Université du Québec
Institut national de la recherche scientifique
Centre Eau Terre Environnement

ESTIMATION DE L'ÉQUIVALENT EN EAU DE LA NEIGE À PARTIR DE MESURES DE TEMPÉRATURE

Par

Guillaume Arbour

Mémoire présenté pour l'obtention du grade de
Maître es Sciences, M.Sc.
en sciences de l'eau

Jury d'évaluation

Examinateur externe	Florent Dominé Université Laval
Examinateur interne	Jean-Pierre Dedieu Université Grenoble Alpes
Directeur de recherche	Karem Chokmani Institut national de la recherche scientifique, Centre Eau Terre Environnement
Co-directeur de recherche	Philippe Pasquier École Polytechnique de Montréal

©Guillaume Arbour, 2017

Résumé

L'équivalent en eau de le neige ayant des répercussions impactant autant les sphères environnementale, économique et sociale, son estimation suscite toujours l'intérêt de la communauté scientifique. Cette étude a pour but de présenter une nouvelle méthode d'estimation de l'équivalent en eau de la neige afin de pallier aux désavantages des méthodes actuelles. L'équivalent en eau y est estimé par la résolution d'un problème inverse de transfert de chaleur dans la neige où le profil de densité est déterminé à partir de mesures de température. Les méthodes actuelles d'inversion appliquées au couvert de neige ne permettant pas l'obtention d'un profil de densité finement discrétisé, une nouvelle méthode de résolution du problème inverse de transfert de chaleur dans la neige est proposée. Les flux de chaleur dans la neige sont successivement estimés tout en comparant les profils de température calculés et observés au sein du couvert jusqu'à ce qu'un bon accord soit atteint entre ces derniers dans le but d'estimer les profils de conductivité thermique et de densité. Cette approche rend possible l'obtention d'un profil de densité finement discrétisé, permettant une estimation précise de l'équivalent en eau de la neige. Un cas synthétique a été construit afin de démontrer l'efficacité et la robustesse de la méthode. Il est démontré que les profils de conductivité thermique et de densité de la neige peuvent être récupérés à partir de mesures de température par l'approche proposée. La précision des paramètres estimés dépend par contre fortement de la précision des mesures de température. De plus, la connaissance du profil de température et des caractéristiques physiques de la neige précédemment estimées permet la détermination du flux de chaleur total aux frontières du couvert de neige, fournissant ainsi de l'information particulièrement utile pour l'étude des échanges énergétiques entre le sol, la neige et l'atmosphère.

Mots-clés Équivalent en eau de la neige, Température de la neige, Problème inverse de transfert de chaleur, Densité de la neige, Conductivité thermique de la neige, Inversion en régime transitoire

Abstract

Impacting environmental, economic and social spheres, the estimation of the snow water equivalent still preoccupies the scientific community. The objective here is to propose a new method to estimate the snow water equivalent as an alternative to the current methods. The method estimates the snow water equivalent by solving an inverse heat transfer problem in the snow cover where the density profile is retrieved from temperature measurements. Current inversion methods applied to the snow cover don't allow the recovery of a fine discretized density profile. Therefore, a new method to solve the heat transfer inverse problem in the snow cover is proposed. The approach successively estimates the heat flux in the snowpack while iteratively comparing computed and observed temperatures within the snow cover until a good agreement is reached in order to estimate the thermal conductivity and density profiles. A finely discretized density profile can be retrieved, thus allowing a precise estimation of the snow water equivalent. A synthetic case is built to demonstrate the method's efficiency and robustness. It is shown that the snow thermal conductivity and density profiles can be retrieved from temperature measurements using the proposed approach. The accuracy of the retrieved parameters will depend strongly on the temperature measurements' accuracy. Furthermore, the temperature measurements paired with the retrieved parameters allow the estimation of the total heat flux at the snow cover's boundaries, providing useful information for energy balance investigation between soil, snow and atmosphere.

Keywords Snow water equivalent, Snow temperature, Heat transfer inverse problem, Snow density, Snow thermal conductivity, Transient inversion

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Première partie

Synthèse

Chapitre 1

Introduction

1.1 Mise en contexte

Le couvert nival joue un rôle primordial en ce qui concerne les échanges énergétiques entre la surface terrestre et l'atmosphère, dans le contrôle du climat et dans le cycle de l'eau (Takala *et al.* (2011)). Il est essentiel dans le cadre de l'étude des changements climatiques de suivre l'évolution du manteau neigeux, celui-ci permettant de réguler la température de la surface terrestre. En revanche, une augmentation de la température moyenne de certaines régions tend à réduire la fraction de territoires enneigés. Le sol sous-jacent possédant un coefficient de réflexion (albédo) plus faible que celui de la neige, il s'en suit une plus grande absorption d'énergie radiative venant renforcer l'augmentation des températures dans une boucle de rétroaction positive (Cess *et al.* (1991); Curry *et al.* (1995)).

L'eau de fonte joue un rôle majeur dans le bilan hydrique de certaines régions caractérisées par un couvert de neige saisonnier. Dans l'ouest des États-Unis, jusqu'à 75 % de l'approvisionnement en eau provient de l'eau de fonte (Dettinger (2005)). En Alberta, dans la région de Peace River, il a été observé que 96 % de l'écoulement annuel provient de la fonte des neiges (Hayhoe *et al.* (1993)). La neige a donc nécessairement des répercussions outrepassant le domaine environnemental, impactant autant les sphères sociales qu'économiques. L'apport de l'eau de fonte a une valeur économique considérable si on pense, par exemple, à la production d'hydroélectricité qui dépend fortement du bilan hydrique sur le plan régional (Koch *et al.* (2011)). Plus de 99 % de la production d'électricité d'Hydro-Québec en 2016 était d'origine hydraulique, selon l'information fournie par la société d'état (Hydro-Québec (2016)). La précision de l'estimation des quantités d'eau sous forme solide éventuellement disponibles au remplissage des réservoirs hydroélectriques se situe entre 30 et 50 % (Sommer & Fiel (2009)). Il a été observé dans le cas de La Grande Rivière au Québec qu'une amélioration de 10 % sur la précision de l'évaluation des quantités de neige sur son bassin versant correspondrait à un rendement accru de 2.2 TWh (Sommer & Fiel (2009)). Le tarif domestique pour la clientèle résidentielle (Tarif D) d'Hydro-Québec étant actuellement de 5.82 ¢/kWh (Hydro-Québec (2017)), une augmentation de 2.2 TWh rapporterait à la société d'état plus de 128 millions de dollars, et ce seulement pour les installations hydroélectriques de La Grande Rivière. De plus, l'agriculture, l'approvisionnement en eau potable et même certains secteurs touristiques dépendent aussi de la variabilité saisonnière du couvert de neige (Male & Granger (1981); Laternser & Schneebeli (2003); Rittger *et al.* (2016); Bavera *et al.* (2014)).

Donc, que ce soit pour servir les sphères environnementale, économique ou sociale, les prévisions hydrologiques, météorologiques ou climatiques (Essery *et al.* (2013)) dépendent toutes d'un suivi adéquat du couvert nival dans le temps et dans l'espace, et particulièrement du suivi de l'Équivalent en Eau de la Neige (*ÉEN*). L'*ÉEN* représente la hauteur d'eau liquide qui résulterait de la fonte instantanée du couvert de neige (Bavera *et al.* (2014); Egli *et al.* (2009)). Cette quantité est essentielle à l'évaluation de la disponibilité de la ressource en eau, à la détermination de la distribution et de l'évolution spatio-temporelle du manteau neigeux et à l'estimation de l'écoulement de l'eau de fonte (Bavera *et al.* (2014)). L'*ÉEN* d'une couche de neige homogène se décrit mathématiquement comme le produit de son épaisseur et de sa densité relative par rapport à l'eau. Étant donné qu'un couvert de neige est habituellement formé de plusieurs couches de neiges d'épaisseurs et de densités différentes, l'*ÉEN* s'exprime comme l'intégrale du profil de densité sur la totalité du couvert.

1.2 Problématique

Bien que le concept d'*ÉEN* semble à première vue assez simple, son estimation peut s'avérer complexe dépendamment de la précision et de la résolution spatiale et temporelle requise. Une panoplie de méthodes et de techniques ont été développées dans le but d'estimer l'*ÉEN*. On peut regrouper celles-ci en 3 catégories distinctes : les mesures ponctuelles sur le terrain, les estimations par simulation numérique et les estimations par télédétection. Chaque type de méthode présente ses avantages et ses inconvénients et le choix d'une méthode particulière dépend de l'application.

Il est possible de mesurer l'*ÉEN* ponctuellement sur le terrain par diverses méthodes. Parmi les techniques les plus couramment utilisées, on compte les mesures par carottage ainsi que les mesures à l'aide de coussin ou de balance à neige (*snowpillow/snow scales*), de jauge de précipitation ou encore d'instruments plus sophistiqués tels que le CS725 de Campbell Scientific. Le carottage est une méthode assez fiable lorsque réalisé sur un couvert de neige sec. Lorsque le couvert est humide ou que celui-ci contient des couches de glace résultant d'épisodes de gel/dégel ou d'infiltration de précipitations liquides, il devient difficile de mesurer l'*ÉEN* par carottage. En plus d'être une méthode destructive, d'être sujette à l'erreur humaine et de ne pas permettre d'effectuer plus d'une mesure au même endroit, cette méthode est coûteuse en temps et en main-d'oeuvre, surtout lorsqu'effectuée en milieu nordique éloigné (Wright (2013)). Les coussins et balances à neige sont quant à eux des instruments installés directement au sol qui estiment l'*ÉEN* en mesurant la pression exercée par le couvert de neige sur l'instrument. Ce type d'installation permet l'acquisition de données en continu, est non-destructive et donne de bons résultats pour un couvert de neige stratifié par des épisodes de gel/dégel (Wright (2013)) contrairement au carottage. Par contre, ces installations installées entre la neige et le sol viennent perturber le régime thermique du milieu ainsi que l'écoulement de l'eau infiltrée. De plus, des lentilles de glace peuvent se former et modifier la distribution du poids exercé sur l'instrument, empreignant les mesures d'erreur (Wright (2013)). L'implémentation de coussin ou de balance à neige en région éloignée peut s'avérer compliqué et coûteux. Une autre manière d'estimer l'*ÉEN* est par le biais de jauges de précipitation, nécessitant par contre d'être en mesure de distinguer les précipitations solides et liquides. La présence même de l'instrumentation cause des problèmes de sous-captation qui nécessite une correction des données collectées en fonction des conditions météorologiques (Devine & Mekis (2008)). De plus, cette méthode ne permet pas d'obtenir l'*ÉEN* maximum avant la période de fonte, ni son évolution durant cette période. La maintenance de ces appareils peut s'avérer compliquée et onéreuse en milieu éloigné. D'autres instruments plus sophistiqués permettent l'estimation de l'*ÉEN*. Le CS725 développé par Hydro-Québec en collaboration avec Campbell Scientific estime l'*ÉEN* en mesurant l'absorption par le couvert de neige des rayons gamma émis naturellement par la terre (Wright (2013)). Cette méthode permet des mesures en continu, est non-intrusive et demande peu de maintenance. Cet appareil est par contre particulièrement onéreux et rend donc difficile son déploiement à grande échelle.

Il existe un grand nombre de modèles physiques tels que Crocus (Brun *et al.* (1989); Vionnet *et al.* (2012)) ou SNTHERM (Jordan (1991)) pour ne nommer qu'eux, qui permettent la simulation des processus physiques au sein du couvert de neige. Bien que les stratégies utilisées par les différents modèles puissent différées, la logique derrière ces modèles est sensiblement la même. Ces modèles requièrent une multitude de données (météorologiques, topographiques) en entrée pour modéliser l'évolution spatio-temporelle du couvert de neige. L'évolution des caractéristiques physiques du manteau neigeux est simulée afin d'effectuer des bilans d'énergie et de masse. Le profil de température au sein du couvert peut ainsi être obtenu et des propriétés telles que l'*ÉEN* peuvent être extraites. La précision de l'*ÉEN* obtenu par ces modèles physiques dépend grandement de la qualité des données en entrée (Mote *et al.* (2003)). L'application de ces modèles est complexe, requiert de grands jeux de données de qualité et nécessite des efforts de calcul considérables (Bavera *et al.* (2014)).

Plusieurs méthodes d'estimation de l'*ÉEN* par télédétection existent et ce sont les données de télédétection acquises dans le domaine des micro-ondes (actives ou passives) qui sont le plus utilisées (Bernier *et al.* (1999); Vachon (2009); Corbane *et al.* (2005)). Les méthodes utilisant les micro-ondes passives se servent de la température de brillance afin d'estimer l'*ÉEN* (Vachon (2009); Roy *et al.* (2004)). Les méthodes basées sur les micro-ondes actives exploitent quant à elles le lien existant entre la rétrodiffusion du signal radar et l'*ÉEN* (Corbane *et al.* (2005)). Les algorithmes permettant d'estimer l'*ÉEN* par télédétection sont particulièrement bien adaptés pour cartographier l'*ÉEN* sur de grands territoires, mais ils ont tendance à moins bien performer lorsque de l'eau liquide ou des couches de glace sont présentes au sein du couvert de neige (Mote *et al.* (2003)).

Bien que ces dernières lignes ne présentent qu'un bref survol des différentes méthodes d'estimation de l'*ÉEN*, on se rend bien compte que chacune d'entre elles présente ses avantages et ses inconvénients et qu'il n'existe pas de méthode unique et idéale (Wright (2013)). La plupart d'entre elles sont soit très onéreuses, très complexes ou encore demandent un suivi continuel sur le terrain qui n'est souvent pas réalisable et/ou souhaitable en milieux nordiques éloignés.

1.3 Objectifs et hypothèses

L'importance que revêt l'estimation de l'*ÉEN* justifie bien l'effort de la communauté scientifique à développer de nouvelles méthodes. Pour pallier aux désavantages des méthodes actuelles, il serait particulièrement intéressant de développer une nouvelle approche qui soit à la fois simple, peu dispendieuse, non-destructive, facilement implémentable en milieux nordiques éloignés, demandant peu de maintenance et permettant une estimation précise peu importe l'état du couvert de neige (fortement stratifié ou pas).

En partant de la définition même de l'*ÉEN*, on voit que cette quantité dépend exclusivement du profil de densité au sein du couvert de neige. Les transferts de chaleur et l'évolution du profil de température dans la neige sont gouvernés par les caractéristiques physiques du couvert, soit sa densité, sa conductivité thermique et sa chaleur spécifique. Connaissant les conditions initiales et aux frontières de la neige, ses caractéristiques physiques ainsi que les termes sources émettant ou absorbant de l'énergie au sein du couvert, il est possible de modéliser le profil de température par le biais de l'équation de la chaleur (voir équation 1.1 de l'article). C'est exactement l'approche préconisée par les modèles physiques tels que Crocus ou SNTHERM (Brun *et al.* (1989); Vionnet *et al.* (2012); Jordan (1991)). À l'inverse, le profil de température au sein du couvert nival contient de l'information sur ses caractéristiques physiques telles que son profil de densité et ultimement, son équivalent en eau.

L'objectif de la présente étude est donc de développer une approche d'estimation de l'*ÉEN* à partir du profil de température. La mesure du profil de température dans la neige étant relativement simple, peu coûteuse, facilement réalisable et peu destructive pour le milieu, une méthode permettant d'extraire l'*ÉEN* à partir de mesures de température fournirait une alternative innovante aux méthodes actuelles.

En termes plus techniques, la modélisation du profil de température par la résolution de l'équation de la chaleur (en connaissant préalablement les conditions initiales et frontières ainsi que les termes sources) passe par la résolution de ce que l'on appelle un *problème direct*. Inversement, l'estimation des caractéristiques physiques de la neige par le biais du profil de température passe par la résolution d'un *problème inverse*. Les particularités des problèmes directs et inverses seront présentées à la prochaine section, mais pour l'instant il est important de mentionner que les problèmes d'inversion sont assez complexes à résoudre. L'extraction de l'*ÉEN* par le biais du profil de température doit donc passer par le développement d'une stratégie de résolution du problème inverse. Dans notre cas, tel que présenté ultérieurement, la résolution du problème inverse nécessitera la résolution successive du problème direct de transfert de chaleur.

En résumé, cette étude a pour objectif de développer une méthode d'estimation de l'*ÉEN* à partir du profil de température au sein du couvert de neige. Trois sous-objectifs en découlent :

1. Développer un outil de résolution du problème direct de transfert de chaleur dans la neige afin de modéliser l'évolution du profil de température.
2. Développer un algorithme de résolution du problème inverse dans la neige afin d'extraire le profil de densité à partir du profil de température. Le profil de densité extrait permettra d'obtenir l'*ÉEN*.
3. Il est important de mentionner que la présente étude se concentre sur le développement d'un algorithme d'inversion et sur la vérification de son applicabilité à l'aide de données synthétiques. Un jeu de données synthétiques simulant un couvert de neige saisonnier doit donc être mis sur pied afin de tester l'algorithme développé.

