

**Record Number:** 1210  
**Author, Monographic:** Bobée, B.//Boucher, P.  
**Author Role:**  
**Title, Monographic:** Distribution d'un événement de période de retour donnée tiré d'une loi  
gamma : normalité et variance asymptotique  
**Translated Title:**  
**Reprint Status:**  
**Edition:**  
**Author, Subsidiary:**  
**Author Role:**  
**Place of Publication:** Québec  
**Publisher Name:** INRS-Eau  
**Date of Publication:** 1980  
**Original Publication Date:** Février 1980  
**Volume Identification:**  
**Extent of Work:** v, 44  
**Packaging Method:** pages incluant un annexe  
**Series Editor:**  
**Series Editor Role:**  
**Series Title:** INRS-Eau, Rapport de recherche  
**Series Volume ID:** 120  
**Location/URL:**  
**ISBN:** 2-89146-117-7  
**Notes:** Rapport annuel 1979-1980  
**Abstract:** 10.00\$  
**Call Number:** R000120  
**Keywords:** rapport/ ok/ dl

DISTRIBUTION D'UN EVENEMENT DE PERIODE  
DE RETOUR DONNEE TIRE D'UNE LOI GAMMA:  
NORMALITE ET VARIANCE ASYMPTOTIQUE

Rapport scientifique No. 120

par

B. Bobée et P. Boucher

INRS-Eau  
Université du Québec  
C.P. 7500  
Ste-Foy, Québec  
G1V 4C7

Février 1980

## TABLE DES MATIERES

	Page
LISTE DES TABLEAUX .....	iii
LISTE DES FIGURES .....	iv
INTRODUCTION .....	1
1. Procédure .....	3
1.1 Plan de simulation .....	3
1.2 Ajustement de la distribution Gamma .....	3
1.3 Estimation des évènements $x_T$ de période de retour T ..	4
2. Etude de la normalité de la distribution de $x_T$ .....	7
2.1 Résultats .....	8
2.2 Discussion .....	9
3. Comparaison des variances théoriques et expérimentales d'un évènement $x_T$ de période de retour T .....	14
3.1 Comparaison graphique .....	17
3.2 Comparaison théorique .....	31

## TABLE DES MATIERES

(SUITE)

	Page
4. Conclusions .....	33
4.1 Conclusions sur l'hypothèse de normalité .....	33
4.2 Conclusions sur l'égalité des variances théoriques et expérimentales .....	37
4.3 Recommandations .....	37
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	39
ANNEXE .....	

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 1.1: Nombre effectif ( $p'$ ) de simulations considérées lorsque les ajustements sont effectués par la méthode du maximum de vraisemblance .....	5
Tableau 2.1: Résultats du test de normalité pour les 6 valeurs de $\lambda$ considérées .....	10
Tableau 2.2: Résultats du test de normalité pour les 12 valeurs de $N$ considérées .....	11
Tableau 3.1: Résultats du test de comparaison des variances théoriques et expérimentales pour les 6 valeurs de $\lambda$ considérées .....	32
Tableau 3.2: Résultats du test de comparaison des variances théoriques et expérimentales pour les 12 valeurs de $N$ considérées .....	34

## LISTE DES FIGURES

	Page
<p>Figure 3.1: Evolution de l'écart-type théorique <math>\sigma_m(x_T)</math> en fonction de la probabilité au non-dépassement pour <math>N = 100</math> et différentes valeurs de <math>\lambda</math> (Loi Gamma, méthode des moments) .....</p>	18
<p>Figure 3.2: Evolution de l'écart-type expérimental <math>s_m(x_T)</math> en fonction de la probabilité au non-dépassement pour <math>N = 100</math> et différentes valeurs de <math>\lambda</math> (Loi Gamma, méthode des moments .....</p>	19
<p>Figure 3.3: Evolution de l'écart-type théorique <math>\sigma_v(x_T)</math> en fonction de la probabilité au non-dépassement pour <math>N = 100</math> et différentes valeurs de <math>\lambda</math> (Loi Gamma, maximum de vraisemblance)</p>	20
<p>Figure 3.4: Evolution de l'écart-type expérimental <math>s_v(x_T)</math> en fonction de la probabilité au non-dépassement pour <math>N = 100</math> et différentes valeurs de <math>\lambda</math> (Loi Gamma, maximum de vraisemblance)</p>	21
<p>Figure 3.5: Evolution de l'écart-type théorique <math>\sigma_d(x_T)</math> en fonction de la probabilité au non-dépassement pour <math>N = 100</math> et différentes valeurs de <math>\lambda</math> (Loi Gamma) .....</p>	22
<p>Figure 3.6: Evolution de l'écart-type théorique <math>\sigma_m(x_T)</math> en fonction de la probabilité au non-dépassement pour <math>\lambda = 8</math> (<math>C_s = \sqrt{2/2}</math>) et pour différentes valeurs de <math>N</math> (Loi Gamma, méthode des moments) .....</p>	23

LISTE DES FIGURES

(SUITE)

Page

Figure 3.7:	Evolution de l'écart-type expérimental $s_m(x_T)$ en fonction de la probabilité au non-dépassement pour $\lambda = 8$ ( $C_S = \sqrt{2/2}$ ) et pour différentes valeurs de $N$ (Loi Gamma, méthode des moments) .....	24
Figure 3.8:	Evolution de l'écart-type théorique $\sigma_v(x_T)$ en fonction de la probabilité au non-dépassement pour $\lambda = 8$ ( $C_S = \sqrt{2/2}$ ) et pour différentes valeurs de $N$ (Loi Gamma, maximum de vraisemblance) .....	25
Figure 3.9:	Evolution de l'écart-type expérimental $s_v(x_T)$ en fonction de la probabilité au non-dépassement pour $\lambda = 8$ ( $C_S = \sqrt{2/2}$ ) et pour différentes valeurs de $N$ (Loi Gamma, maximum de vraisemblance) .....	26
Figure 3.10:	Evolution de l'écart-type théorique $\sigma_d(x_T)$ en fonction de la probabilité au non-dépassement pour $\lambda = 8$ ( $C_S = \sqrt{2/2}$ ) et pour différentes valeurs de $N$ (Loi Gamma) .....	27

## INTRODUCTION

L'estimation des débits d'un cours d'eau et particulièrement des débits de crues correspondant à une probabilité au dépassement (donc à une période de retour donnée) est importante tant pour la construction d'ouvrages que pour la détermination de zones d'inondations.

En pratique, à une période de retour  $T$ , on associe un débit de crue (débit maximum journalier obtenu pour l'année) et l'on peut déterminer l'intervalle de confiance de l'estimation correspondant à un niveau de confiance fixé.

