2006-10

Inédits

ÉBAUCHE D'UN MODÈLE THÉORIQUE D'UN SYSTÈME URBAIN AVEC ÉCONOMIES ET DÉSÉCONOMIES D'URBANISATION

André LEMELIN

OCTOBRE 2006

INRS
Urbanisation, Culture et Société

Document de recherche / *Working paper*

Ébauche d’un modèle théorique d’un système urbain avec économies et déséconomies d’urbanisation

André LEMELIN

Institut national de la recherche scientifique
Urbanisation, Culture et Société

Octobre 2006

André Lemelin
andre.lemelin@ucs.inrs.ca

Inédits, collection dirigée par Richard Shearmur :
richard.shearmur@ucs.inrs.ca
Institut national de la recherche scientifique
Urbanisation, Culture et Société
385, rue Sherbrooke Est
Montréal (Québec) H2X 1E3

Téléphone :   (514) 499-4000
Télécopieur : (514) 499-4065

www.ucs.inrs.ca

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Ce court essai théorique est la concrétisation d'une idée qui a germé au fil de discussions avec Sylvie Arbour, étudiante au doctorat en études urbaines à l'INRS-UCS, et mon collègue, Mario Polèse. Dans le cadre de sa thèse de doctorat, Madame Arbour mène une étude empirique des économies d'agglomération dans le système urbain canado-étatsunien. L'originalité de sa recherche vient de ce qu'elle rattache les économies d'agglomération de savoir aux professions, plutôt qu'aux industries.

Le modèle d'équilibre général développé ci-après vise à montrer la possibilité d'écarts de salaire persistants entre les villes, en dépit de ce que les salaires soient égaux à la valeur du produit marginal du travail, conformément au modèle néoclassique. Dans le modèle, les écarts de salaire reflètent des différences de productivité du travail qui découlent de variations entre les villes quant au niveau des économies d'agglomération. Le modèle présenté est donc la formalisation d'un argument théorique qui justifie de considérer les écarts entre les taux de salaire comme des indicateurs des différences de productivité du travail. Cela étant établi, il devient légitime de rechercher les liens empiriques entre les taux de salaire et des variables indépendantes choisies pour représenter l'une ou l'autre forme d'économies d'agglomération, ce que fait Madame Arbour dans sa thèse.

Le modèle proposé s'inspire directement de celui d'Eeckhout (2004) et se rattache à la tradition de Fujita et Thisse (2001), adroitement résumée par Boiteux-Orain et Huriot (2002).

1. MODÈLE STATIQUE, SANS MIGRATIONS

1.1 Notation du modèle

Le modèle proposé est, répétons-le, la formalisation d'un argument théorique. Il ne se veut pas réaliste, mais cherche néanmoins à représenter, sous la forme la plus dépouillée possible, un système urbain réduit à ses traits essentiels. Ce système urbain comprend I villes ($i = 1, \ldots, I$), où l'on produit 2 biens ($g = 1, 2$). La production de chacun de ces deux biens fait appel à un type de main-d'œuvre spécifique; il y a donc 2 professions ($k = 1, 2$).

Les variables du modèle, tant endogènes qu'exogènes, sont :

x_{ig} : production du bien g dans la ville i

L_{ik} : emploi de main-d'œuvre de type k dans la ville i; cette main-d'œuvre est employée à la production du bien k

w_{ik} : salaire de la main-d'œuvre de type k dans la ville i

$c_{ig(k)}$: consommation du bien g par un travailleur de type k dans la ville i

$h_{i(k)}$: consommation d'espace (terrain, logement) par un travailleur de type k dans la ville i

$1-l_{ik}$: consommation de loisir par un travailleur de type k dans la ville i; l_{ik} est donc l'offre de travail de k dans la ville i

π_g : prix du bien g; le bien 1 est pris pour numéraire : $\pi_1 = 1$

p_i : prix de l'espace (loyer) dans la ville i

S_{ik} : nombre de travailleurs de type k dans la ville i

R_{ik} : revenu de loyer reçu par un travailleur de type k vivant dans la ville i

On définit aussi les paramètres suivants :

α_g, β, γ : paramètres de la fonction d'utilité

σ_{ik} : part d'un travailleur de type k vivant dans la ville i dans les revenus de loyer générés par l'économie

Dans le modèle sans migrations, la structure du système urbain ne change pas : les S_{ik} sont donc considérés comme des variables exogènes.

1.2 Production, économies et déséconomies d'agglomération

La production à rendements constants utilise comme unique intrant le travail :

$$x_{ig} = A(S_{ig})\ \ a_{+}(S_{i1},S_{i2})\ \ L_{ig} \qquad [1]$$

où

$A(S_{ig})$ représente les économies d'agglomération de localisation

$a_{+}(S_{i1},S_{i2})$ représente les économies d'agglomération d'urbanisation

Les économies d'agglomération sont définies en termes des professions, plutôt que des industries (bien que cela soit indifférent dans le contexte simplifié du modèle développé ici, où il y a une correspondance biunivoque entre professions et industries). Conformément à la distinction couramment admise, l'expression « économies de localisation » désigne les économies externes qui résultent du regroupement dans une même ville de travailleurs de la même profession. L'expression « économies d'urbanisation » désigne les économies externes qui résultent de la diversité professionnelle de la main-d'œuvre. On suppose que les fonctions $A()$ et $a_{+}()$ sont les mêmes partout.

La productivité marginale du travail est donnée par

$$\frac{dx_{ig}}{dL_{ig}} = A\left(S_{ig}\right)a_{+}\left(S_{i1},S_{i2}\right)$$

Puisque les salaires sont supposés égaux à la productivité marginale en valeur, cela implique :

$$w_{ig} = \pi_g \frac{dx_{ig}}{dL_{ig}} = \pi_g A\left(S_{ig}\right)a_{+}\left(S_{i1},S_{i2}\right) \qquad [2]$$

Les déséconomies externes dues à la congestion prennent la forme de la perte par les travailleurs d'une fraction de leur temps de travail dans leurs déplacements résidence-travail. L'emploi L_{ig} est donc égal au nombre de travailleurs S_{ig}, multiplié par l'offre de travail de chacun l_{ig}, et multiplié par le facteur de congestion $a_{\_}(S_{i1}+S_{i2})$:

$$L_{ig} = S_{ig}\ \ a_{\_}(S_{i1}+S_{i2})\ \ l_{ig} \qquad [3]$$

avec

$$0 < a_{\_}(S_{i1}+S_{i2}) < 1$$

On suppose que la fonction $a_{\_}()$ est la même partout.

1.3 Équilibre des marchés du travail

L'équation [2] peut se récrire

$$\frac{w_{ig}}{\pi_g} = A(S_{ig})\,a_+(S_{i1}, S_{i2})$$

On substitue le membre de gauche pour celui de droite dans [1] et on trouve

$$x_{ig} = \frac{w_{ig}}{\pi_g} L_{ig}$$

En substituant [3], on obtient une forme réduite de l'équation de production

$$x_{ig} = \frac{w_{ig}}{\pi_g} S_{ig}\; a_-(S_{i1} + S_{i2})\, l_{ig}$$

ce qui implique la condition d'équilibre

$$\pi_g\, x_{ig} = w_{ig} S_{ig}\; a_-(S_{i1} + S_{i2})\, l_{ig} \qquad [4]$$

1.4 Équilibre du consommateur-travailleur

Les consommateurs-travailleurs sont identiques, sauf pour leur profession ($k = 1, 2$) et leur ville de résidence ($i = 1,\dots, I$). Les individus maximisent une fonction d'utilité Cobb-Douglas

$$u_{i(k)}(c_{i1(k)}, c_{i2(k)}, h_{i(k)}, l_{ik}) = (c_{i1(k)})^{\alpha_1} (c_{i2(k)})^{\alpha_2} (h_{i(k)})^{\beta} (1 - l_{ik})^{\gamma} \qquad [5]$$

où

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma = 1$$

sous contrainte de l'équilibre budgétaire

$$c_{i1(k)} + \pi_2 c_{i2(k)} + p_i h_{i(k)} \leq \frac{w_{ik} L_{ik}}{S_{ik}} + R_{ik}$$

Étant donné [3], la contrainte budgétaire peut se récrire

$$c_{i1(k)} + \pi_2 c_{i2(k)} + p_i h_{i(k)} \leq w_{ik} a_-(S_{i1} + S_{i2}) l_{ik} + R_{ik}$$

$$c_{i1(k)} + \pi_2 c_{i2(k)} + p_i h_{i(k)} + w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2})(1 - l_{ik}) \leq w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) + R_{ik} \qquad [6]$$

où le membre de droite est le revenu intégral (« full income »), c'est-à-dire le revenu maximum potentiel (sans aucune consommation de loisir), qui doit être supérieur ou égal au coût total de la consommation du travailleur, y compris le coût de sa consommation de loisir.