Ce mémoire est divisé en deux parties distinctes : l'article (présenté en deuxième partie) qui est l'élément central du mémoire et la présente synthèse qui situe l'article dans son contexte. Afin d'éviter la redondance, la partie synthèse renvoie souvent aux équations, figures ou tableaux de l'article. Il est préférable de lire d'abord l'article en deuxième partie et de poursuivre avec la partie synthèse.

1.4 Cadre théorique

1.4.1 Physique de la neige

Le manteau neigeux est un médium très complexe à étudier et à modéliser puisque ses caractéristiques physiques (densité, conductivité thermique, chaleur spécifique) sont en continuelle évolution en réponse à des stimuli externes et internes, fonction des conditions météorologiques, climatiques et géologiques régnant à une localisation et un temps donnés. Par stimuli externes on sous-entend tout processus d'échange énergétique entre le manteau neigeux et son environnement extérieur, soit l'atmosphère ou le sol sous-jacent. Par stimuli internes on sous-entend toute création ou absorption d'énergie en sein même du couvert de neige.

Il existe trois modes de propagation d'énergie thermique au sein du couvert de neige : par conduction, par convection et par radiation (Incropera *et al.* (2011)).

Conduction On parle de transfert de chaleur par conduction lorsqu'un gradient de température existe au sein d'un certain matériau. En régime permanent, le flux de chaleur transféré par conduction (q_{cond}) dépendra exclusivement du gradient de température et de la capacité du matériau à transférer la chaleur (*i.e.* sa conductivité thermique k). Dans le cas particulier d'un couvert de neige, des transferts conductifs seront observables au sein du couvert ainsi qu'aux frontières (interfaces sol/neige et neige/air).

Convection Les flux de chaleur convectifs sont des transferts d'énergie ou de masse entre la surface du couvert de neige et l'atmosphère dus aux mouvements convectifs de l'air. On distingue deux types de flux de chaleur convectifs : les flux de chaleur latente (q_{lat}) et sensible (q_{sens}).

Le flux de chaleur latente est l'énergie échangée par changement de phase entre l'atmosphère et le couvert de neige lorsque celui-ci est soumis à des mouvements convectifs. Le flux de chaleur latente est proportionnel à la vitesse du vent ainsi qu'au gradient d'humidité entre la surface et l'atmosphère qui indiquera la direction du transfert d'énergie et en donnera l'importance.

Le flux de chaleur sensible quant à lui représente la quantité de chaleur échangée par convection entre la surface de la neige et l'air lorsque ceux-ci possèdent des températures différentes, sans qu'il n'y ait de changement de phase. Le flux de chaleur sensible n'entraîne qu'une modification de la température et aucun transfert de masse n'y est associé contrairement au flux de chaleur latente.

Radiation L'énergie transférée par radiation au couvert de neige est généralement subdivisée en deux catégories : les flux radiatifs de courte longueur d'onde (q_{sw}) et de longue longueur d'onde (q_{lw}).

Le rayonnement de courte longueur d'onde incident au couvert de neige provient de la portion visible du spectre de la lumière émise par le soleil. Un photon dans cette gamme d'énergie interagit fortement avec la neige. Lorsqu'incident au couvert de neige, ce rayonnement est en partie réfléchi et en partie transmis au sein du couvert. La partie transmise y est alors rapidement absorbée et atténuée en accord avec la loi de Beer-Lambert (Lavoie (2004)).

Le rayonnement de longue longueur d'onde se situe dans la portion infrarouge du spectre électromagnétique. Tout médium possédant une température non-nulle ($T > 0$ K) émet de la radiation en accord avec la loi de *Stefan Boltzmann*. L'atmosphère ayant une température influencée par une multitude de facteurs (rayonnement solaire, conditions atmosphériques, effet de serre) émettra un rayonnement de longue longueur d'onde dans toutes les directions. Le couvert nival recevra une partie de ce rayonnement thermique atmosphérique et sera lui aussi émetteur de radiation puisqu'il possède une certaine température. L'échange radiatif de longue longueur d'onde est un processus de surface, il est donc strictement confiné à la surface du manteau neigeux (Brandt & Warren (1993)).

Il y aura aussi des transferts d'énergie par conduction et convection en surface lors de précipitations liquides ou solides. La neige étant un matériau poreux, les précipitations liquides pourront s'infiltrer dans le couvert de neige et échanger de l'énergie par conduction, convection et changement de phase si cette eau gèle. De plus, tout changement de phase au sein du manteau neigeux absorbera ou cèdera de l'énergie. Plus précisément, tout processus de sublimation, de fusion (fonte) ou de vaporisation soutirent de l'énergie au milieu puisque ces changements d'états requièrent un apport énergétique. Inversement, toute solidification, condensation solide ou condensation liquide fourniront de l'énergie au milieu environnant puisque ces processus requièrent qu'on leur soutire de l'énergie. La figure 1.1 illustre les différents types d'échanges énergétiques entre la neige et son environnement extérieur. En réponse aux différents stimuli fournissant ou soutirant de l'énergie au couvert, un profil de température se développera en fonction des caractéristiques physiques de la neige.

La densité, la conductivité thermique et la chaleur spécifique qui gouvernent les transferts de chaleurs dans la neige sont en constante évolution et dépendent d'une multitude de facteurs.

Plusieurs processus sont impliqués dans l'évolution continuelle du profil de densité. Tout d'abord, il y aura compaction d'une couche de neige sous le poids des couches supérieures (Ancey (1998)).

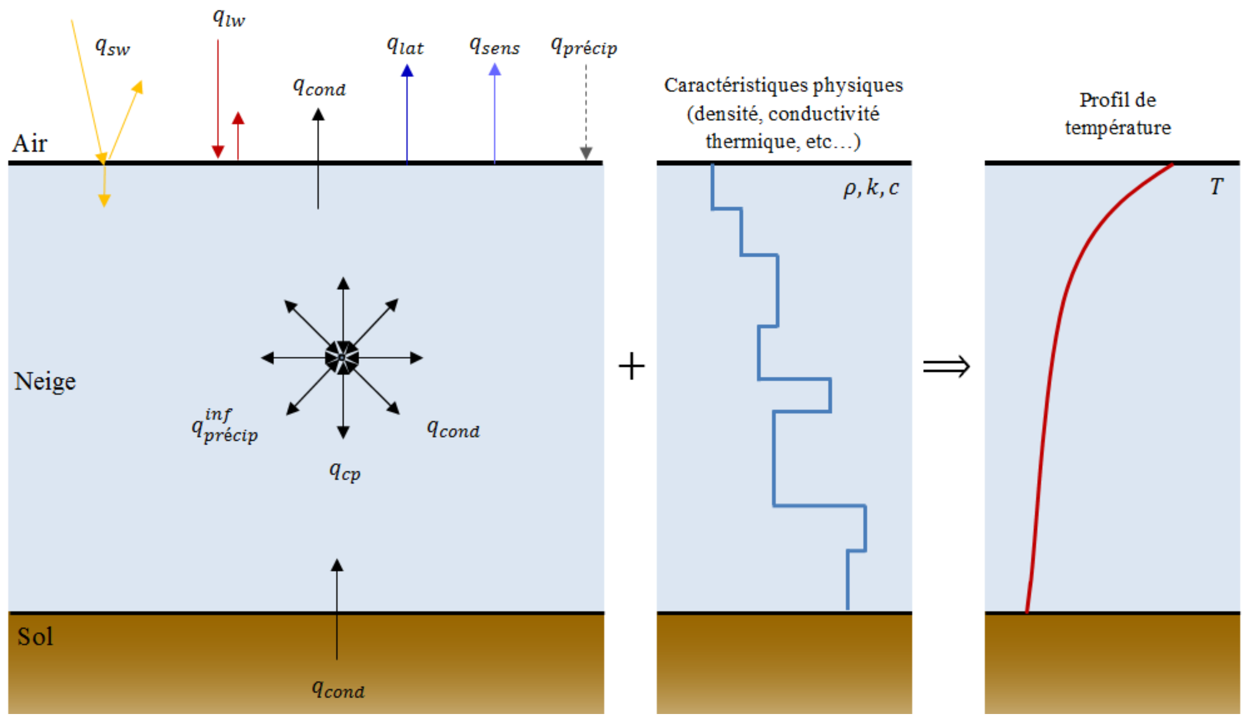


Figure 1.1 – Schéma des échanges énergétiques impliqués. q_{sw} **est le flux de chaleur radiatif de courte longueur d'onde,** q_{lw} **est le flux de chaleur radiatif de longue longueur d'onde,** q_{cond} **est le flux de chaleur par conduction,** q_{lat} **est le flux de chaleur latente,** q_{sens} **est le flux de chaleur sensible,** $q_{précip}$ **est le flux de chaleur transféré à la surface par les précipitations liquides ou solides,** $q_{précip}^{inf}$ **est le flux de chaleur transféré au couvert de neige lors de l'infiltration des précipitations liquides et** q_{cp} **est un terme de création ou d'absorption d'énergie au sein du couvert de neige par changement de phase.**

La densité évoluera aussi en fonction des changements métamorphiques de la neige. Il existe trois types de métamorphisme : le métamorphisme destructif, le métamorphisme constructif et le métamorphisme de fonte. Le métamorphisme destructif est un processus isotherme où les molécules d'eau se déplacent d'un cristal de neige à l'autre dans le but de minimiser l'énergie libre de surface du cristal (Anderson (1976)). Lors de cette transformation, la taille des cristaux de neige aura tendance à diminuer et leur forme à s'arrondir, provoquant ainsi une augmentation de la densité. Le métamorphisme constructif quant à lui est un processus de transfert de vapeur d'eau au sein du couvert de neige sous l'effet d'un gradient de température. Un déséquilibre local des pressions de vapeur soutirera de la masse d'un cristal plus chaud par sublimation et déposera cette vapeur sur un autre cristal plus froid par condensation (Ancey (1998)). Cette transformation provoquera la formation de cristaux facettés qui se compacteront difficilement, entraînant ainsi de faibles taux de densification (Bormann *et al.* (2013)). Le métamorphisme de fonte est le processus de transformation de la structure de la neige provoquée par des évènements de gel/dégel (Anderson (1976)). La fonte de la neige réduira la hauteur du couvert et l'eau liquide ainsi formée pourra soit être évacuée vers le sol ou retenue dans le couvert. Le regel de cette eau causera une augmentation de la densité. En plus des processus de compaction et de métamorphisme, l'érosion causée par le vent peut aussi provoquer des changements de densité (Bormann *et al.* (2013)).

La conductivité thermique de la neige dépend d'une multitude de facteurs : la densité de la neige, la répartition et la quantité d'eau contenue sous ses trois phases, la microstructure de la neige, la distribution des cristaux de neige, la température (Fukusako (1990); Adams & Sato (1993); Yen (1981); Anderson (1976); Lachance (2014)). Puisque la densité joue un rôle dominant dans le contrôle de la conductivité thermique de plusieurs types de neige (Aggarwal *et al.* (2009)), il est fréquent de paramétrer la conductivité thermique en fonction de la densité. Plusieurs paramétrisations ont été développées reliant ces deux paramètres (voir Fukusako (1990)), mais une des plus fréquemment utlisées et acceptées par la communauté scientifique est la paramétrisation de Yen (Yen (1981)) présentée à l'équation 1.3 de l'article et illustrée à la figure 1.2.

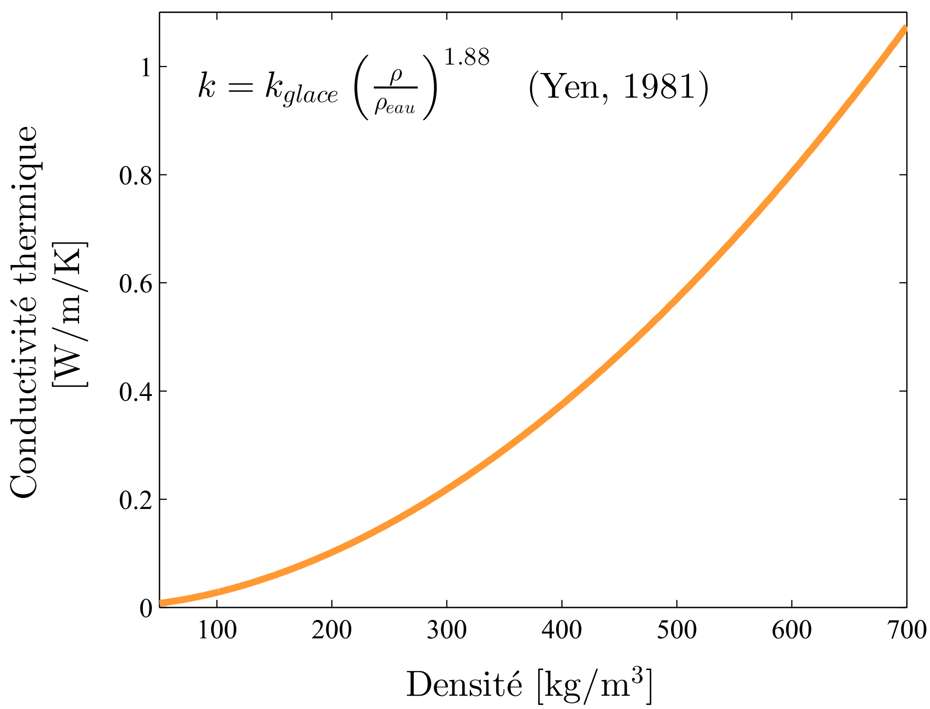


Figure 1.2 – Paramétrisation de Yen reliant la conductivité thermique et la densité de la neige

La chaleur spécifique, représentant la capacité d'un matériau à accumuler de l'énergie thermique, varie quant à elle linéairement en fonction de la température de la neige et se situe autour de 2000

J/kg/K pour les températures généralement rencontrées au sein des couverts de neige saisonniers (Fukusako (1990)).

1.4.2 Problèmes directs et inverses

La résolution d'un problème direct consiste à calculer la réponse (d) d'un système (p) soumis à des sollicitations (X) par le biais d'un modèle (G) décrivant mathématiquement le problème étudié (Bonnet (2008)). On peut écrire :

$$d = G(X, p) \tag{1.1}$$

où la réponse peut être extraite explicitement à partir du modèle physique. Dans certains cas par contre, la réponse est une fonction implicite des sollicitations et du système, nécessitant la résolution de plusieurs équations pour résoudre le problème direct (Sun & Sun (2015)). La figure 1.3 schématise de façon simple la résolution d'un problème direct. Dans notre cas, le système p est représenté par le couvert de neige qui possède des caractéristiques physiques propres, et les sollicitations X proviennent des échanges énergétiques aux frontières et de l'absorption (ou dégagement) d'énergie au sein du couvert (termes sources). Le profil de température développé dans la neige sera la réponse d du couvert neige aux différents stimuli.

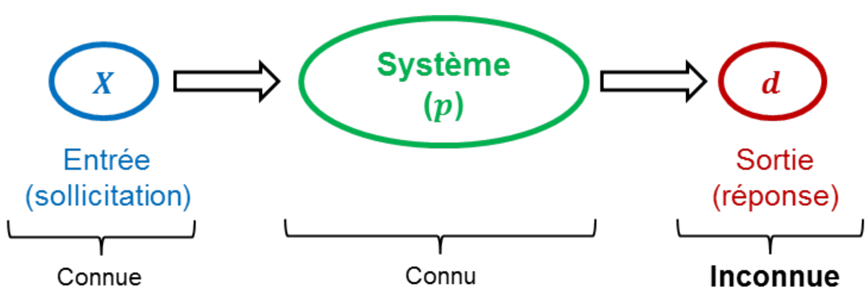


Figure 1.3 – Schématisation du problème direct (image inspirée de Bonnet (2008))

On dit que le problème direct est *bien posé*, ce qui veut dire que le problème possède une solution, que celle-ci est unique et qu'elle est stable par rapport à de petites perturbations (erreur sur les données, sur la discrétisation, etc...) (Bonnet (2008); Sun & Sun (2015)).

Le problème inverse quant à lui consiste à retrouver de l'information sur le système p en disposant de l'information sur les sollicitations et sur la réponse du système à ces sollicitations (voir figure 1.4).