L'estimation du débit  $x_T$  est effectuée en ajustant une loi statistique sur un échantillon homogène de valeurs indépendantes de débits de crue; la détermination des intervalles de confiance associés à l'estimation est effectuée à partir de la connaissance de la variance de  $x_T$  (notée  $\text{var } x_T$ ) en supposant que la valeur  $x_T$  est distribuée normalement avec une moyenne  $X_T$  et une variance  $\text{var } x_T$ . Pour une loi et une méthode d'ajustement données, on peut, en général, calculer la formule donnant  $\text{var } x_T$ ; cependant, cette formule est la plupart du temps asymptotique, c'est-à-dire rigoureusement valable pour des échantillons de taille  $N$  très élevée.

Dans cette étude, on poursuit deux objectifs en considérant l'ajustement de distributions Gamma (cas particulier de la loi Pearson type 3):

- vérifier la normalité de la distribution de  $x_T$ ;
- examiner le caractère asymptotique de  $\text{var}(x_T)$ .

La procédure employée consiste à:

- simuler les échantillons de taille  $N$  tirés d'une population Gamma de paramètres  $\alpha$  et  $\lambda$  connus.
  
- estimer pour diverses périodes de retour  $T$  (ou probabilité au dépassement  $\frac{1}{T}$ )  $x_T$  et  $\text{var } x_T$ .

On peut, à partir des séries générées, étudier la normalité de  $x_T$  et le caractère asymptotique de  $\text{var } x_T$ .

## 1. PROCEDURE

### 1.1 Plan de simulation

Pour obtenir la variance expérimentale de  $x_T$  correspondant à une période de retour  $T$ , on génère plusieurs échantillons de variates Gamma tirées d'une population de paramètres  $\alpha$  et  $\lambda$  fixés. On fait la génération au moyen de l'algorithme de Johnk; cette méthode conduit à une bonne reconstitution des paramètres de la distribution d'origine et semble la meilleure des techniques usuelles de génération de variates Gamma (Bobée et Boucher, 1979a).

On considère 6 valeurs d'asymétrie,  $C_S = 2, \sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ . On peut en déduire  $\lambda$  par la relation  $C_S = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}$  reliant l'asymétrie et le paramètre  $\lambda$  de la distribution Gamma; on a  $\lambda = 1, 2, 4, 8, 16$  et  $64$ . Le second paramètre de la distribution Gamma,  $\alpha$ , est choisi de manière à ce que l'écart-type  $\sigma$  de la distribution soit égal à 1; puisque l'on a  $\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}$ , on peut, connaissant  $\lambda$ , en déduire  $\alpha$ , on aura en effet puisque  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = \sqrt{\lambda}$ . Pour chaque couple de paramètres  $(\alpha, \lambda)$ , on génère  $p = 100$  échantillons de taille  $N$ ,  $N$  prenant les valeurs  $N = 20, 40, 60, 80, 100, 150, 200, 300, 400, 500, 750$  et  $1000$ .

### 1.2 Ajustements de la distribution Gamma

Sur chacun des  $p = 100$  échantillons de taille  $N$  générés pour chaque couple  $(\lambda, \alpha)$ , on ajuste une distribution Gamma par la méthode des moments et par la méthode du maximum de vraisemblance. Les détails relatifs à ces méthodes classiques d'ajustement dans le cas de la loi Gamma sont donnés par Bobée et Boucher (1979b). Une fois la distribution ajustée, on calcule la valeur  $x_T$  pour 17 probabilités au dépassement. Les valeurs de  $P$  (telles que  $P = 1/T$ ) considérées sont  $P = .001, .005, .01, .02, .05, .1, .2, .3, .5, .7, .8, .9, .95, .98, .99, .995, .999$ . Ces calculs étant effectués pour 100 échantillons,

on peut déterminer  $\bar{x}_T$ ,  $s^2(x_T)$ ,  $C_S(x_T)$  et  $C_K(x_T)$  qui sont respectivement la moyenne, la variance, l'asymétrie et l'aplatissement de l'échantillon des 100 valeurs de  $x_T$  correspondant à la période de retour  $T$  pour  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $N$  fixés.

Lorsqu'on ajuste à l'échantillon simulé de taille  $N$ , une loi Gamma par la méthode du maximum de vraisemblance (M.V.), on doit savoir, à priori, le signe de l'asymétrie, puisque suivant ce signe, les équations du maximum de vraisemblance diffèrent. Le programme de calcul considère un critère simple; lorsque l'asymétrie de l'échantillon généré est négative, ce qui peut se produire en pratique pour les valeurs élevées de  $\lambda$  en raison de la variance d'échantillonnage de  $C_S$ , on ne considère pas la méthode du M.V. Le tableau 1.1 donne le nombre effectif  $p'$  de simulations que l'on considère en pratique. On peut observer que lorsque  $\lambda$  est élevé (faible asymétrie) et  $N$  petit, il est possible, compte tenu des erreurs d'échantillonnage, que l'asymétrie de l'échantillon soit négative dans un nombre assez important de cas même si la population gamma d'origine est à asymétrie positive puisque  $\alpha > 0$ .

### 1.3 Estimation des événements $X_T$ de période de retour $T$

A partir d'un échantillon de taille  $N$ , on peut déterminer le débit de période de retour  $x_T$  qui est une estimation de la vraie valeur de la population  $X_T$  par:

$$x_T = \hat{\mu}_1' + k\sqrt{\hat{\sigma}_2}$$

$\lambda \backslash N$	1	2	4	8	16	64
20	100	97	94	92	83	60
40	100	99	99	97	90	77
60	100	100	99	99	94	81
80	100	100	100	96	94	76
100	100	100	100	99	97	80
150	100	100	100	100	99	89
200	100	100	100	100	100	96
300	100	100	100	100	100	94
400	100	100	100	100	100	98
500	100	100	100	100	100	99
750	100	100	100	100	100	100
1000	100	100	100	100	100	100

Tableau 1.1: Nombre effectif ( $p'$ ) de simulations considérées lorsque les ajustements sont effectués par la méthode du maximum de vraisemblance.

où  $\hat{\mu}_1'$  et  $\hat{\mu}_2$  sont des estimations de la moyenne et de la variance de la population,  $\kappa$  est l'estimateur de la variable standardisée obtenue par un ajustement polynomial en fonction de  $C_S$  et  $P$  (Bobée et Boucher, 1979b).

