas, traitant de l'application de la méthode du maximum d'entropie bayésien (« Bayesian Maximum Entropy », ou BME) est décrite. Cette étude de cas a pour objectif de démontrer la faisabilité de l'adaptation de cette approche pour l'interpolation des mesures d'équivalent en eau de la neige (É.N.N) au sol en utilisant l'information provenant de covariables telles que l'altitude. La section 4 décrit ensuite l'impact de la dégradation du réseau sur la précision de l'interpolation.

2.0 DESCRIPTION DES APPROCHES DE KRIGEAGE BAYESIEN

Avant de décrire les approches de krigeage bayésien, il convient de rappeler les fondements mathématiques du krigeage.

Soit une variable aléatoire $X(\mathbf{p})$ représentée par une réalisation $\chi(\mathbf{p})$ où $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ est le vecteur des coordonnées spatiales. Le premier moment de ce champ aléatoire est l'espérance mathématique en un point $E[X(\mathbf{p})]$ et le second moment est défini comme la covariance entre une paire \mathbf{p} et \mathbf{p}' (Kitanidis, 1993):

$$R(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = E \{ [X(\mathbf{p}) - E[X(\mathbf{p})]] [X(\mathbf{p}') - E[X(\mathbf{p}')]] \} \quad (3)$$

Un semi-variogramme peut être défini en fonction de la distance $\mathbf{h} = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|$ entre deux points du domaine :

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = E \left\{ [X(\mathbf{p}) - X(\mathbf{p} + \mathbf{h})]^2 \right\} \quad (4)$$

L'équation [4] peut être estimée à l'aide du semi-variogramme expérimental :

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [\chi(\mathbf{p}_i) - \chi(\mathbf{p}_i')]^2 \quad (5)$$

où N est le nombre total de paires \mathbf{p} et \mathbf{p}' séparées par une distance \mathbf{h} .

La valeur estimée de $\chi(\mathbf{p}_0)$, identifiée à un endroit spécifique \mathbf{p}_0 (où il n'y a pas de valeurs mesurées), est donnée par l'équation de régression :

$$\chi(\mathbf{p}_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \chi(\mathbf{p}_i) \quad (6)$$

Dans l'équation (6), λ_i représente la pondération donnée à chaque estimation qui minimise la variance. On peut alors définir un système d'équations linéaires :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \gamma(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + \nu = \gamma(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) \quad (7)$$

sous la contrainte :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (8)$$

où γ est un multiplicateur de Lagrange. De plus, l'estimation de la variance en chaque point (\mathbf{p}_0) peut être calculée (Kitanidis 1997):

$$\sigma_0^2 = E[(\chi_0 - \chi(\mathbf{p}_0))^2] = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma (\|p_i - p_0\|) + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma (\|p_i - p_0\|) \quad (9)$$

Le krigeage est dit « simple » lorsque l'on considère la moyenne comme étant connue et constante dans la zone d'étude ($E[X(\mathbf{p})] = m$, constante, $\forall \mathbf{p} \in A$, où A est le domaine correspondant à la zone d'étude). Il est considéré comme « ordinaire » lorsque cette condition est relaxée et que m est considérée comme constante dans la voisinage et que sa valeur est inconnue (Goovaerts, 1997).

Les méthodes non-bayésiennes de krigeage multivariées (Wackernagel et al., 2002; Wackernagel 2003) permettent la prise en compte d'un ou plusieurs co-facteurs ou variables auxiliaires associées à la variable d'intérêt. Il en existe deux types: la technique du co-krigeage (Hevesi et al., 1992a,b, Sun et al., 2000) et celle du krigeage avec dérive externe (Hudson et Wackernagel 1994; Wackernagel 2003). Ces deux techniques reposent sur des hypothèses différentes. La technique du co-krigeage avec intégration du relief a été déjà bien décrite et a été appliquée avec succès par Carroll et Cressie (1996, 1997) pour l'estimation de l'équivalent en eau de la neige (ÉEN) sur des petits bassins alpins. Dans le cas du krigeage avec dérive externe appliqué par Tapsoba et al. (2003) pour l'estimation de l'ÉEN sur les bassins de la rivière Gatineau, la variable auxiliaire ou co-facteur (altitude, température, etc..) est considérée comme une deuxième variable aléatoire et est interprétée comme la dérive ou la tendance générale que peut suivre le comportement de l'ÉEN sur le bassin versant. Soit :

$$Z(x) = R(x) + a + bV(x) \text{ tel que } E(Z(x)) = a + bV(x)$$

où a et b sont constantes, $V(x)$ la variable auxiliaire (altitude), est connue à tous les nœuds de la grille d'interpolation mais variable et $R(x)$ est supposé être un résidu intrinsèque de moyenne $E(R(x)) = 0$. L'ÉEN est alors modélisé comme une variable non-stationnaire dont la moyenne

non-constante est localement égale à une fonction linéaire du co-facteur considéré, la dite dérive externe. Une fois la forme de la dérive définie, on ajuste un modèle de variogramme au résidu $R(x)$ sous-jacent inconnu. Cet ajustement se fait selon la théorie des fonctions aléatoires d'ordre k (Wackernagel 2003). Cette approche revient à choisir le modèle de variogramme du résidu.

Ainsi parmi une liste a priori des modèles statistiquement cohérents et possibles, on retient le modèle le plus adapté à la forme de la dérive et à la stationnarité sous-jacente des incréments du résidu, selon des critères d'ajustements mathématiques. Les tests de validation croisée permettent ensuite d'identifier le modèle de variogramme qui donne les résultats les plus satisfaisants. Le principe de la validation croisée est le suivant : une donnée de l'ÉEN est retirée du jeu de données initial et la valeur à l'endroit où elle se trouvait est estimée à partir des données restantes et du modèle testé. La donnée est remise dans le jeu de données et cette procédure est répétée pour toutes les données de l'ÉEN. Cette procédure fournit des valeurs estimées aux points de mesure pour comparaison avec les valeurs réelles observées. On peut donc contrôler statistiquement la qualité de l'estimation résultant du modèle par le biais d'un nuage de corrélation entre les données réelles et les valeurs estimées ou par l'analyse des erreurs commises.

Une fois le modèle de variogramme du résidu défini, on estime l'ÉEN $Z^*(x_0)$ à partir des mesures voisines de l'ÉEN $Z(x_i)$ tout en y intégrant la forme de la dérive :

$$Z^*(x_0) - E(Z(x_0)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \{Z(x_i) - E(Z(x_i))\}$$

$$Z^*(x_0) - (a + bV(x_0)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \{Z(x_i) - (a + bV(x_i))\}$$

Le fait de formuler l'estimateur en soustrayant la dérive revient à travailler dans le cadre de la géostatistique intrinsèque. Sous les deux contraintes suivantes :

$$E\{Z(x_0) - Z^*(x_0)\} = 0$$

$$Var\{Z(x_0) - Z^*(x_0)\} \text{ est minimale}$$

On développe un système linéaire d'équations à résoudre en terme λ_i :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_R(x_i - x_j) - \mu_1 - \mu_2 V(x_i) &= \gamma_R(x_i - x_0) \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 & \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j V(x_j) &= V(x_0) \end{aligned}$$

où μ_1 et μ_2 sont les paramètres de Lagrange et γ_R le variogramme du résidu R . Le premier membre du système contient la corrélation spatiale entre les points de mesure et le deuxième membre la corrélation spatiale entre les points de mesure et le point à estimer. Les deux dernières équations, provenant de la contrainte de non-biais, permettent de filtrer la dérive dans la forme de l'estimateur :

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)$$

Les coefficients inconnus de la dérive, a et b , ne figurent ni dans la forme de l'estimateur ni dans le système à résoudre. Ainsi les pondérateurs obtenus, qui respectent la forme de la dérive sans jamais l'estimer explicitement, sont directement affectés aux données de l'ÉEN pour obtenir la valeur estimée de l'ÉEN au nœud de la grille.

Une autre catégorie d'outils, basés sur le formalisme bayésien, permet d'approcher le problème de l'estimation et de l'interpolation spatiale sous la forme d'un modèle probabiliste qui quantifie les incertitudes. De plus, l'approche bayésienne permet d'incorporer la connaissance a priori dont on dispose qui ne provient pas des observations formant la série. Cette approche peut donc

permettre d'incorporer l'information physiographique du bassin versant qui peut influencer le couvert nival et qui se prête moins bien au krigeage multivarié traditionnel. Deux approches sont brièvement décrites dans les sections 2.1 et 2.2. Il s'agit d'une méthode de krigeage intitulée « Bayesian Markov Updating » (BMU) et de l'approche bayésienne hiérarchique. Une troisième approche, l'approche bayésienne d'entropie maximum (« Bayesian Maximum Entropy », ou BME) est décrite dans la section 2.3 et est utilisée dans l'étude de cas subséquente.

2.1 APPROCHE BMU (BAYESIAN MARKOV UPDATING)

Cette méthode d'interpolation spatiale a été décrite par Zhu et Journel (1992) comme étant une méthode de cokrigeage qui met l'emphasis sur l'utilisation de la fonction de covariance qui existe entre les valeurs des distributions a priori. On considère dans cette approche qu'il existe deux types de données : 1) Les mesures physiques (« hard data ») prises à m points, correspondant à la réalisation $\chi(\mathbf{p}_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ du champ de la variable aléatoire étudiée; et 2) des données secondaires (« soft data ») sont disponibles à k points, incluant les m points déjà décrits : $v(\mathbf{p}_j)$, $j=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, k$ provenant des mesures de covariables ou de mesures indirectes qui peuvent être sous forme de variables nominatives, dichotomiques (indicateurs de présence/absence) ou sous forme probabiliste.

Mathématiquement, les données secondaires peuvent être représentées ainsi (Deutsch et Journel, 1998) :

1. Variable dichotomique: $i(\mathbf{p}_\alpha; \chi) = 1$ si $\chi(\mathbf{p}_\alpha) \leq x$; $i(\mathbf{p}_\alpha; \chi) = 0 \forall$ autre valeur;
2. fonction de distribution a priori conditionnelle aux valeurs des variables secondaires :

$$y(\mathbf{p}_\alpha, z) = \text{Pr ob} \left\{ \chi(\mathbf{p}_\alpha) \leq x \mid v(\mathbf{p}_\alpha) \in [v_j, v_{j+1}] \right\};$$
3. une distribution a priori « globale » i.e. qui est commune à tous les points de mesure et qui peut provenir de l'information des experts, de l'expérience passée, etc. :

$$F(X) = \text{prob} \left\{ \chi(\mathbf{p}_\alpha) \leq x \right\}, \forall \mathbf{p}_\alpha \in A$$

L'information est mise à jour par cokrigeage en fonction des distributions a priori provenant des points avoisinants (Deutsch et Journel, 1998) :

$$\text{Prob}\{\chi(\mathbf{p}_\alpha) \leq x | v(n+n')\} = \lambda_0(\mathbf{p}_\alpha)F(\chi) + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha(\mathbf{p}_\alpha; z) i(\mathbf{p}_\alpha; z) + \sum_{\alpha'=1}^{n'} v_{\alpha'}(\mathbf{p}_{\alpha'}, z) y(\mathbf{p}_{\alpha'}, z) \quad (11)$$

L'équation 11 permet de combiner l'information provenant des trois « catégories » de distribution a priori. Comme dans le cas du krigeage ordinaire, on retrouve un système d'équations de régression multiple avec des coefficients de pondération pour chaque terme. λ_0 est le poids associé à la distribution globale a priori. Les λ_α sont les poids des n valeurs des variables dichotomiques provenant des n points de mesure avoisinants. Les $v_{\alpha'}$ sont les poids associés aux n' valeurs probabilistes calculées à l'aide des données secondaires ($y(\mathbf{p}_{\alpha'})$).

Pour chaque type de variables, la distribution spatiale des données secondaires peut être modélisée à l'aide des matrices de variance/covariance qui sont fonction de la distribution interstation (\mathbf{h}): $C_Y(\mathbf{h})$, $C_{IY}(\mathbf{h})$ et $C_I(\mathbf{h})$. Dans le cas de l'approche Markov-Bayes, on simplifie ce modèle en imposant l'hypothèse de Markov qui stipule que l'information provenant de la mesure des données primaires en un point a préséance sur toute information secondaire (« soft data »). De plus, on simplifie le modèle de variance/covariance en imposant les relations suivantes :

$$C_{IY}(\mathbf{h}, x) = B(x)C_I(\mathbf{h}, x); \quad \forall \mathbf{h} \quad (12)$$

$$C_Y(\mathbf{h}, x) = B^2(x)C_I(\mathbf{h}, x); \quad \forall \mathbf{h} > 0$$

Les coefficients $B(x)$ sont calculés comme étant la différence entre la moyenne des ($y(\mathbf{p}_{\alpha'})$) pour lesquelles la variable dichotomique $I(\mathbf{p}_{\alpha'}) = 1$ et la moyenne des ($y(\mathbf{p}_{\alpha'})$) pour lesquelles la variable dichotomique $I(\mathbf{p}_{\alpha'}) = 0$. Ces coefficients ($B(x) \in [-1, 1]$) permettent d'évaluer quantitativement si la variable dichotomique permet de bien représenter les classes de la variable primaire en fonction des variables secondaires. Si $B(x) = 0$, alors la variable secondaire n'ajoute aucune information (Bardossy et Lehman, 1998).

La procédure BMU est entre autres disponible dans le logiciel GSLIB (Deutsch et Journel, 1998). Dans le cadre de ce projet, des tentatives d'application de ce logiciel se sont butées à des problèmes informatiques et l'approche a du être abandonnée.