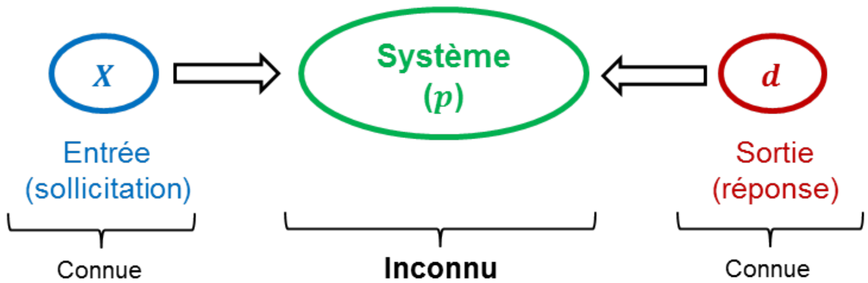


Figure 1.4 – Schématisation du problème inverse (image inspirée de Bonnet (2008))

Les problèmes inverses sont par contre des problèmes *mal posés*. En raison d'erreurs ou d'incertitudes expérimentales, il est parfois impossible de trouver un système permettant d'obtenir les sorties à partir des entrées. Inversement, il est aussi possible qu'une multitude de solutions existe qui permettent de lier la réponse d'un système à ses sollicitations. De plus, ces problèmes sont généralement très sensibles à des perturbations sur les données (Bonnet (2008)). Il existe une multitude de sources d'erreurs rendant la résolution des problèmes inverses complexe. Les données expérimentales sont empreintes d'erreurs et elles sont collectées en nombre fini. L'utilisation de ces données dans des modèles mathématiques nécessitera parfois une altération des données par interpolation afin de discrétiser un modèle initialement continu. De plus, le modèle utilisé étant une simplification d'une réalité physique, le choix d'un modèle est en soi une source d'incertitude à considérer (Bonnet (2008); Sun & Sun (2015)).

Il existe plusieurs types de problèmes inverses et de méthodes de résolution qui dépassent l'objectif du présent mémoire. Pour en connaître davantage sur les problèmes d'inversion, les ouvrages de Bonnet (2008), Sun & Sun (2015) et Tarantola (2005) traitent très bien du sujet.

1.5 Choix d'une méthode d'inversion

Tel que mentionné dans l'article présenté à la deuxième partie de ce mémoire, les problèmes inverses de transfert de chaleur ont certes été étudiés par la communauté scientifique, mais peu d'attention a été portée aux problèmes d'inversion du profil de température dans la neige. Sans reprendre la présentation des méthodes développées abordée dans l'article, il est important de mentionner qu'aucune méthode actuelle ne permet de retrouver un profil de densité finement discrétisé rendant possible l'estimation précise de l'*ÉEN* à partir de mesures de température.

L'utilisation d'une nouvelle méthode d'inversion du profil de température dans la neige est donc requise pour satisfaire les objectifs de la présente étude. Étant donné que l'équation de la chaleur régissant les transferts de chaleur dans la neige est une équation de conservation, une méthode d'inversion appliquée dans un autre domaine que les transferts de chaleur et qui implique des équations de conservation (de l'énergie, de la masse, etc...) peut très bien être utilisée dans le présent contexte. En hydrogéologie, une approche par estimation successive des flux permettant de retrouver la conductivité hydraulique des sols à partir de mesures piézométriques a été développée par Pasquier (2005). L'équation modélisant l'écoulement de l'eau souterraine ayant la même forme conservative (conservation de la masse) que l'équation régissant les transferts de chaleur (conservation de l'énergie), l'approche par estimation successive des flux a toutes les chances d'être applicable aux transferts de chaleur. L'équation de l'écoulement de l'eau souterraine s'écrit de façon générale (Pasquier & Marcotte (2006)) :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(K \cdot \vec{\nabla} h \right) + Q_w = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad , \quad (x, y, z) \in \Omega_w \quad , \quad t \in [t_0, t_f] \tag{1.2}$$

où K est la conductivité hydraulique de l'aquifère, h est la charge hydraulique, Q_w est un terme source, S_s est l'emmagasinement spécifique, t est le temps compris entre les temps initial et final t_0 et t_f et Ω_w est le domaine d'écoulement de l'aquifère. On voit très bien la similarité entre l'équation 1.2 et l'équation 1.1 présentée dans l'article, où une analogie directe peut être établie entre température et charge hydraulique, entre conductivité thermique et conductivité hydraulique, entre chaleur spécifique volumétrique (ρc) et emmagasinement spécifique et entre les termes sources. L'application de l'approche par estimation successive des flux serait donc tout à fait transposable au domaine des transferts de chaleur, justifiant ainsi le choix de cette méthode pour la résolution du problème d'inversion du profil de température dans la neige.

Chapitre 2

Méthodologie

2.1 Estimation successive des flux de chaleur

Tel que mentionné précédemment, la méthode sélectionnée pour résoudre le problème inverse de transfert de chaleur dans la neige, basée sur une estimation successive des flux de chaleur, a été initialement développée pour résoudre un problème d'inversion en hydrogéologie. Sans reprendre la démonstration de la méthode présentée dans l'article, il est important de mentionner que cette approche corrige itérativement la conductivité thermique de la neige jusqu'à ce qu'il soit possible de retrouver des profils de conductivité thermique et de densité qui permettent de recréer le profil de température observé dans la neige.

L'idée générale de la méthode est de partir avec une estimation initiale du profil de conductivité thermique, que l'on nommera germe initial. Le profil de densité est obtenu à partir du profil de conductivité thermique par le biais de la paramétrisation de Yen (équation 1.3 de l'article). L'équation de la chaleur (problème direct) est donc résolue avec ces germes initiaux. Le profil de température obtenu ne concordera probablement pas avec le profil de température réel mesuré dans la neige puisque les germes initiaux de conductivité thermique et de densité utilisés pour la résolution du problème direct ont peu de chance de représenter exactement la réalité. La conductivité thermique est alors corrigée en se basant sur l'accord des profils de gradient de température estimés et réels. L'équation de la chaleur sera alors de nouveau résolue avec les valeurs de conductivité thermique et de densité corrigées. Ce processus est répété itérativement, en corrigeant la conductivité thermique et la densité jusqu'à ce que les profils de température estimés et réels concordent. Le profil de densité ainsi retrouvé permet d'estimer l'équivalent en eau de la neige.

Ainsi, la résolution du problème inverse passe par la résolution successive de plusieurs problèmes directs. La première étape est donc de développer un outil de résolution du problème direct de transfert de chaleur. Pour se faire, un script de programmation Matlab a été conçu pour résoudre l'équation de la chaleur en régime transitoire. La résolution passe par le calcul par différences finies du flux de chaleur et de la divergence du flux de chaleur pour chaque point discrétisé du domaine dans un sous-programme couplé à un solveur basé sur une formule de Rosenbrock modifiée d'ordre 2 (Shampine & Reichelt (1997)).

Ensuite, un script de programmation a été écrit pour résoudre le problème d'inversion par estimation successive des flux de chaleur en appelant itérativement la routine qui solutionne le problème direct. L'algorithme de résolution est présenté schématiquement à la figure 1.2 de l'article.

2.2 Cas synthétique

2.2.1 Problème direct

Avant de confronter l'algorithme à des données expérimentales, il est judicieux de tester celui-ci avec des données synthétiques exemptes d'erreur afin d'en vérifier l'applicabilité. À l'aide de l'outil mis sur pied pour résoudre le problème direct de transfert de chaleur, un cas synthétique a été développé, simulant un couvert de neige saisonnier multicouche sur une période de 24 heures. Les conditions frontières et initiales, les caractéristiques physiques ainsi que les détails concernant la résolution numérique de l'équation de la chaleur appliquée au couvert de neige synthétique sont présentés à la troisième section de l'article.

Il est par contre important de mentionner les hypothèses considérées lors de la construction du jeu de données synthétiques s'étendant sur une période de 24 heures :

— Les profils de densité et de conductivité thermique sont considérés constants
— La densité et la conductivité thermique de la neige sont directement reliés par la paramétrisation de Yen

— La chaleur spécifique est considérée constante (2000 J/kg/K)

— La hauteur du couvert de neige est considérée constante

— Il n'y a aucune précipitation solide ou liquide

— Le transfert de chaleur au sein du couvert de neige se fait principalement par conduction et il n'y a pas de changement de phase (aucun terme source n'est considéré)

2.2.2 Problème inverse

À l'aide du jeu de données synthétiques, l'algorithme d'inversion par estimation successive des flux de chaleur peut être testé. Pour initier l'algorithme, une estimation initiale du profil de conductivité thermique doit être fournie. Tel que présenté dans l'article, trois germes initiaux de conductivité thermique ont été testés afin de démontrer la robustesse de l'algorithme. Les trois scénarios, présentés à la troisième section de l'article et illustrés à la figure 2.1, ont été choisis dans le but de démontrer la capacité de l'algorithme à converger en utilisant n'importe quel germe initial de conductivité thermique compris dans la plage de valeurs que peut prendre la neige. La neige ne peut pas être plus isolante que l'air ($k_{air} = 0.024$ W/m/K), ni plus conductrice que la glace ($k_{glace} = 2.22$ W/m/K), limitant ainsi les valeurs de conductivité thermique qu'elle peut prendre ($k_{air} < k_{neige} < k_{glace}$).

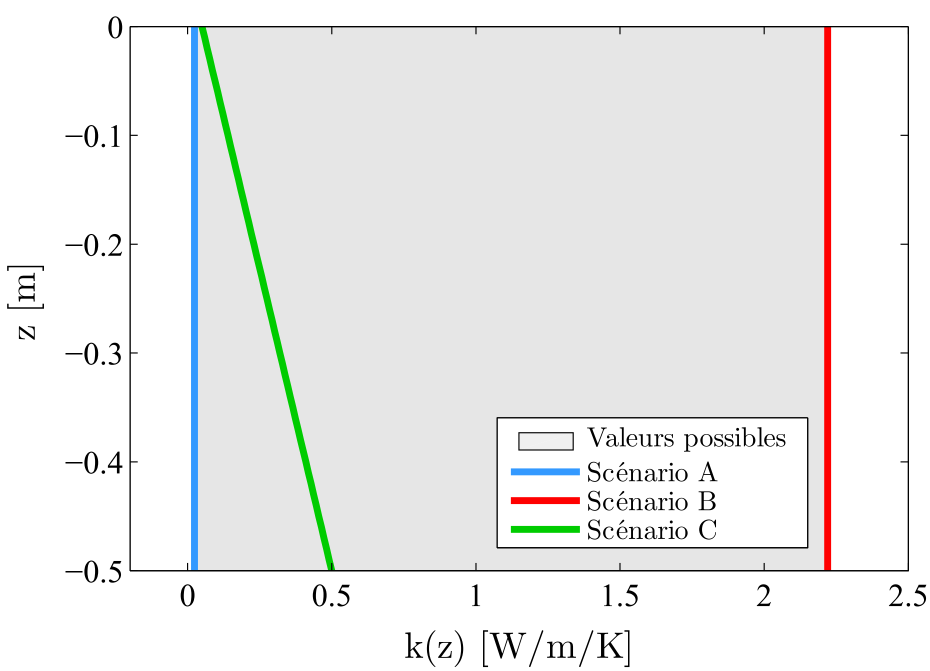


Figure 2.1 – Les trois germes initiaux de conductivité thermique utilisés

Le profil de conductivité thermique convergeant à chaque itération vers le profil de référence, la convergence est considérée atteinte lorsque l'erreur absolue moyenne entre les températures estimées et réelles tombe sous la barre de 0.001 °C.

2.3 Estimation des flux de chaleur aux frontières

Suivant la résolution du problème d'inversion, les caractéristiques physiques de la neige ainsi que l'évolution du profil de température sont connues. À l'aide de ces informations, il est possible à partir de l'équation de la chaleur (voir démonstration en annexe de l'article) d'obtenir les flux de chaleur aux frontières du couvert de neige, soit le flux de chaleur entre le sol et la neige et celui entre la neige et l'atmosphère. Bien que cette application ne figure pas parmi les objectifs de la présente étude, les formules développées pour estimer les flux de chaleur aux frontières peuvent s'avérer très utiles pour l'étude des échanges énergétiques entre le sol, la neige et l'atmosphère. Elles présentent un complément à cette étude et pourraient très bien s'appliquer dans un autre contexte que celui du problème d'inversion, à condition que les caractéristiques physiques de la neige ainsi que l'évolution du profil de température soient connues.

Chapitre 3

Résultats et discussion

3.1 Cas synthétique

3.1.1 Problème direct

Avant de tester l'algorithme d'inversion sur le jeu de données synthétiques, il est important de s'assurer que l'outil développé permettant de résoudre le problème direct de transfert de chaleur est adéquat. Puisque le problème direct doit être résolu à répétition lors de la résolution du problème inverse, l'incapacité à modéliser adéquatement les transferts de chaleur dans la neige rendrait absolument impossible la résolution du problème inverse. Afin de vérifier la précision de l'outil de résolution du problème direct, le cas synthétique a été modélisé à nouveau à l'aide de *COMSOL Multiphysics*, un logiciel de simulation numérique par éléments finis permettant la simulation de problèmes de transfert de chaleur (Pryor (2009)). Ce logiciel, permettant la simulation de phénomènes physiques complexes et couplés par des méthodes numériques avancées, est utilisé largement par la communauté scientifique, entre autre pour la résolution de problèmes de thermodynamique (Tariku *et al.* (2010); Gerlich *et al.* (2013); Dehghannya *et al.* (2011); Ogoh & Groulx (2010)).

L'accord entre les températures modélisées par l'outil développé et celles obtenues à l'aide de *COMSOL Multiphysics* est présenté à la figure 1.6 de l'article, où l'évolution de l'erreur absolue moyenne entre les profils de température calculés à l'aide des deux outils est illustrée. Une erreur absolue moyenne de 9.39×10^{-4} °C a été obtenue entre les profils de température calculés par notre outil et *COMSOL Multiphysics*, démontrant de ce fait que l'outil développé résout adéquatement le problème direct de transfert de chaleur dans la neige.

3.1.2 Problème inverse

Le problème direct étant correctement résolu, l'inversion du profil de température peut être réalisée. L'algorithme de résolution schématisé à la figure 1.2 de l'article a été appliqué aux trois différents scénarios présentant différents germes initiaux de conductivité thermique. Tel que démontré dans l'article, il a été possible d'atteindre la convergence et de retrouver avec succès le profil de conductivité thermique, le profil de densité et l'équivalent en eau de la neige pour les trois différents scénarios. Plus le germe initial était loin du profil de conductivité thermique de référence, plus l'algorithme a nécessité d'itérations pour converger. La figure 1.7 présente l'évolution du profil de conductivité thermique au fil des itérations jusqu'à convergence pour les trois scénarios. La figure 1.8, quant à elle, présente l'évolution de l'erreur absolue moyenne entre les températures estimées et de référence ainsi que l'évolution de l'erreur relative entre l'*ÉEN* estimée et de référence. C'est le scénario C, présentant le germe initial se rapprochant le plus d'un profil de conductivité thermique typiquement rencontré en pratique, qui a permis d'atteindre la convergence le plus rapidement. Mais le fait qu'il a été possible d'atteindre la convergence pour les trois scénarios témoigne de la robustesse de l'algorithme et démontre la possibilité de converger en utilisant n'importe quel germe initial de conductivité thermique contenu dans la plage de valeurs possibles que peut prendre la neige. Afin d'éviter la redondance, le lecteur est référé à l'article pour une discussion plus approfondie des résultats présentés aux figure1.7 et 1.8.

3.2 Estimation des flux de chaleur aux frontières

Les formules développées (équation 1.9 de l'article) pour estimer les flux de chaleur aux frontières du couvert de neige ont permis de retrouver avec succès les flux de chaleur entre le sol et la neige et entre la neige et l'atmosphère. Lors du calcul du cas synthétique, un flux de chaleur constant de 1.6 W/m^2 provenant du sol a été imposé pour la période de 24 heures. Tel que présenté à la figure 1.9 de l'article, ce flux est adéquatement estimé, tout comme le flux de chaleur en surface qui présente un comportement oscillatoire périodique en accord avec l'évolution du profil de température.

3.3 Sources d'erreurs

Plusieurs hypothèses ont été considérées afin de simplifier l'approche théorique de résolution du problème inverse, et certaines d'entre elles pourraient avoir un impact significatif sur la qualité des résultats obtenus en pratique. Sans reprendre en détails la discussion présentée dans l'article, voici un résumé succinct des différentes sources d'erreurs pouvant affecter l'algorithme proposé :

— La conductivité thermique de la neige n'est pas seulement fonction de la densité, mais d'une panoplie d'autres facteurs (microstructure de la neige, distribution des cristaux de neige, type de neige, contenu en eau, température) (Adams & Sato (1993); Fukusako (1990); Yen (1981); Anderson (1976); Lachance (2014))

— La paramétrisation de Yen utilisée donnerait des valeurs de conductivité thermique anormalement basses pour de faibles valeurs de densité (Boone & Etchevers (2001)). De plus, dans le cas du givre de profondeur, il n'existerait pratiquement aucune corrélation entre densité et conductivité thermique (Barrere *et al.* (2017)). L'utilisation d'un lien direct entre conductivité thermique et densité a facilité le développement de l'algorithme d'inversion, mais a peu de chance de donner de bons résultats en pratique. La résolution du problème inverse en ne considérant aucune dépendance entre ces deux variables doit être abordée afin d'envisager l'applicabilité de la méthode.