Les conditions de premier ordre de l'équilibre du consommateur conduisent aux fonctions de demande

$$c_{i1(k)} = \alpha_1 \left[w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) + R_{ik} \right] \qquad [7]$$

$$\pi_2 c_{i2(k)} = \alpha_2 \left[w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) + R_{ik} \right] \qquad [8]$$

$$p_i h_{i(k)} = \beta \left[w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) + R_{ik} \right] \qquad [9]$$

$$w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2})(1 - l_{ik}) = \gamma \left[w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) + R_{ik} \right] \qquad [10]$$

Le prix du bien 1 n'apparaît pas dans le membre de gauche de [7] parce que ce prix est le numéraire du modèle.

De l'équation [10] on dérive l'offre de travail :

$$l_{ik} = 1 - \gamma \frac{w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) + R_{ik}}{w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2})} \qquad [11]$$

La pente de l'offre de travail en fonction du salaire est positive (l'effet de substitution l'emporte sur l'effet de revenu) :

$$\frac{\partial l_{ik}}{\partial w_{ik}} = -\gamma \frac{\partial}{\partial w_{ik}} \left[\frac{w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) + R_{ik}}{w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2})} \right]$$

$$\frac{\partial l_{ik}}{\partial w_{ik}} = -\gamma \left[\frac{w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) - \left[w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) + R_{ik} \right] a_{-}(S_{i1} + S_{i2})}{\left[w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) \right]^2} \right]$$

$$\frac{\partial l_{ik}}{\partial w_{ik}} = -\gamma \left[\frac{-R_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2})}{\left[w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) \right]^2} \right] = \gamma \left[\frac{R_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2})}{\left[w_{ik} a_{-}(S_{i1} + S_{i2}) \right]^2} \right] \geq 0 \qquad [12]$$

L'offre de travail [11] permet d'écrire autrement la forme réduite de l'équation de production

$$\pi_g x_{ig} = w_{ig} S_{ig}\ a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right) l_{ig} \qquad [4]$$

Pour ce faire, remplaçons l'offre de travail dans [4] par [11]. On obtient

$$\pi_g x_{ig} = w_{ig} S_{ig}\ a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right)\left[1 - \gamma \frac{w_{ig} a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right) + R_{ig}}{w_{ig} a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right)}\right]$$

$$\pi_g x_{ig} = S_{ig}\ \left\{ w_{ig}\ a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right) - \gamma\left[w_{ig} a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right) + R_{ig}\right] \right\}$$

ou encore,

$$\pi_g x_{ig} = S_{ig}\ \left[(1-\gamma) w_{ig}\ a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right) - \gamma R_{ig}\right] \qquad [13]$$

1.5 Équilibre des marchés fonciers

Dans chaque ville, la quantité d'espace est fixe, égale à H_i (l'hypothèse que toutes les villes ont la même dotation en espace est inutilement restrictive). L'équilibre du marché foncier de la ville *i* exige

$$\sum_k S_{ik} h_{i(k)} = H_i \qquad [14]$$

La masse des loyers payés dans l'ensemble de l'économie est donnée par

$$\sum_i p_i \sum_k S_{ik} h_{i(k)} = \sum_i p_i H_i \qquad [15]$$

Les loyers payés sont redistribués aux travailleurs en parts fixes (ce sont des transferts entre les travailleurs; ou encore, on peut imaginer que l'État est propriétaire de l'espace et qu'il redistribue ses revenus de loyers aux travailleurs) :

$$R_{ik} = \sigma_{ik}\left(\sum_j p_j \sum_g S_{jg} h_{j(g)}\right) = \sigma_{ik}\left(\sum_j p_j H_j\right) \qquad [16]$$

où σ_{ik} est la part d'un travailleur de type *k* vivant dans la ville *i*.

Évidemment, la somme des revenus de loyer reçus doit être égale à la somme des loyers payés :

$$\sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} = \sum_i p_i \sum_k S_{ik} h_{i(k)} \qquad [17]$$

En substituant [16] dans [17], on voit que cela implique

$$\sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} = \sum_i \sum_k S_{ik} \sigma_{ik} \left(\sum_j p_j \sum_g S_{jg} h_{j(g)} \right) = \sum_i p_i \sum_k S_{ik} h_{i(k)}$$

c'est-à-dire

$$\sum_i \sum_k S_{ik} \sigma_{ik} = 1 \qquad [18]$$

Ensuite, étant donné la demande d'espace [9], la condition d'équilibre des marchés fonciers [14] implique

$$\sum_k S_{ik} \frac{\beta}{p_i} \left[w_{ik} a_{\_} \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + R_{ik} \right] = H_i$$

c'est-à-dire

$$p_i = \frac{\beta \sum_k S_{ik} \left[w_{ik} a_{\_} \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + R_{ik} \right]}{H_i} \qquad [19]$$

Le loyer, le prix de l'espace p_i, joue clairement ici le rôle d'une rente ricardienne : sa seule fonction est d'allouer l'espace entre les demandes concurrentes.

On substitue [19] dans [9] et on trouve

$$\frac{\beta \sum_g S_{ig} \left[w_{ig} a_{\_} \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + R_{ig} \right]}{H_i} h_{i(k)} = \beta \left[w_{ik} a_{\_} \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + R_{ik} \right]$$

$$h_{i(k)} = \frac{w_{ik} a_{\_} \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + R_{ik}}{\sum_g S_{ig} \left[w_{ig} a_{\_} \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + R_{ig} \right]} H_i \qquad [20]$$

Dans chaque ville, la part de l'espace occupé par un travailleur est égale à sa part dans le revenu intégral total des travailleurs de la ville (c'est-à-dire égale au revenu que recevraient ces travailleurs si leur consommation de loisir était nulle).

On détermine maintenant le rapport entre la masse des revenus de travail potentiels et les revenus de loyer. Étant donné la demande d'espace [9], la condition d'équilibre comptable des loyers payés et reçus

$$\sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} = \sum_i p_i \sum_k S_{ik} h_{i(k)} = \sum_i \sum_k S_{ik} p_i h_{i(k)} \qquad [17]$$

peut s'écrire

$$\sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} = \sum_i \sum_k S_{ik} \beta \left[w_{ik} a_- \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + R_{ik} \right]$$

$$\sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} = \beta \left[\sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + \sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} \right]$$

d'où

$$\sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} = \frac{\beta}{1-\beta} \sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- \left(S_{i1} + S_{i2} \right) \qquad [21]$$

Le total des revenus de loyer dans l'économie est proportionnel à la masse du revenu de travail intégral (c'est-à-dire au revenu de travail que recevraient les travailleurs si leur consommation de loisir était nulle).

Il découle de [21] que le total du revenu intégral (incluant les revenus de loyer) de tous les travailleurs est égal à

$$\begin{aligned} &\sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + \sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} \\ &\qquad = \sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + \frac{\beta}{1-\beta} \sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- \left(S_{i1} + S_{i2} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + \sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} = \frac{1}{1-\beta} \sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- \left(S_{i1} + S_{i2} \right) \qquad [22]$$

Le total du revenu intégral (incluant les revenus de loyer) de tous les travailleurs est un multiple du total du revenu de travail intégral.