2.2 APPROCHE BAYÉSIENNE HIÉRARCHIQUE

Une autre approche étudiée dans le cadre de ce projet est l'utilisation de modèles bayésiens hiérarchiques. Ces modèles sont particulièrement adaptés à l'analyse de données ayant différent niveaux d'agrégation (Berliner et al. 1998) et ont été utilisés dans le cadre d'analyses spatiales (e.g. Ecker et Gelfand, 2003; Banerjee et al. 2004). L'avantage de l'approche bayésienne est la prise en compte efficace de l'incertitude et son aptitude à incorporer des informations hétérogènes, tout en se prêtant naturellement aux problèmes comportant des données manquantes. Un modèle bayésien est dit hiérarchique s'il est constitué de n sous modèles (ou niveaux) successifs, chacun étant conditionnel aux paramètres des suivants. Quoique non absolument nécessaire, la structure hiérarchique facilite la conception et permet une prise en compte plus facile de la connaissance qu'on a de la physique du phénomène (Wikle et Royle 2002). La modélisation bayésienne hiérarchique (MBH) est une approche générale et il n'y a pas en principe de restriction aux types de problèmes qu'elle peut traiter. Cependant, certains types d'application s'y prêtent plus aisément soit du fait de la structure des données, soit parce qu'il existe dans la littérature une solution connue et relativement simple utilisant la MBH. Ces peuvent se regrouper en cinq catégories :

- Les données ont une structure naturellement hiérarchique comme par exemple dans une étude sur probabilité d'infection de bestiaux dans des troupeaux eux même localisés dans des régions (Suess et al. 2002).
- Il est parfois nécessaire de combiner l'information de plusieurs études du même phénomène mais dans des contextes différents, pour tirer des conclusions plus précises que celles auxquelles on aurait abouti en utilisant une seule des études. Un exemple courant est l'étude de l'effet d'un traitement sur plusieurs groupes de patients (eg. Tweedie et al. 1994).
- Dans certaines études, les individus sont choisis aléatoirement, puis suivis au pendant un certain temps. On dispose alors pour chaque individu de plusieurs observations à différents moments (e.g. Carlin, 1996; Cohen et al. 1998).

- Lorsqu'on veut estimer les densités de plusieurs sous populations homogènes présentes dans l'échantillon, on utilise une structure hiérarchique avec des variables latentes représentant chacune des sous populations (e.g. Robert 1996).
- la MHB peut également être utilisée pour traiter le problème de la sélection de modèles par le biais des facteurs de Bayes (e.g. Kaas et Raftery, 1995).

De manière générale, on peut caractériser l'aspect du phénomène décrit au niveau i par par le vecteur de paramètres θ_i . Il s'agira de spécifier pour chaque niveau i la distribution conditionnelle du paramètre θ_i sachant $\theta_{i+1}, \theta_{i+2}, \dots, \theta_n$. La spécification de θ_n permet d'intégrer la connaissance qu'on a à priori sur la distribution des paramètres. On suppose en général que les éléments de θ_n suivent une loi dont les paramètres sont appelés *hyperparamètres*. Les hyperparamètres peuvent aussi être caractérisés par un modèle paramétrique. Ainsi, de manière générale, on a un vecteur de paramètres $\Theta=(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n)$ dont la densité de probabilité conjointe est le produit des densités de probabilité conditionnelles :

$$f(\Theta) = f(\theta_1 | \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n) f(\theta_2 | \theta_3, \theta_4, \dots, \theta_n), \dots, f(\theta_i | \theta_{i+1}, \theta_{i+2}, \dots, \theta_n) \quad (13)$$

Il existe plusieurs représentations des champs spatiaux aléatoires qui se prêtent à la mise en œuvre d'une approche bayésienne hiérarchique. Une approche relativement populaire consiste à traiter la variable aléatoire comme une représentation d'un processus spatial gaussien de moyenne $\mu(\mathbf{p})$ et avec une fonction de covariance C . («Gaussian Random Processes», e.g. Ecker and Gelfand 2003). La structure de covariance est souvent simplement définie en fonction de la distance entre les points (covariogramme) qui peut suivre différents modèles (e.g. exponentiel décroissant, sphérique, gaussien, etc.).

Les champs de Markov aléatoires (« Markov Random Fields ») sont quant à eux utilisés pour décrire un champ dont la réalisation correspond à des données discrètes. La distribution de cette variable est définie par un voisinage restreint de points.

À titre d'exemple un modèle hiérarchique est décrit pour l'approche linéaire mixte (« Linear mixed models » ou LMM; Banerjee et al., 2004) :

$$X(\mathbf{p}) = \mu(\mathbf{p}) + w(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p}) \quad (14)$$

où $\mu(\mathbf{p})$ est la moyenne, $w(\mathbf{p})$ correspond à la réalisation d'un champ gaussien aléatoire avec une moyenne nulle et $\varepsilon(\mathbf{p})$ est le terme représentant le bruit non corrélé spatialement.

Le modèle paramétrique proposé pour $\mu(\mathbf{p})$ peut être relativement simple :

$$\mu(p) = y^T(p)\beta \quad (13)$$

où y est une variable explicative (co-variable).

Quant aux deux autres termes, ils peuvent être fonctions des paramètres de la distribution qui leur est associée. Ainsi, on peut obtenir le modèle hiérarchique suivant :

$$P(X|w) \sim N(y^T(p)\beta + Hw, c_\varepsilon) \quad (14)$$

$$w \sim N(0, C_w) \quad (15)$$

$$c_w = \sigma_w^2 r_x(d_{ij}, \theta) \quad (16)$$

où $H_{ii} = 1$, et $H_{ij} = 0$;

c_w et c_ε sont les matrices de variance/covariance des paramètres w et ε ;

σ^2 est la variance d'un processus gaussien aléatoire (constante) ;

r_x est la corrélation entre les valeurs de x et qui est fonction de la distance, selon un des modèles de corrélogramme connus (exponentiel, sphérique, gaussien, quadratique, etc.) avec paramètres θ .

On peut alors définir une distribution a priori appropriée pour les paramètres du premier niveau et résoudre le système d'équations intégrales par les méthodes numériques connues (Échantillonneur de Gibbs, etc.).

L'approche Bayésienne hiérarchique a été appliquée dans le cadre de ce projet pour deux cas : Un relevé de neige ayant été effectués au mois de mars 1994 et un second en mars 1995. Les mesures d'équivalent en eau de la neige étaient significativement corrélées avec l'altitude (co-variable) en 1994, mais pas en 1995. Les résultats de ces travaux sont présentés par Seidou et al. (en prép.).

2.3 L'APPROCHE BME (BAYESIAN MAXIMUM ENTROPY)

L'approche bayésienne qui a été utilisée dans le cadre de ce projet est la méthode bayésienne du maximum d'entropie (BME). Comme l'approche BMU, cette méthode permet la prise en compte de variables secondaires (probabilistes, dichotomiques ou nominatives) et du lien entre ces variables secondaires et la variable à exprimer. L'approche a été décrite en détails par Christakos (1990), et Christakos et al. (2002). Des applications récentes de cette méthode en hydrogéologie ont été réalisées par Serre et Christakos (1999) et Serre et al. (2003). L'analyse avec BME se résume ainsi :

Soit $x_i = X(\mathbf{p}_i)$, une variable aléatoire de la fonction $X(\mathbf{p})$ au point \mathbf{p}_i , $i=1, \dots, m$. Le vecteur $\chi = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m]^T$ est la réalisation de $X(\mathbf{p})$. On veut estimer les valeurs de $X(\mathbf{p})$ aux $k-m$ points $\mathbf{p}_{m+1}, \dots, \mathbf{p}_k$.

On dénote l'information incertaine connue par $X_{\text{data}} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$

On veut l'estimation des valeurs de $X(\mathbf{p})$ aux points $\mathbf{x}_{\text{map}} = [x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_k]^T$. χ_{map} contient les réalisations des points de mesure X_{data} et les points à estimer X_{k-m} .

On peut définir une fonction de distribution conjointe (ou multivariée) : $F_x(\chi) = P[x_1 \leq \chi_1, x_2 \leq \chi_2, \dots, x_m \leq \chi_m]$. Cette fonction est souvent inconnue a priori.

On peut en estimer certains moments à partir de l'information générale et des données mesurées (e.g. moment d'ordre 1 peut être estimé par moyenne, moment d'ordre 2 par la covariance).

Dans le formalisme BME ces moments appartiennent à G : la connaissance générale a priori.

$$\overline{g_\alpha} = \int d\chi_{\text{map}} g_\alpha(\chi_{\text{map}}) f_G(\chi_{\text{map}}) \quad (18)$$

La fonction g_α permet d'estimer les différents moments e.g. moment d'ordre q : $g_\alpha = \chi_i^q$

On a aussi de l'information spécifique : S . Par exemple, les mesures aux points $i = 1, \dots, m$ sont incluses dans le χ_{certain} (où $P[x_{\text{certain}} = \chi_{\text{certain}}] = 1$). On peut aussi avoir des données plus floues,

sous forme d'intervalles ou de mesures probabilistes (χ_{flou} où $P(x_{\text{flou}} \leq \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} dx_{\text{flou}} f(x_{\text{flou}})$)

On cherche donc à estimer $X(\mathbf{p})$ au $k^{\text{ième}}$ point p_k à partir de l'information contenue dans $G \cup S$.

L'étape a priori consiste à maximiser l'information générale, i.e. maximiser l'entropie de la fonction de distribution conjointe $f_G(\chi_{\text{map}})$ modifiée pour inclure les multiplicateurs de Lagrange :

$$\int d\chi_{\text{map}} f_G(\chi_{\text{map}}) \log(f_G(\chi_{\text{map}})) + \sum_{\alpha=0}^{N_c} \mu_{\alpha} \overline{g_{\alpha}}[f_G] \quad (19)$$

On peut maximiser cette « entropie modifiée ». Le résultat est donné par la fonction (Serre et Christakos, 1999) :

$$f_G(\chi_{\text{map}}) = Z^{-1} \exp \left[\sum_{\alpha=1}^{N_c} \mu_{\alpha} g_{\alpha}(\chi_{\text{map}}) \right] \quad (\text{prior associée aux connaissances générales}). \quad (20)$$

où : $Z = \int d\chi_{\text{map}} \exp \left[\sum_{\alpha=1}^{N_c} \mu_{\alpha} g_{\alpha}(\chi_{\text{map}}) \right]$ est la constante de normalisation.

On peut alors résoudre le système d'équations et trouver les coefficients de Lagrange (μ_{α}) qui maximisent l'entropie.

On obtient ainsi la forme analytique exacte de la fonction de densité f_G . Cette fonction est ensuite mise à jour (étape bayésienne) :

$$f_K(\chi_k) = A^{-1} \int F_s(\chi_{\text{flou}}) f_G(\chi_{\text{map}}) \quad (\text{distribution a posteriori}) \quad (21)$$

où A est la constante de normalisation : $A = \int F_s(\chi_{\text{flou}}) f_G(\chi_{\text{data}})$.

Ayant obtenu $f_k(\chi_k)$, on peut sélectionner l'estimateur $\hat{X}(\mathbf{p}_k)$ (moyenne, mode, médiane etc.) qui nous intéresse. On peut aussi obtenir une évaluation de l'incertitude (e.g. variance, intervalle de confiance, etc.).

3.0 ÉTUDE DE CAS : KRIGEAGE BME DES ÉQUIVALENTS EN EAU : BASSIN VERSANT DE LA GATINEAU.

3.1 COMPARAISON DE L'APPROCHE BME ET DU KRIGEAGE ORDINAIRE

Hydro-Québec échantillonne le couvert nival sur le bassin versant de la rivière Gatineau depuis plusieurs années. Les données d'équivalent en eau ainsi récoltées servent à la mise à jour du stock de neige dans le modèle de prévision avant la crue. La densité de stations de mesure varie sur une base interannuelle et intra-annuelle selon les conditions sur le terrain (accessibilité des sites, rapidité de la fonte, etc.). Le tableau 1 donne un bref aperçu de cette variabilité en faisant état du nombre de stations échantillonnées pour les suivis utilisés dans le cadre de cette étude.

Étant donné cette variabilité dans la densité du réseau de stations de mesure, la précision des méthodes traditionnelles d'interpolation spatiale (e.g. krigeage simple ou ordinaire) peut être très variable d'une période à l'autre. Pour pallier cette lacune, Hydro-Québec a suggéré l'utilisation de covariables corrélées avec la variable primaire (équivalent en eau de la neige). Une de ces covariables, pour laquelle les données sont accessibles pour le bassin versant de la rivière Gatineau, est l'altitude.

Tableau 1. Nombre de stations de mesure du couvert nival lors des campagnes d'échantillonnage sélectionnées pour l'étude sur le bassin versant de la rivière Gatineau.

Date	Nombre de points	Coefficient de corrélation entre l'équivalent en neige et l'altitude
mi-mars 1979	22	0.53
mi-mars 1980	21	0.83
mi-mars 1984	25	0.46
mi-mars 1985	23	0.81
mi-mars 1986	25	0.81
mi-mars 1987	23	0.55
mi-mars 1994	22	0.77
avril 1972	9	0.77
avril 1978	21	0.80
avril 1979	17	0.60
avril 1982	23	0.68
avril 1983	16	0.79
avril 1985	27	0.53
avril 1991	10	0.73
avril 1992	25	0.64
avril 1994	22	0.76
avril 1997	24	0.65

L'étude de cas a donc été réalisée en utilisant l'approche BME pour interpoler les données d'équivalent en eau sur le bassin versant de la Gatineau en utilisant l'information spécifique contenue dans les mesures ponctuelles prises lors de l'échantillonnage et l'information générale contenue dans la relation neige-altitude telle que décrite par la matrice de variance/covariance entre ces deux variables.

Selon le formalisme de l'approche BME, la fonction de distribution conjointe $f_G(\chi_{map})$ de l'information générale associée aux m points de mesure d'équivalent en eau et aux k points supplémentaires de mesures d'altitude a été établie par l'estimation de certains moments g_α à chacun de ces points. Pour ce faire, il fallait établir une relation générale entre les mesures des équivalents en eau et l'altitude, sans utiliser les valeurs de l'échantillon qui sert à définir l'information spécifique F_s . Une régression linéaire entre les équivalents en eau et l'altitude a été établie pour deux périodes distinctes (mi-mars et avril). Pour la période correspondant aux échantillonnages fait vers la mi-mars, 354 points de mesures étaient disponibles entre 1939 et 1999 (figure 1). Pour la période d'avril, 841 observations prises entre 1951 et 1997 ont servi à établir la régression (figure 2). Les coefficients de corrélation (r) sont similaires pour les deux périodes (0,43 pour mars et 0,42 pour avril).