Pour  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $N$  fixés, on peut estimer  $p'$  valeurs de  $x_T$  et en déduire les valeurs  $\bar{x}_T$ ,  $s(x_T)$ ,  $C_S(x_T)$  et  $C_K(x_T)$  qui représentent respectivement la moyenne, l'écart-type, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement calculés sur l'échantillon des  $p'$  valeurs. Ces caractéristiques sont données par:

$$\bar{x}_T = \frac{1}{p'} \sum_{i=1}^{p'} \bar{x}_{T,i}$$

$$s(x_T) = \sqrt{\frac{1}{(p'-1)} \sum_{i=1}^{p'} (x_{T,i} - \bar{x}_T)^2}$$

$$C_S(x_T) = \frac{p' (p'-1)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{p'} (x_{T,i} - \bar{x}_T)^3}{(p'-2) \left[ \sum_{i=1}^{p'} (x_{T,i} - \bar{x}_T)^2 \right]^{3/2}}$$

$$C_K(x_T) = \frac{p' (p'^2-1) \sum_{i=1}^{p'} (x_{T,i} - \bar{x}_T)^4}{(p'-2)(p'-3) \left[ \sum_{i=1}^{p'} (x_{T,i} - \bar{x}_T)^2 \right]^2} - \frac{3(3p'-5)}{(p'-2)(p'-3)}$$

A l'aide des valeurs de  $C_S(x_T)$  et  $C_K(x_T)$ , on peut étudier l'hypothèse de normalité de la distribution de  $x_T$ . Le test utilisé est décrit en annexe A et les résultats sont discutés à la section 2.

On peut également comparer la valeur  $s(x_T)$  obtenue par simulation avec la valeur  $\sigma(x_T)$  donnée par les formules asymptotiques en fonction de la méthode d'ajustement utilisée. Cette comparaison est effectuée en traçant, sur du papier de probabilité, les courbes  $s(x_T)$  et  $\sigma(x_T)$ , on est alors en mesure d'apprécier qualitativement la validité des formules théoriques donnant  $\sigma(x_T)$ . Ces graphiques ainsi que la discussion qui en découle, sont présentés à la section 3.

D'une manière plus rigoureuse, on teste si  $\sigma^2(x_T)$  diffère significativement de  $s^2(x_T)$ . Le test utilisé, est décrit en annexe et les résultats en sont discutés à la section 3.

## 2.0 Etude de la normalité de la distribution de $x_T$

Pour une distribution normale, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de la population valent respectivement 0 et 3. Connaissant  $C_S(x_T)$  et  $C_K(x_T)$ , on peut alors, au moyen de tests décrits en

annexe A, examiner si ces valeurs diffèrent significativement des valeurs théoriques correspondant à une loi normale. Ces tests sont effectués aux niveaux de signification de 1% et 5% et dans les conclusions on considère le test qui conduit au résultat le plus restrictif.

## 2.1 Résultats

Le tableau 2.1 donne les résultats des tests sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement pour chaque valeur de  $\lambda$ , le décompte se faisant sur les 12 valeurs considérées de N. Le tableau 2.2 donne les résultats du test pour chaque valeur de N, le décompte se faisant sur les 6 valeurs considérées de  $\lambda$ . Une conclusion unique est tirée de l'emploi conjoint des 2 tests, on s'en tient au résultat le plus restrictif; par exemple, si le test sur le coefficient d'asymétrie conduit à un rejet au niveau 5% et une acceptation au niveau 1% et si celui sur le coefficient d'aplatissement conduit à un rejet au niveau 1%, la conclusion globale sera un rejet au niveau 1%. On utilise les codes suivants:

N: non significatif au niveau de 5%;

O: significatif au niveau de 5% et non significatif au niveau de 1%;

\*: significatif au niveau de 1%.

La conclusion de l'emploi des deux tests conjointement est donnée par le tableau suivant:

		TEST SUR $C_S$		
		N	0	*
TEST SUR $C_K$	N	N	0	*
	0	0	0	*
	*	*	*	*

## 2.2 Discussion et conclusions

### a) Etude de la normalité en fonction de $\lambda$

Le tableau 2.1 montre que les deux méthodes d'ajustement donnent des résultats très comparables sauf pour  $\lambda = 1$  où la méthode du maximum de vraisemblance donne un taux d'acceptation nettement plus grand, dans ce cas l'asymétrie est relativement élevée ( $C_S = 2$ ) et l'on confirme ainsi la divergence entre les deux méthodes d'estimation et la supériorité du M.V. lorsque l'asymétrie augmente.

Tableau 2.1: Résultats du test de normalité pour les 6 valeurs de  $\lambda$  considérées.

LAMBDA= 1							LAMBDA= 2							LAMBDA= 4						
MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.					
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N			
.001	3	3	6	1	1	10	.001	4	0	8	2	2	8	.001	2	1	9			
.005	3	2	7	1	1	10	.005	4	0	8	2	2	8	.005	2	0	10			
.010	2	3	7	1	1	10	.010	4	0	8	2	0	10	.010	2	0	10			
.020	1	3	8	1	1	10	.020	1	3	8	1	1	10	.020	2	0	10			
.050	1	2	9	0	1	11	.050	1	1	10	1	1	10	.050	1	1	10			
.100	0	1	11	0	1	11	.100	1	1	10	1	1	10	.100	1	0	11			
.200	0	0	12	0	1	11	.200	0	1	11	0	1	11	.200	1	0	11			
.300	0	0	12	0	0	12	.300	0	0	12	0	0	12	.300	1	0	11			
.500	0	0	12	0	1	11	.500	0	0	12	0	0	12	.500	1	2	9			
.700	0	0	12	1	1	10	.700	0	1	11	0	1	11	.700	1	0	11			
.800	0	0	12	1	2	9	.800	0	1	11	0	0	12	.800	1	0	11			
.900	1	3	8	2	3	7	.900	0	2	10	1	2	9	.900	0	2	10			
.950	5	3	4	5	2	5	.950	1	2	9	2	2	8	.950	0	1	11			
.980	9	1	2	7	2	3	.980	2	2	8	4	1	7	.980	0	2	10			
.990	10	0	2	9	0	3	.990	3	3	6	4	2	6	.990	1	1	10			
.995	10	1	1	9	0	3	.995	4	3	5	4	4	4	.995	1	0	11			
.999	10	1	1	9	1	2	.999	8	1	3	8	3	1	.999	1	1	10			