1.6 Équilibre sur les marchés des biens et solution complète du modèle

Nous supposons pour simplifier que les coûts de transport sont nuls, de sorte que les conditions d'équilibre sur les marchés des biens sont :

$$\sum_i \sum_k S_{ik} c_{i1(k)} = \sum_i x_{i1} \text{ et } \sum_i \sum_k S_{ik} c_{i2(k)} = \sum_i x_{i2} \tag{23}$$

Nous allons démontrer que les conditions d'équilibre des marchés des biens déterminent le prix relatif des biens π_2. La démonstration se fait en deux parties : d'abord, nous allons montrer que la dépense totale des travailleurs en biens est égale à la valeur totale des biens produits; ensuite, nous allons montrer que l'équilibre des marchés individuels est assuré grâce à l'ajustement du prix relatif π_2.

1.6.1 ÉGALITÉ DES DÉPENSES EN BIENS ET DE LA VALEUR GLOBALE DE LA PRODUCTION

À partir des équations de demande de biens [7] et [8], la dépense totale en bien *g* est donnée par

$$\sum_i \sum_k S_{ik} \pi_g c_{ig(k)} = \alpha_g \sum_i \sum_k S_{ik} \left[w_{ik} a_{-} \left(S_{i1} + S_{i2} \right) + R_{ik} \right]$$

Étant donné [22], cette équation peut s'écrire

$$\sum_i \sum_k S_{ik} \pi_g c_{ig(k)} = \alpha_g \frac{1}{1-\beta} \sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_{-} \left(S_{i1} + S_{i2} \right) \tag{24}$$

Il s'ensuit que la dépense totale en biens est égale à :

$$\sum_g \sum_i \sum_k S_{ik} \pi_g c_{ig(k)} = \left(\sum_g \alpha_g \right) \frac{1}{1-\beta} \sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_{-} \left(S_{i1} + S_{i2} \right) \tag{25}$$

Par ailleurs, étant donné [13], la valeur totale de la production de biens est égale à :

$$\sum_g \sum_i \pi_g x_{ig} = \sum_g \sum_i S_{ig} \left[(1-\gamma) w_{ig} \; a_{-} \left(S_{i1} + S_{i2} \right) - \gamma R_{ig} \right]$$

$$\sum_g \sum_i \pi_g x_{ig} = (1-\gamma) \sum_g \sum_i S_{ig} \; w_{ig} \; a_{-} \left(S_{i1} + S_{i2} \right) - \gamma \sum_g \sum_i S_{ig} R_{ig}$$

Puis, étant donné [21], on peut écrire

$$\sum_g \sum_i \pi_g x_{ig} = (1-\gamma)\sum_g \sum_i S_{ig}\, w_{ig}\, a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) - \gamma \frac{\beta}{1-\beta}\sum_i \sum_g S_{ig} w_{ig} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)$$

$$\sum_g \sum_i \pi_g x_{ig} = \left[(1-\gamma)-\gamma\frac{\beta}{1-\beta}\right]\sum_g \sum_i S_{ig}\, w_{ig}\, a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)$$

$$\sum_g \sum_i \pi_g x_{ig} = \left[\frac{1-\beta-\gamma}{1-\beta}\right]\sum_g \sum_i S_{ig}\, w_{ig}\, a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)$$

ou encore, étant donné que $\alpha_1 + \alpha_1 + \beta + \gamma = 1$,

$$\sum_g \sum_i \pi_g x_{ig} = \left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-\beta}\right]\sum_g \sum_i S_{ig}\, w_{ig}\, a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)$$

$$\sum_g \sum_i \pi_g x_{ig} = \left(\sum_g \alpha_g\right)\frac{1}{1-\beta}\sum_g \sum_i S_{ig}\, w_{ig}\, a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)$$

Le membre de droite de l'équation qui précède est égal à celui de [25]. On a donc

$$\sum_g \sum_i \pi_g x_{ig} = \sum_g \sum_i \sum_k S_{ik}\pi_g c_{ig(k)}$$

La valeur totale de la production est bel et bien égale à la dépense totale en biens.

1.6.2 ÉQUILIBRE SUR LE MARCHÉ DE CHAQUE BIEN

Les conditions [7] et [8] de l'équilibre du consommateur impliquent pour tout travailleur *i*,*k*,

$$\frac{c_{i1(k)}}{\pi_2 c_{i2(k)}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Pour l'ensemble des travailleurs, le rapport entre la demande du bien 1 et celle du bien 2 est donc proportionnel au prix relatif du bien 2, π_2. Cela est donc nécessairement vrai de la somme des demandes :

$$\frac{\sum_i \sum_k S_{ik} c_{i1(k)}}{\pi_2 \sum_i \sum_k S_{ik} c_{i2(k)}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \qquad [26]$$

Ainsi, pour que l'équilibre soit réalisé sur le marché de *chaque* bien, il suffit que

$$\frac{\sum_i x_{i1}}{\pi_2 \sum_i x_{i2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \qquad [27]$$

Nous allons développer cette condition d'équilibre pour obtenir l'équation de détermination du prix d'équilibre. Le développement se fait en trois étapes. Mais établissons d'abord le résultat suivant.

Étant donné [16], [17] et [21], on a

$$R_{ik} = \sigma_{ik}\left(\frac{\beta}{1-\beta}\sum_j \sum_g S_{jg} w_{jg} a_-\left(S_{j1}+S_{j2}\right)\right) \qquad [28]$$

Ensuite, on substitue [2] dans [28] et on trouve

$$R_{ik} = \sigma_{ik}\left(\frac{\beta}{1-\beta}\sum_g \sum_j S_{jg}\pi_g A\left(S_{jg}\right) a_+\left(S_{j1},S_{j2}\right) a_-\left(S_{j1}+S_{j2}\right)\right) \qquad [29]$$

Première étape : développons l'expression $\pi_k x_{ik}$. Étant donné [13], [2] et [29], on a

$$\pi_k x_{ik} = S_{ik}\begin{bmatrix} (1-\gamma)\pi_k A\left(S_{ik}\right) a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right) a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) \\ -\gamma\,\sigma_{ik}\left(\frac{\beta}{1-\beta}\sum_g \sum_j S_{jg}\pi_g A\left(S_{jg}\right) a_+\left(S_{j1},S_{j2}\right) a_-\left(S_{j1}+S_{j2}\right)\right)\end{bmatrix} \qquad [30]$$

Deuxième étape : développons ensuite la somme $\pi_k \sum_i x_{ik}$.

$$\pi_k \sum_i x_{ik} = \sum_i S_{ik}\begin{bmatrix} (1-\gamma)\pi_k A\left(S_{ik}\right) a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right) a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) \\ -\gamma\,\sigma_{ik}\left(\frac{\beta}{1-\beta}\sum_g \sum_j S_{jg}\pi_g A\left(S_{jg}\right) a_+\left(S_{j1},S_{j2}\right) a_-\left(S_{j1}+S_{j2}\right)\right)\end{bmatrix}$$

$$\pi_k \sum_i x_{ik} = \begin{bmatrix} (1-\gamma)\pi_k \sum_i S_{ik} A\left(S_{ik}\right) a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right) a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) \\ -\gamma \sum_i S_{ik}\sigma_{ik}\left(\frac{\beta}{1-\beta}\sum_g \sum_j S_{jg}\pi_g A\left(S_{jg}\right) a_+\left(S_{j1},S_{j2}\right) a_-\left(S_{j1}+S_{j2}\right)\right)\end{bmatrix}$$

$$\pi_k \sum_i x_{ik} = \left[\begin{array}{l} (1-\gamma)\pi_k \sum_i S_{ik} A(S_{ik})\, a_+(S_{i1}, S_{i2})\, a_-(S_{i1}+S_{i2}) \\ -\gamma \dfrac{\beta}{1-\beta} \left(\sum_i S_{ik}\sigma_{ik} \right) \left(\begin{array}{l} \sum_j S_{j1} A(S_{j1})\, a_+(S_{j1}, S_{j2})\, a_-(S_{j1}+S_{j2}) \\ + \sum_j S_{j2} \pi_2 A(S_{j2})\, a_+(S_{j1}, S_{j2})\, a_-(S_{j1}+S_{j2}) \end{array} \right) \end{array} \right] \qquad [31]$$