Pour le mois de mars, la relation entre l'équivalent en eau (Eau) et l'altitude (alt) est exprimée par ($F_{v=352} = 78,19$; $p < 0,0001$) :

$$Eau = 0,0182 * alt + 11,66 \quad (23)$$

où Eau est l'équivalent en eau (mm) et alt est l'altitude en mètres.

Pour avril, l'équation de régression est ($F_{v=839} = 175,85$; $p < 0,0001$) :

$$Eau = 0,0327 * alt + 1,33 \quad (22)$$

Les équations (22) et (23) ont ensuite servi à générer les estimations d'équivalent en eau pour les k points de la grille d'interpolation. De plus, la variance de l'erreur associée à la régression a été utilisée comme estimateur du moment d'ordre 2 à chacun des points de la grille d'interpolation. Les équations 19 à 21 ont ensuite été utilisées pour calculer la distribution a posteriori $f_k(\chi_k)$.

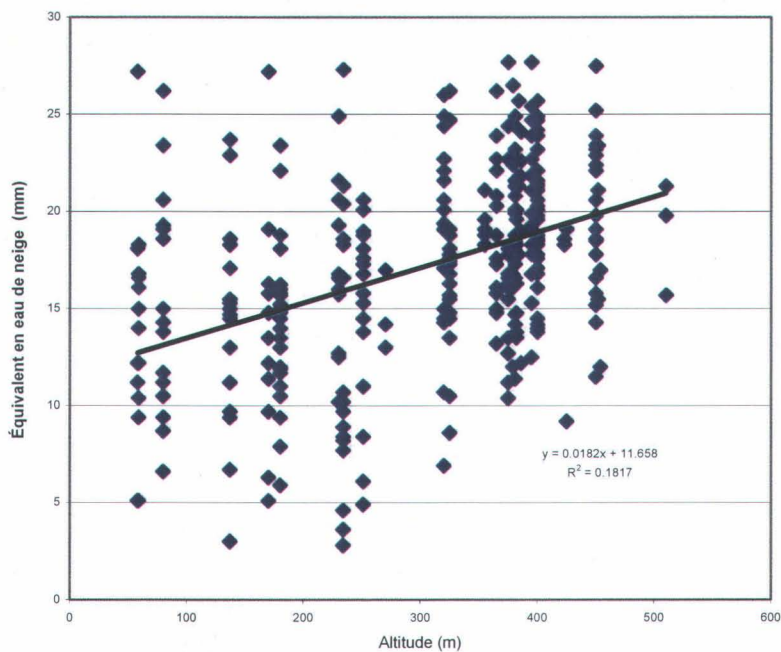


Figure 1. Régression entre l'altitude et les mesures d'équivalent en eau de la neige pour l'ensemble des suivis faits à la mi-mars.

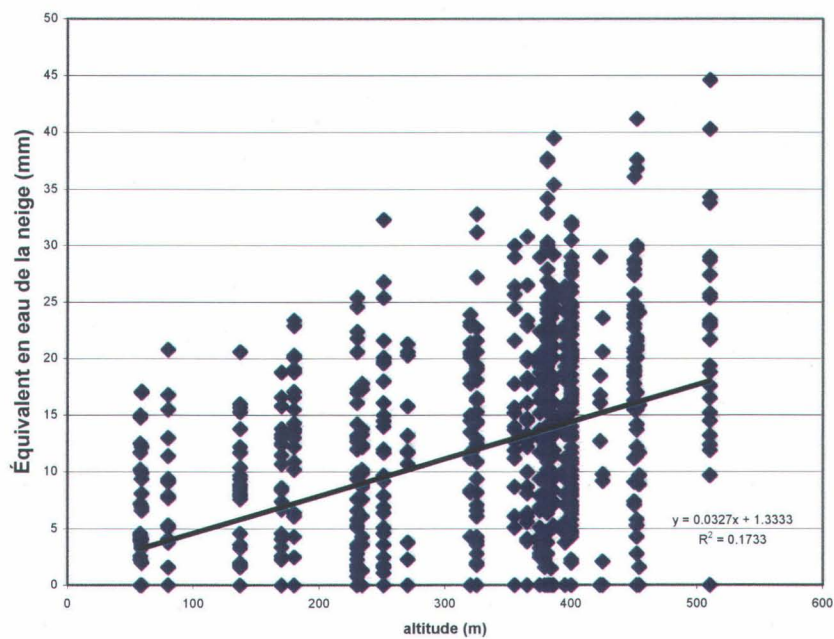


Figure 2. Régression entre l'altitude et les mesures d'équivalent en eau de la neige pour l'ensemble des suivis faits en avril.

À titre d'exemple, la figure 3 montre les mesures d'équivalent en eau prises en mars 1984. La figure 4 compare les résultats obtenus par krigeage ordinaire et par l'approche BME pour l'interpolation des équivalents en eau.

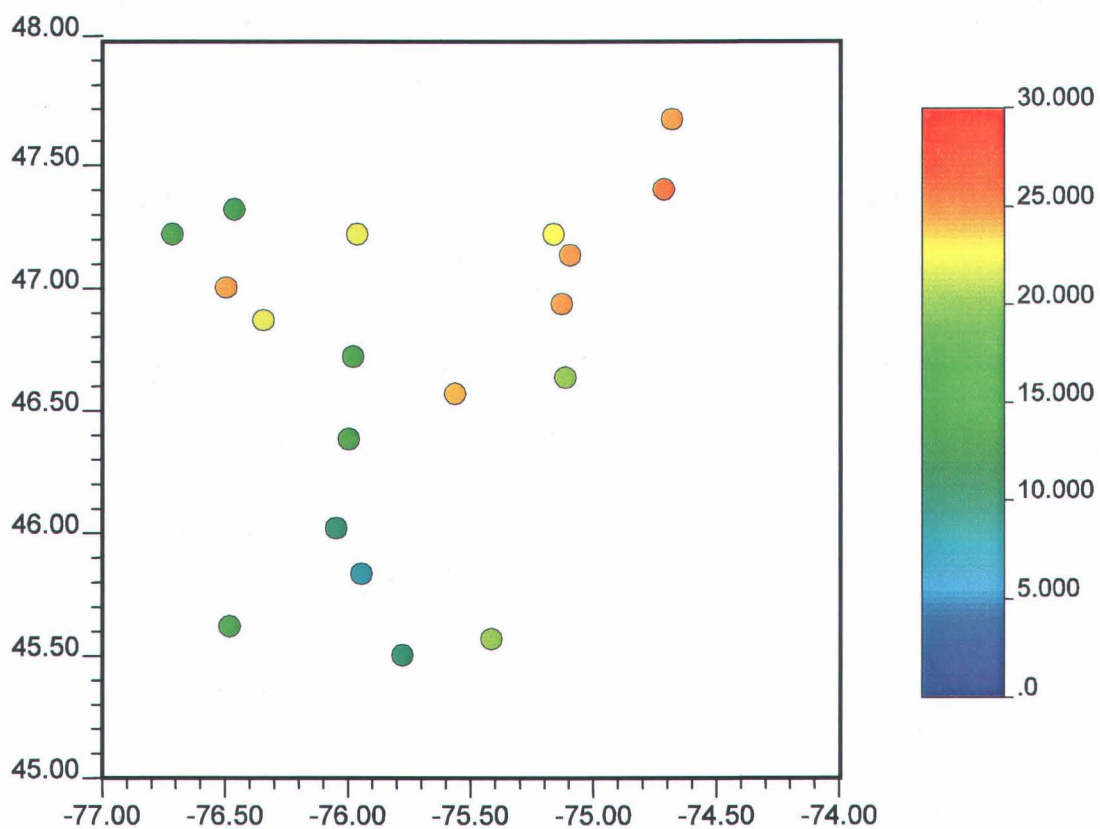


Figure 3. Mesures ponctuelles d'équivalent en eau de la neige (mm) sur le bassin versant de la Gatineau, mi-mars 1984.

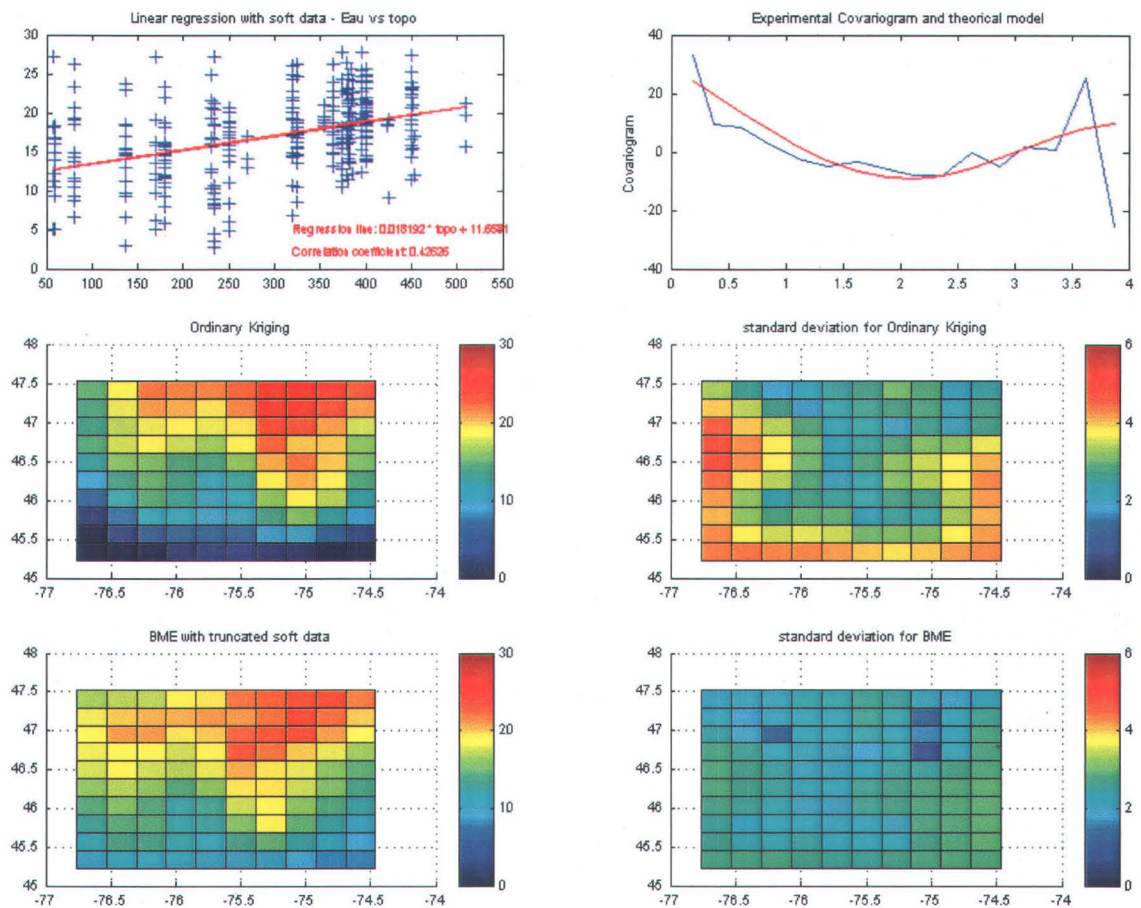


Figure 4. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, mi-mars 1984.

Un examen de la figure 4 permet de constater que l'approche BME donne des résultats plus réalistes. Dans le secteur nord-est, secteur où l'altitude est la plus élevée (> 400 m), cela se traduit entre autres par des valeurs d'équivalents en eau interpolées qui sont plus proches de valeurs mesurées (entre 20 et 25 mm) que celles obtenues par krigeage ordinaire (>25 mm). On peut aussi voir dans cette même figure que l'utilisation de l'approche BME permet de réduire l'écart-type de krigeage, spécialement dans la périphérie de la zone d'étude, loin des points de mesure.

En avril, le nombre de points où on mesure encore un épais couvert de neige est évidemment souvent plus faible qu'en mars. Par exemple, une seule des mesures prises vers la fin avril 1994 était supérieure à 22 mm (figure 5).

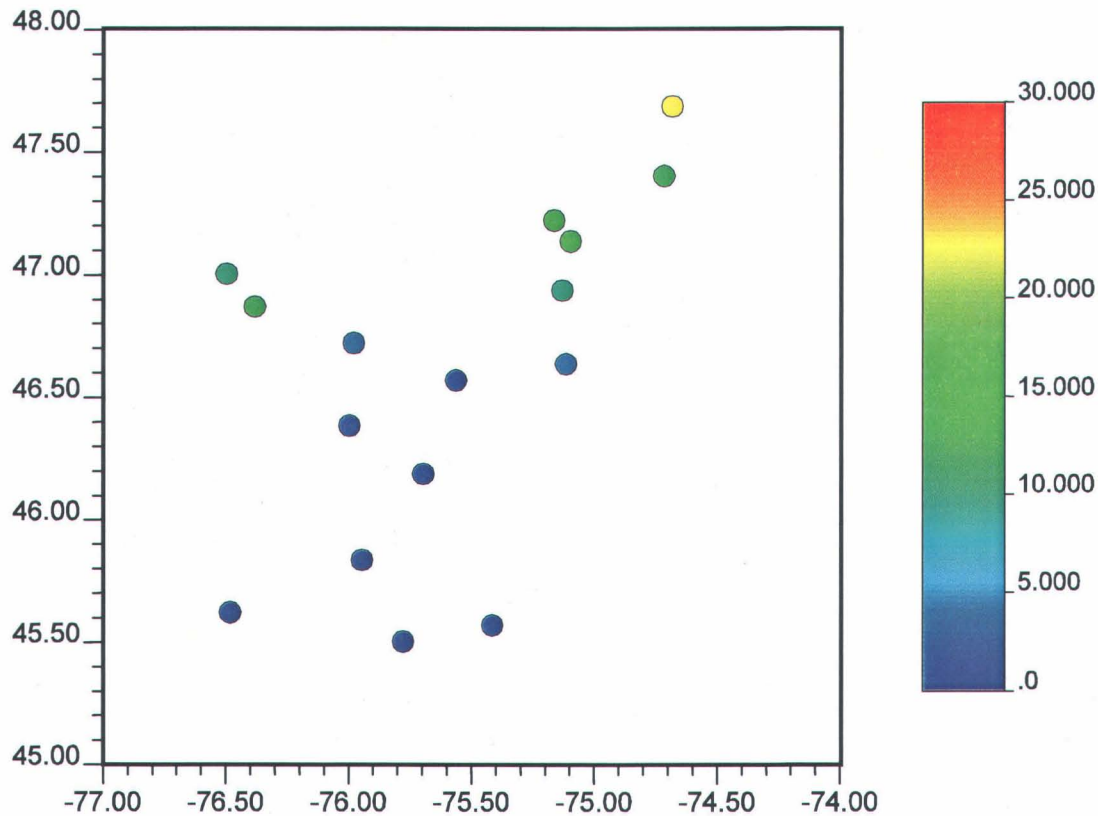


Figure 5. Mesures ponctuelles d'équivalent en eau de la neige (mm) sur le bassin versant de la Gatineau, fin avril 1994.