— L'erreur associée aux mesures de températures impactera grandement la précision de l'*ÉÉN* qu'il sera possible d'obtenir. La figure 3.1 présente l'évolution de l'erreur sur l'*ÉEN* en fonction de la précision des mesures de température. Les données présentées au tableau 1.1 de l'article ont été extraites de ce graphique. Il est important de mentionner que ces résultats n'ont pas été obtenus par une analyse de sensibilité et d'incertitude. En considérant qu'il est dénué de sens d'observer une erreur absolue moyenne entre les profils de température estimés et réels ($MAE\left(T^i, T^R\right)$) inférieure à la précision des mesures de température, celle-ci limitera la précision qu'il sera possible d'obtenir sur l'*ÉEN*. Ainsi, le $MAE\left(T^i, T^R\right)$ peut être directement associé à la précision des mesures de température pour en étudier théoriquement et simplement l'effet sur la précision de l'*ÉEN*. La figure 3.1 présente donc, en d'autres termes, l'erreur relative sur l'*ÉEN* ($\epsilon_{rel}\left(SWE^i, SWE_R\right)$) en fonction du $MAE\left(T^i, T^R\right)$ obtenus pour le scénario C, choisi pour sa convergence rapide et fluide.

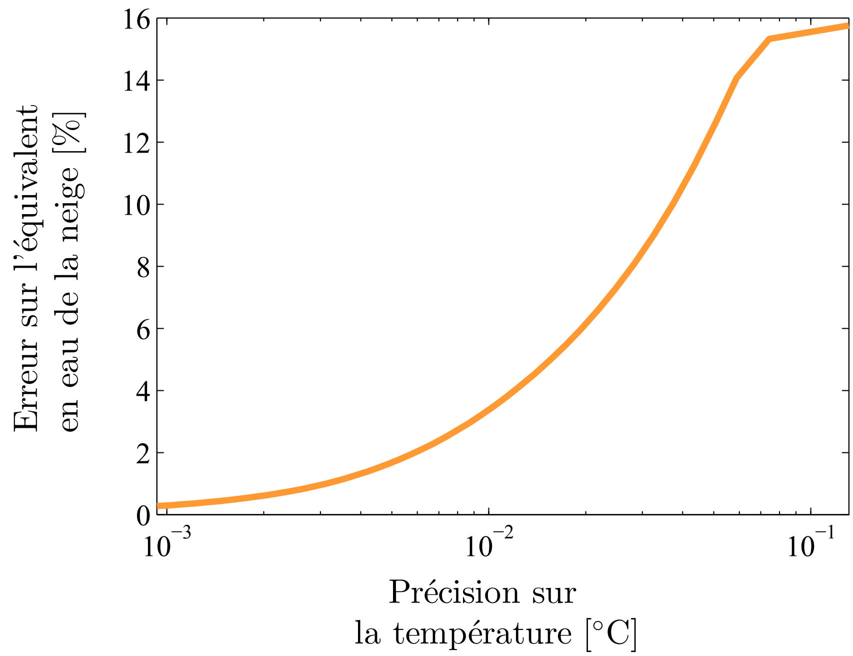


Figure 3.1 – Effet de la précision des mesures de température sur l'estimation de l'équivalent en eau de la neige

— Les sondes de températures n'absorbent pas les radiations solaires pénétrant le couvert de la même manière que la neige, ne possédant pas le même spectre d'absorption (Brandt & Warren (1993)). Les sondes absorbant davantage d'énergie radiative que la neige, elles mesureront une température plus élevée que la neige qui les entoure.

— La résolution spatiale et temporelle des mesures de température impactera les performances de l'algorithme. Plus la résolution spatiale sera fine, plus le profil de conductivité thermique extrait sera détaillé. D'autre part, plus la résolution temporelle des mesures de température sera fine, plus l'algorithme convergera rapidement. Il faut par contre être prudent avec l'intervalle de temps utilisé puisque, tel que considéré lors du développement de la méthode, les profils de conductivité thermique et de densité doivent demeurer constants sur la période de temps considérée.

Chapitre 4

Conclusion

L'objectif de la présente étude était de développer une nouvelle méthode d'estimation de l'équivalent en eau de la neige pour pallier aux désavantages des méthodes actuelles. L'approche mise sur pied passe par la résolution du problème inverse de transfert de chaleur dans la neige dans le but d'extraire les profils de conductivité thermique et de densité à partir du profil de température au sein du couvert de neige. L'*ÉEN* peut ainsi être obtenu à l'aide du profil de densité retrouvé. Cette approche, s'insérant dans la catégorie des méthodes ponctuelles d'estimation de l'*ÉEN*, est simple, facilement implémentable en milieu éloigné et a le potentiel d'estimer précisément l'*ÉEN* pour un couvert de neige fortement stratifié. Un appareil mesurant l'évolution du profil de densité dans la neige serait peu coûteux, facilement déployable à grande échelle, demanderait peu de maintenance et serait peu destructif pour le milieu. Ainsi, l'approche proposée a le potentiel de pallier à de nombreux désavantages des méthodes actuelles.

Afin d'étudier théoriquement l'applicabilité de l'approche par estimation successive des flux de chaleur dans la neige, un jeu de données synthétiques a été construit simulant de façon réaliste un couvert de neige pendant une période de 24 heures. Il a été démontré que la méthode proposée permet l'obtention d'un profil de densité finement discrétisé à partir du profil de température, autorisant une estimation précise de l'*ÉEN*. En parallèle, une approche permettant d'estimer les flux de chaleur aux frontières du couvert de neige a été proposée, requérant une connaissance préalable des profils de température, de conductivité thermique et de densité. L'estimation de ces flux de chaleur, pouvant être réalisée suite à la résolution du problème d'inversion de transfert de chaleur dans la neige, est particulièrement utile pour l'étude des échanges énergétiques entre le sol, la neige et l'atmosphère.

L'application en pratique de l'approche par estimation successive des flux de chaleur requerra par contre une investigation davantage approfondie des différentes sources d'erreurs pouvant impacter les résultats de l'algorithme. La paramétrisation reliant la conductivité thermique de la neige et sa densité, la précision des mesures de température, la pollution thermique des mesures de température due à la radiation solaire pénétrant le couvert de neige et la discrétisation spatiale et temporelle de ces mesures sont toutes des contributions ayant le potentiel d'impacter significativement les performances de l'algorithme. Les résultats obtenus ouvrent néanmoins la voie à une nouvelle approche d'estimation de l'équivalent en eau de la neige fournissant une alternative innovante et complémentaire aux méthodes actuelles. Les travaux futurs sur le sujet se concentreront sur la résolution du problème inverse sans considérer préalablement une dépendance entre densité et conductivité thermique, sur une étude de sensibilité et d'incertitude détaillée et sur l'application de la méthode avec des mesures expérimentales.

Deuxième partie

Articles

Article 1

Snow water equivalent estimation from temperature measurements using successive heat flux estimation

Titre traduit

Estimation de l'équivalent en eau de la neige par estimation successive des flux de chaleur à partir de mesures de températures

Auteurs

Guillaume Arbour[1 2], Karem Chokmani[1 2], Philippe Pasquier[3]

[1] Institut National de la Recherche Scientifique, Centre Eau Terre Environnement

[2] Centre d'Études Nordiques

[3] École Polytechnique de Montréal

Contribution

La rédaction de l'article, des scripts de programmation ainsi que tous les calculs numériques ont été réalisés par l'étudiant (Guillaume Arbour). Philippe Pasquier (co-directeur) a grandement contribué à la correction de l'article et a offert un support considérable pour la compréhension et la résolution du problème d'inversion. Karem Chokmani (directeur), instigateur du projet, a contribué à la correction de l'article, à l'avancement des travaux ainsi qu'au financement du projet.

Publication ciblée

Advances in Water Resources

Été 2017

Résumé traduit

Une nouvelle méthode de résolution du problème inverse de transfert de chaleur dans la neige est proposée. Les flux de chaleur dans la neige sont successivement estimés en comparant les profils de température calculés et observés au sein du couvert jusqu'à ce qu'un bon accord soit atteint entre ces derniers dans le but d'estimer les profils de conductivité thermique et de densité. Cette approche rend possible l'obtention d'un profil de densité finement discrétisé, permettant une estimation précise de l'équivalent en eau de le neige. Un cas synthétique a été construit afin de démontrer l'efficacité et la robustesse de la méthode. Il est démontré que les profils de conductivité thermique et de densité de la neige peuvent être récupérés à partir de mesures de température par l'approche proposée. La précision des paramètres estimés dépendra par contre fortement de la précision des mesures de température. De plus, la connaissance du profil de température et des caractéristiques physiques de la neige précédemment estimées permet la détermination du flux de chaleur total aux frontières du couvert de neige, fournissant ainsi de l'information particulièrement utile pour l'étude des échanges énergétiques entre le sol, la neige et l'atmosphère.

Abstract

A new method to solve the heat transfer inverse problem in the snow cover is proposed. The approach successively estimates the heat flux in the snowpack while iteratively comparing computed and observed temperatures within the snow cover until a good agreement is reached in order to estimate the thermal conductivity and density profiles. A finely discretized density profile can be retrieved, thus allowing a precise estimation of the snow water equivalent. A synthetic case is built to demonstrate the method's efficiency and robustness. It is shown that the snow thermal conductivity and density profiles can be retrieved from temperature measurements using the proposed approach. The accuracy of the retrieved parameters will depend strongly on the temperature measurements' accuracy. Furthermore, the temperature measurements paired with the retrieved parameters allow the estimation of the total heat flux at the snow cover's boundaries, providing useful information for energy balance investigation between soil, snow and atmosphere.

1.1 Introduction

The snow cover plays a vital role in terms of energy exchange between the land surface and the atmosphere, and also has a significant effect on climate control and on the water cycle ((Takala *et al.*, 2011)). In the study of climate change, it is essential to follow the evolution of the snowpack, since it is considered a major source of climate feedback (Cess *et al.* (1991); Curry *et al.* (1995)). Meltwater plays an important role in the water balance of certain regions, and has a considerable impact on several socio-economic activites such as hydropower production, agriculture, water supply and even tourism (Male & Granger (1981); Laternser & Schneebeli (2003); Rittger *et al.* (2016); Bavera *et al.* (2014)). Hydrological, meteorological, weather or avalanche modeling (Essery *et al.* (2013)) and forecasting also depend on adequate monitoring of the snow cover in space and time, but more precisely on the monitoring of the Snow Water Equivalent (SWE). The latter is described as the depth of liquid water that would result from the instantaneous melt of the entire snow cover (Egli *et al.* (2009); Bavera *et al.* (2014)). The SWE of a homogeneous layer of snow can be mathematically described as the product of snow's relative density with respect to water and thickness of the corresponding snow layer. Since the snowpack is made out of successive layers of different thicknesses and densities, the SWE can be expressed as the integral of the relative density profile over the entire snowpack.

Several techniques currently allow to estimate the SWE but there is no non-destructive standard method to accurately measure this quantity (Wright (2013)). The existing techniques can be classified into three different groups : punctual field measurements, numerical modeling and remote sensing techniques. However, most of them are expensive or require continuous field monitoring, which is often not feasible nor desirable in remote environments. A comparison of the existing methods to estimate the SWE can be found in Egli *et al.* (2009); Wright (2013); Mote *et al.* (2003).

The objective here is to propose a simple yet inexpensive method to estimate the SWE on a continuous basis as an alternative to current methods. From the definition of the SWE, we see that it exclusively depends on the snow density profile. Density, along with thermal conductivity and specific heat capacity govern the way heat is transferred through the snow and will have a direct influence on the evolution of the temperature profile. Knowing the physical properties of the snow cover, the internal heat sources and the initial and boundary conditions, the developed temperature profile within the snowpack can be obtained by solving the heat equation, *i.e.* the *forward* *problem*. From another point of view, the temperature profile could provide precious information on the physical properties of the snow through the solution of the *inverse problem*, which consists of using temperature observations to infer the thermal parameters within the snow cover. The difference between the forward and the inverse problems is illustrated in figure 1.1. If the temperature profile could be related to the density profile, a simple and inexpensive apparatus measuring the temperature profile's evolution in the snow cover would permit the retrieval of the SWE, providing an innovative alternative or complement to the current methods. The main purpose of the present work is to suggest a method to link the temperature profile within the snow cover to its SWE, paving the way for a new approach to estimate this quantity.

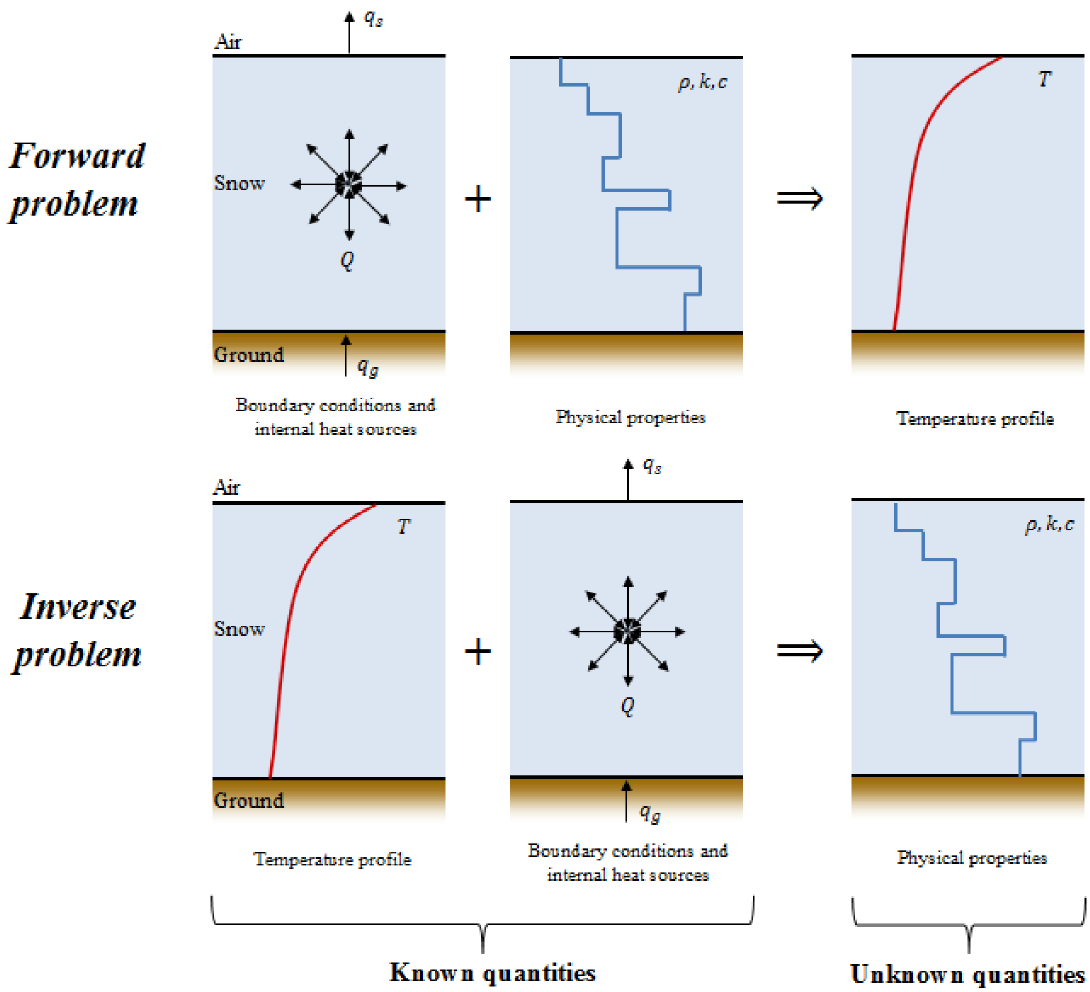


Figure 1.1 – Illustration of the *forward* and *inverse* problems. q_s is the surface heat flux, q_g is the ground heat flux, Q is the internal heat source, ρ is the density, k is the thermal conductivity, c is the specific heat capacity and T is the temperature.

While many researchers have investigated the inverse heat transfer problem from a general and theoretical point of view (Tervola (1989); Chang & Chang (2009); Grysa (2011); Colaço *et al.*

(2006)), only a few attempts have been made to explicitly inverse the temperature profile in the snow cover to retrieve its physical characteristics (Zhang & Osterkamp (1995); Brandt & Warren (1997); Oldroyd *et al.* (2013)). It is not the purpose here to describe the *ill-posed* nature of the inverse problem nor the many types of inverse problems. A more complete work on that matter can be found in Tarantola (2005); Bonnet (2008). To this day, two main method categories have been used to solve the inverse problem applied to the snow cover : algebraic inversion methods and optimization methods.

The idea behind the former is to start with the heat equation and algebraically isolate the unknown parameters. Zhang and Osterkamp (Zhang & Osterkamp (1995)) lumped thermal conductivity, density and specific heat capacity in thermal diffusivity. The idea behind their approach was to isolate the thermal diffusivity from the heat equation and to write the derivatives using finite difference schemes. The stability of the method greatly depends on the finite difference scheme applied and strong numerical instabilities arise if high order terms are neglected in the Taylor series expansion (Zhang & Osterkamp (1995)). This method only allows the recovery of an apparent thermal diffusivity for the whole snowpack and thus the retrieval of the density or thermal conductivity profile is not directly addressed.