Troisième étape : développons enfin la condition $\dfrac{\sum_i x_{i1}}{\pi_2 \sum_i x_{i2}} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$. En substituant [31] au numérateur et au dénominateur du membre de gauche, on arrive à :

$$\pi_2 = \frac{\left[\begin{array}{l} (1-\gamma) - \gamma \dfrac{\beta}{1-\beta} \left(\sum_i S_{i1}\sigma_{i1} \right) \\ + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \gamma \dfrac{\beta}{1-\beta} \left(\sum_i S_{i2}\sigma_{i2} \right) \end{array} \right] \sum_i S_{i1} A(S_{i1})\, a_+(S_{i1}, S_{i2})\, a_-(S_{i1}+S_{i2})}{\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \left[(1-\gamma) - \gamma \dfrac{\beta}{1-\beta} \left(\sum_i S_{i2}\sigma_{i2} \right) \right] \\ + \gamma \dfrac{\beta}{1-\beta} \left(\sum_i S_{i1}\sigma_{i1} \right) \end{array} \right\} \sum_i S_{i2} A(S_{i2})\, a_+(S_{i1}, S_{i2})\, a_-(S_{i1}+S_{i2})} \qquad [32]$$

Le détail des manipulations algébriques est donné en annexe. Bien que cette expression soit encombrante, son membre de droite ne contient que des paramètres et des variables exogènes du modèle. Cela démontre que le prix relatif qui assure l'équilibre des marchés des biens peut être déterminé en fonction des seuls paramètres et variables exogènes du modèle.

1.6.3 Solution complète du modèle

Le prix relatif des biens étant déterminé, on peut résoudre le modèle facilement.

L'équation [2] permet de déterminer les salaires. Ensuite, l'équation [21] fixe le montant global des revenus de loyer et, à l'aide des paramètres de parts σ_{ik}, on calcule facilement le revenu intégral de chaque travailleur. L'équation [11] donne le prix de l'espace, les équations [7] à [9] donnent les demandes de consommation, et enfin l'équation [11] donne l'offre de travail. S'ensuivent l'emploi (équation [3]) et la production (équation [1]).

1.7 Conclusion provisoire

Le modèle qui vient d'être exposé montre qu'il est possible de concevoir un modèle d'équilibre général où les salaires sont égaux à la valeur du produit marginal et où celui-ci dépend des économies d'agglomération de localisation, $A(S_{ig})$, et des économies d'agglomération d'urbanisation (diversité), $a_+(S_{i1},S_{i2})$. Dans ce modèle, les déséconomies d'agglomération (congestion) existent également, mais elles sont supportées par le travailleur, comme dans Eeckhout (2004). On pourrait également supposer qu'elles touchent à la productivité du travail, auquel cas elles se refléteraient dans le taux de salaire.

2. MODÈLE AVEC MIGRATIONS

Si l'on introduit des migrations dans un modèle statique, on suppose implicitement que la migration est instantanée. Nous ajoutons aussi l'hypothèse que le coût de la migration est nul. Il s'ensuit qu'à l'équilibre, les travailleurs de chaque profession doivent être indifférents entre les villes de résidence. Formellement, en l'absence de coûts de migration, le niveau de bien-être atteint par un travailleur d'une profession donnée doit être égal entre les villes. Pour chaque *k*,

$$u_{i(k)}\left(c_{i1(k)}, c_{i2(k)}, h_{i(k)}, l_{ik}\right) = \left(c_{i1(k)}\right)^{\alpha_1}\left(c_{i2(k)}\right)^{\alpha_2}\left(h_{i(k)}\right)^{\beta}\left(1 - l_{ik}\right)^{\gamma} = \bar{u}_{(k)} \text{ pour toute ville } i$$

Pour simplifier le développement qui suit, nous allons remplacer la fonction d'utilité par son logarithme, ce qui ne change rien, puisque la fonction d'utilité n'est jamais définie qu'à une transformation monotone près :

$$\begin{aligned} U_{i(k)}\left(c_{i1(k)}, c_{i2(k)}, h_{i(k)}, l_{ik}\right) &= \ln u_{i(k)}\left(c_{i1(k)}, c_{i2(k)}, h_{i(k)}, l_{ik}\right) \\ &= \alpha_1 \ln\left(c_{i1(k)}\right) + \alpha_2 \ln\left(c_{i2(k)}\right) + \beta \ln\left(h_{i(k)}\right) + \gamma\left(1 - l_{ik}\right) = \bar{U}_{(k)} \end{aligned} \quad [33]$$

La condition d'équilibre migratoire s'écrit alors

$$\forall i : U_{i(k)}\left(c_{i1(k)}, c_{i2(k)}, h_{i(k)}, l_{ik}\right) = \alpha_1 \ln\left(c_{i1(k)}\right) + \alpha_2 \ln\left(c_{i2(k)}\right) + \beta \ln\left(h_{i(k)}\right) + \gamma\left(1 - l_{ik}\right) = \bar{U}_{(k)} \quad [34]$$

2.1 Fonction d'utilité indirecte

Pour expliciter les conditions d'équilibre migratoire, il faut formuler la fonction d'utilité indirecte. Pour ce faire, on substitue dans la fonction d'utilité les consommations optimales en fonction des prix, données par les conditions premières de l'équilibre du consommateur (équations [7] à [10]) :

$$\begin{aligned} U_{i(k)}\left(c_{i1(k)}, c_{i2(k)}, h_{i(k)}, l_{ik}\right) &= \alpha_1 \ln\left\{\alpha_1\left[w_{ik} a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right) + R_{ik}\right]\right\} \\ &+ \alpha_2 \ln\left\{\frac{\alpha_2}{\pi_2}\left[w_{ik} a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right) + R_{ik}\right]\right\} \\ &+ \beta \ln\left\{\frac{\beta}{p_i}\left[w_{ik} a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right) + R_{ik}\right]\right\} \\ &+ \gamma \ln\left\{\frac{\gamma}{w_{ik} a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right)}\left[w_{ik} a_{-}\left(S_{i1} + S_{i2}\right) + R_{ik}\right]\right\} \end{aligned} \quad [35]$$

$$U_{i(k)}\left(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}\right)=\alpha_1\ln\alpha_1+\alpha_1\ln\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]$$
$$+\alpha_2\ln\alpha_2-\alpha_2\ln\pi_2+\alpha_2\ln\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]$$
$$+\beta\ln\beta-\beta\ln p_i+\beta\ln\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]$$
$$+\gamma\ln\gamma-\gamma\ln w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+\gamma\ln\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]$$

$$U_{i(k)}\left(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}\right)=\alpha_1\ln\alpha_1+\alpha_2\ln\alpha_2+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma$$
$$+\left(\alpha_1+\alpha_2+\beta+\gamma\right)\ln\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]$$
$$-\alpha_2\ln\pi_2-\beta\ln p_i-\gamma\ln w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)$$

$$U_{i(k)}\left(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}\right)=\alpha_1\ln\alpha_1+\alpha_2\ln\alpha_2+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma$$
$$+\ln\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]$$
$$-\alpha_2\ln\pi_2-\beta\ln p_i-\gamma\ln w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)$$