La comparaison du krigeage ordinaire et de l'approche BME pour l'interpolation des mesures d'équivalent en eau en avril 1994 (figure 6) montre encore une fois que cette dernière méthode semble plus à même de reproduire la variation spatiale de l'épaisseur du couvert nival sur la zone d'étude. Avec le krigeage ordinaire, les valeurs d'équivalent en eau supérieures à 5 mm sont limitées à la portion nord de la zone d'étude, (latitude > 47° dans la plupart des cas).

La méthode BME permet de mieux représenter les équivalents en eau de la partie centrale de la zone d'étude, dans laquelle des mesures d'équivalent en eau supérieures à 5 mm ont été enregistrées à des latitudes inférieures à 46.75°. De plus, l'écart-type est encore une fois moins important avec l'approche BME, spécialement sur le pourtour de la zone d'étude, où on observe des écarts-types de l'ordre 4 mm et plus lorsque l'interpolation est faite par krigeage ordinaire, alors qu'elle est de l'ordre de 2 mm avec l'approche BME.

Des résultats similaires ont été obtenus pour six autres suivis faits à la mi-mars entre 1979 et 1994, de même que pour huit autres suivis faits en avril entre 1972 et 1997 (voir annexe).

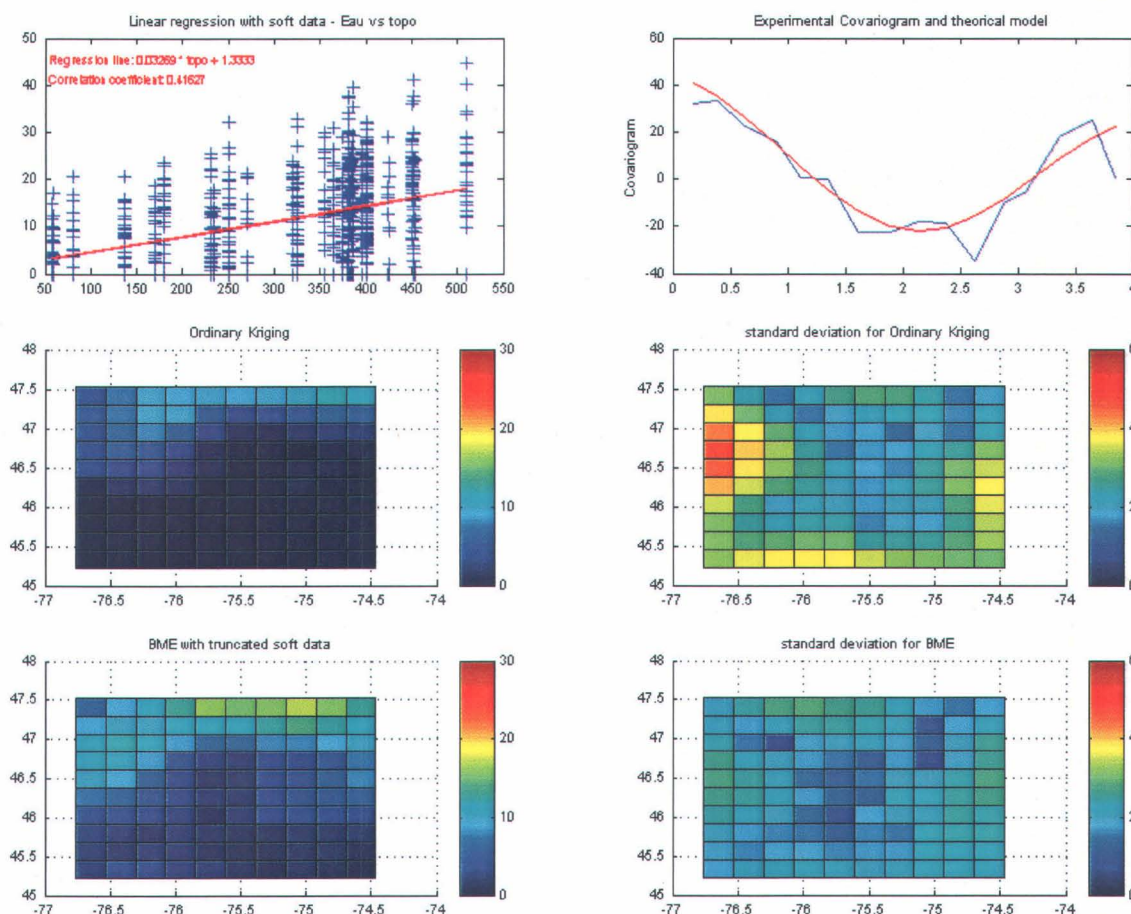


Figure 6. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1994.

3.2. ANALYSE DE L'IMPACT DE LA DENSITÉ DU RÉSEAU DE MESURES

Les campagnes de mesures du couvert nival peuvent être plus ou moins intensives selon les conditions climatiques et l'accessibilité des sites de mesure. Dans ce contexte, il convient d'étudier l'impact de la densité des points de mesure d'équivalent en eau sur l'incertitude associée à l'interpolation et, par conséquent, de tester la robustesse de l'approche BME en comparaison avec le krigeage ordinaire pour un réseau plus ou moins dense de stations de mesure.

Pour ce faire, l'interpolation des équivalents en eau a été reprise pour certains suivis en dégradant progressivement le réseau. Par exemple, on peut comparer les résultats du krigeage avec les deux approches pour le suivi d'avril 1979, pour différents scénarios de densité de station correspondant à environ 76% (i.e 13 des 17 points originaux, figure 7) 53% (i.e 9 des 17 points originaux, figure 8) et 29% (i.e 5 des 17 points originaux, figure 9) du réseau initial.

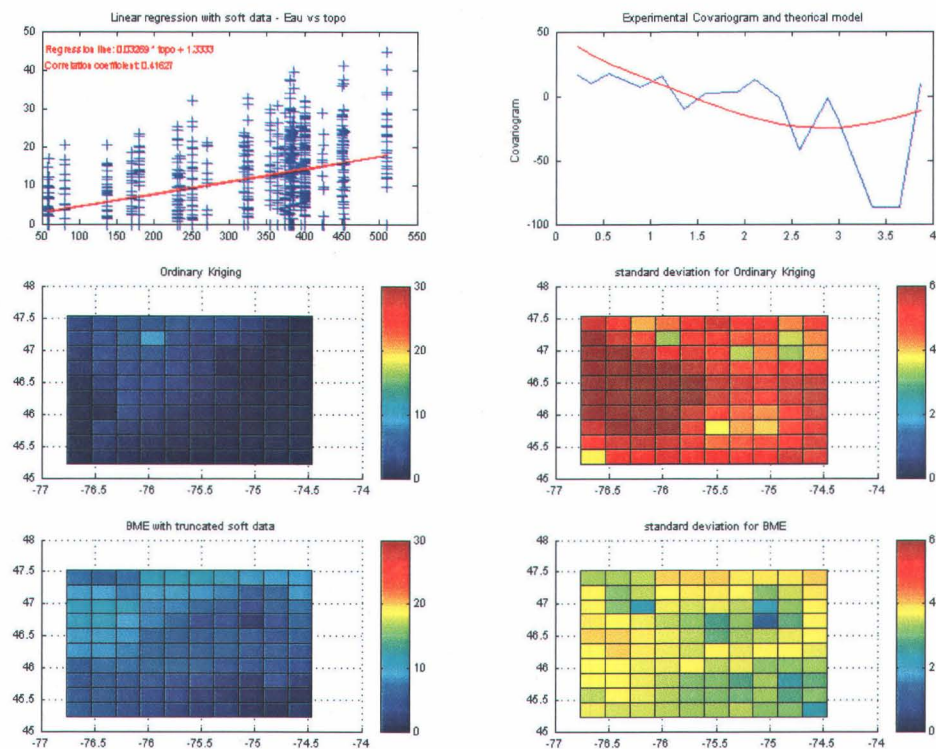


Figure 7. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire pour un réseau dégradé (13 des 17 points de mesure), avril 1979.

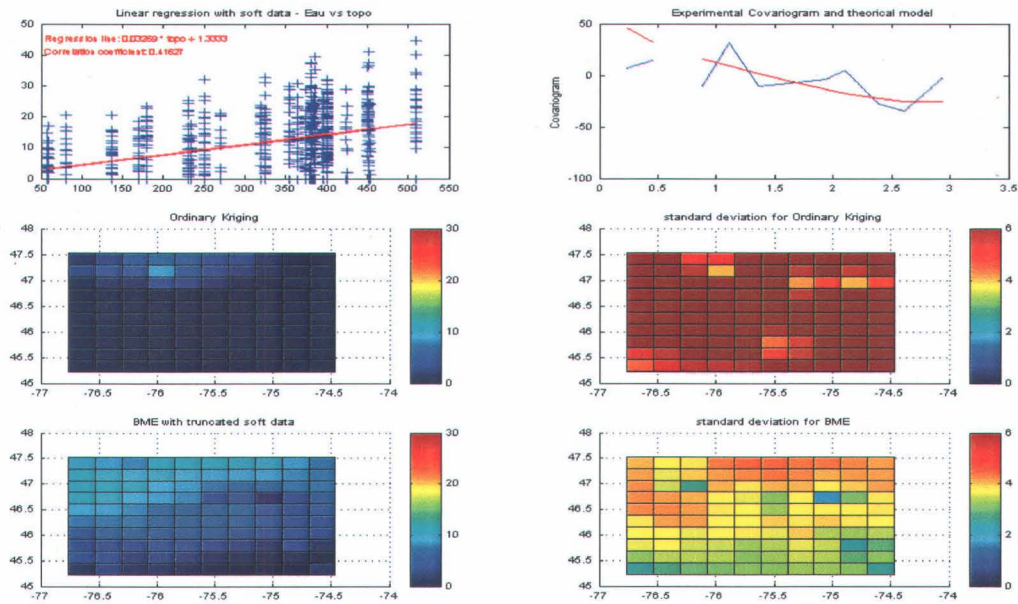


Figure 8. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire pour un réseau dégradé (9 des 17 points de mesure), avril 1979.

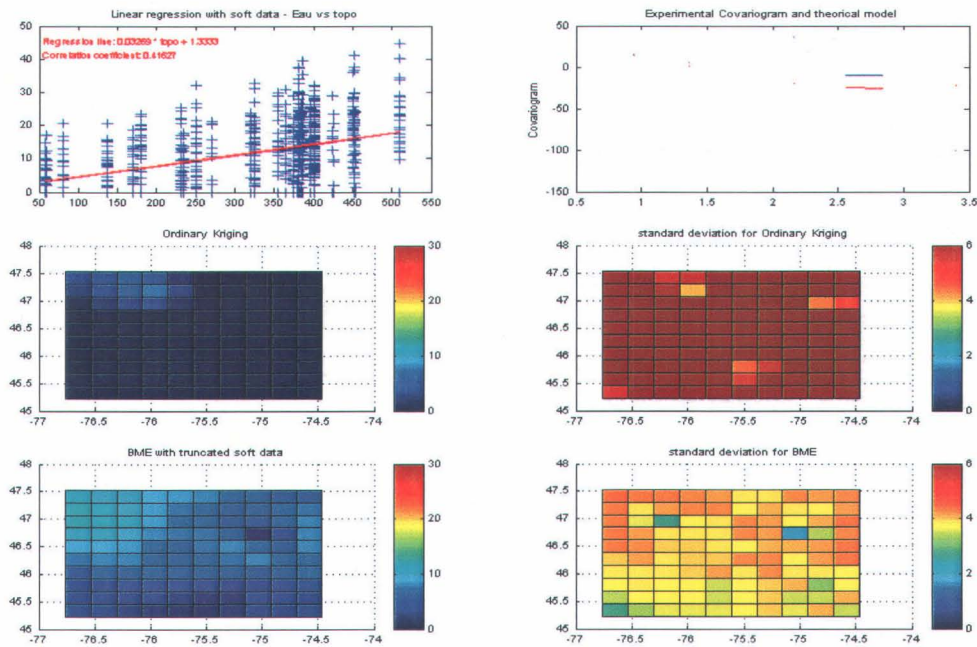


Figure 9. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire pour un réseau dégradé (5 des 17 points de mesure), avril 1979.

Il faut noter que les covariogrammes expérimentaux n'ont pu être tracés lorsque le nombre de points est trop faible (e.g. figure 9). Dans ces cas, on fait l'hypothèse que la structure de variance/covariance estimée le modèle de covariance ajusté préalablement pour un réseau plus dense est conservé. Afin de permettre une analyse comparative quantitative, le taux d'augmentation de l'écart-type associé à la dégradation du réseau a été calculé. Ainsi, la figure 10 montre le taux d'augmentation de l'écart-type lorsque le réseau perd 4 points de mesure (perte de 24%). L'augmentation de l'écart-type est généralement plus importante avec le krigeage ordinaire qu'avec l'approche BME. Un examen de la figure 10 permet de constater que le taux d'augmentation de l'écart-type est fréquemment supérieur à 20% dans la moitié ouest de la zone d'étude et atteint même plus de 75 % dans une partie de cette zone.