LAMBDA= 8							LAMBDA= 16							LAMBDA= 64						
MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.					
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N			
.001	1	1	10	1	0	11	.001	0	2	10	1	0	11	.001	0	4	8			
.005	1	1	10	1	0	11	.005	0	2	10	1	0	11	.005	0	3	9			
.010	1	1	10	0	1	11	.010	0	2	10	0	1	11	.010	0	3	9			
.020	1	0	11	0	1	11	.020	0	1	11	0	2	10	.020	0	3	9			
.050	1	0	11	0	1	11	.050	0	1	11	0	2	10	.050	0	2	10			
.100	1	0	11	0	0	12	.100	0	1	11	0	1	11	.100	0	1	11			
.200	0	0	12	0	0	12	.200	0	1	11	0	1	11	.200	0	1	11			
.300	0	0	12	0	0	12	.300	0	0	12	0	1	11	.300	0	0	12			
.500	0	0	12	0	0	12	.500	0	3	9	0	3	9	.500	1	0	11			
.700	0	0	12	0	0	12	.700	0	0	12	0	1	11	.700	1	0	11			
.800	0	0	12	0	0	12	.800	0	0	12	0	2	10	.800	0	1	11			
.900	0	0	12	0	2	10	.900	0	0	12	0	2	10	.900	0	0	12			
.950	0	1	11	0	1	11	.950	0	0	12	0	2	10	.950	0	0	12			
.980	0	0	12	0	1	11	.980	0	0	12	0	2	10	.980	0	1	11			
.990	0	0	12	0	1	11	.990	0	0	12	1	1	10	.990	0	1	11			
.995	0	0	12	0	2	10	.995	0	1	11	1	1	10	.995	0	1	11			
.999	0	0	12	0	3	9	.999	0	1	11	1	1	10	.999	0	1	11			

\* test significatif au niveau de 1%;  
 O test significatif au niveau de 5% et non significatif au niveau de 1%;  
 N test non significatif au niveau de 5%;  
 P probabilité au dépassement.

Tableau 2.2: Résultats du test de normalité pour les 12 valeurs de N considérées.

N= 20							N= 40							N= 60						
MOMENTS			MAX. VRAIS.				MOMENTS			MAX. VRAIS.				MOMENTS			MAX. VRAIS.			
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N
.001	2	3	1	2	1	3	.001	2	3	1	3	0	3	.001	1	0	5	0	1	5
.005	2	2	2	1	2	3	.005	2	2	2	3	0	3	.005	1	0	5	0	1	5
.010	2	2	2	0	2	4	.010	2	2	2	3	0	3	.010	1	0	5	0	0	6
.020	1	2	3	0	2	4	.020	2	1	3	3	0	3	.020	1	0	5	0	0	6
.050	1	0	5	0	1	5	.050	1	1	4	1	2	3	.050	1	0	5	0	0	6
.100	1	0	5	0	0	6	.100	1	0	5	1	1	4	.100	0	0	6	0	0	6
.200	0	0	6	0	0	6	.200	0	1	5	0	1	5	.200	0	0	6	0	0	6
.300	0	0	6	0	0	6	.300	0	0	6	0	0	6	.300	0	0	6	0	0	6
.500	0	0	6	0	0	6	.500	0	0	6	0	1	5	.500	0	0	6	0	0	6
.700	0	0	6	0	0	6	.700	0	0	6	1	0	5	.700	0	0	6	0	1	5
.800	0	0	6	0	0	6	.800	0	0	6	1	0	5	.800	0	0	6	0	0	6
.900	1	1	4	0	2	4	.900	0	0	6	2	1	3	.900	0	0	6	0	0	6
.950	2	0	4	2	1	3	.950	1	0	5	2	1	3	.950	0	1	5	0	2	4
.980	2	1	3	2	1	3	.980	1	1	4	2	1	3	.980	1	0	5	2	0	4
.990	3	0	3	2	1	3	.990	1	1	4	3	0	3	.990	1	0	5	2	0	4
.995	3	0	3	3	1	2	.995	2	1	3	3	0	3	.995	1	1	4	2	0	4
.999	3	0	3	3	1	2	.999	2	1	3	3	0	3	.999	2	0	4	2	0	4

N= 80							N= 100							N= 150						
MOMENTS			MAX. VRAIS.				MOMENTS			MAX. VRAIS.				MOMENTS			MAX. VRAIS.			
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N
.001	2	2	2	0	1	5	.001	2	0	4	2	1	3	.001	1	0	5	0	1	5
.005	2	1	3	0	1	5	.005	2	0	4	2	1	3	.005	1	0	5	1	0	5
.010	2	1	3	0	0	6	.010	1	1	4	2	0	4	.010	1	0	5	1	0	5
.020	0	3	3	0	0	6	.020	1	1	4	2	0	4	.020	0	1	5	0	2	4
.050	0	2	4	0	0	6	.050	1	1	4	1	1	4	.050	0	1	5	0	2	4
.100	0	1	5	0	0	6	.100	1	1	4	1	1	4	.100	0	1	5	0	2	4
.200	0	0	6	0	0	6	.200	1	0	5	1	1	4	.200	0	0	6	0	1	5
.300	0	0	6	0	0	6	.300	1	0	5	1	0	5	.300	0	0	6	0	1	5
.500	0	1	5	0	1	5	.500	0	1	5	0	1	5	.500	0	0	6	0	0	6
.700	0	0	6	0	1	5	.700	0	0	6	0	0	6	.700	0	0	6	0	0	6
.800	0	0	6	0	1	5	.800	0	0	6	0	0	6	.800	0	0	6	0	1	5
.900	0	0	6	1	0	5	.900	0	0	6	0	0	6	.900	0	1	5	1	1	4
.950	0	1	5	1	0	5	.950	1	2	3	0	0	6	.950	1	0	5	2	0	4
.980	1	1	4	1	0	5	.980	1	1	4	0	1	5	.980	1	0	5	2	0	4
.990	1	1	4	1	0	5	.990	2	0	4	1	0	5	.990	1	0	5	2	1	3
.995	1	1	4	1	1	4	.995	2	0	4	1	1	4	.995	1	0	5	1	2	3
.999	2	1	3	1	2	3	.999	2	0	4	2	0	4	.999	2	0	4	2	1	3

\* test significatif au niveau de 1%;  
O test significatif au niveau de 5% et non significatif au niveau de 1%;  
N test non significatif au niveau de 5%;  
P probabilité au dépassement.

Tableau 2.2 (suite): Résultats du test de normalité pour les 12 valeurs de N considérées.