Remplaçons p_i par son expression selon [19] :

$$U_{i(k)}\left(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}\right)=\alpha_1\ln\alpha_1+\alpha_2\ln\alpha_2+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma$$
$$+\ln\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]$$
$$-\beta\ln\frac{\beta\sum_g S_{ig}\left[w_{ig}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ig}\right]}{H_i}$$
$$-\alpha_2\ln\pi_2-\gamma\ln w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)$$

$$U_{i(k)}\left(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}\right)=\alpha_1\ln\alpha_1+\alpha_2\ln\alpha_2+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma$$
$$+\ln\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]$$
$$-\beta\ln\beta\sum_g S_{ig}\left[w_{ig}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ig}\right]+\beta\ln H_i$$
$$-\alpha_2\ln\pi_2-\gamma\ln w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)$$

Remplaçons aussi w_{ig} par son expression selon [2] :

$$U_{i(k)}\left(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}\right)=\alpha_1\ln\alpha_1+\alpha_2\ln\alpha_2+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma$$
$$+\ln\left[\pi_k A\left(S_{ik}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]$$
$$-\beta\ln\beta\sum_g S_{ig}\left[\pi_g A\left(S_{ig}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ig}\right]+\beta\ln H_i \qquad [36]$$
$$-\alpha_2\ln\pi_2-\gamma\ln\pi_k A\left(S_{ik}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)$$

Pour rendre cette équation plus maniable, définissons la fonction d'externalités

$$G_k\left(S_{i1},S_{i2}\right)=A\left(S_{ik}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) \quad [37]$$

$G_k\left(S_{i1},S_{i2}\right)$ est la résultante des économies de localisation $A\left(S_{ik}\right)$, des économies d'urbanisation $a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)$ et des déséconomies d'agglomération $a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)$.

À partir de [21], substituons [2] et [37], pour définir la fonction de rente globale

$$R(\mathbf{S})=\frac{\beta}{1-\beta}\sum_g\sum_j S_{jg}\pi_g G_k\left(S_{i1},S_{i2}\right) \quad [38]$$

Enfin, pour achever de simplifier l'écriture, à partir de [32], définissons les fonctions de prix

$$\pi_2=\Pi_2(\mathbf{S})=\frac{\begin{bmatrix}(1-\gamma)-\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\displaystyle\sum_i S_{i1}\sigma_{i1}\right)\\ +\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\displaystyle\sum_i S_{i2}\sigma_{i2}\right)\end{bmatrix}\displaystyle\sum_i S_{i1}A\left(S_{i1}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)}{\left\{\begin{matrix}\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[(1-\gamma)-\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\displaystyle\sum_i S_{i2}\sigma_{i2}\right)\right]\\ +\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\displaystyle\sum_i S_{i1}\sigma_{i1}\right)\end{matrix}\right\}\displaystyle\sum_i S_{i2}A\left(S_{i2}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)} \quad [39a]$$

et pour généraliser la notation, convenons

$$\pi_1=\Pi_1(\mathbf{S})=1 \quad [39b]$$

pour le bien 1, qui sert de numéraire.

Nous pouvons maintenant récrire [36]

$$\begin{aligned}U_{i(k)}\left(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}\right)=\;&\alpha_1\ln\alpha_1+\alpha_2\ln\alpha_2+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma\\&+\ln\left[\Pi_k(\mathbf{S})\,G_k\left(S_{i1},S_{i2}\right)+\sigma_{ik}R(\mathbf{S})\right]\\&-\beta\ln\beta\sum_g S_{ig}\left[\Pi_g(\mathbf{S})\,G_g\left(S_{i1},S_{i2}\right)+\sigma_{ig}R(\mathbf{S})\right]\\&+\beta\ln H_i-\alpha_2\ln\Pi_2(\mathbf{S})-\gamma\ln\Pi_k(\mathbf{S})G_k\left(S_{i1},S_{i2}\right)\end{aligned} \quad [40]$$

2.2 Nouvelle hypothèse sur la distribution des revenus de loyer

La façon dont a été formulé en 1.5 le mécanisme de distribution des revenus de loyer implique que, lorsqu'un travailleur change de ville, sa part des revenus de loyer devient celle des travailleurs de même type dans sa ville d'adoption. Il est quelque peu absurde de penser qu'il suffit de changer de ville pour changer de patrimoine! De plus, étant donné la condition [18], cela impliquerait que toutes les parts σ_{ik} s'ajustent.

Pour cette raison, nous allons supposer que les parts distributives des revenus de loyer sont égales pour les travailleurs d'une même profession, quelle que soit la ville qu'ils habitent :

$$\forall i : \sigma_{ik} = \bar{\sigma}_k$$

On modifie donc [40] :

$$\begin{aligned} U_{i(k)}\left(c_{i1(k)}, c_{i2(k)}, h_{i(k)}, l_{ik}\right) = {} & \alpha_1 \ln \alpha_1 + \alpha_2 \ln \alpha_2 + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma \\ & + \ln\left[\Pi_k(\mathbf{S})\, G_k\left(S_{i1}, S_{i2}\right) + \bar{\sigma}_k R(\mathbf{S})\right] \\ & - \beta \ln \beta \sum_g S_{ig}\left[\Pi_g(\mathbf{S})\, G_g\left(S_{i1}, S_{i2}\right) + \bar{\sigma}_g R(\mathbf{S})\right] \\ & + \beta \ln H_i - \alpha_2 \ln \Pi_2(\mathbf{S}) - \gamma \ln \Pi_k(\mathbf{S})\, G_k\left(S_{i1}, S_{i2}\right) \end{aligned} \qquad [41]$$

2.3 Existence, unicité et stabilité de l'équilibre migratoire

La question de l'existence d'un équilibre revient à demander dans quelles conditions, pour quelles combinaisons des paramètres et des formes fonctionnelles de [37], la condition d'équilibre [34] a une solution. La question de l'unicité est de savoir dans quelles conditions la solution, lorsqu'elle existe, est unique.

La question de la stabilité, enfin, consiste à se demander si, advenant un léger déplacement à partir d'un équilibre, les mécanismes d'ajustement tendront à ramener le système à l'équilibre. De manière plus explicite, supposons que la structure **S** soit un équilibre et supposons qu'il survienne une perturbation exogène qui remplace **S** par une nouvelle structure **S'**, proche de la première. Cette nouvelle structure ne constitue pas en général un équilibre. Dans ces conditions, les travailleurs de chaque type auront tendance à migrer vers les villes où leur niveau d'utilité est le plus élevé. Si ces migrations réduisent le niveau de bien-être dans les villes qui accueillent de nouveaux travailleurs, et l'augmentent dans les villes qui en perdent, alors l'équilibre tend à se rétablir. Dans le cas contraire, le processus migratoire accentue les écarts de bien-être et l'équilibre initial ne peut pas se réinstaurer : ou bien le système évolue vers un nouvel équilibre, stable celui-là, ou bien le système fluctue indéfiniment.

Il est facile de démontrer l'existence d'un équilibre lorsque toutes les villes ont la même superficie :

$$\forall i : H_i = \overline{H}$$

Dans ces conditions, une situation où la main-d'œuvre de chaque profession est uniformément répartie entre les villes constitue un équilibre migratoire. Car on aurait alors

$$\forall i : S_{ik} = \overline{S}_k$$

et l'équation [37] prendrait la forme

$$G_k\left(S_{i1}, S_{i2}\right) = A\left(\overline{S}_k\right) a_+\left(\overline{S}_1, \overline{S}_2\right) a_-\left(\overline{S}_1 + \overline{S}_2\right) = \overline{G}_k$$

Un examen de l'équation [41] montre que l'utilité des travailleurs de type *k* serait alors partout la même, ce qui est une condition suffisante pour un équilibre migratoire[1]. Mais, toutes les villes étant alors identiques, il n'y aurait pas d'écarts de salaire.

Qu'en est-il du cas général où les villes n'ont pas toutes la même superficie? Pour étudier plus avant les conditions d'existence, d'unicité et de stabilité de l'équilibre, il faudrait expliciter davantage la forme de

$$G_k\left(S_{i1}, S_{i2}\right) = A\left(S_{ik}\right) a_+\left(S_{i1}, S_{i2}\right) a_-\left(S_{i1} + S_{i2}\right) \quad [37]$$

Deux possibilités s'offrent alors. Une fois explicitées les fonctions d'économies et de déséconomies d'agglomération en termes généraux, on peut rechercher une solution analytique. Cela est souvent inaccessible et on doit alors recourir à la simulation numérique pour explorer le comportement du modèle, à partir d'une spécification complète des formes fonctionnelles et des valeurs des paramètres.