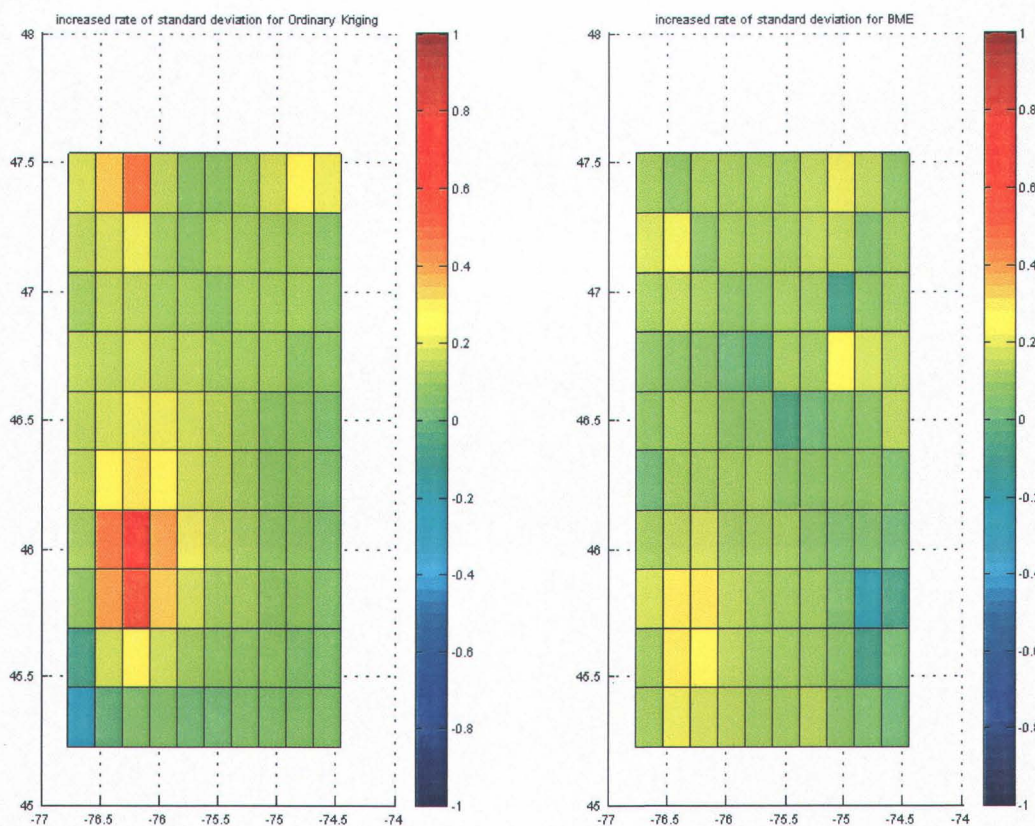


Figure 10. Comparaison du taux de changement de l'écart-type des équivalents en eau associé à une diminution du nombre de points (de 17 à 13) pour le suivi d'avril 1979.

L'augmentation de l'écart-type associé à la dégradation du réseau ne dépasse jamais 50% avec l'approche BME et elle est plus fréquemment inférieure à 20% avec cette méthode qu'avec le krigeage ordinaire.

La comparaison du changement des écarts-types associés à une plus grande dégradation du réseau (e.g. de 13 à 9 points) est présentée à la figure 11 pour cette même période (avril 1979). Cette comparaison confirme la plus grande robustesse de l'approche BME. En effet, l'augmentation de l'écart-type est supérieure à 20% pour presque toute la zone d'étude dans le cas du krigeage ordinaire. Dans le cas de l'approche BME, la dégradation du réseau produit une augmentation de l'écart-type généralement inférieure à 10% pour la moitié sud de la zone d'étude. Le taux d'augmentation de l'écart-type pour la moitié nord est aussi généralement inférieur dans le cas de l'approche BME pour la moitié nord.

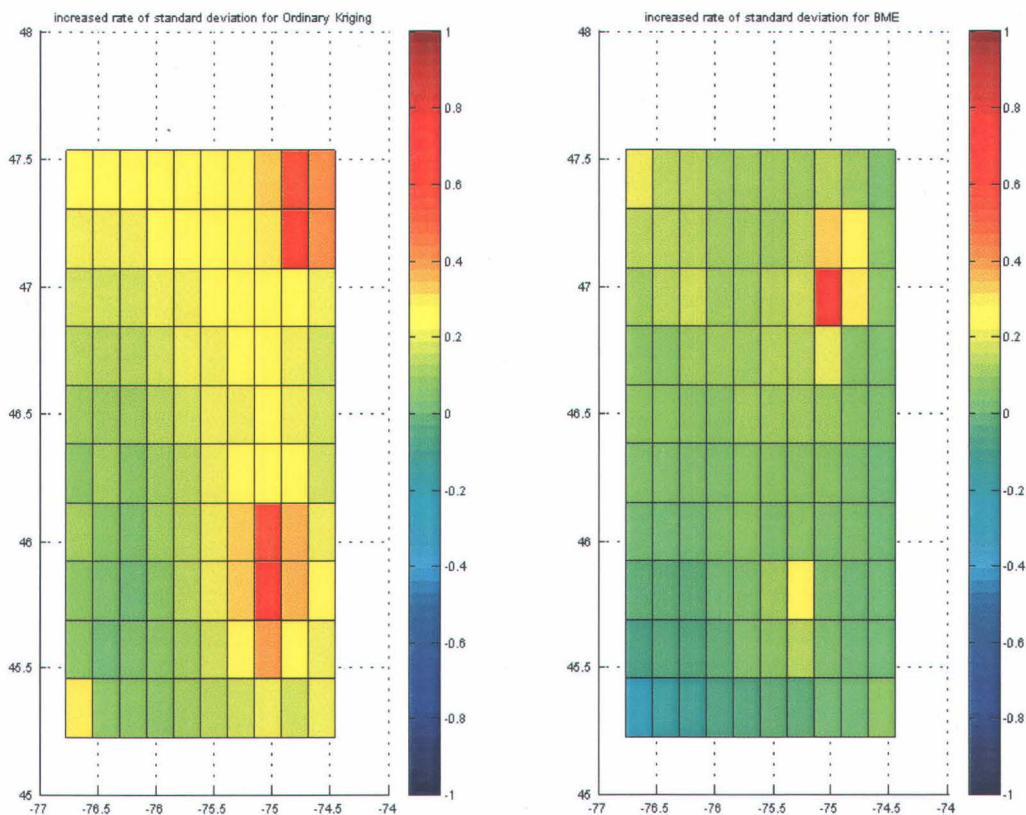


Figure 11. Comparaison du taux de changement de l'écart-type des équivalents en eau associé à une diminution du nombre de points (de 13 à 9) pour le suivi d'avril 1979.

D'autres comparaisons de l'effet de la dégradation du réseau sur l'incertitude (écart-type) sont données en annexe et ont produit des résultats similaires.

CONCLUSION

Le présent rapport synthétise les travaux préliminaires réalisés afin de tester le potentiel de méthodes géostatistiques bayésiennes pour l'étude de l'adéquation d'un réseau de stations de mesure. L'approche bayésienne d'entropie maximum (BME) a pu être utilisée afin de comparer différentes configurations de réseau, tout en mettant à profit la relation existante entre la variable principale mesurée (équivalent en eau de la neige, ou ÉEM) et une variable secondaire disponible sur tous les points de grille (l'altitude). La méthode BME offre fournit aux utilisateurs une mesure probabiliste (i.e. une distribution statistique) de la variable estimée à chaque point de grille. Cette mesure probabiliste offre la possibilité de produire une comparaison complète des configurations de réseau. Ainsi, le gestionnaire peut non seulement comparer les estimations des moments d'ordre 1 aux différents points de grille, mais la comparaison peut aussi inclure des moments d'ordre plus élevés. Dans le présent rapport, le taux d'augmentation (ou de diminution) de l'écart-type a été suggéré comme barème de comparaison. Cette référence statistique n'est pas la seule possible avec l'approche BME. D'autres statistiques comparatives pourraient être utilisées par les gestionnaires pour établir un réseau qui soit le optimal en fonction des extrêmes mesurés, par exemple. L'approche BME semble donc offrir un potentiel important pour les gestionnaires de réseau.

RÉFÉRENCES :

- Bardossy, A. et W. Lehmann. 1998. Spatial distribution of soil moisture in a small catchment. Part 1: geostatistical analysis. *Journal of Hydrology* 206:1-15.
- Banerjee, S., B.P. Carlin et A.E. Gelfand. 2004. Hierarchical modeling and analysis for spatial data. Monographs on Statistics and applied probability 101. Chapman et Hall. 452 p.
- Berliner, M.L., J.A. Royle, C.K. Wikle et R.F. Milliff. 1998. Bayesian methods in atmospheric sciences. Dans: Bernardo, Berger, David et Smiths (eds). Bayesian Statistics 6. Oxford University Press.
- Carlin, B.P. 1996. Hierarchical Longitudinal modeling. In *Markov Chain Monte Carlo in practice*. Chapman&Hall/CRC, pp 303-315.
- Christakos, G. 1990. A Bayesian /maximum entropy view to the spatial estimation problem. *Mathematical Geology* 22(7):763-776.
- Christakos, G., P. Bogaert et M. Serre. *Temporal GIS. Advanced Functions for Field-Based Applications*. Springer-Verlag, New York, 217 p.
- Cohen, J., Nagin, D., Walstrom, G., and Wasserman, R. 1998. Hierarchical bayesian analysis of arrest rates. *Journal of the american statistical association* **93**: 1260-1270.
- Deutsch, C.V. et A.G. Journel. 1998. *GSLIB : Geostatistical software library and user's guide. Applied geostatistics series*. Oxford University Press, New York.369 p.
- Ecker, M. et A. E. Gelfand. 2003. Spatial modeling and prediction under stationary, non-geometric range anisotropy. *Environmental and Ecological Statistics* 10: 165-178
- Goovaerts, P. 1997. *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Applied Geostatistics Series, Oxford University Press. 483 p.
- Kass, R.E. and Raftery, A. 1995. Bayes factors. *Journal of the American statistical society* **90**: 773-795.

- Kitanidis, P. K. Generalized Covariance Functions in Estimation (1993). *Mathematical Geology*, 25(5), 525-540.
- Kitanidis, P. K. 1997. A variance-ratio test for supporting a variable mean in Kriging, *Math. Geology*, 29(3), 335-348.
- Robert, C.P. 1996. Mixture of distributions: inference and estimation. In *Monte Carlo Markov Chain in Practice*. Chapman&Hall/CRC, London, pp 441-464.
- Suess, E.A., Gardner, I.A., and Jonhson, W.O. 2002. hierarchical bayesian model for prevalence inference and determination of a country's status for an animal pathogen. *Preventive Veterinary Pathogen* **55**: 155-171.
- Sun, X.; Mein, R. G.; Keenan, T. D.; Elliott, J. F. 2000. Flood estimation using radar and raingauge data. *Journal of Hydrology*, 239 (1/4): 4-18.
- Seidou, O., A. St-Hilaire, S. El-Adlunie, A-C. Favre, L. Perreault ,V. Fortin, et B. Bobée. (en prép.). Estimation de l'équivalent en eau de la neige sur un bassin versant par modélisation bayésienne hiérarchique. Manuscrit à être soumis au Journal des sciences hydrologiques. 40 p.
- Serre, M. et G. Christakos. 1999. Modern geostatistics : Computational BME analysis in the light of uncertain physical knowledge-The Equus Beds study. *Stochastic Environmental Researc and Risk Assesment* 13: 1-26.
- Serre, M., G. Christakos, H. Li et C.T. Miller. 2003. A BME solution of the inverse problem for saturated groundwater flow. *Stochastic Environmental Research and Risk Assesment* 17: 354-369.
- Tweedie, L.T., Scott, D.J., Biggerstaff, B.J., and Mengersen, K.L. 1994. Bayesian meta-analysis, with application to studies of ETS and lung cancer. *Lung Cancer* **14**: S171-S174.
- Wikle, C.K. et Royle, J.A. 2002. Spatial Statistical modeling in biology. In *Encyclopedia of Life Support Systems*. EOLSS Publishers Co. Ltd. [<http://www.eolss.net>]
- Zhu, H. et A. Journel. 1992. Formatting and integrating soft data : Stochastic imaging via the Markov-Bayes algorithm. Dans A. Soares [Éd.]. *Geostatistics-Troia*, (Kluwer):1-12.

ANNEXE A: COMPARAISON DE L'APPROCHE BME ET KRIGEAGE ORDINAIRE

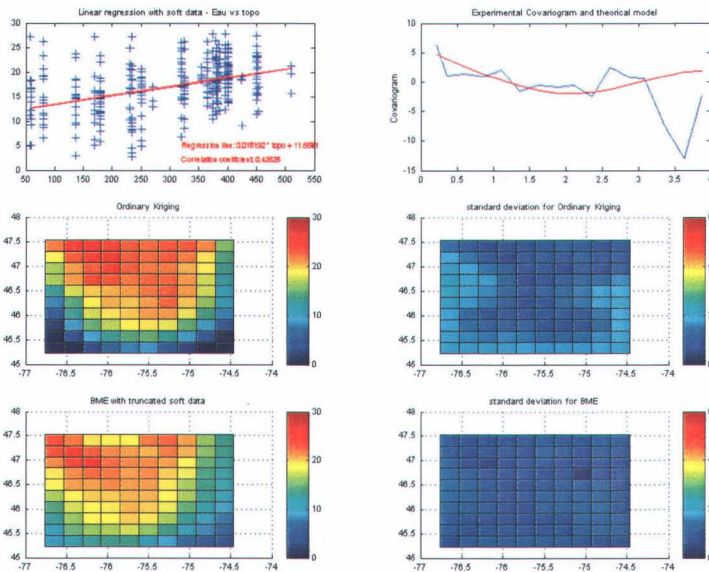


Figure A1. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, mi-mars 1979.

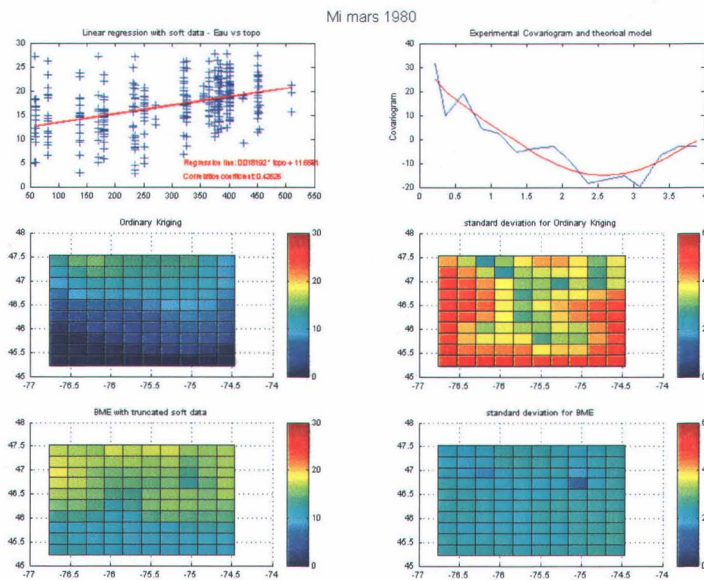


Figure A2. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, mi-mars 1980.