On the other hand, the inversion of the snow temperature profile using optimization methods generally works around the minimization of an objective (or cost) function. Brandt and Warren (Brandt & Warren (1997)) used an optimization technique and were able to retrieve a coarse discretized thermal conductivity profile. They divided the snowpack into four sections that were considered homogeneous and they iteratively solved the heat equation in each section with different specified thermal conductivities, until the root-mean-square error between the observed and predicted temperatures had reached a minimum. Oldroyd *et al.* (Oldroyd *et al.* (2013)) used the same technique to obtain an apparent thermal diffusivity, but confined their calculations to a particular a domain within the snowpack. A profile for the entire snowpack could therefore not be recovered.

There is currently no inversion method applicable to the snow cover to obtain a fine discretized density or thermal conductivity profile from temperature measurements. Hence, it is not possible to accurately estimate SWE using existing techniques, implying the use of a new inversion method to solve our problem. This quest for a new way of solving the inverse problem brings us in the field of hydrogeology. A physically based inversion approach by successive flux estimation was developed by

Pasquier and Marcotte (Pasquier & Marcotte (2006, 2005)) to recover the hydraulic conductivity of an aquifer from piezometric measurements. Because the conservative nature of the equations involved in groundwater flow and heat flow is similar, it is thus possible to apply their approach to heat transfer problems. However, it is worth mentioning that this method has never been used in heat transfer nor any field other than hydrogeology.

The present paper is organized as follows : First, the algorithm proposed to retrieve snow's thermal parameters and its application to the snow cover are described. Then, a synthetic study is presented, followed by a discussion addressing the potential and limitations of the proposed method. Finally, we will conclude by discussing the potential application of the method as well as our future work in that matter.

1.2 Methodology

Considering a horizontally uniform and infinite snow cover formed of parallel and homogeneous stacked layers, only the vertical component of the heat transfer can be taken into account (Hammonds & Baker (2016); Riche & Schneebeli (2013)). Assuming that convective and radiative heat transfer in the snow are negligible ((Adams & Sato, 1993)) and that solar radiation absorbed within the snowpack can be lumped into the heat source term Q, the heat equation applied to the snowpack can be expressed as :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(k \cdot \vec{\nabla} T \right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad , \quad z \in \Omega \quad , \quad t \in [t_0, t_f] \tag{1.1}$$

where k is the snow thermal conductivity, ρ is the snow density, c is the snow specific heat capacity, t is the time between initial and final time t_0 and t_f and Ω is the domain containing the snowpack bounded by the snow/surface interface (Γ_s) and the soil/snow interface (Γ_g). Snow's specific heat capacity is considered constant ($c = 2\,000$ J/kg/K) since its value does not vary considerably in the range of temperatures seen in seasonal snowpacks (Fukusako (1990)).

In steady state, the vertical heat flux $\vec{q}$ is time invariant and is given by Fourier's law (Incropera *et al.* (2011)) :

$$\vec{q} = -k \cdot \vec{\nabla} T \tag{1.2}$$

Equations 1.1 and 1.2 suggest that heat transfer within the snow is purely conductive. Heat transfer in a moist porous material containing the three phases of water is subject to water vapor diffusion across its pores, in addition to heat transfer by conduction through ice crystals, interstitial air and liquid water in the pores, if any. To circumvent the complex modeling of these different types of heat transfer, the moist porous snow will be assigned an effective thermal conductivity, to lump into a single term the effect of these mechanisms (Adams & Sato (1993); Lecomte *et al.* (2013); Calonne *et al.* (2011); Yen (1981)).

The effective thermal conductivity of snow, k, is assumed to be directly linked to the snow density, ρ, through the commonly accepted and broadly used parameterization developed by Yen (1981) (Adams & Sato (1993); Lecomte *et al.* (2013); Calonne *et al.* (2011); Yen (1981); Brun *et al.* (1989); Vionnet *et al.* (2012); Jacobi *et al.* (2010); Essery *et al.* (1999)) :

$$k = k_{ice}\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{1.88} \tag{1.3}$$

where k_{ice} is the thermal conductivity of ice and ρ_w is the density of liquid water.

1.2.1 Successive flux estimation

Since the boundary conditions' amplitude periodically varies, a typical seasonal snow cover never really reaches a steady state, but for now, let's assume it does. Using an approach similar to the Comparison Model Method (CMM) (Ponzini & Lozej (1982); Pasquier & Marcotte (2006)), the inverse problem is solved by comparing a reference temperature profile to a profile computed by a numerical model. From equation 1.2, the reference thermal conductivity profile (k_R) is given by :

$$k_R = \frac{|-\vec{q}_R|}{\left|\vec{\nabla} T_R\right|} \tag{1.4}$$

If the reference heat flux ($\vec{q}_R$) and temperature gradient ($\vec{\nabla} T_R$) are known everywhere in the domain, the inverse problem would be solved directly using equation 1.4 (Pasquier (2005)). In practice, heat flux measurements throughout the whole snowpack are not easily achievable while temperature measurements are much more common and feasible. A problem arises when trying to solve equation 1.4 because the heat flux at any given point in the snow cover is unknown. To work around this problem, a numerical solution of equation 1.1 is needed. Let's assume that the heat flux provided by solving equation 1.1 with a seed thermal conductivity profile is equal to the reference heat flux. Equation 1.4 can be rewritten :

$$k_R = \frac{|-\vec{q}|}{\left|\vec{\nabla} T_R\right|} = k \cdot \frac{\left|\vec{\nabla} T\right|}{\left|\vec{\nabla} T_R\right|} \tag{1.5}$$

At this point, it is still impossible to solve the inverse problem because we imposed an equality condition between $\vec{q}_R$ and $|k||\vec{\nabla} T|$ ((Pasquier, 2005)). The use of an iterative process is therefore required to successively estimate the flux running in the comparison model to correct the thermal conductivity. The snow cover being heterogeneous, the heat transfer has to be solved numerically and the iterative form of equation 1.5 has to be written with respect to the spatial discretization of equation 1.1. Because of the nature of equation 1.5, numerical instabilites arise in areas of small reference temperature gradients. To adress this issue, a damping factor β_i is added to reduce numerical instabilities and to avoid strong thermal conductivity variations (Pasquier & Marcotte (2006)). The numerical and iterative form of equation 1.5 is written as follows :

$$k_j^{i+1} = k_j^i \cdot \frac{\left|\vec{\nabla} T_j^i\right| + \beta_i}{\left|\vec{\nabla} T_j^R\right| + \beta_i} \tag{1.6}$$

where i is the iteration index, j is the snow layer index and β_i is a damping factor. The idea behind this algrotihm is to begin with an inital guess of the thermal conductivity profile (k_j^0). Equation 1.6 is then iteratively solved until a good agreement (the mean absolute error is used in our case) is reached between the reference and the estimated temperature gradients (*i.e.* $|\vec{\nabla} T_j^i|/|\vec{\nabla} T_j^R| \to 1$). Besides avoiding numerical instabilities, the damping factor also has the effect of decelerating the convergence rate, giving the algorithm the ability to escape local minima. Pasquier and Marcotte (Pasquier & Marcotte (2006)) tested three kinds of damping factors : a constant damping factor and linearly and exponentially decreasing factors through the iterative process. For the purpose of this work, and given the ability of a constant damping factor to reduce numerical instabilities (Pasquier & Marcotte (2006)), the use of a constant damping factor will be sufficient to obtain a satisfactory convergence rate, as further discussed.

1.2.2 Transient state inversion

As stated before, a seasonal snow cover never really reaches a steady state since boundary conditions are always changing in time. Furthermore, the snow density profile is constantly evolving due to many processes : wind erosion, snow metamorphism (destructive metamorphism, constructive metamorphism and melt metamorphism) and from compaction under the snowpack's own weight ((Bormann *et al.*, 2013; Anderson, 1976)). The transient state approach developed by Pasquier and Marcotte (Pasquier & Marcotte (2006)) considers a time invariant hydraulic conductivity. In our case, the thermal conductivity of snow isn't constant in time since it is correlated with the continually evolving density. But under certain circumstances, the rate of density changes in a snow cover can be slow enough to consider the density profile constant over a short period of time. The limits of this hypothesis will be discussed later on, but for now let's assume that the density and thermal conductivity profiles are time invariant.

The evolving temperature gradient and heat flux allow the calculation of a value of k_j^{i+1} for every time step of the model. The thermal conductivity is then estimated using every temperature gradient profile and weighting every $|\vec{\nabla} T_c|/|\vec{\nabla} T_R|$ ratio according to the relative length (λ_τ) of every time step. This weighting factor allows to consider measurements taken at irregular intervals. Equation 1.6 can be rewritten :

$$k_j^{i+1} = k_j^i \cdot \sum_{\tau=1}^{n_\tau} \frac{\left|\vec{\nabla} T_{j,\tau}^i\right| + \beta_i}{\left|\vec{\nabla} T_{j,\tau}^R\right| + \beta_i} \cdot \lambda_\tau \tag{1.7}$$

where τ is the time index, n_τ is the total number of time steps and λ_τ is the weighting factor, knowing that

$$\sum_{\tau=1}^{n_\tau} \lambda_\tau = 1 \tag{1.8}$$

If only one temperature profile is used (*i.e.* $n_\tau = 1$ and $\lambda_\tau = 1$), we find the steady-state formulation of equation 1.6. A flowchart of the algorithm used to solve the inverse problem is presented in figure 1.2.

1.2.3 Heat flux estimation at the boundaries

The energy exchange between the snow cover and the atmosphere is broadly studied (Boone & Etchevers (2001); Knox (2011); Anderson & Neff (2008); Marks *et al.* (1992); Marks & Dozier (1992); Mott *et al.* (2013)) since it directly affects regional and global climate (Takala *et al.* (2011)). Besides, the ground and snow covers' thermal processes are intimately linked considering the ground heat flux contributes a large amount of energy to the snowpack (Knox (2011)), while the latter is one

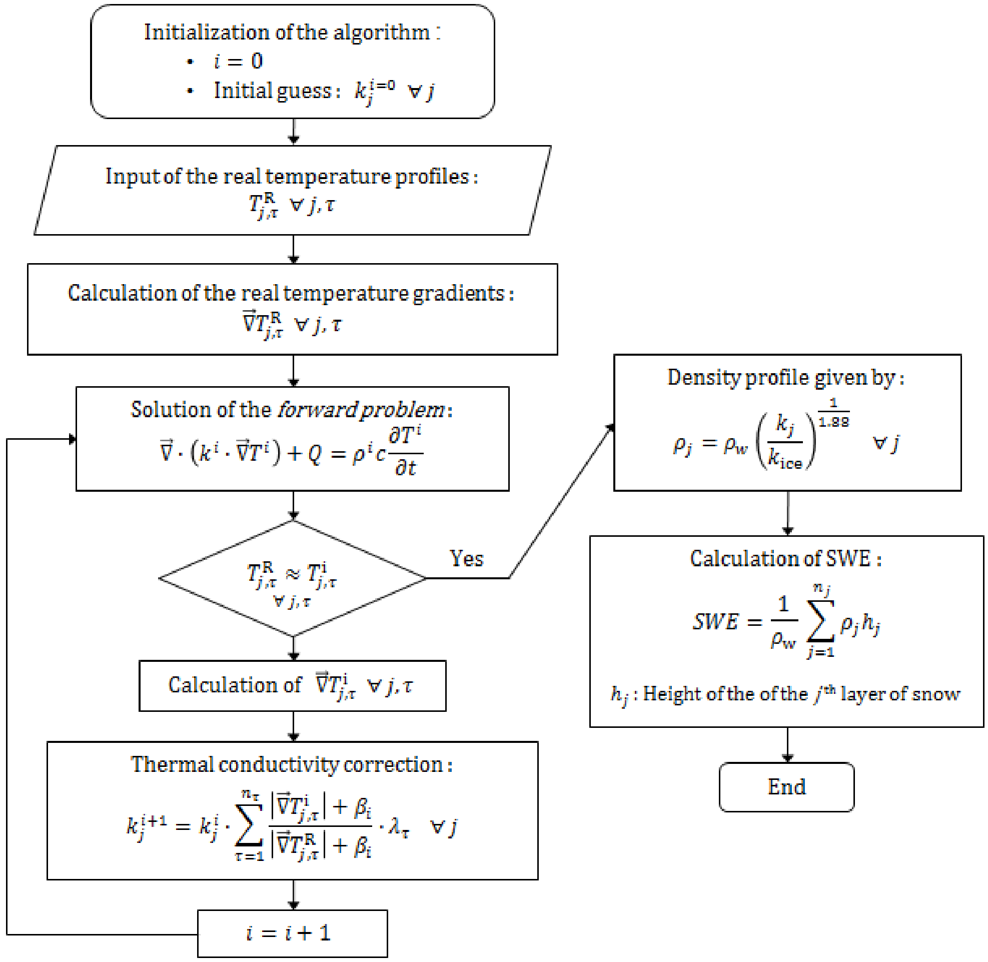


Figure 1.2 – Flowchart of the proposed algorithm

of the decisive components affecting ground's thermal regimes (Zhang (2005)). It would therefore be useful to be able to estimate the total heat flux penetrating or leaving the snowpack at its boundaries.

Knowing the temperature profile in the snow cover along with the density and thermal conductivity profiles allows to estimate the heat flux at its boundaries. Our approach makes this possible following the resolution of the inverse problem. Performing an energy budget on a infinitesimal snow layer of thickness Δz adjacent to a boundary, the surface and the ground heat flux can be estimated by :

$$\begin{cases} q_s &= -\frac{\Delta z}{2}\cdot\rho_{n_l}c\left(\frac{T_n^{\tau+1}-T_n^{\tau}}{\Delta t}\right)-k_{n_l}\left(\frac{T_n^{\tau}-T_{n-1}^{\tau}}{\Delta z}\right) \\ q_g &= \frac{\Delta z}{2}\cdot\rho_1 c\left(\frac{T_0^{\tau+1}-T_0^{\tau}}{\Delta t}\right)-k_1\left(\frac{T_1^{\tau}-T_0^{\tau}}{\Delta z}\right) \end{cases} \tag{1.9}$$

where q_s is the surface heat flux, q_g is the ground heat flux, ρ_1 (k_1) and ρ_{n_l} (k_{n_l}) are the densities (thermal conductivities) of the snowpack's bottom and surface layers, respectively, n_l is the total number of layers in the snow cover, c is the snow specific heat capacity and T_x^y is the temperature at the x^{th} measurement point in the snow cover at time y. The parameters required to estimate q_s and q_g are illustrated in figure 1.3. These formulas are derived from the heat transfer equation applied to the boundaries of the domain. A detailed derivation of these equations is presented in A.1.

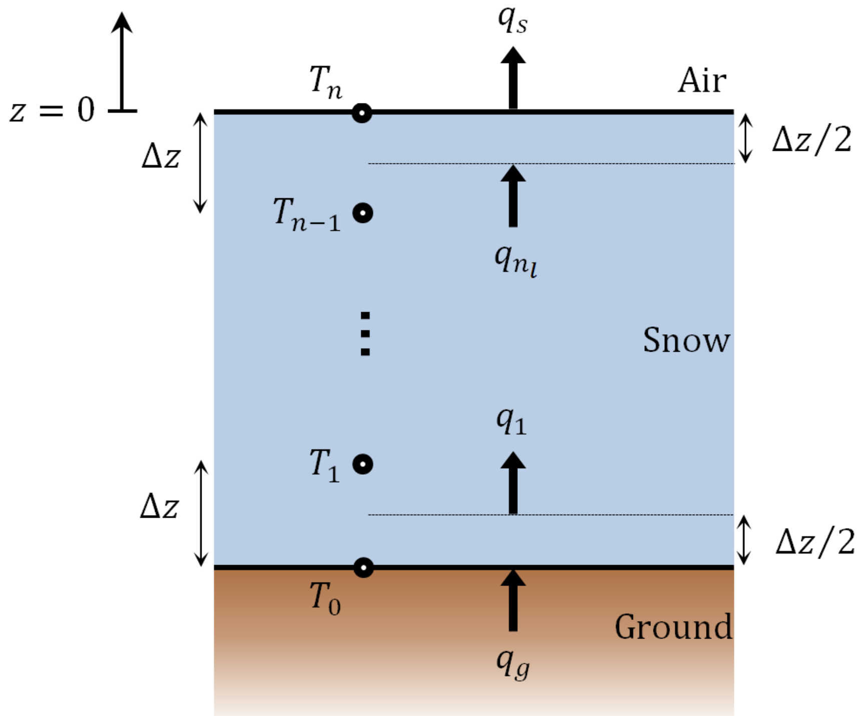


Figure 1.3 – Illustration of the parameters required to estimate the boundary heat fluxes (q_s is the surface heat flux, q_g is the ground heat flux, ρ_1 (k_1) and ρ_{n_l} (k_{n_l}) are the densities (thermal conductivities) of the snowpack's bottom and surface layers respectively, q_1 and q_{n_l} are the conductive heat fluxes flowing in the snowpack's bottom and surface layers respectively, n_l is the total number of layers in the snow cover and T_x^y is the temperature at the x-th measurement point in the snow cover at time y)

1.3 Synthetic case

1.3.1 Forward problem

In order to test the algorithm described above, a synthetic case was developed by simulating a typical seasonal snow cover over a period of 24 hours. During this 24-hour period, the density profile is considered time invariant. It has been reported that seasonal snowpacks show a relatively linear increase in density with time (Bormann *et al.* (2013)), this being particularly true for dry snow covers even for shorts periods of time (Marshall *et al.* (1999)). Bormann *et al.* (Bormann *et al.* (2013)) recorded mean densification rates of less than 2 kg/m^3/day at 96 observation sites across two hemispheres and three continental zones around the world. It is therefore acceptable to assume that the density profile is constant over the 24-hour period, presuming that the snow cover is fairly dry. We then consider a 50 cm-thick dry snow cover, which remains constant since no solid or liquid precipitations were assumed to occur within the 24-hour period. The density and conductivity profiles of the synthetic snowpack (related by equation 1.3) are presented in figure 1.4. The profiles were chosen to simulate a typical seasonal snow cover, where liquid precipitations can occur during the season and infiltrate the snowpack to create layers of higher densities when freezing. Density is also assumed to increase with depth due to compaction and metamorphism.