Nous n'entreprendrons pas cette aventure ici. Mais pour préparer le terrain, nous proposons en annexe une brève réflexion sur la forme fonctionnelle qui serait appropriée pour représenter les économies de localisation.

[1] Mais ce ne serait peut-être pas le seul équilibre : Fujita et Thisse (2001), entre autres, ont construit des modèles de systèmes urbains où, pour certaines combinaisons de valeurs des paramètres, il y a plus d'un équilibre.

Conclusion

Cette note avait pour objectif modeste de démontrer qu'il est possible de concevoir un modèle d'équilibre général où les salaires sont égaux à la valeur du produit marginal et où celui-ci dépend des économies d'agglomération de localisation, $A(S_{ig})$, et des économies d'agglomération d'urbanisation (diversité), $a_+(S_{i1},S_{i2})$. Dans ce modèle, les déséconomies d'agglomération (congestion) existent également, mais elles sont supportées par le travailleur, comme dans Eeckhout (2004). Nous avons montré dans la première partie du texte que cela est clairement possible dans un modèle sans migration.

Nous avons ensuite développé la condition de l'équilibre migratoire dans un modèle avec migrations. Avec migrations, l'existence d'une solution avec écarts de salaires n'a pas été démontrée en général. Au contraire, il a été démontré que, dans la situation particulière où toutes les villes ont la même superficie, il existe indubitablement une solution, mais dans cette solution, toutes les villes sont identiques et il n'y a pas d'écart de salaire. Mais est-ce si étonnant? En présence de migrations, la seule caractéristique qui puisse différencier les villes dans le modèle squelettique que nous avons développé est leur superficie. En supposant qu'elles ont toutes la même superficie, on élimine toute différence possible.

Pour revenir au cas plus général, la répartition de la main-d'œuvre de chaque profession entre les villes y est déterminée par la condition d'équilibre migratoire [41], où la valeur d'équilibre des variables S_{ig} est implicite. L'existence d'une solution n'y est donc pas aussi évidente que dans le modèle sans migration. Pour pouvoir statuer avec certitude, il faudrait expliciter la forme des fonctions d'externalités, ce qui n'a pas été fait ici.

Cela dit, nous avons démontré la possibilité d'un équilibre avec écarts de salaires dans un modèle sans migration, d'un dépouillement extrême. Dans un modèle qui serait plus fidèle à complexité du réel, où, en particulier, la migration ne serait ni instantanée ni sans coût, il semblerait invraisemblable que les économies d'agglomération qui influencent la productivité du travail ne se reflètent pas dans des écarts de salaire observables. Les liens empiriques que l'on peut détecter entre les taux de salaire et les variables indépendantes choisies pour représenter l'une ou l'autre forme d'économies d'agglomération peuvent donc légitimement s'interpréter comme des manifestations des effets des économies d'agglomération sur la productivité du travail.

Références

Boiteux-Orain, Céline, et Jean-Marie Huriot. « Modéliser la suburbanisation : Succès et limites de la microéconomie urbaine », *Revue d'Économie Régionale et Urbaine*, 2002(1):73-104.

Eeckhout, Jan. « Gibrat's law for (all) cities », *American Economic Review*, Déc. 2004; 94(5):1429-1451.

Fujita, Masahisa, et Jacques-François Thisse. « Agglomération et marché », *Cahiers d'Économie et Sociologie Rurales – INRA*, 2001(58-59).

Annexe 1 : Démonstration de l'équation des prix relatifs des biens [32]

Développons la condition [27] $\frac{\sum_i x_{i1}}{\pi_2 \sum_i x_{i2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. En substituant [31] au numérateur et au dénominateur du membre de gauche, on a :

$$\frac{\left[\begin{array}{l}(1-\gamma)\sum_i S_{i1}A_{i1}(S_{i1})\,a_+(S_{i1},S_{i2})\,a_-(S_{i1}+S_{i2}) \\ -\gamma\frac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i1}\sigma_{i1}\right)\left(\begin{array}{l}\sum_j S_{j1}A_{j1}(S_{j1})\,a_+(S_{j1},S_{j2})\,a_-(S_{j1}+S_{j2}) \\ +\sum_j S_{j2}\pi_2 A_{j2}(S_{j2})\,a_+(S_{j1},S_{j2})\,a_-(S_{j1}+S_{j2})\end{array}\right)\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l}(1-\gamma)\pi_2\sum_i S_{i2}A_{i2}(S_{i2})\,a_+(S_{i1},S_{i2})\,a_-(S_{i1}+S_{i2}) \\ -\gamma\frac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i2}\sigma_{i2}\right)\left(\begin{array}{l}\sum_j S_{j1}A_{j1}(S_{j1})\,a_+(S_{j1},S_{j2})\,a_-(S_{j1}+S_{j2}) \\ +\sum_j S_{j2}\pi_2 A_{j2}(S_{j2})\,a_+(S_{j1},S_{j2})\,a_-(S_{j1}+S_{j2})\end{array}\right)\end{array}\right]} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$\left[\begin{array}{l}(1-\gamma)\sum_i S_{i1}A_{i1}(S_{i1})\,a_+(S_{i1},S_{i2})\,a_-(S_{i1}+S_{i2}) \\ -\gamma\frac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i1}\sigma_{i1}\right)\left(\begin{array}{l}\sum_j S_{j1}A_{j1}(S_{j1})\,a_+(S_{j1},S_{j2})\,a_-(S_{j1}+S_{j2}) \\ +\sum_j S_{j2}\pi_2 A_{j2}(S_{j2})\,a_+(S_{j1},S_{j2})\,a_-(S_{j1}+S_{j2})\end{array}\right)\end{array}\right]$$

$$= \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[\begin{array}{l}(1-\gamma)\pi_2\sum_i S_{i2}A_{i2}(S_{i2})\,a_+(S_{i1},S_{i2})\,a_-(S_{i1}+S_{i2}) \\ -\gamma\frac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i2}\sigma_{i2}\right)\left(\begin{array}{l}\sum_j S_{j1}A_{j1}(S_{j1})\,a_+(S_{j1},S_{j2})\,a_-(S_{j1}+S_{j2}) \\ +\sum_j S_{j2}\pi_2 A_{j2}(S_{j2})\,a_+(S_{j1},S_{j2})\,a_-(S_{j1}+S_{j2})\end{array}\right)\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l}\left[(1-\gamma)-\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i1}\sigma_{i1}\right)\right]\sum_i s_{i1}A_{i1}(s_{i1})\,a_+(s_{i1},s_{i2})\,a_-(s_{i1}+s_{i2})\\ -\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i1}\sigma_{i1}\right)\left(\pi_2\sum_j s_{j2}A_{j2}(s_{j2})\,a_+(s_{j1},s_{j2})\,a_-(s_{j1}+s_{j2})\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[\begin{array}{l}\left[(1-\gamma)-\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i2}\sigma_{i2}\right)\right]\pi_2\sum_i s_{i2}A_{i2}(s_{i2})\,a_+(s_{i1},s_{i2})\,a_-(s_{i1}+s_{i2})\\ -\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i2}\sigma_{i2}\right)\left(\sum_j s_{j1}A_{j1}(s_{j1})\,a_+(s_{j1},s_{j2})\,a_-(s_{j1}+s_{j2})\right)\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l}(1-\gamma)-\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i1}\sigma_{i1}\right)\\ +\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i2}\sigma_{i2}\right)\end{array}\right]\sum_i s_{i1}A_{i1}(s_{i1})\,a_+(s_{i1},s_{i2})\,a_-(s_{i1}+s_{i2})$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[(1-\gamma)-\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i2}\sigma_{i2}\right)\right]\\ +\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i1}\sigma_{i1}\right)\end{array}\right\}\pi_2\sum_i s_{i2}A_{i2}(s_{i2})\,a_+(s_{i1},s_{i2})\,a_-(s_{i1}+s_{i2})$$

$$\pi_2=\frac{\left[\begin{array}{l}(1-\gamma)-\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i1}\sigma_{i1}\right)\\ +\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i2}\sigma_{i2}\right)\end{array}\right]\sum_i s_{i1}A_{i1}(s_{i1})\,a_+(s_{i1},s_{i2})\,a_-(s_{i1}+s_{i2})}{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[(1-\gamma)-\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i2}\sigma_{i2}\right)\right]\\ +\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i s_{i1}\sigma_{i1}\right)\end{array}\right\}\sum_i s_{i2}A_{i2}(s_{i2})\,a_+(s_{i1},s_{i2})\,a_-(s_{i1}+s_{i2})}\qquad [32]$$

Q.E.D.