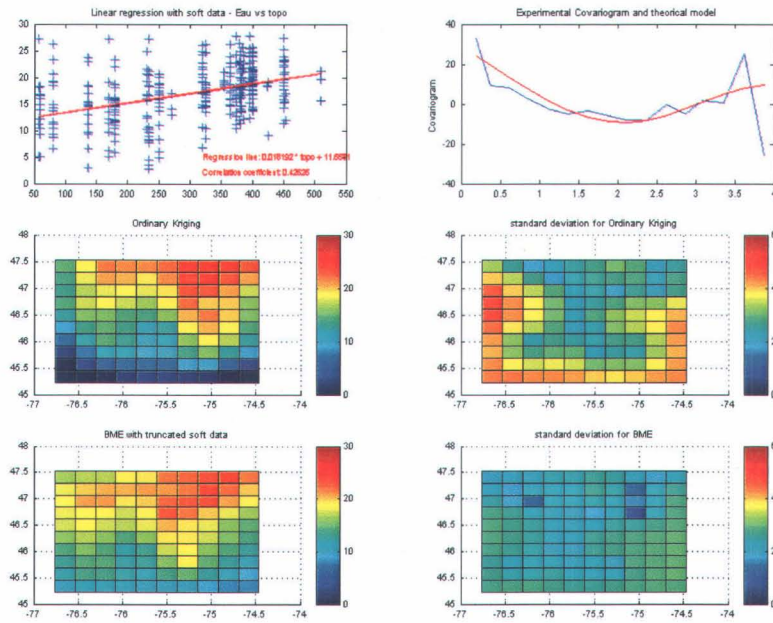


Figure A3. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, mi-mars 1984.

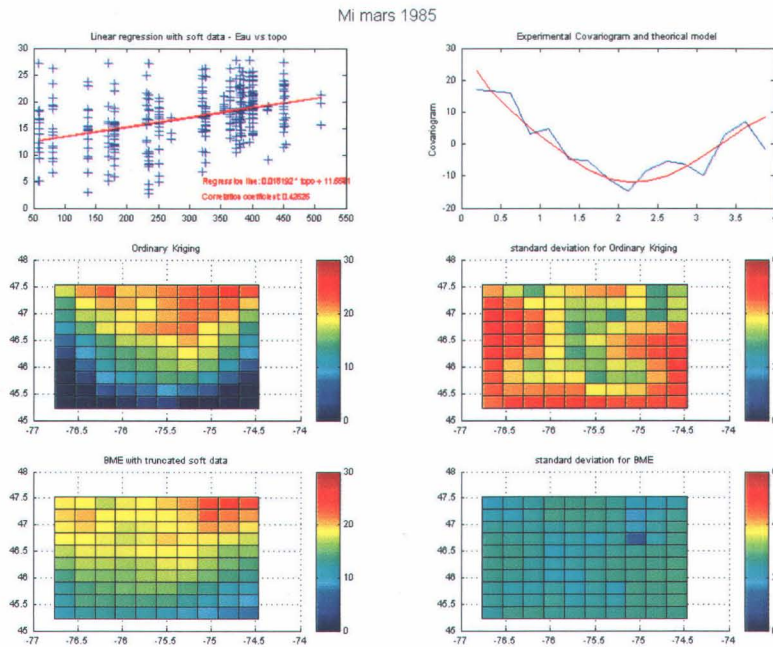


Figure A4. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, mi-mars 1985.

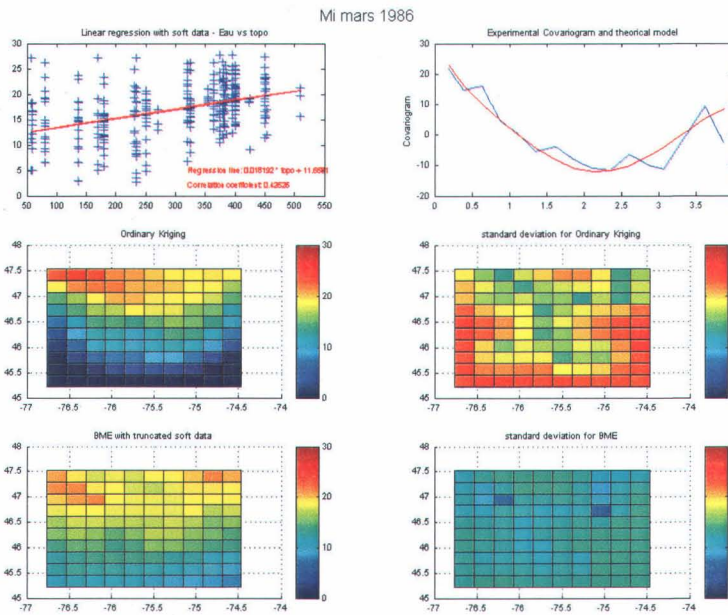


Figure A5. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, mi-mars 1985.

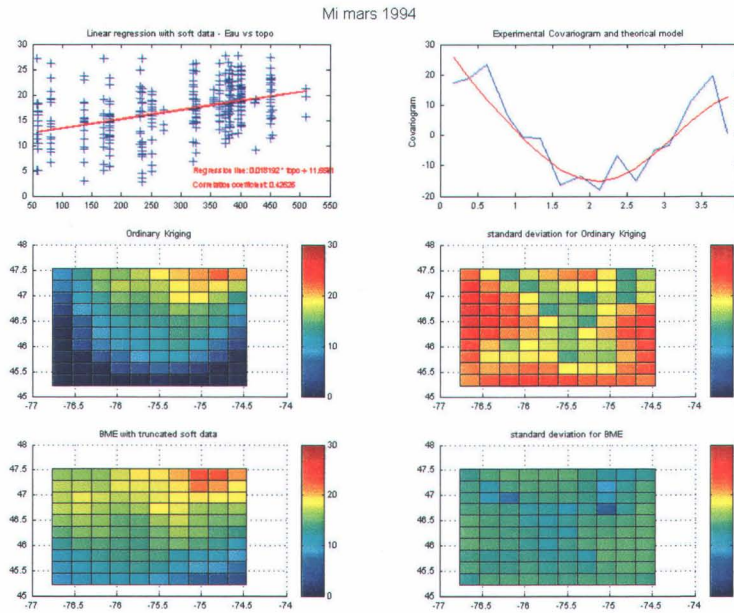


Figure A6. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, mi-mars 1986.

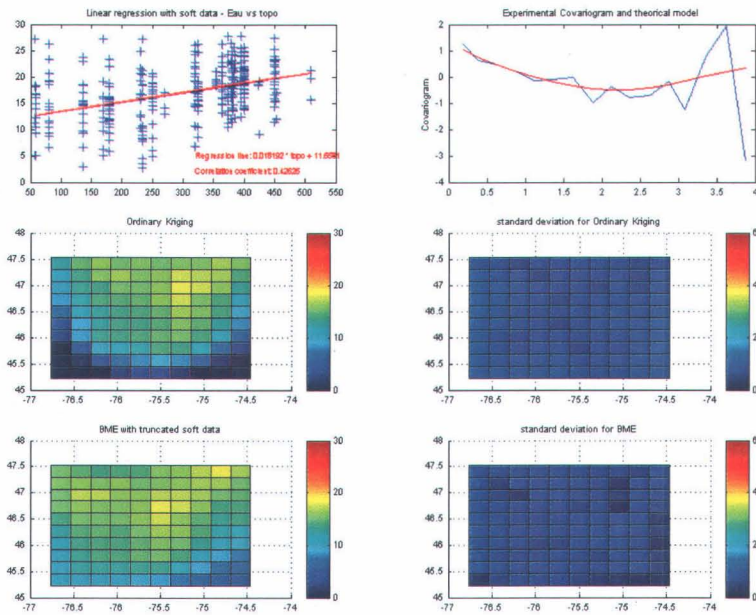


Figure A7. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, mi-mars 1987.

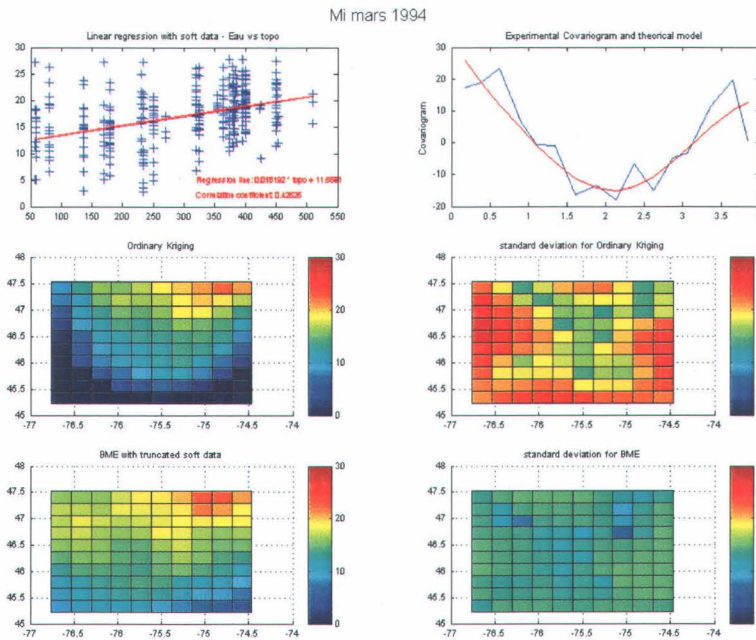


Figure A7. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, mi-mars 1994.

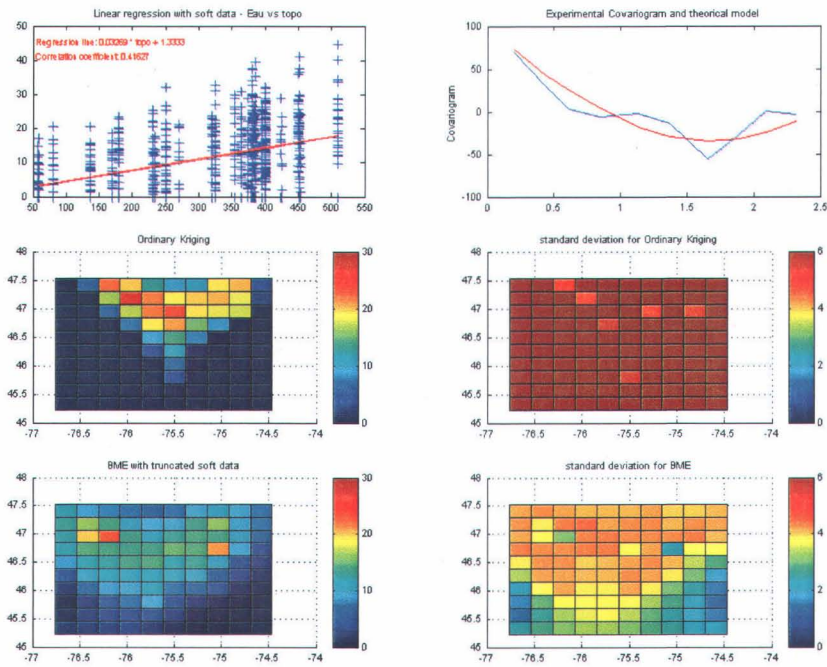


Figure A8. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1972.

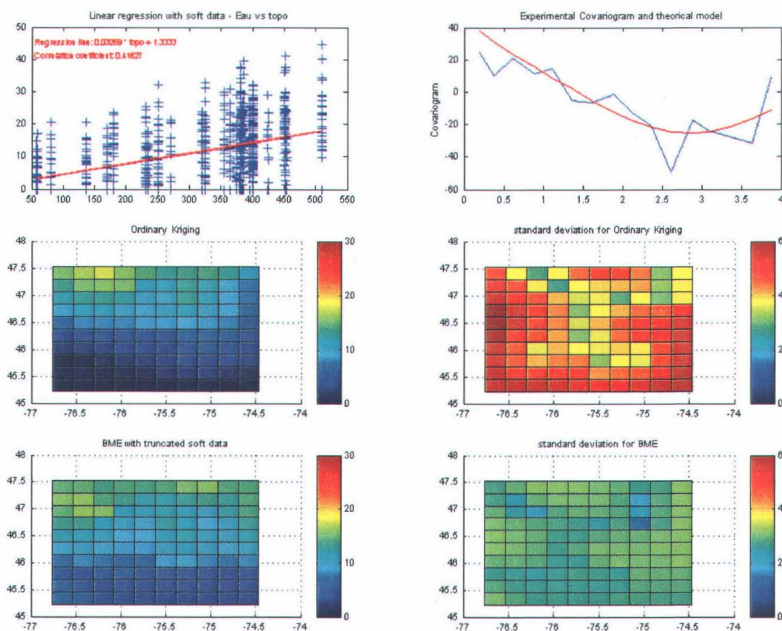


Figure A9. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1978.

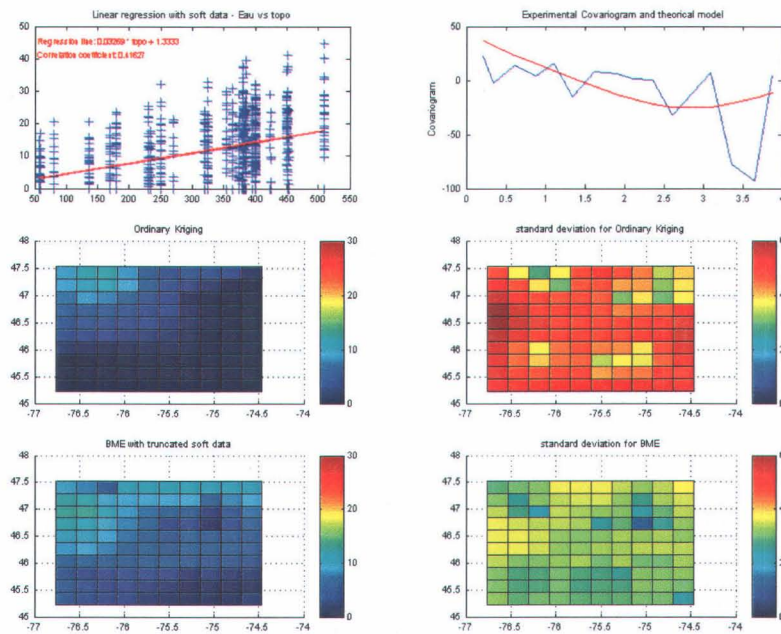


Figure A10. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1979.