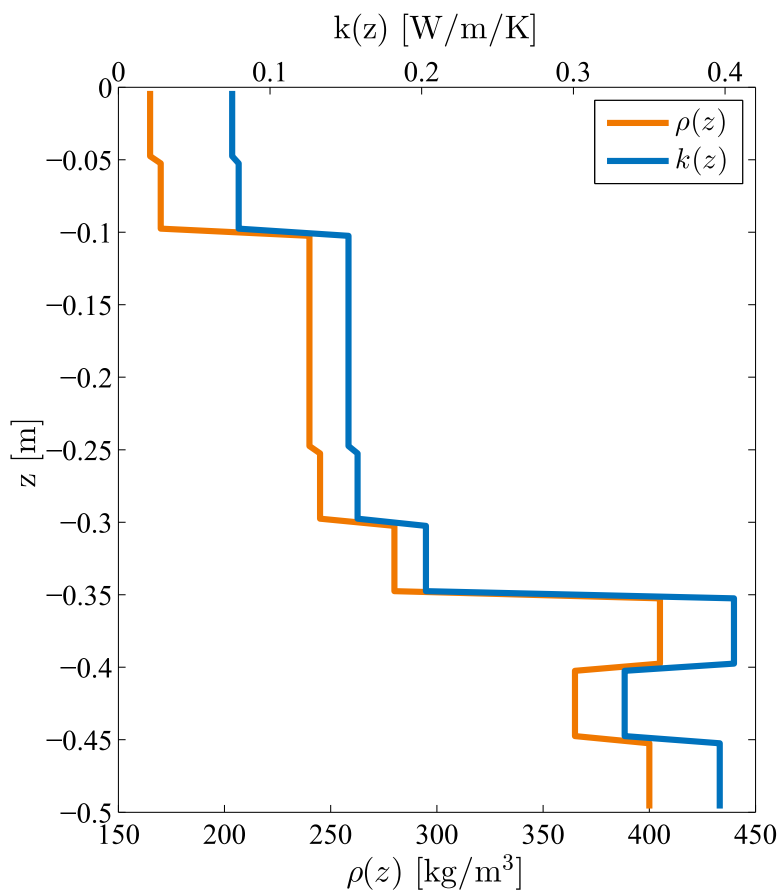


Figure 1.4 – Thermal conductivity ($k(z)$) and density ($\rho(z)$) profiles of the synthetic snow cover

The snow cover is subjected to the following boundary conditions, chosen to simulate a common variation of the snow surface temperature throughout a 24-hour period (Zhang & Osterkamp (1995)) and a typical heating of the snowpack's bottom by ground heat flux :

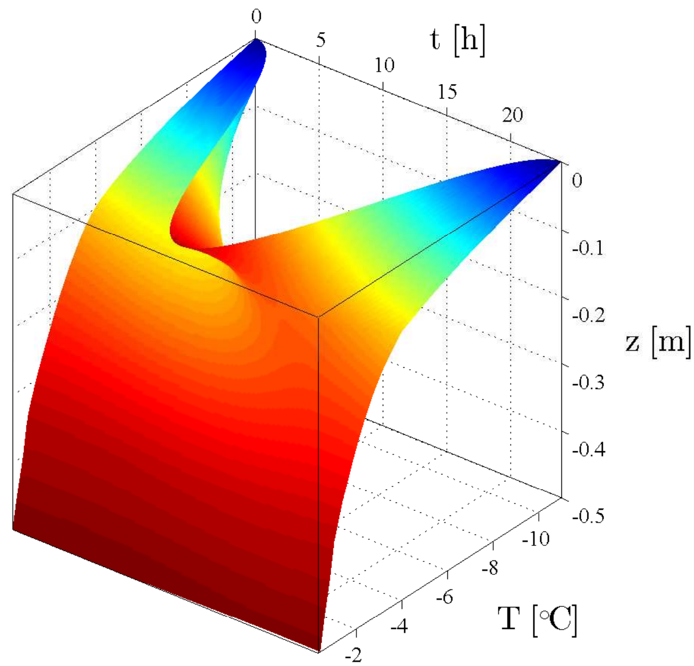
$$\begin{cases} T\big|_{\Gamma_s} & = & T_m + A \cdot \cos(\omega t) \quad [°\text{C}] \\ \vec{q} \cdot \vec{n}\big|_{\Gamma_g} & = & q_g \quad [\text{W/m}^2] \end{cases} \tag{1.10}$$

where Γ_s is the snow/surface interface, Γ_g is the soil/snow interface, T_m is the mean daily surface temperature, A is the amplitude of the daily surface temperature oscillation, $\omega = 2\pi f$ (where f is the frequency of the temperature oscillation for a period of 24 h), $t \in [0, 24]$ h, $\vec{n}$ is a unit vector perpendicular to Γ_g, and q_g is the ground heat flux. Values of $T_m = -6$ °C and $A = -5$ °C were chosen since they are representative of the surface temperature evolution of a seasonal snow cover. The ground heat flux heating the snowpack's bottom was given a value of $q_g = 1.6$ W/m^2, as it is common to assume a time invariant ground heat flux for the time frame used (Strasser & Marke (2010); Jacobi *et al.* (2010)).

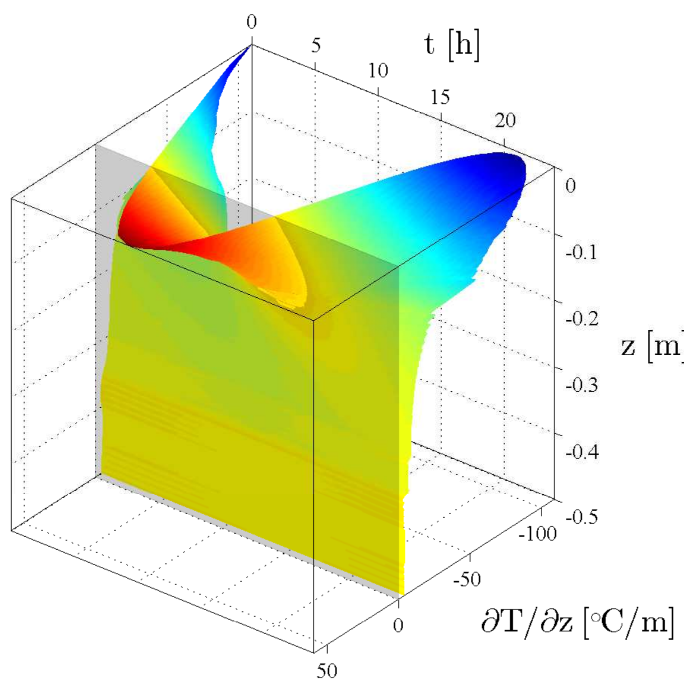
The heat transfer through the synthetic snow cover is assumed to occur primarily by conduction (equation 1.1) with no internal heat source ($Q = 0$). Solving the forward problem gives the temperature profile's evolution in space and time. Its resolution was performed by a finite difference method calculating the heat flux and the divergence of the heat flux in each discretized point of the domain in a subroutine coupled with a solver based on a modified Rosenbrock formula of order 2 (Shampine & Reichelt (1997)). The results, presented in figure 1.5a, were obtained with 15-minute time steps and 5-mm space steps hence dividing Ω into 100 layers. The initial temperature profile (at $t = 0$) was determined by solving equation 1.1 for a long period of time with a linear temperature profile as the initial condition to make sure a realistic temperature profile was used to initiate the algorithm. The evolution of the temperature gradient is shown in figure 1.5b especially to demonstrate the importance of the damping factor in our particular case. A plane corresponding to $\vec{\nabla} T = 0$ was drawn to show that certain temperature profiles at specific times will cause numerical instabilities in regions of the snowpack where $\vec{\nabla} T \to 0$. Without the use of a damping factor, it is more than likely that the algorithm will diverge.

Accuracy of the forward problem's resolution

Even though the results presented in figure 1.5a seem adequate, a confirmation of the accuracy of our calculations is needed, since the algorithm solving the forward problem will be iteratively called



(a)



(b)

Figure 1.5 – (a) Temperature's evolution in the synthetic snow cover (b) Evolution of the temperature gradient in the synthetic snow cover (A plane corresponding to $dT/dz = 0$ is drawn to show the regions where the algorithm will present numerical instabilities thus demonstrating the need for a damping factor)

upon while solving the inverse problem. Besides, if the heat transfer is not adequately modeled, the applicability of the algorithm in practice will be seriously doubted. To assess the accuracy of the forward problem's results, we will compare them to a reference solution which is chosen to come from the broadly used COMSOL Multiphysics® simulation software. COMSOL Multiphysics® is a finite element software allowing, among other things, to simulate heat transfer using advanced numerical methods (Pryor (2009)).

One might wonder why COMSOL Multiphysics® wasn't used from the start to create the synthetic data set, thus avoiding having to build our own numerical model of the forward problem. Since the resolution of the inverse problem requires to successively solve the forward problem in an iterative process (equation 1.7), it was a matter of convenience that both the inverse and forward problem be solved within the same programming platform.

The very same heat transfer problem (with the same geometry, parameters profiles and boundary and initial conditions) has been simulated using COMSOL Multiphysics®. The agreement between our results and those obtained from COMSOL Multiphysics® is evaluated through the mean absolute error :

$$MAE\left(T,\hat{T}\right) = \frac{1}{n_T}\sum_{j=1}^{n_T}\left|T^j - \hat{T}^j\right| \tag{1.11}$$

where MAE is the mean absolute error between the calculated temperature from our model (T) and the reference temperature calculated with COMSOL Multiphysics® ($\hat{T}$) and n_T is the total number of temperature points. The mean absolute error between T and $\hat{T}$ at each time step is shown in figure 1.6 along with the average MAE over the entire time range. The temperatures calculated by our model fit the ones computed by COMSOL Multiphysics® very well, being that the mean absolute error has an average of 9.39×10^{-4} °C over the considered time range. Therefore, it is reasonable to consider our algorithm adequate for solving the forward heat transfer problem.

1.3.2 Inverse problem

Initial solution

Now that a synthetic case has been built, all the information needed on the system under study is available to test the inversion algorithm schematized in figure 1.2. First, an initial guess (or initial

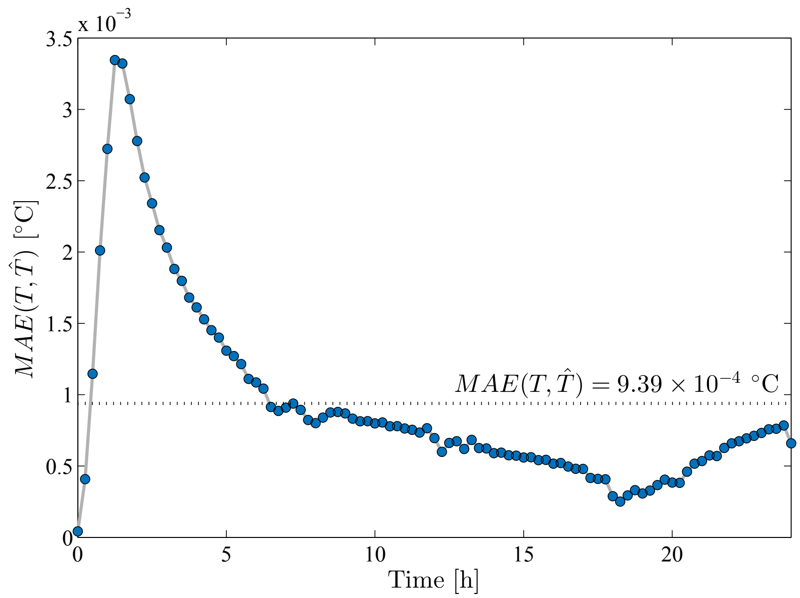


Figure 1.6 – Mean absolute error at every time step between the temperature profiles calculated with our model (T) and the reference temperature profiles calculated with COMSOL Multiphysics® ($\hat{T}$). The dash line represents the average over the entire time range of the mean absolute error ($MAE(T,\hat{T}) = 9.39 \times 10^{-4}$ °C)

.

solution) of the thermal conductivity profile has to be made to initiate the iterative process. The thermal conductivity of snow cannot be lower than that of air ($k_{air} = 0.024$ W/m/K) or higher than that of ice ($k_{ice} = 2.22$ W/m/K). The set of possible initial solutions is then constrained to a rather narrow range of thermal conductivity values. A robust inversion algorithm would allow convergence starting from any initial solutions contained in the mentioned range. Three different scenarios were tested initiating the algorithm with different initial solutions to show the robustness of the algorithm. The three different initial solutions associated to the different scenarios are the following :

$$\begin{cases} \text{Scenario A} & : \quad k(z) = k_{air} = 0.024 \;\; [\text{W/m/K}] \;,\; \forall\, z \in [-0.5, 0] \text{ m} \\ \text{Scenario B} & : \quad k(z) = k_{ice} = 2.22 \;\; [\text{W/m/K}] \;,\; \forall\, z \in [-0.5, 0] \text{ m} \\ \text{Scenario C} & : \quad k(z) = \Psi z + \phi \;\; [\text{W/m/K}] \;,\; \forall\, z \in [-0.5, 0] \text{ m} \end{cases} \tag{1.12}$$

where $\Psi = -0.9$ W/m^2/K and $\phi = 0.05$ W/m/K. The first and second initial solutions test the algorithm starting from the inferior and superior limits of the constrained range respectively. The third initial solution (a linear increase of density with depth) represents an educated guess of what the real thermal conductivity profile could look like, assuming that most snowpacks show an increase in density (*i.e.* thermal conductivity) with depth.

Equation 1.1 can now be solved using the chosen initial guess of the thermal conductivity profile. To solve the forward problem, the temperature profile at $t = 0$ of the synthetic case will be used as the initial condition and the temperature's evolution at the surface and the bottom of the snowpack will define boundary conditions. Dirichlet boundary conditions (imposed temperatures at the boundaries) are preferred here because in practice, temperature measurements at the boundaries of a system are easier to obtain than heat flux measurements.

Performance criteria

After the first solution of the forward problem, it is almost certain that the calculated temperature profiles obtained with the initial guess of $k(z)$ will not fit the reference temperature profiles of the synthetic case. The thermal conductivity is then iteratively corrected until a good agreement is found between the reference and the estimated temperatures. The agreement between the estimated and reference temperature profiles is evaluated through the mean absolute error, which is defined as :

$$MAE\left(T^i, T^R\right) = \frac{1}{n_\tau}\frac{1}{n_j}\sum_{\tau=1}^{n_\tau}\sum_{j=1}^{n_j}\left|T^i_{j,\tau} - T^R_\tau\right| \tag{1.13}$$

where MAE is the mean absolute error between the estimated temperature profiles $T^i_{j,\tau}$ at iteration i and the reference solution T^R_τ, n_τ is the total number of time steps, and n_j is the total number of space steps.

To assess the effect of the initial guess on the algorithm's performance, the same convergence criterion was employed for the three different scenarios. The only information available in practice is the real temperature profile, hence a convergence criterion based on the agreement between the real and estimated temperatures is used. Convergence was considered to be reached when $MAE\left(T^i, T^R\right) < 0.001$ °C.

It is worth mentioning that the same damping factor was used for the three different scenarios in order to compare their effect on the algorithm's performance, since the damping factor directly affects the convergence rate. We used a constant value of $\beta = 2$ for all three cases.