N= 200						N= 300						N= 400					
MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.		
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N
.001	0	1	5	0	1	5	.001	0	0	6	0	0	6	.001	0	0	6
.005	0	1	5	0	1	5	.005	0	0	6	0	0	6	.005	0	0	6
.010	0	1	5	0	1	5	.010	0	0	6	0	0	6	.010	0	0	6
.020	0	1	5	0	0	6	.020	0	0	6	0	0	6	.020	0	0	6
.050	0	1	5	0	0	6	.050	0	0	6	0	0	6	.050	0	0	6
.100	0	0	6	0	0	6	.100	0	0	6	0	0	6	.100	0	0	6
.200	0	0	6	0	0	6	.200	0	0	6	0	0	6	.200	0	0	6
.300	0	0	6	0	0	6	.300	0	0	6	0	0	6	.300	0	0	6
.500	0	0	6	0	0	6	.500	1	2	3	1	2	3	.500	0	0	6
.700	0	1	5	0	0	6	.700	1	0	5	1	1	4	.700	0	0	6
.800	0	1	5	0	1	5	.800	0	1	5	0	1	5	.800	0	0	6
.900	0	1	5	0	2	4	.900	0	0	6	0	2	4	.900	0	0	6
.950	0	1	5	1	1	4	.950	0	0	6	0	1	5	.950	0	0	6
.980	1	1	4	2	1	3	.980	0	0	6	1	1	4	.980	1	0	5
.990	2	0	4	2	1	3	.990	0	0	6	1	1	4	.990	1	0	5
.995	2	0	4	2	1	3	.995	0	1	5	1	1	4	.995	1	0	5
.999	2	0	4	2	1	3	.999	0	2	4	1	2	3	.999	1	0	5

N= 500						N= 750						N=1000					
MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.		
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N
.001	0	0	6	0	0	6	.001	0	2	4	0	1	5	.001	0	0	6
.005	0	0	6	0	0	6	.005	0	2	4	0	1	5	.005	0	0	6
.010	0	0	6	0	0	6	.010	0	2	4	0	1	5	.010	0	0	6
.020	0	0	6	0	0	6	.020	0	1	5	0	1	5	.020	0	0	6
.050	0	0	6	0	0	6	.050	0	1	5	0	1	5	.050	0	0	6
.100	0	0	6	0	0	6	.100	0	1	5	0	1	5	.100	0	0	6
.200	0	0	6	0	0	6	.200	0	1	5	0	1	5	.200	0	0	6
.300	0	0	6	0	0	6	.300	0	0	6	0	0	6	.300	0	0	6
.500	1	0	5	1	0	5	.500	0	1	5	0	1	5	.500	0	0	6
.700	1	0	5	1	0	5	.700	0	0	6	0	0	6	.700	0	0	6
.800	1	0	5	1	0	5	.800	0	0	6	0	0	6	.800	0	0	6
.900	0	2	4	0	0	6	.900	0	0	6	0	1	5	.900	0	1	5
.950	1	0	5	0	0	6	.950	0	1	5	0	1	5	.950	0	1	5
.980	1	0	5	0	1	5	.980	1	0	5	0	0	6	.980	0	1	5
.990	1	0	5	1	0	5	.990	1	1	4	0	0	6	.990	0	1	5
.995	1	0	5	1	0	5	.995	1	1	4	0	0	6	.995	0	0	6
.999	1	0	5	1	2	3	.999	2	0	4	0	1	5	.999	0	1	5

\* test significatif au niveau de 1%;  
 O test significatif au niveau de 5% et non significatif au niveau de 1%;  
 N test non significatif au niveau de 5%;  
 P probabilité au dépassement.

Pour les probabilités au dépassement, grandes et petites, le rejet de l'hypothèse de normalité est assez important pour les valeurs  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 2$  (asymétrie supérieure à  $\sqrt{2}$ ). Par contre, pour les probabilités au dépassement intermédiaires ( $.1 < P < .9$ ), le taux d'acceptation de la normalité est très bon. La distribution de  $x_T$  s'éloigne de la normalité, en particulier pour les périodes de retour élevées ( $T = 1/P > 10$ ).

b) Etude de la normalité en fonction de la taille de l'échantillon (N)

Le tableau 2.2 permet d'examiner l'hypothèse de normalité de la distribution de  $x_T$  lorsque N varie, le décompte étant effectué pour les 6 valeurs de  $\lambda$  considérées globalement. Si l'on se place au niveau de 1% (écart très significatif de la normalité), on peut constater que pour les valeurs peu élevées de N ( $N < 40$ ), il y a rejet dans environ la moitié des cas pour les probabilités au dépassement élevées ou faibles; les cas de rejet correspondant aux valeurs faibles de  $\lambda$  (comme peut le montrer l'interprétation conjointe des tableaux 2.1 et 2.2). En se plaçant au niveau de signification de 5%, le rejet est encore plus élevé pour les valeurs peu élevées de N. Si on considère les probabilités au dépassement intermédiaires (.2, .8), l'acceptation à 5% est pratiquement systématique même pour les valeurs peu élevées de N.

Lorsque N augmente, le taux d'acceptation augmente (quelles que soient les valeurs de  $\lambda$ ), pour  $N > 60$  en considérant la méthode du maximum de vraisemblance, il y a acceptation pratiquement

systematique de l'hypothèse de normalité (le cas  $N = 100$  faisant un peu exception) sauf pour les probabilités au non-dépassement élevées ( $>.98$ ) pour lesquelles on observe certains cas de rejets.

On peut en conclure que l'hypothèse de normalité est d'autant plus acceptable que  $N$  est élevé et que l'on se trouve dans la zone des probabilités au non-dépassement faibles ou intermédiaires. Dans le cas de l'étude hydrologique des crues pour lesquelles on dispose en général d'échantillons de taille réduite ( $N < 60$ ), il y a donc lieu d'envisager prudemment l'hypothèse de normalité surtout pour les fortes probabilités au non-dépassement, c'est-à-dire pour les débits de périodes de retour élevées.

### 3. Comparaisons des variances théoriques et expérimentales d'un évènement $x_T$ de période de retour $T$

En ce qui concerne la variance théorique de la valeur  $x_T$  d'un évènement de période de retour  $T$ , elle est donnée par des formules asymptotiques; c'est pourquoi il est important d'examiner dans quelle nature les résultats obtenus sont acceptables pour  $N$  petit et quelle est l'influence de l'asymétrie de la population Gamma d'origine sur la validité de ces formules.

En pratique, on considère 3 formules théoriques établies pour la distribution Gamma; la première est relative à l'estimation de  $x_T$  par la méthode du M.V., la seconde à l'estimation de  $x_T$  par la méthode des moments, la dernière est une formule plus générale, indépendante de la méthode d'ajustement considérée, et qui peut aussi être appliquée à d'autres distributions que la loi Gamma.