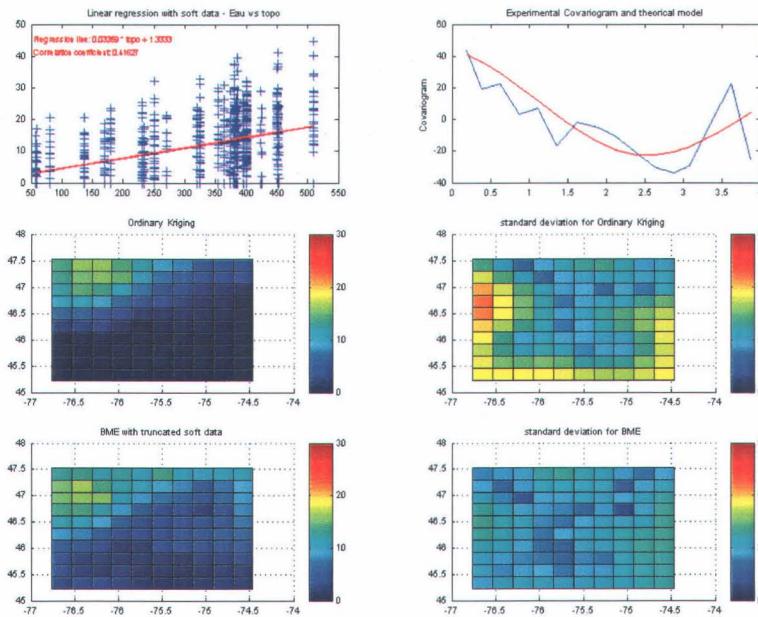


Figure A11. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1982.

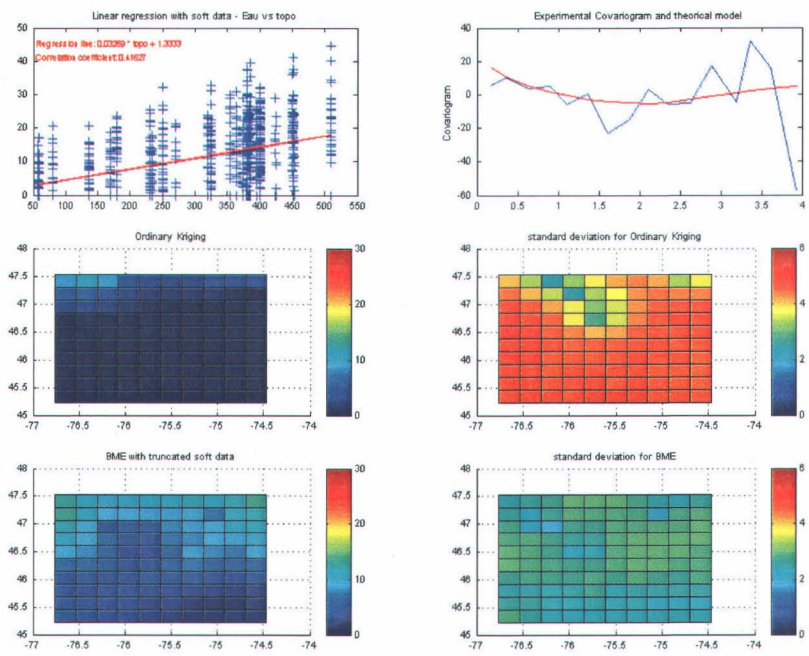


Figure A12. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1983.

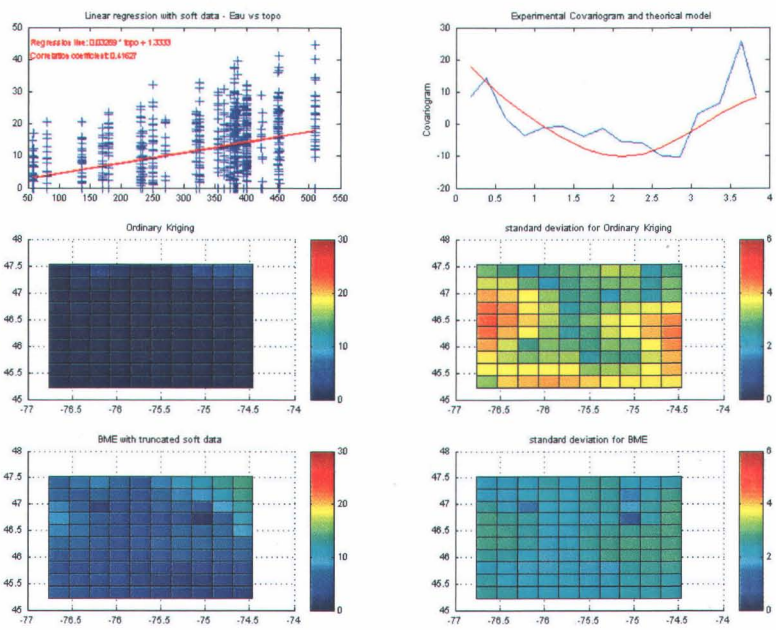


Figure A13. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1985.

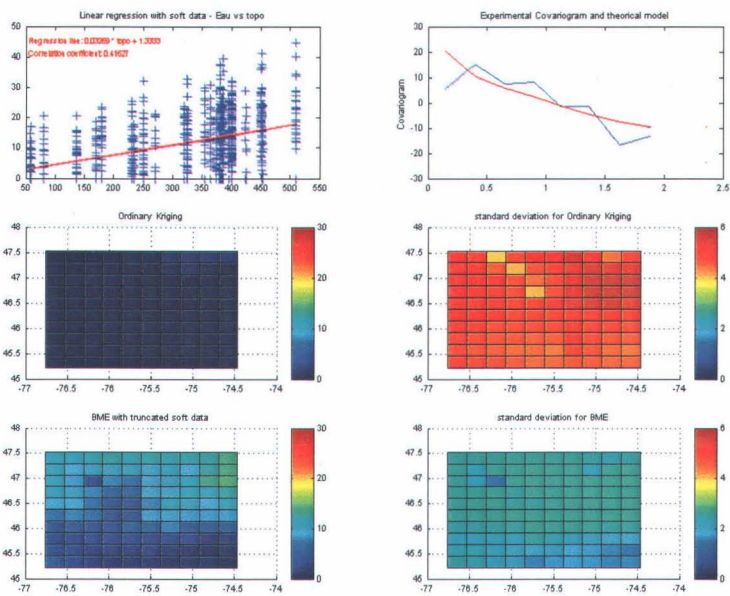


Figure A14. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1991.

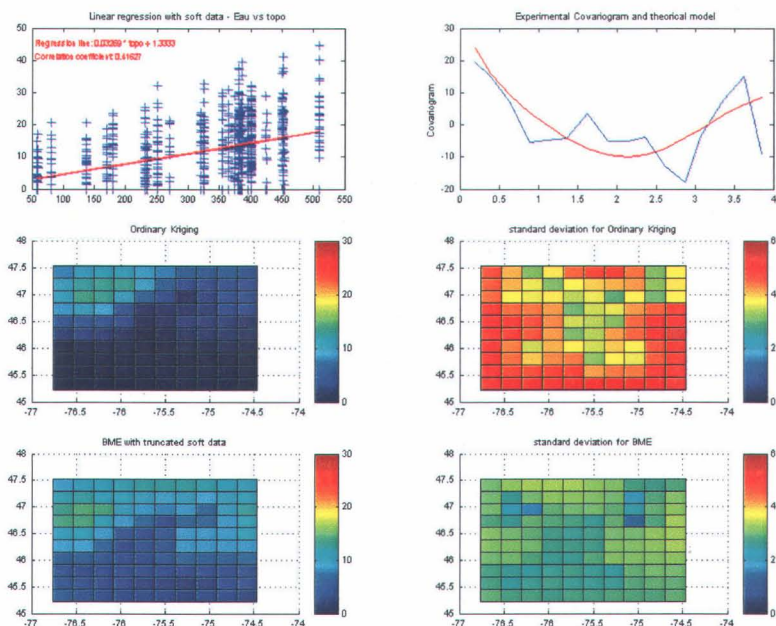


Figure A15. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1992.

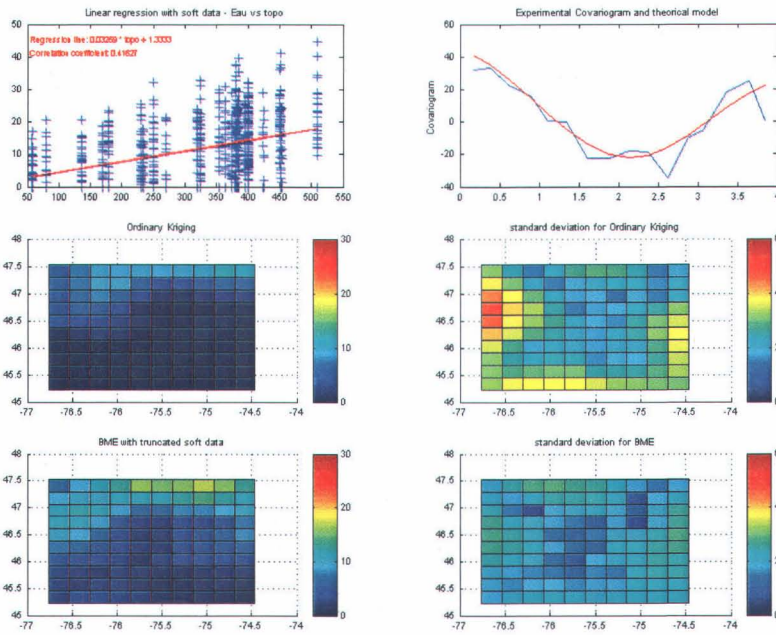


Figure A15. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1994.

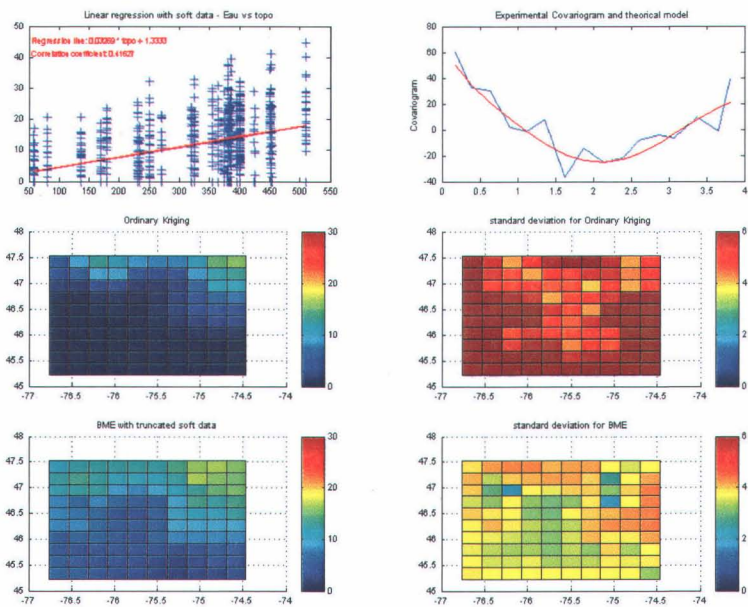


Figure A15. Comparaison de l'approche BME et du krigeage ordinaire, avril 1997.

ANNEXE B. COMPARAISON DE L'ÉVOLUTION DE L'ÉCART-TYPE SELON LA DÉGRADATION DU RÉSEAU DE STATIONS DE MESURE

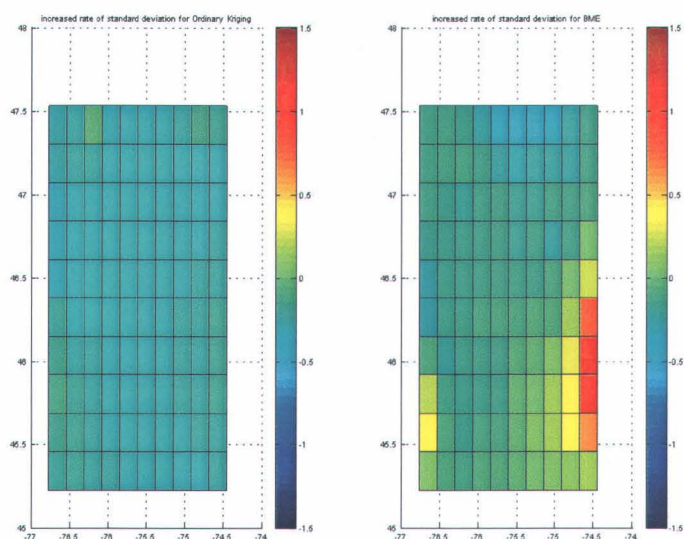


Figure B1. Taux de changement de l'écart-type pour le krigeage ordinaire et l'approche BME lorsqu'on passe d'un réseau de 9 stations à 7 stations de mesure, avril 1972.