Annexe 2 : Réflexion sur la forme de la fonction d'économies de localisation

Les économies de localisation sont représentées dans le modèle par la fonction $A(S_{ig})$. Quelle pourrait être la forme de cette fonction?

Les économies de localisation seraient les gains de productivité qui sont réalisés lorsque les travailleurs d'une même profession sont concentrés dans une ville donnée. Il y a alors plus de possibilités d'échanges entre eux, en particulier d'échanges d'informations au sens large (*knowledge spillovers*). On peut aussi penser que cela permet une plus grande spécialisation au sein de la profession, avec les gains d'efficacité qui peuvent en résulter.

A2.1 Une proposition inspirée du calcul des probabilités

Si l'on assimile les échanges à des rencontres entre deux personnes (ce qui est assez restrictif, il faut le reconnaître), on peut faire le raisonnement suivant. Supposons que les rencontres se produisent par hasard : dans une ville de N travailleurs, le nombre de paires de travailleurs est égal à $N(N-1)/2$.

S'il y a dans la ville n_k travailleurs de type k, la proportion de rencontres entre deux travailleurs de type k dans l'ensemble de toutes les rencontres possibles est égal à

$$\frac{n_k(n_k-1)/2}{N(N-1)/2} = \frac{n_k(n_k-1)}{N(N-1)} \approx \frac{{n_k}^2}{N^2} \text{ lorsque } n \text{ et } N \text{ sont grands.}$$

Ce rapport peut donc s'interpréter comme la probabilité qu'une rencontre fortuite entre deux travailleurs soit entre deux travailleurs de type k. Ensuite, la probabilité conditionnelle d'une rencontre entre deux travailleurs de type k étant donné que l'un d'eux est de type k est donnée par

$$\frac{\left(\frac{n_k(n_k-1)}{N(N-1)}\right)}{\left(\frac{n_k}{N}\right)} = \frac{(n_k-1)}{(N-1)} \approx \frac{n_k}{N} \text{ lorsque } n \text{ et } N \text{ sont grands.}$$

Enfin, l'espérance mathématique du nombre de rencontres entre deux travailleurs de type k est

$$n_k \frac{(n_k - 1)}{(N-1)} \approx \frac{n_k^{\,2}}{N}$$ lorsque n et N sont grands.

A2.2 Relation avec l'indice de spécificité

Dans un système urbain, l'indice de spécificité (ou coefficient de localisation) est défini comme

$$IS_{ik} = \frac{\left(\dfrac{n_{ik}}{N_i}\right)}{\left(\dfrac{\sum_j n_{jk}}{\sum_j N_j}\right)}$$, où l'indice i renvoie à la ville,

où le dénominateur est une constante entre les villes. Ainsi, à une constante près, l'espérance mathématique du nombre de rencontres entre deux travailleurs de type k, qui est la mesure proposée en A2.1, équivaut à

$$n_{ik} IS_{ik} = \frac{n_{ik}\left(\dfrac{n_{ik}}{N_i}\right)}{\left(\dfrac{\sum_j n_{jk}}{\sum_j N_j}\right)} = \frac{\left(\dfrac{n_{ik}^{\,2}}{N_i}\right)}{\left(\dfrac{\sum_j n_{jk}}{\sum_j N_j}\right)}$$

Cette mesure tient compte, à la fois de la concentration relative IS_{ik} et du nombre absolu n_{ik}, ce qui écarte le risque de distorsion que pose une concentration relative élevée dans une petite ville.

Annexe 3 : Liste des équations

$$x_{ig} = A(S_{ig})\ \ a_+(S_{i1},S_{i2})\ \ L_{ig} \qquad [1]$$

$$w_{ig} = \pi_g \frac{dx_{ig}}{dL_{ig}} = \pi_g A\left(S_{ig}\right) a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right) \qquad [2]$$

$$L_{ig} = S_{ig}\ \ a_-(S_{i1}+S_{i2})\ \ l_{ig} \qquad [3]$$

$$\pi_g\ x_{ig} = w_{ig} S_{ig}\ \ a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) l_{ig} \qquad [4]$$

$$u_{i(k)}\left(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}\right) = \left(c_{i1(k)}\right)^{\alpha_1}\left(c_{i2(k)}\right)^{\alpha_2}\left(h_{i(k)}\right)^{\beta}\left(1-l_{ik}\right)^{\gamma} \qquad [5]$$

$$c_{i1(k)} + \pi_2 c_{i2(k)} + p_i h_{i(k)} + w_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)\left(1-l_{ik}\right) \le w_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) + R_{ik} \qquad [6]$$

$$c_{i1(k)} = \alpha_1\left[w_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) + R_{ik}\right] \qquad [7]$$

$$\pi_2 c_{i2(k)} = \alpha_2\left[w_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) + R_{ik}\right] \qquad [8]$$

$$p_i h_{i(k)} = \beta\left[w_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) + R_{ik}\right] \qquad [9]$$

$$w_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)\left(1-l_{ik}\right) = \gamma\left[w_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) + R_{ik}\right] \qquad [10]$$

$$l_{ik} = 1-\gamma\,\frac{w_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) + R_{ik}}{w_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)} \qquad [11]$$

$$\frac{\partial l_{ik}}{\partial w_{ik}} = -\gamma\left[\frac{-R_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)}{\left[w_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)\right]^2}\right] = \gamma\left[\frac{R_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)}{\left[w_{ik} a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)\right]^2}\right] \ge 0 \qquad [12]$$

$$\pi_g\ x_{ig} = S_{ig}\ \left[\left(1-\gamma\right) w_{ig}\ a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right) - \gamma R_{ig}\right] \qquad [13]$$

$$\sum_k S_{ik} h_{i(k)} = H_i \qquad [14]$$

$$\sum_i p_i \sum_k S_{ik} h_{i(k)} = \sum_i p_i H_i \qquad [15]$$

$$R_{ik} = \sigma_{ik}\left(\sum_j p_j \sum_g S_{jg} h_{j(g)}\right) = \sigma_{ik}\left(\sum_j p_j H_j\right) \qquad [16]$$

$$\sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} = \sum_i p_i \sum_k S_{ik} h_{i(k)} \qquad [17]$$

$$\sum_i \sum_k S_{ik} \sigma_{ik} = 1 \qquad [18]$$

$$p_i = \frac{\beta \sum_k S_{ik} \left[w_{ik} a_- (S_{i1} + S_{i2}) + R_{ik} \right]}{H_i} \qquad [19]$$

$$h_{i(k)} = \frac{w_{ik} a_- (S_{i1} + S_{i2}) + R_{ik}}{\sum_g S_{ig} \left[w_{ig} a_- (S_{i1} + S_{i2}) + R_{ig} \right]} H_i \qquad [20]$$

$$\sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} = \frac{\beta}{1-\beta} \sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- (S_{i1} + S_{i2}) \qquad [21]$$

$$\sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- (S_{i1} + S_{i2}) + \sum_i \sum_k S_{ik} R_{ik} = \frac{1}{1-\beta} \sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- (S_{i1} + S_{i2}) \qquad [22]$$