Ces variances théoriques seront comparées aux variances expérimentales de  $x_T$  calculées sur les  $p = 100$  échantillons simulés pour chaque période de retour  $T$ ,  $\lambda$  et  $N$  étant fixés (dans le cas de la méthode du M.V, on est amené à considérer un nombre effectif  $p' < 100$ , comme on l'a expliqué en 1.2)  $\sigma_M^2(x_T)$  est l'estimateur de  $\sigma^2(x_T)$  lorsque la distribution Gamma est ajustée par la méthode des moments;  $\sigma_M^2(x_T)$  est donné (Bobée, 1973) par:

$$\sigma_M^2(x_T) = \frac{\mu_2}{N} \left\{ 1 + \frac{K^2}{2} \left( 1 + \frac{3}{4} C_S^2 \right) + KC_S + 6 \left( 1 + \frac{C_S^2}{4} \right) \cdot \left( \frac{\partial K}{\partial C_S} \right)_0 \right. \\ \left. \cdot \left[ \left( \frac{\partial K}{\partial C_S} \right)_0 \left( 1 + \frac{5}{4} C_S^2 \right) + \frac{KC_S}{2} \right] \right\} \quad (3.1)$$

où:

$\mu_2$  est la variance théorique de la population d'origine, estimée en pratique par la variance non biaisée de l'échantillon sur lequel on ajuste la loi Gamma.

$K$  est la variable Pearson type 3 standardisée qui dépend de la période de retour  $T$  et de l'asymétrie  $C_S$ .

$\left( \frac{\partial K}{\partial C_S} \right)_0$  est la dérivée de  $K$  par rapport à l'asymétrie de la distribution;

cette valeur peut être déduite des tables donnant  $K$ .

$\sigma^2_{\nu}(x_T)$  est l'estimateur de  $\sigma^2(x_T)$  lorsque l'on ajuste une distribution Gamma par le maximum de vraisemblance;  $\sigma^2_{\nu}(x_T)$  est donné (Bobée et Boucher, 1979b) par:

$$\sigma^2_{\nu}(x_T) = \frac{1}{N \cdot \eta \cdot \alpha^2} \left\{ \gamma \Psi'(\lambda) \left[ 1 + \frac{K}{\sqrt{\lambda}} \right]^2 + 1 + \frac{K}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial K}{\partial C_s} \right) \right. \\ \left. - 2 \left[ 1 + \frac{K}{\sqrt{\lambda}} \right] \left[ 1 + \frac{K}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial K}{\partial C_s} \right) \right] \right\} \quad (3.2)$$

où

$\Psi'(\lambda)$  est la fonction trigamma donnée par les tables

$$\eta = \Psi'(\lambda) - \frac{1}{\lambda}$$

Enfin, la variance de  $x_T$  peut aussi être estimée (Fourgeaud et Fuchs, 1972) par la formule générale asymptotique:

$$\sigma_D^2(x_T) = \frac{P(1-P)}{N \cdot f^2(x_T)}$$

où  $f(x_T)$  représente la valeur de la fonction densité de la loi Gamma pour la valeur  $x_T$ .

$s_M^2(x_T)$  et  $s_V^2(x_T)$  sont les variances expérimentales non-biaisées obtenues à partir de l'échantillon des 100 valeurs de  $x_T$  estimées, après ajustement de la loi Gamma, respectivement par la méthode des moments et par la méthode du maximum de vraisemblance.

### 3.1 Comparaison graphique

Afin d'effectuer une certaine comparaison de l'évolution des variances théoriques et expérimentales d'un événement  $x_T$  de période de retour donnée, on considère deux types de graphiques:

- a) Pour  $N = 100$ , on trace (figures 3.1 à 3.5) en fonction de la probabilité au non dépassement ( $1 - P = 1/T$ ),  $\sigma_M$ ,  $s_M$ ,  $\sigma_V$ ,  $s_V$ ,  $\sigma_D$  pour les 6 valeurs de  $\lambda$  considérées. Ces graphiques permettent une comparaison des variances et montrent l'influence de  $\lambda$  lorsque  $N$  est fixé.
- b) Pour  $\lambda = 8$ , on trace (figures 3.6 à 3.10) les variances théoriques et expérimentales pour  $N = 20, 200, 1000$ . Ces graphiques montrent l'influence de  $N$ .

La comparaison des différentes figures permet de faire plusieurs observations:

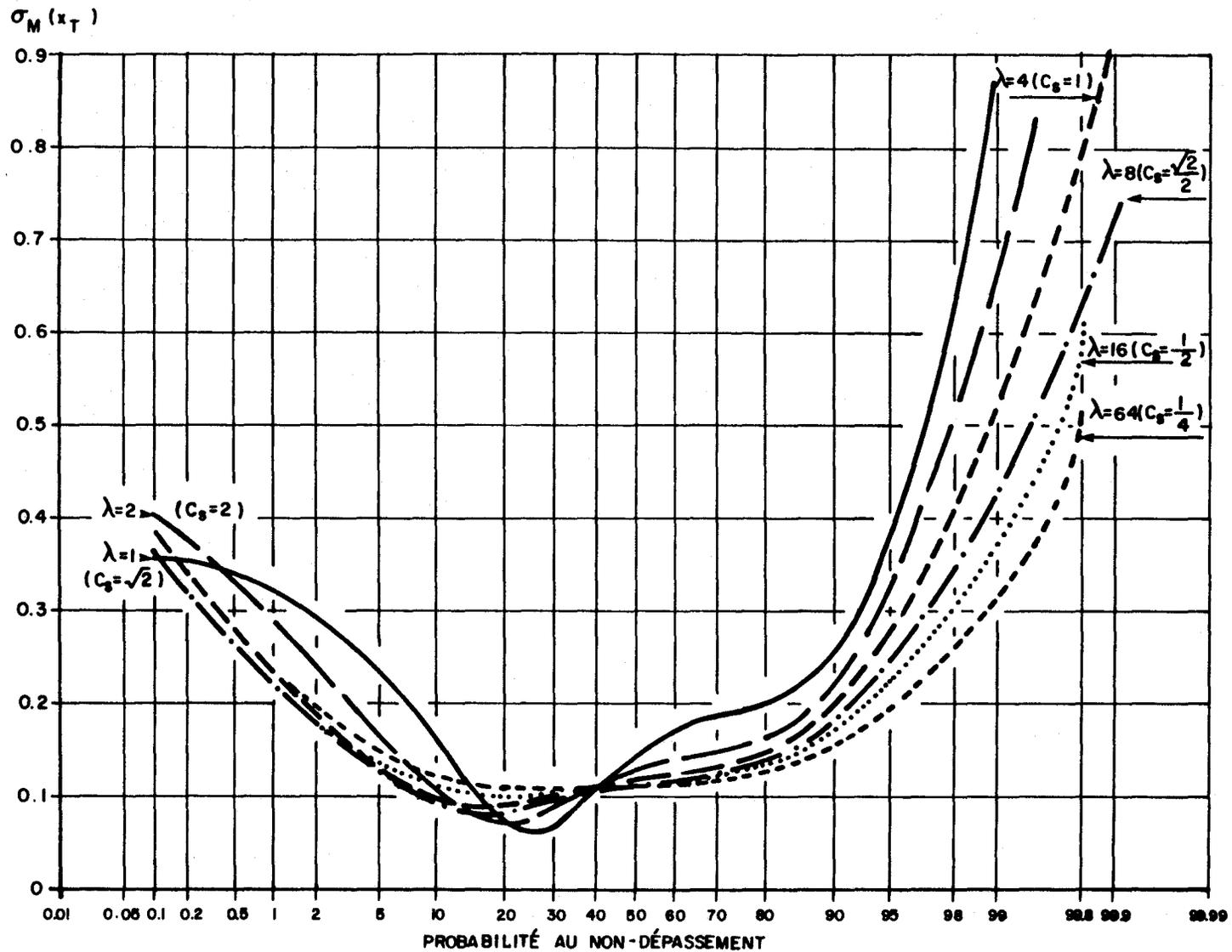


Figure 3.1 : Evolution de l'écart-type théorique  $\sigma_m(x_T)$  en fonction de la probabilité au non-dépassement pour  $N = 100$  et différentes valeurs de  $\lambda$  (Loi Gamma, méthode des moments).

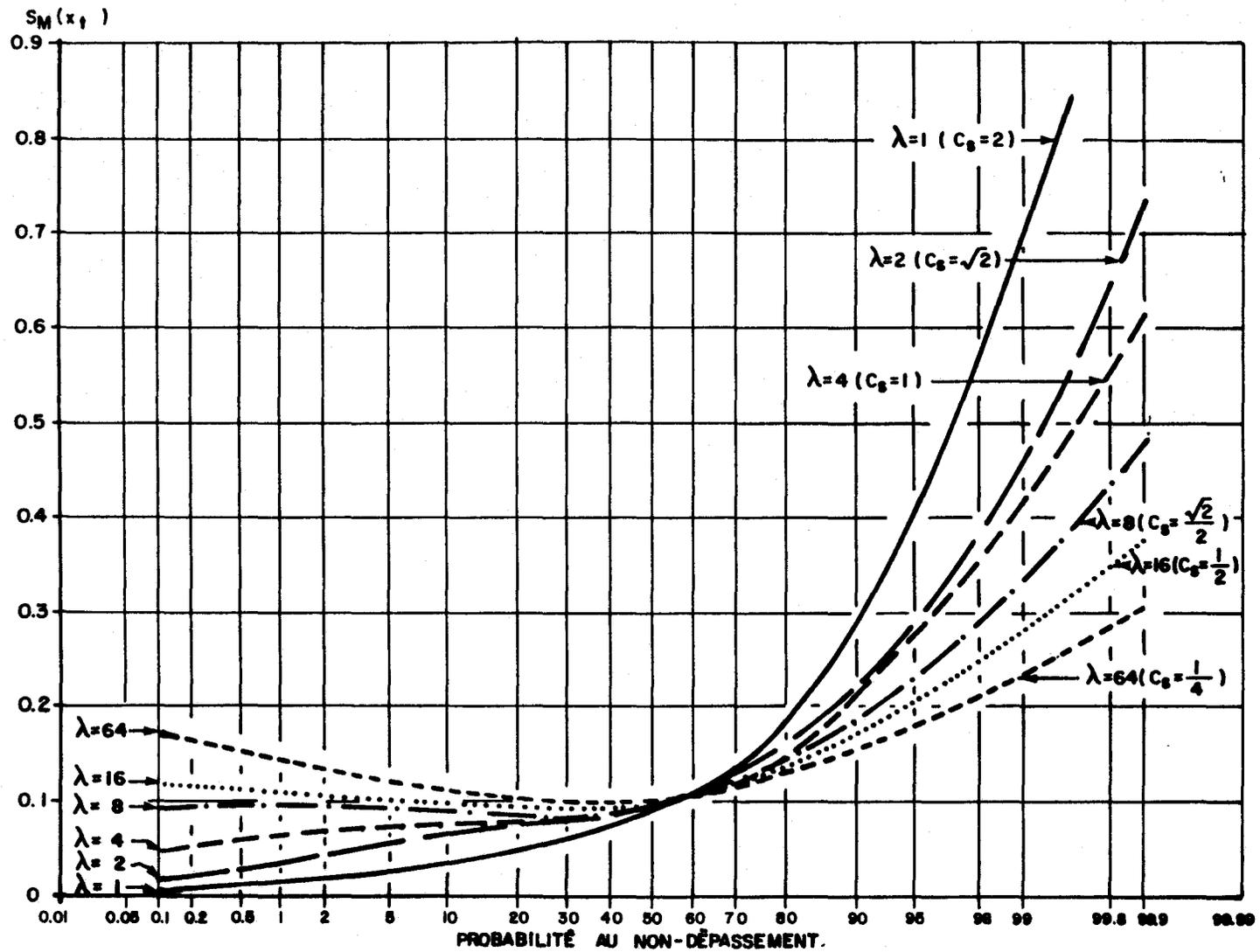


Figure 3.2 : Evolution de l'écart-type expérimental  $s_M(x_T)$  en fonction de la probabilité au non-dépassement pour  $N = 100$  et différentes valeurs de  $\lambda$  (Loi Gamma, méthode des moments).