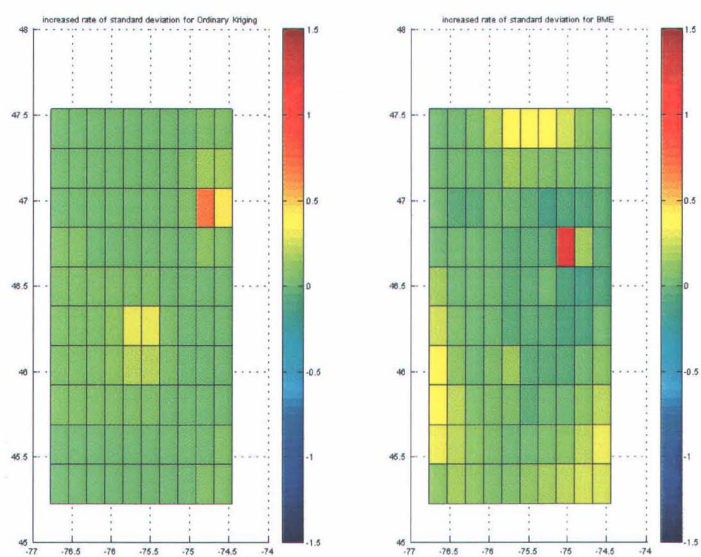


Figure B2. Taux de changement de l'écart-type pour le krigeage ordinaire et l'approche BME lorsqu'on passe d'un réseau de 7 stations à 5 stations de mesure, avril 1972.

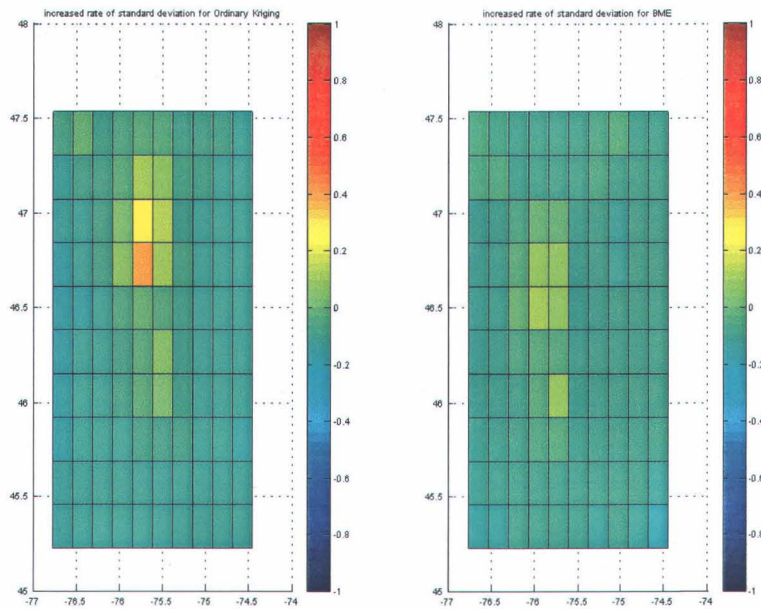


Figure B3. Taux de changement de l'écart-type pour le krigeage ordinaire et l'approche BME lorsqu'on passe d'un réseau de 25 stations à 19 stations de mesure, mars 1984.

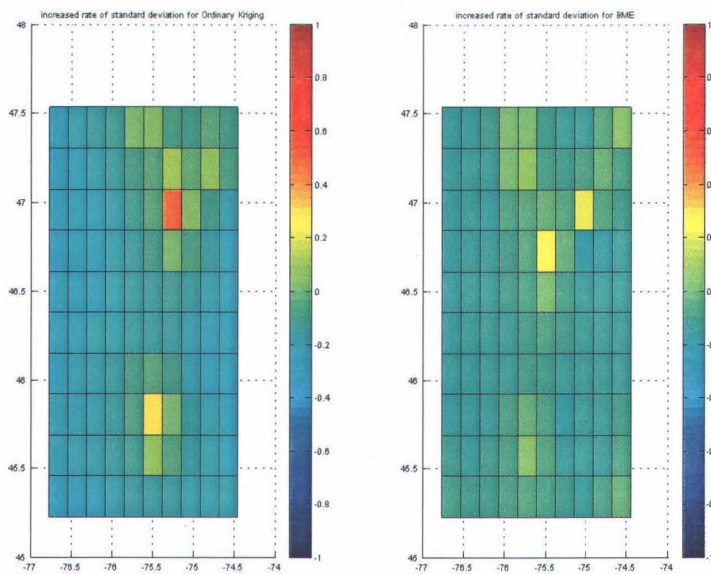


Figure B4. Taux de changement de l'écart-type pour le krigeage ordinaire et l'approche BME lorsqu'on passe d'un réseau de 19 stations à 13 stations de mesure, mars 1984.

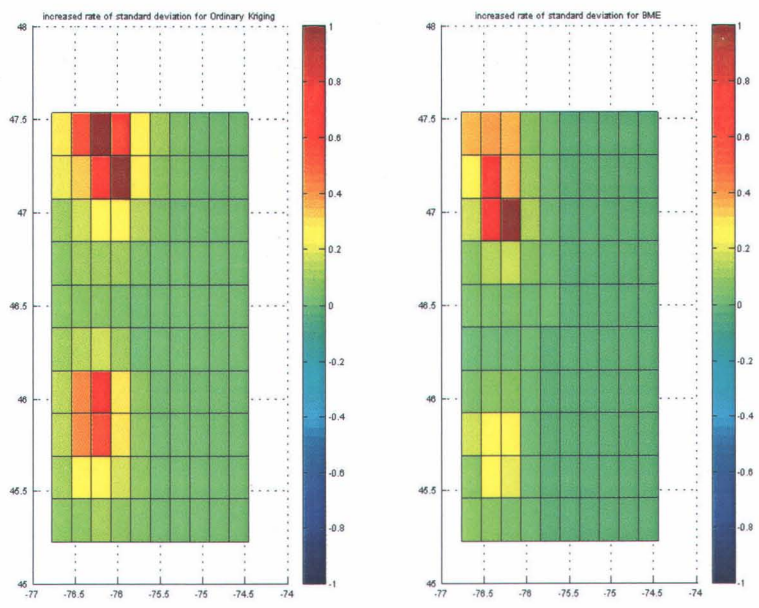


Figure B5. Taux de changement de l'écart-type pour le krigeage ordinaire et l'approche BME lorsqu'on passe d'un réseau de 13 stations à 7 stations de mesure, mars 1984.

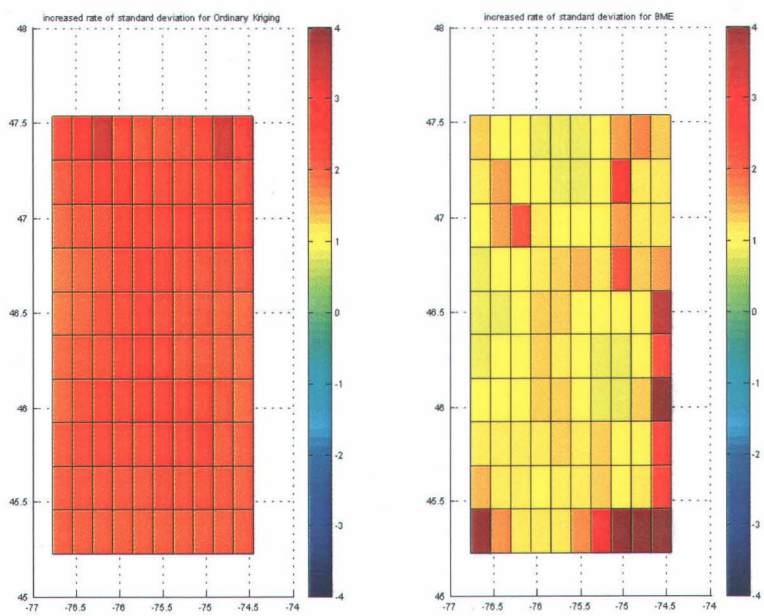


Figure 6 Taux de changement de l'écart-type pour le krigeage ordinaire et l'approche BME lorsqu'on passe d'un réseau de 23 stations à 17 stations de mesure, mars 1987.

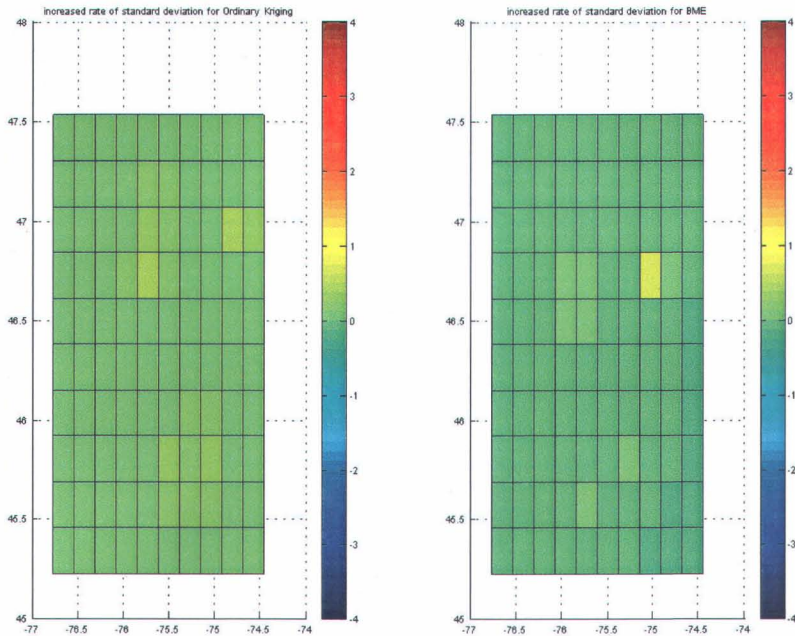


Figure B7. Taux de changement de l'écart-type pour le krigeage ordinaire et l'approche BME lorsqu'on passe d'un réseau de 17 stations à 11 stations de mesure, mars 1987.

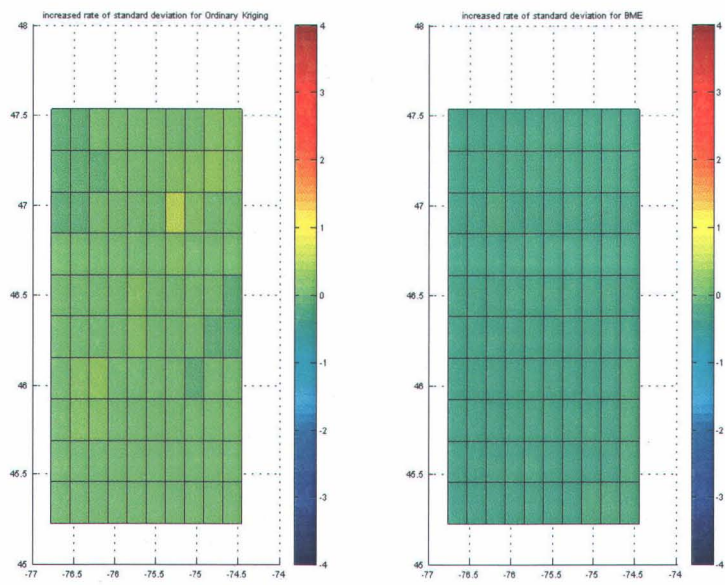


Figure B8. Taux de changement de l'écart-type pour le krigeage ordinaire et l'approche BME lorsqu'on passe d'un réseau de 11 stations à 5 stations de mesure, mars 1987.

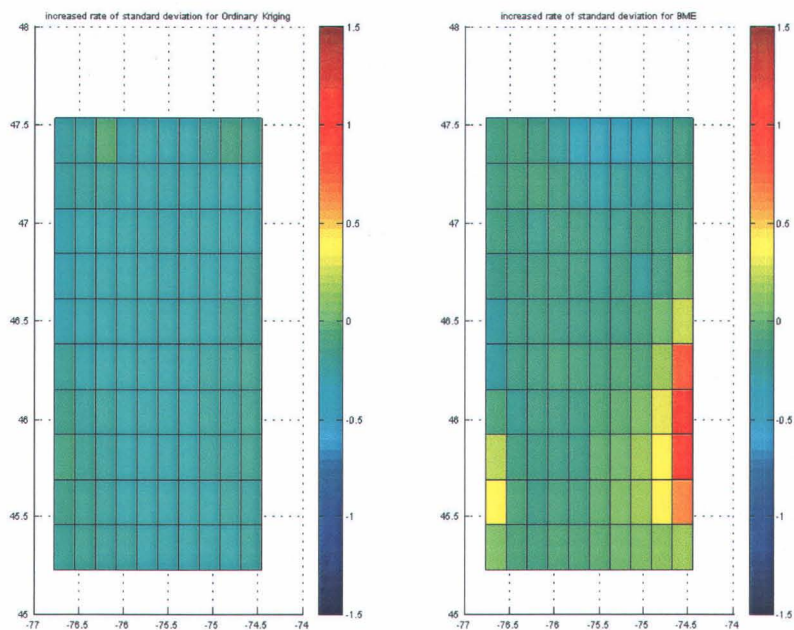


Figure B9. Taux de changement de l'écart-type pour le krigeage ordinaire et l'approche BME lorsqu'on passe d'un réseau de 9 stations à 7 stations de mesure, avril 1972.

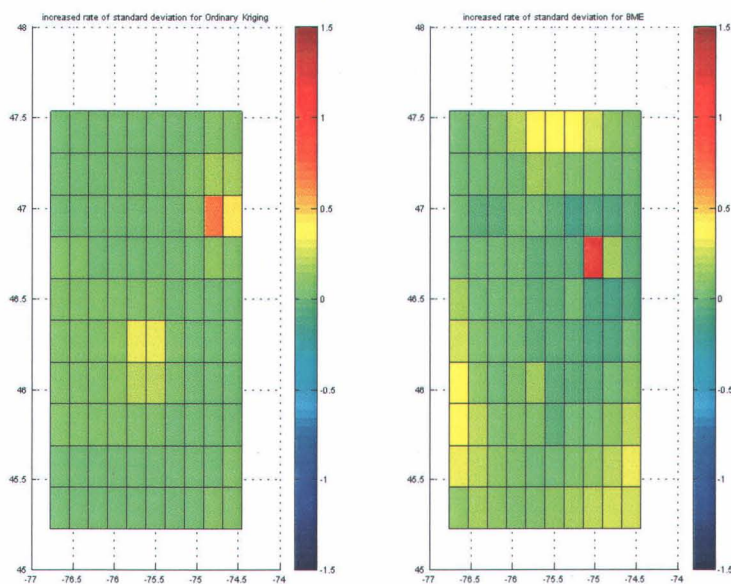


Figure B10. Taux de changement de l'écart-type pour le krigeage ordinaire et l'approche BME lorsqu'on passe d'un réseau de 7 stations à 5 stations de mesure, avril 1972.