$$\sum_i \sum_k S_{ik} c_{i1(k)} = \sum_i x_{i1} \text{ et } \sum_i \sum_k S_{ik} c_{i2(k)} = \sum_i x_{i2} \qquad [23]$$

$$\sum_i \sum_k S_{ik} \pi_g c_{ig(k)} = \alpha_g \frac{1}{1-\beta} \sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- (S_{i1} + S_{i2}) \qquad [24]$$

$$\sum_g \sum_i \sum_k S_{ik} \pi_g c_{ig(k)} = \left(\sum_g \alpha_g \right) \frac{1}{1-\beta} \sum_i \sum_k S_{ik} w_{ik} a_- (S_{i1} + S_{i2}) \qquad [25]$$

$$\frac{\sum_i \sum_k S_{ik} c_{i1(k)}}{\pi_2 \sum_i \sum_k S_{ik} c_{i2(k)}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \qquad [26]$$

$$\frac{\sum_i x_{i1}}{\pi_2 \sum_i x_{i2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \qquad [27]$$

$$R_{ik} = \sigma_{ik} \left(\frac{\beta}{1-\beta} \sum_j \sum_g S_{jg} w_{jg} a_- (S_{j1} + S_{j2}) \right) \qquad [28]$$

$$R_{ik} = \sigma_{ik}\left(\frac{\beta}{1-\beta}\sum_g\sum_j S_{jg}\pi_g A(S_{jg})\, a_+(S_{j1},S_{j2})\, a_-(S_{j1}+S_{j2})\right) \qquad [29]$$

$$\pi_k\, x_{ik} = S_{ik}\begin{bmatrix}(1-\gamma)\pi_k A(S_{ik})\, a_+(S_{i1},S_{i2})\, a_-(S_{i1}+S_{i2}) \\ -\gamma\,\sigma_{ik}\left(\frac{\beta}{1-\beta}\sum_g\sum_j S_{jg}\pi_g A(S_{jg})\, a_+(S_{j1},S_{j2})\, a_-(S_{j1}+S_{j2})\right)\end{bmatrix} \qquad [30]$$

$$\pi_k\sum_i x_{ik} = \begin{bmatrix}(1-\gamma)\pi_k\sum_i S_{ik}A(S_{ik})\, a_+(S_{i1},S_{i2})\, a_-(S_{i1}+S_{i2}) \\ -\gamma\frac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{ik}\sigma_{ik}\right)\begin{pmatrix}\sum_j S_{j1}A(S_{j1})\, a_+(S_{j1},S_{j2})\, a_-(S_{j1}+S_{j2}) \\ +\sum_j S_{j2}\pi_2 A(S_{j2})\, a_+(S_{j1},S_{j2})\, a_-(S_{j1}+S_{j2})\end{pmatrix}\end{bmatrix} \qquad [31]$$

$$\pi_2 = \frac{\begin{bmatrix}(1-\gamma)-\gamma\frac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i1}\sigma_{i1}\right) \\ +\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\gamma\frac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i2}\sigma_{i2}\right)\end{bmatrix}\sum_i S_{i1}A(S_{i1})\, a_+(S_{i1},S_{i2})\, a_-(S_{i1}+S_{i2})}{\begin{Bmatrix}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[(1-\gamma)-\gamma\frac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i2}\sigma_{i2}\right)\right] \\ +\gamma\frac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i1}\sigma_{i1}\right)\end{Bmatrix}\sum_i S_{i2}A(S_{i2})\, a_+(S_{i1},S_{i2})\, a_-(S_{i1}+S_{i2})} \qquad [32]$$

$$\begin{aligned}U_{i(k)}(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}) &= \ln u_{i(k)}(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}) \\ &= \alpha_1\ln(c_{i1(k)})+\alpha_2\ln(c_{i2(k)})+\beta\ln(h_{i(k)})+\gamma(1-l_{ik}) = \overline{U}_{(k)}\end{aligned} \qquad [33]$$

$$\forall i: U_{i(k)}(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}) = \alpha_1\ln(c_{i1(k)})+\alpha_2\ln(c_{i2(k)})+\beta\ln(h_{i(k)})+\gamma(1-l_{ik}) = \overline{U}_{(k)} \qquad [34]$$

$$
\begin{aligned}
U_{i(k)}\left(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}\right) &= \alpha_1 \ln\left\{\alpha_1\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]\right\} \\
&+\alpha_2 \ln\left\{\frac{\alpha_2}{\pi_2}\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]\right\} \\
&+\beta \ln\left\{\frac{\beta}{p_i}\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]\right\} \\
&+\gamma \ln\left\{\frac{\gamma}{w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)}\left[w_{ik}a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{i(k)}\left(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}\right) &= \alpha_1 \ln\alpha_1+\alpha_2\ln\alpha_2+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma \\
&+\ln\left[\pi_k A\left(S_{ik}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ik}\right] \\
&-\beta\ln\beta\sum_g S_{ig}\left[\pi_g A\left(S_{ig}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)+R_{ig}\right]+\beta\ln H_i \\
&-\alpha_2\ln\pi_2-\gamma\ln\pi_k A\left(S_{ik}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

$$
G_k\left(S_{i1},S_{i2}\right)=A\left(S_{ik}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)
\tag{37}
$$

$$
R(\mathbf{S})=\frac{\beta}{1-\beta}\sum_g\sum_j S_{jg}\pi_g G_k\left(S_{i1},S_{i2}\right)
\tag{38}
$$

$$
\pi_2=\Pi_2(\mathbf{S})=\frac{\left[\begin{array}{l}(1-\gamma)-\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i1}\sigma_{i1}\right)\\ +\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i2}\sigma_{i2}\right)\end{array}\right]\sum_i S_{i1}A\left(S_{i1}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)}{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[(1-\gamma)-\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i2}\sigma_{i2}\right)\right]\\ +\gamma\dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_i S_{i1}\sigma_{i1}\right)\end{array}\right\}\sum_i S_{i2}A\left(S_{i2}\right)a_+\left(S_{i1},S_{i2}\right)a_-\left(S_{i1}+S_{i2}\right)}
\tag{39a}
$$

$$
\pi_1=\Pi_1(\mathbf{S})=1
\tag{39b}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{i(k)}\left(c_{i1(k)},c_{i2(k)},h_{i(k)},l_{ik}\right) &= \alpha_1 \ln\alpha_1+\alpha_2\ln\alpha_2+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma \\
&+\ln\left[\Pi_k(\mathbf{S})\,G_k\left(S_{i1},S_{i2}\right)+\sigma_{ik}R(\mathbf{S})\right] \\
&-\beta\ln\beta\sum_g S_{ig}\left[\Pi_g(\mathbf{S})\,G_g\left(S_{i1},S_{i2}\right)+\sigma_{ig}R(\mathbf{S})\right] \\
&+\beta\ln H_i-\alpha_2\ln\Pi_2(\mathbf{S})-\gamma\ln\Pi_k(\mathbf{S})G_k\left(S_{i1},S_{i2}\right)
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{i(k)}\left(c_{i1(k)}, c_{i2(k)}, h_{i(k)}, l_{ik}\right) = {} & \alpha_1 \ln \alpha_1 + \alpha_2 \ln \alpha_2 + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma \\
& + \ln\left[\Pi_k(\mathbf{S})\, G_k\left(S_{i1}, S_{i2}\right) + \bar{\sigma}_k R(\mathbf{S})\right] \\
& - \beta \ln \beta \sum_g S_{ig}\left[\Pi_g(\mathbf{S})\, G_g\left(S_{i1}, S_{i2}\right) + \bar{\sigma}_g R(\mathbf{S})\right] \\
& + \beta \ln H_i - \alpha_2 \ln \Pi_2(\mathbf{S}) - \gamma \ln \Pi_k(\mathbf{S})\, G_k\left(S_{i1}, S_{i2}\right)
\end{aligned} \qquad [41]
$$