The propagation of error from the estimated thermal conductivity to the SWE is evaluated through the relative error of the SWE defined as :

$$\epsilon_{rel}\left(SWE^i, SWE_R\right) = \frac{|SWE^i - SWE_R|}{SWE_R} \tag{1.14}$$

where ϵ_{rel} is the relative error between the SWE estimated at iteration i and the reference SWE. The latter is evaluated from the reference density profile (see figure 1.4) and is equal to :

$$SWE_R = \frac{1}{\rho_w}\int_\Omega \rho_R(z)dz = 13.75 \text{ cm} \tag{1.15}$$

1.4 Results and discussion

1.4.1 Thermal conductivity profile retrieval

The previously presented approach allowed the retrieval of the density and thermal conductivity profiles for the three different scenarios under study. Convergence was reached for all scenarios, but at different rates. The evolution of the corrected thermal conductivity profiles throughout the iterative process is illustrated in figure 1.7 along with the performance criteria presented in figure 1.8 for the three different scenarios using different initial solutions. The farther the initial guess was from the reference thermal conductivity profile, the longer it took for the algorithm to converge. More precisely, it took 47 iterations to reach convergence for scenario C, as opposed to 76 and 190 iterations for scenarios A and B respectively. As stated before, convergence was reached when $MAE\left(T^i, T^R\right) < 0.001$ °C, allowing the $\epsilon_{rel}\left(SWE^i, SWE_R\right)$ to fall under 3×10^{-3} for all the scenarios where convergence was reached.

The fact that convergence was reached even when the snow cover was assumed to initially have the thermal conductivity of air (scenario A) and ice (scenario B) shows the robustness of the inversion algorithm and underlies the possibility of reaching convergence using any initial solutions contained in that constrained range of thermal conductivity values. That being said, an educated initial guess (scenario C) should be prioritized since it has been shown to yield the fastest convergence rate and thus requires fewer resolutions of the forward problem.

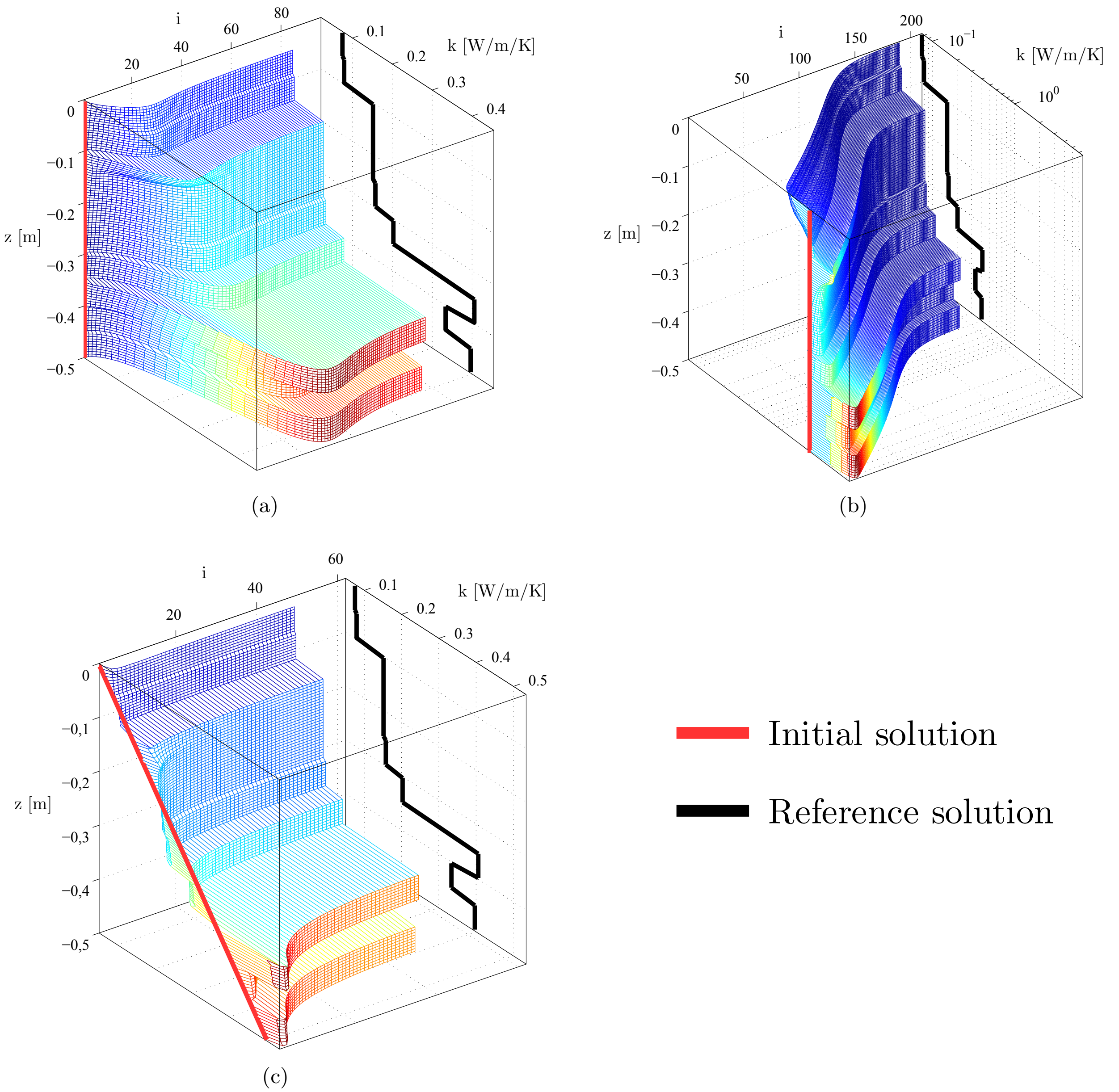


Figure 1.7 – Evolution of the thermal conductivity profile throughout the iterative process until convergence is reached for scenario A (a), B (b) and C (c). A logarithmic scale was used for scenario B (b) due to the large thermal conductivity values reached during the iterative process

In figure 1.8, we can see that the $\epsilon_{rel}\left(SWE^i, SWE_R\right)$ associated with scenario A doesn't present a monotonically decreasing behavior until convergence. A local minimum is found around iteration #21 which can be easily explained by the initial guess used in this particular case. We can see in figure 1.7(a) that the values of the initial guess are all below the values of the reference thermal conductivity profile. The corrections applied to the estimated thermal conductivity allowed to recover a profile very close to the reference solution around iteration #21, consequently giving a value

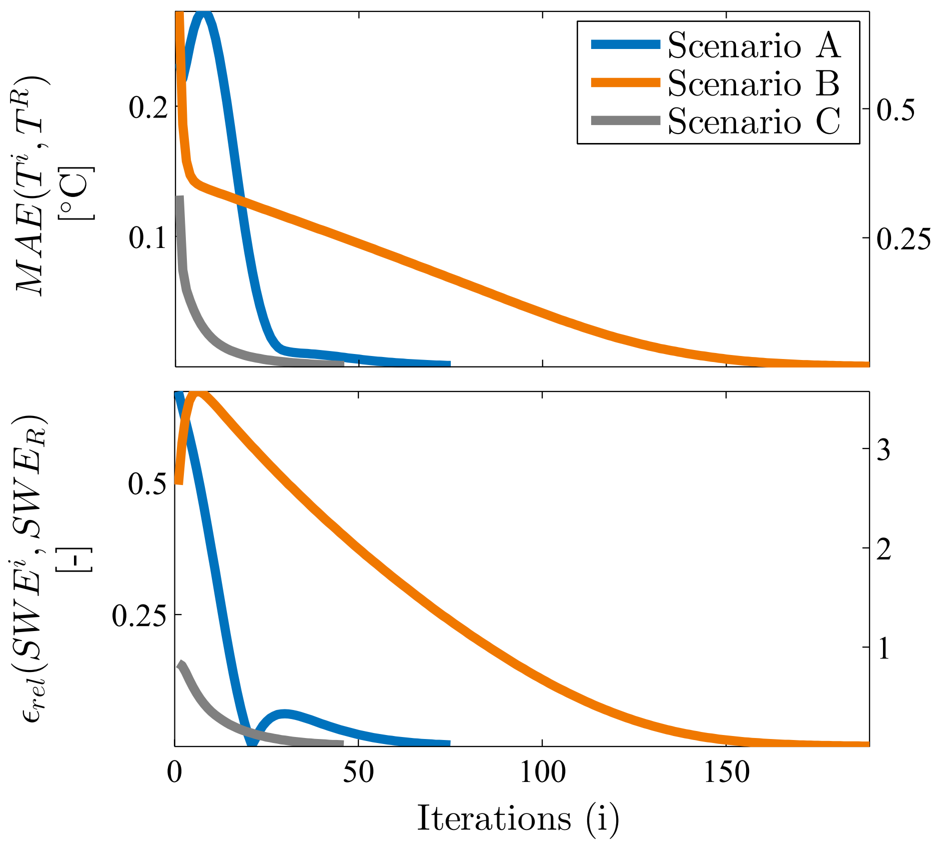


Figure 1.8 – Evolution of the performance measures throughout the iterative process until convergence is reached. It is to be noted that the left *y*-axes are associated with scenarios A and C while the right *y*-axes are associated with scenario B since the latter presents a wider spread of thermal conductivity values throughout the iterative process.

of SWE very close to the reference value. However, the corrections continued to push the corrected profile in the same direction, dragging it away from the reference solution. A few iterations were necessary to reverse the direction of the corrections and reach convergence. This phenomenon is only observable on $\epsilon_{rel}\left(SWE^i, SWE_R\right)$ as opposed to the agreement between the estimated and observed temperatures, where no such behavior arises. This indicates that in practice, the observation of these spurious minima will be impossible since no information is available on the physical characteristics of the snow cover, as we supposed. To avoid this phenomenon, it is recommended to use an educated initial guess comparable to the one used in scenario C to ensure a smooth monotone convergence.

1.4.2 Heat flux estimation at the boundaries

Now that the thermal conductivity and density profiles have been retrieved, the surface and ground heat fluxes can be estimated knowing the temperature profile with the help of equations 1.9. The estimated surface and ground heat fluxes' evolution throughout the 24-hour period is presented in figure 1.9.

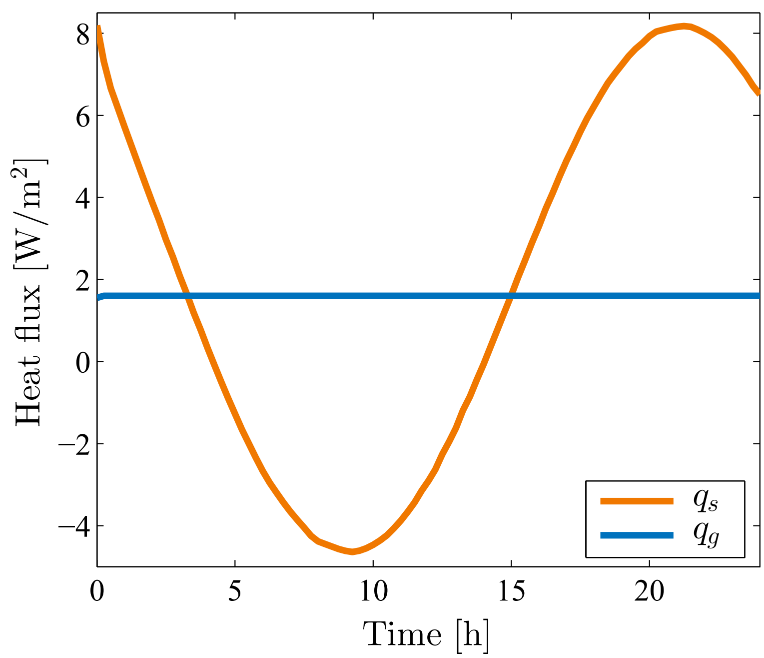


Figure 1.9 – Estimated surface and ground heat fluxes

The imposed constant ground heat flux of 1.6 W/m^2 during the calculation of the synthetic case is very well retrieved. The surface heat flux, on the other hand, presents a periodic behavior which is in agreement with the evolution of the temperature profile.

1.4.3 Sources of error

A few assumptions have been made to simplify our theoretical problem, which could lead to spurious results in practice. First, we assumed that the density and thermal conductivity of snow are directly linked through Yen's parameterization (equation 1.3). In reality, even though density plays the dominant role in controlling the thermal conductivity of many types of snow (Aggarwal *et al.* (2009)), the latter depends on many more parameters such as snow microstructure (bond size,

Tableau 1.1 – Effects of temperature measurements errors on the estimation of *SWE*

Temperature accuracy [°C]	Error on SWE [%]
0.1	15.5
0.05	12.6
0.01	3.4
0.001	0.3

grain size, grain type, pore size), distribution of snow crystals, type of snow, temperature and water content (Adams & Sato (1993); Fukusako (1990); Yen (1981); Anderson (1976); Lachance (2014)). It as also been reported that small snow density values give anomalously low values of thermal conductivity, when using Yen's parameterization (Boone & Etchevers (2001)).

Our theoretical approach deals with error-free data in order to validate the developed algorithm. It is therefore important to assess the effect of measurement errors on the algorithm's performance to confirm its applicability in practice. Two types of measurements are required : temperature measurements and their position in the snow cover. Assuming that errors on the position of the temperature measurements are negligible, the only experimental errors affecting the model's outputs will be the ones associated with the temperature measurements. The agreement between the estimated and the reference temperatures ($MAE\left(T^i, T^R\right)$) provides a good first indication of the effect of the temperature's accuracy on the estimation of the thermal conductivity, the density and the *SWE*. In practice, it is meaningless to observe a mean absolute error between the measured and estimated temperatures that is smaller than the temperature measurements' accuracy. The latter will then limit the *SWE*'s attainable accuracy. From this assumption, the $MAE\left(T^i, T^R\right)$ can be directly associated with the temperature measurements' accuracy to anticipate its effect on the *SWE*'s accuracy. Table 1.1 presents the data from scenario C, which was chosen for its smooth and fast convergence. It shows several $\epsilon_{rel}\left(SWE^i, SWE_R\right)$ (or Error on SWE) values, function of $MAE\left(T^i, T^R\right)$ (or temperature accuracy). Not surprisingly, the more accurate the temperature measurements are, the better the estimation of *SWE*. In practice, the temperature sensors' accuracy should be chosen carefully, depending on the tolerated estimation error on *SWE*.

A value of $MAE\left(T^i, T^R\right)$ below the temperature measurements' accuracy is meaningless. Therefore, the algorithm shouldn't pursue its calculations beyond that point, hence defining a convergence criterion based on the temperature measurements' accuracy.

In practice, measuring snow temperature can be quite challenging. Radiative heating of the temperature probes has to be taken into account, since it is difficult to find a temperature probe that has the same spectral absorption as the snow (Brandt & Warren (1993)). The radiative heating can be reduced by painting the temperature probe in white or by covering it with aluminized mylar (Brandt & Warren (1993)). In our case, to further minimize the effect of the thermal pollution by radiative heating on the algorithm's performance, only the temperature measurements taken at night should be used.

In addition to the accuracy of the temperature measurements, the spatial and temporal resolution of these measurements will also impact the algorithm's performance. In our model, the thickness of a layer is equal to the distance between two temperature measurements. The effective thermal conductivity associated with that layer therefore represents a weighted integral of the thermal conductivity profile within that layer. A fine spatial discretization will then allow to obtain a more detailed thermal conductivity profile, where small layers characterized by high thermal conductivity contrast will be more discernible. Since the thermal conductivity at each iteration is corrected using the average of every $|\vec{\nabla}T|/|\vec{\nabla}T_R|$ ratio (see equation 1.7), the more ratios used, the more precise the correction at each iteration, hence accelerating the convergence rate. The number of ratios being equal to the number of time steps, there are two ways to increase its number in order to accelerate convergence : opting for smaller time steps or considering a wider time frame. Since our approach proposes a time invariant thermal conductivity and density over a certain time frame, there is a limit to which the latter can expand, since the time invariant assumption is not valid if a long period of time is used. Depending on meteorological conditions, the period to be used can go from a few hours to more than a day. We then recommend to reduce the size of the time steps and to be cautious with the extent of the time frame used, in order to accelerate the convergence rate.

1.5 Conclusion

A new method to solve the heat transfer inverse problem in the snow cover is proposed in order to estimate the *SWE*. This approach by successive flux estimation consists in successively estimating the heat flux within the snow cover, until a good agreement is reached between the observed and the computed temperatures in order to estimate its physical properties (thermal conductivity and density profiles). This method allows the estimation of a finely discretized density profile, thus leading to a precise estimation of the snow water equivalent. The efficiency of the proposed method was demonstrated with a realistic synthetic case where the thermal and density profiles were successfully retrieved. The parameterization linking snow density to thermal conductivity, the measurement errors, the radiative heating of the temperature probes and the spatial and temporal discretization of the measurements are all sources of error that will affect the algorithm's ability to converge toward a realistic result. More work on that matter is needed to ensure the practical applicability of the method. Nonetheless, the obtained results pave the way for a new way of estimating SWE with a simple apparatus measuring the temperature profile's evolution.

Furthermore, knowing the temperature, density and thermal conductivity profiles within the snow cover allows to estimate the total heat flux at its boundaries. This information could be of interest for studies investigating the energy balance between soil, snow and atmosphere. Future work on the subject will focus on a more detailed analysis of error and uncertainty, and on the application of the method to experimental data.

Annexe A

A.1 Calculation of boundary heat fluxes

The energy balance carried out on a control volume of density ρ, of specific heat capacity c and of thickness δz (see figure A.1), where heat is transferred only by conduction can be written as follows :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} \tag{A.1}$$

$$= -\frac{1}{\delta z}\left(q_{out} - q_{in}\right) \tag{A.2}$$

The entering or leaving heat flux (q_{in} and q_{out} respectively) can then easily be isolated and expressed as :

$$q_{in} = \delta z \cdot \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + q_{out} \tag{A.3}$$

$$q_{out} = -\delta z \cdot \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + q_{in} \tag{A.4}$$

This logic can be applied to our problem to estimate the surface and ground heat fluxes. Figure 1.3 illustrates all the quantities to which we shall refer for the rest of the demonstration. In our model, the snow between two temperature measurements represents a layer. The surface snow layer of density ρ_{n_l} and thermal conductivity k_{n_l} is located between the temperature measurement points T_n and T_{n-1} separated by a distance Δz. To assess the thermal processes near the surface more precisely, the energy balance will be carried out over a layer that is half the thickness of the surface

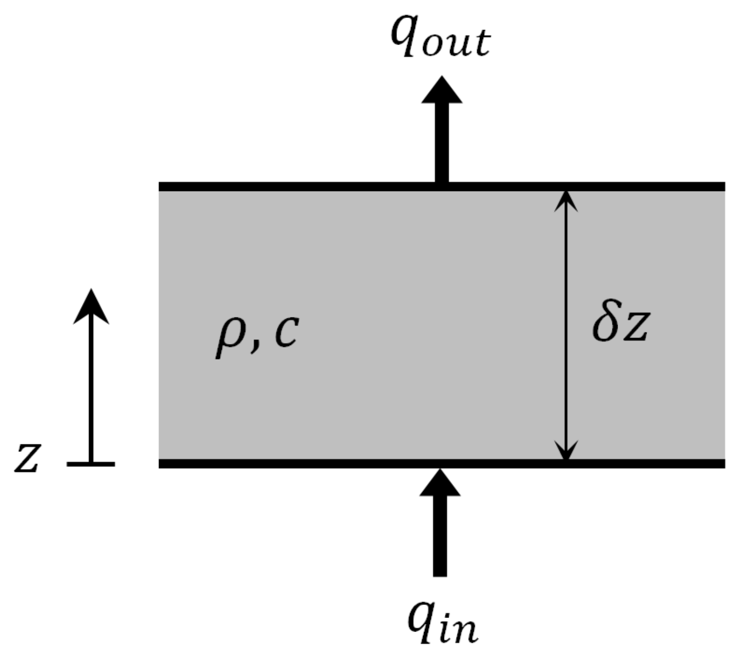


Figure A.1 – Energy balance over a control volume

layer (Incropera *et al.* (2011)). The energy balance over this layer can be written as:

$$\rho_{n_l} c \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} \tag{A.5}$$

$$= -\frac{1}{\frac{\Delta z}{2}} \left(q_s - q_{n_l}\right) \tag{A.6}$$

$$q_s = -\frac{\Delta z}{2} \cdot \rho_{n_l} c \left(\frac{T_n^{\tau+1} - T_n^{\tau}}{\Delta t}\right) - k_{n_l} \left(\frac{T_n^{\tau} - T_{n-1}^{\tau}}{\Delta z}\right) \tag{A.7}$$

where q_s is the surface heat flux, T_x^y is the temperature at the x^{th} measurement point in the snow cover at time y, q_{n_l} is expressed from Fourier's law and all the derivatives are written in their first order forward finite difference scheme form. The same reasoning applied to the bottom layer of density ρ_1 and thermal conductivity k_1 yields :

$$\rho_1 c \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} \tag{A.8}$$

$$= -\frac{1}{\frac{\Delta z}{2}} \left(q_1 - q_g\right) \tag{A.9}$$

$$q_g = \frac{\Delta z}{2} \cdot \rho_1 c \left(\frac{T_0^{\tau+1} - T_0^{\tau}}{\Delta t}\right) - k_1 \left(\frac{T_1^{\tau} - T_0^{\tau}}{\Delta z}\right) \tag{A.10}$$

where q_g is the ground heat flux.

Références

Adams EE & Sato A (1993). Model for effective thermal conductivity of a dry snow cover composed of uniform ice spheres. *Annals of Glaciology*.

Aggarwal R, Negi P & Satyawali P (2009). New density-based thermal conductivity equation for snow. *Defence Science Journal*, 59(2).

Ancey C (1998). *Guide Neige et Avalanche - Connaissances, Pratiques et Sécurité*. Édisud.

Anderson EA (1976). A point energy and mass balance model of a snow cover. U.S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Weather Service.

Anderson PS & Neff WD (2008). Boundary layer physics over snow and ice. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 8(13):3563–3582.

Barrere M, Domine F, Decharme B, Morin S, Vionnet V & Lafaysse M (2017). Evaluating the performance of coupled snow–soil models in surfexv8 to simulate the permafrost thermal regime at a high arctic site. *Geoscientific Model Development*, 10(9):3461.

Bavera D, Bavay M, Jonas T, Lehning M & Michele CD (2014). A comparison between two statistical and a physically-based model in snow water equivalent mapping. *Advances in Water Resources*, 63:167 – 178.

Bernier M, Fortin JP, Gauthier Y, Gauthier R, Roy R & Vincent P (1999). Determination of snow water equivalent using radarsat sar data in eastern canada. *Hydrological Processes*, 13(18):3041–3051.

Bonnet M (2008). Problèmes inverses. mathesis, Ecole Centrale de Paris.

Boone A & Etchevers P (2001). An intercomparison of three snow schemes of varying complexity coupled to the same land surface model: Local-scale evaluation at an alpine site. *Journal of Hydrometeorology*, 2(4):374–394.

Bormann KJ, Westra S, Evans JP & McCabe MF (2013). Spatial and temporal variability in seasonal snow density. *Journal of Hydrology*, 484:63 – 73.

Brandt RE & Warren SG (1993). Solar-heating rates and temperature profiles in antarctic snow and ice. *Journal of Glaciology*, 39(131):99–110.

Brandt RE & Warren SG (1997). Temperature measurements and heat transfer in near-surface snow at the south pole. *Journal of Glaciology*, 43.

Brun E, Martin E, Simon V, Gendron C & C. C (1989). An energy and mass model of snow cover suitable for operational avalanche forecasting. *Journal of Glaciology*, 35(121):333–342.

Calonne N, Flin F, Morin S, Lesaffre B, du Roscoat SR & Geindreau C (2011). Numerical and experimental investigations of the effective thermal conductivity of snow. *Geophysical Research Letters*, 38(23). L23501.

Cess RD, Zhang MH, Potter GL, Blanchet JP, Chalita S, Colman R, Dazlich DA, Del Genio AD, Lacis AA & Dymnikov V (1991). Interpretation of snow-climate feedback as produced by 17 general circulation models. *Science*, 253(5022):888–892.

Chang CL & Chang M (2009). Inverse determination of thermal conductivity using semi-discretization method. *Applied Mathematical Modelling*, 33(3):1644 – 1655.

Colaço MJ, Orlande HR & Dulikravich GS (2006). Inverse and optimization problems in heat transfer. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 28(1):1–24.

Corbane C, Somma J, Bernier M, Fortin J, Gauthier Y & Dedieu JP (2005). Estimation de l'équivalent en eau du couvert nival en montagne libanaise à partir des images radarsat-1/estimation of water equivalent of the snow cover in lebanese mountains by means of radarsat-1 images. *Hydrological sciences journal*, 50(2).

Curry JA, Schramm JL & Ebert EE (1995). Sea ice-albedo climate feedback mechanism. *Journal of Climate*, 8(2):240–247.

Dehghannya J, Ngadi M & Vigneault C (2011). Mathematical modeling of airflow and heat transfer during forced convection cooling of produce considering various package vent areas. *Food Control*, 22(8):1393–1399.

Dettinger M (2005). Changes in streamflow timing in the western united states in recent decades... from the national streamflow information program. Geological Survey (US).

Devine KA & Mekis É (2008). Field accuracy of canadian rain measurements. *Atmosphere-ocean*, 46(2):213–227.

Egli L, Jonas T & Meister R (2009). Comparison of different automatic methods for estimating snow water equivalent. *Cold Regions Science and Technology*, 57(2–3):107 – 115.

Essery R, Martin E, Douville H, Fernández A & Brun E (1999). A comparison of four snow models using observations from an alpine site. *Climate Dynamics*, 15(8):583–593.

Essery R, Morin S, Lejeune Y & Ménard CB (2013). A comparison of 1701 snow models using observations from an alpine site. *Advances in Water Resources*, 55:131 – 148. Snow–Atmosphere Interactions and Hydrological Consequences.

Fukusako S (1990). Thermophysical properties of ice, snow, and sea ice. *International Journal of Thermophysics*, 11(2):353–372.

Gerlich V, Sulovská K & Zálešák M (2013). Comsol multiphysics validation as simulation software for heat transfer calculation in buildings: Building simulation software validation. *Measurement*, 46(6):2003 – 2012. DOI:http://dx.doi.org/10.1016/j.measurement.2013.02.020.

Grysa K (2011). *Inverse Heat Conduction Problems, Heat Conduction - Basic Research.* Vikhrenko PV, éditeur. InTech.

Hammonds K & Baker I (2016). Investigating the thermophysical properties of the ice–snow interface under a controlled temperature gradient part ii: Analysis. *Cold Regions Science and Technology*, 125:12 – 20.

Hayhoe H, Pelletier R & Vliet Lv (1993). Estimation of snowmelt runoff in the peace river region using a soil moisture budget. *Canadian journal of soil science*, 73(4):489–501.

Hydro-Québec (2016). *L'hydroélectricité québécoise, source d'avenir.* http://www.hydroquebec.com/a-propos/notre-energie/hydroelectricite-quebecoise-source-avenir/.

Hydro-Québec (2017). Tarifs d'électricité - en vigueur le 1er avril 2017. Hydro-Québec.

Incropera FP, Bergman TL, Lavine AS & DeWitt DP (2011). *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, 7 edition.

Jacobi HW, Domine F, Simpson WR, Douglas TA & Sturm M (2010). Simulation of the specific surface area of snow using a one-dimensional physical snowpack model: implementation and evaluation for subarctic snow in alaska. *The Cryosphere*, 4:35–51.

Jordan R (1991). A one-dimensional temperature model for a snow cover. U.S. Army Corps of Engineers, Cold Regions Research and Engineering Laboratory.

Knox S (2011). Snow surface energy exchanges and snowmelt in a shrub-covered bog in eastern Ontario, Canada. Mémoire de maîtrise, Carleton University.

Koch F, Prasch M, Bach H, Mauser W, Appel F & Weber M (2011). How will hydroelectric power generation develop under climate change scenarios? a case study in the upper danube basin. *Energies*, 4(10):1508–1541.

Lachance O (2014). Conductivité thermique et perméabilité intrinsèque de la neige compactée. Mémoire de maîtrise, Universié Laval.

Laternser M & Schneebeli M (2003). Long-term snow climate trends of the swiss alps (1931–99). *International Journal of Climatology*, 23(7):733–750.

Lavoie C (2004). Étude de l'atténuation du rayonnement solaire par le couvert de neige en dronning maud land, antarctique. Mémoire de maîtrise.

Lecomte O, Fichefet T, Vancoppenolle M, Domine F, Massonnet F, Mathiot P, Morin S & Barriat P (2013). On the formulation of snow thermal conductivity in large-scale sea ice models. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 5(3):542–557.

Male DH & Granger RJ (1981). Snow surface energy exchange. *Water Resources Research*, 17(3): 609–627.

Marks D & Dozier J (1992). Climate and energy exchange at the snow surface in the alpine region of the Sierra Nevada : 2. snow cover energy balance. *Water Resources Research*, 28(11):3043–3054.

Marks D, Dozier J & Davis RE (1992). Climate and energy exchange at the snow surface in the alpine region of the Sierra Nevada : 1. meteorological measurements and monitoring. *Water Resources Research*, 28(11):3029–3042.

Marshall H, Conway H & Rasmussen L (1999). Snow densification during rain. *Cold Regions Science and Technology*, 30(1):35–41.

Mote TL, Grundstein AJ, Leathers DJ & Robinson DA (2003). A comparison of modeled, remotely sensed, and measured snow water equivalent in the northern great plains. *Water Resources Research*, 39(8). 1209.

Mott R, Gromke C, Grünewald T & Lehning M (2013). Relative importance of advective heat transport and boundary layer decoupling in the melt dynamics of a patchy snow cover. *Advances in Water Resources*, 55:88 – 97. Snow–Atmosphere Interactions and Hydrological Consequences.

Ogoh W & Groulx D (2010). Stefan's problem: Validation of a one-dimensional solid-liquid phase change heat transfer process. *Comsol Conference 2010*.

Oldroyd H, Higgins C, Huwald H, Selker J & Parlange M (2013). Thermal diffusivity of seasonal snow determined from temperature profiles. *Advances in Water Resources*, 55:121 – 130. Snow–Atmosphere Interactions and Hydrological Consequences.

Pasquier P (2005). *Résolution du problème inverse en hydrogéologie par une estimation successive des flux*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique de Montreal.

Pasquier P & Marcotte D (2005). *Solving the groundwater inverse problem by successive flux estimation*, pages 297–308. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

Pasquier P & Marcotte D (2006). Steady- and transient-state inversion in hydrogeology by successive flux estimation. *Advances in Water Resources*, 29(12):1934 – 1952.

Ponzini G & Lozej A (1982). Identification of aquifer transmissivities, the comparison model method. *Water Resources Research*, 18(3).

Pryor RW (2009). *Multiphysics modeling using COMSOL: a first principles approach*. Jones & Bartlett Publishers.

Riche F & Schneebeli M (2013). Thermal conductivity of snow measured by three independent methods and anisotropy considerations. *The Cryosphere*, 7:217–227.

Rittger K, Bair EH, Kahl A & Dozier J (2016). Spatial estimates of snow water equivalent from reconstruction. *Advances in Water Resources*, 94:345 – 363.

Roy V, Goita K, Royer A, E. Walker A & E. Goodison B (2004). Snow water equivalent retrieval in a canadian boreal environment from microwave measurements using the hut snow emission model. 42:1850 – 1859.

Shampine LF & Reichelt MW (1997). The matlab ode suite. *SIAM journal on scientific computing*, 18(1):1–22.

Sommer W & Fiel R (2009). Snow pack analyser (spa) for snow water equivalent (swe) and liquid water content.

Strasser U & Marke T (2010). Escimo.spread - a spreadsheet-based point snow surface energy balance model to calculate hourly snow water equivalent and melt rates for historical and changing climate conditions. *Geoscientific Model Development*, 3(2).

Sun NZ & Sun A (2015). *Model Calibration and Parameter Estimation: For Environmental and Water Resource Systems*. Springer.

Takala M, Luojus K, Pulliainen J, Derksen C, Lemmetyinen J, Kärnä JP, Koskinen J & Bojkov B (2011). Estimating northern hemisphere snow water equivalent for climate research through assimilation of space-borne radiometer data and ground-based measurements. *Remote Sensing of Environment*, 115(12):3517–3529.

Tarantola A (2005). *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Other titles in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Tariku F, Kumaran K & Fazio P (2010). Transient model for coupled heat, air and moisture transfer through multilayered porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(15):3035 – 3044.

Tervola P (1989). A method to determine the thermal conductivity from measured temperature profiles. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 32(8):1425 – 1430.

Vachon F (2009). *Estimation de l'équivalent en eau de la neige en milieu subarctique du Québec par télédetection micro-ondes passives*. Thèse de doctorat, Université Sherbrooke.

Vionnet V, Brun E, Morin S, Boone A, Faroux S, Le Moigne P, Martin E & Willemet JM (2012). The detailed snowpack scheme crocus and its implementation in surfex v7.2. *Geoscientific Model Development*, 5(3):773–791.

Wright M (2013). Frozen potential - the ability to predict snow water equivalent is essential.

Yen YC (1981). Review of thermal properties of snow, ice and sea ice. *CRREL Report 81-10*.

Zhang T (2005). Influence of the seasonal snow cover on the ground thermal regime: An overview. *Reviews of Geophysics*, 43(4). RG4002.

Zhang T & Osterkamp T (1995). Considerations in determining thermal diffusivity from temperature time series using finite difference methods. *Cold Regions Science and Technology*, 23(4):333 – 341.