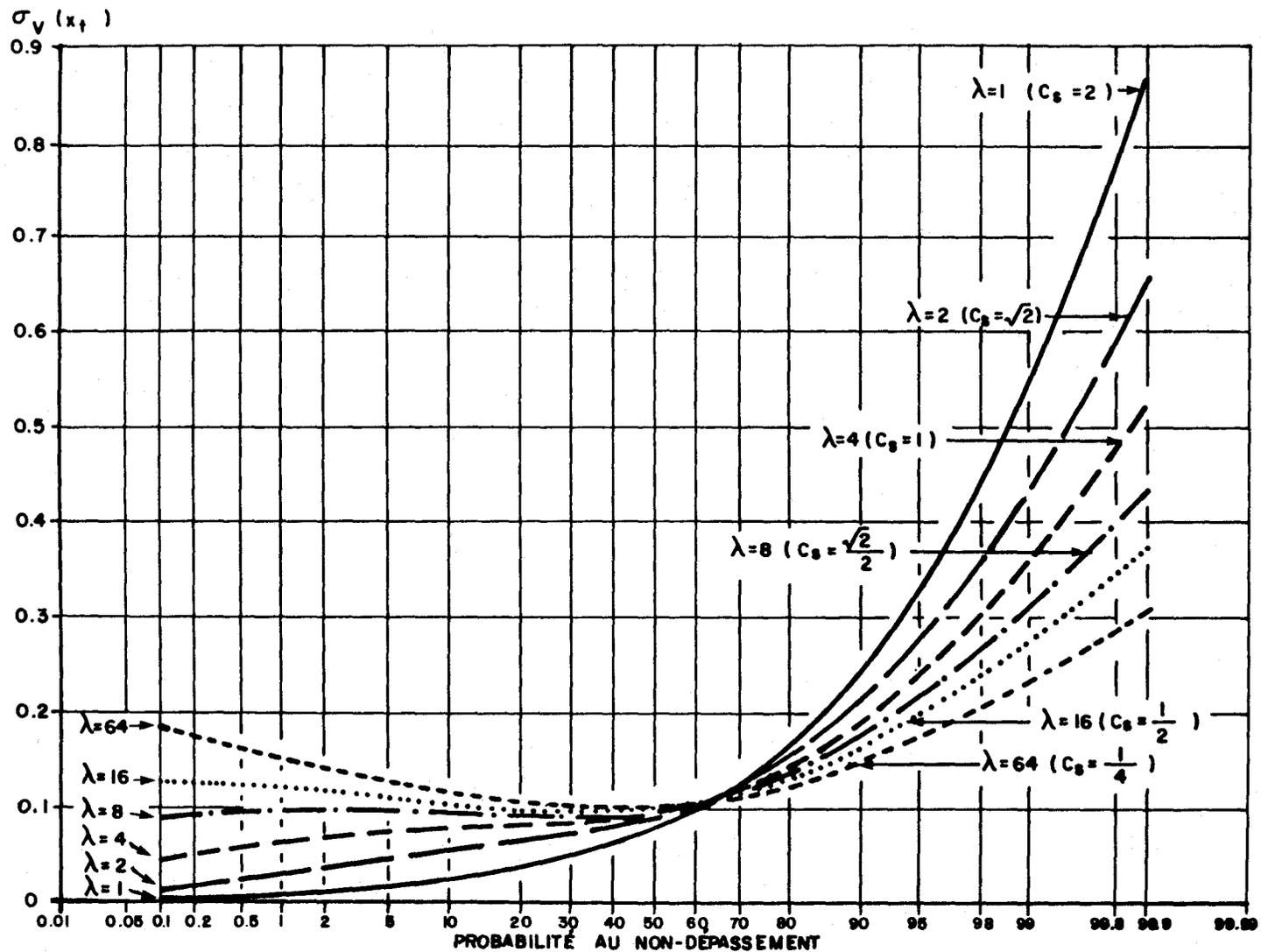


Figure 3.3 : Evolution de l'écart-type théorique  $\sigma_V(x_T)$  en fonction de la probabilité au non-dépassement pour  $N = 100$  et différentes valeurs de  $\lambda$  (Loi Gamma, maximum de vraisemblance).

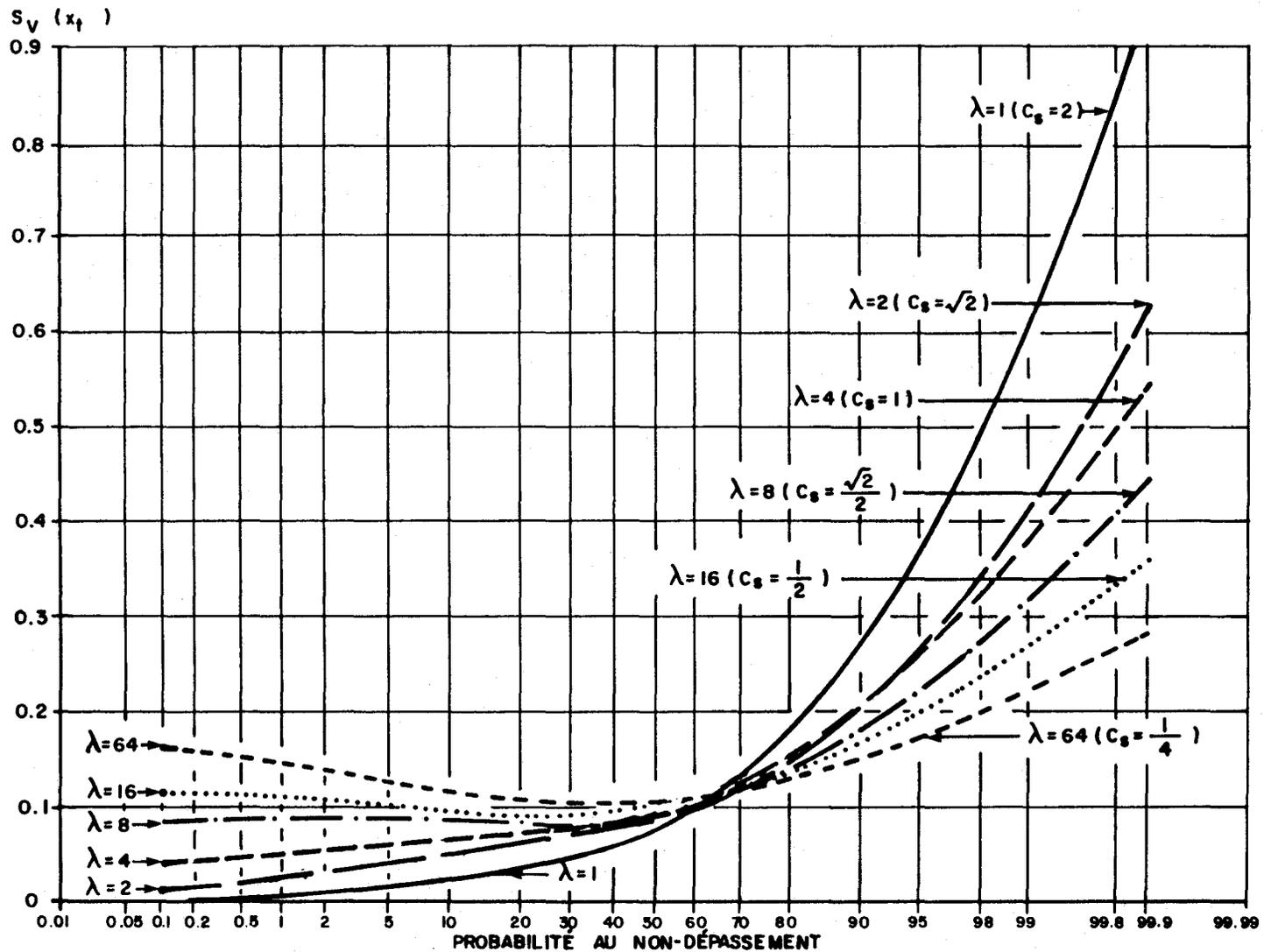


Figure 3.4 : Evolution de l'écart-type expérimental  $s_V(x_T)$  en fonction de la probabilité au non-dépassement pour  $N = 100$  et différentes valeurs de  $\lambda$  (Loi Gamma, maximum de vraisemblance).

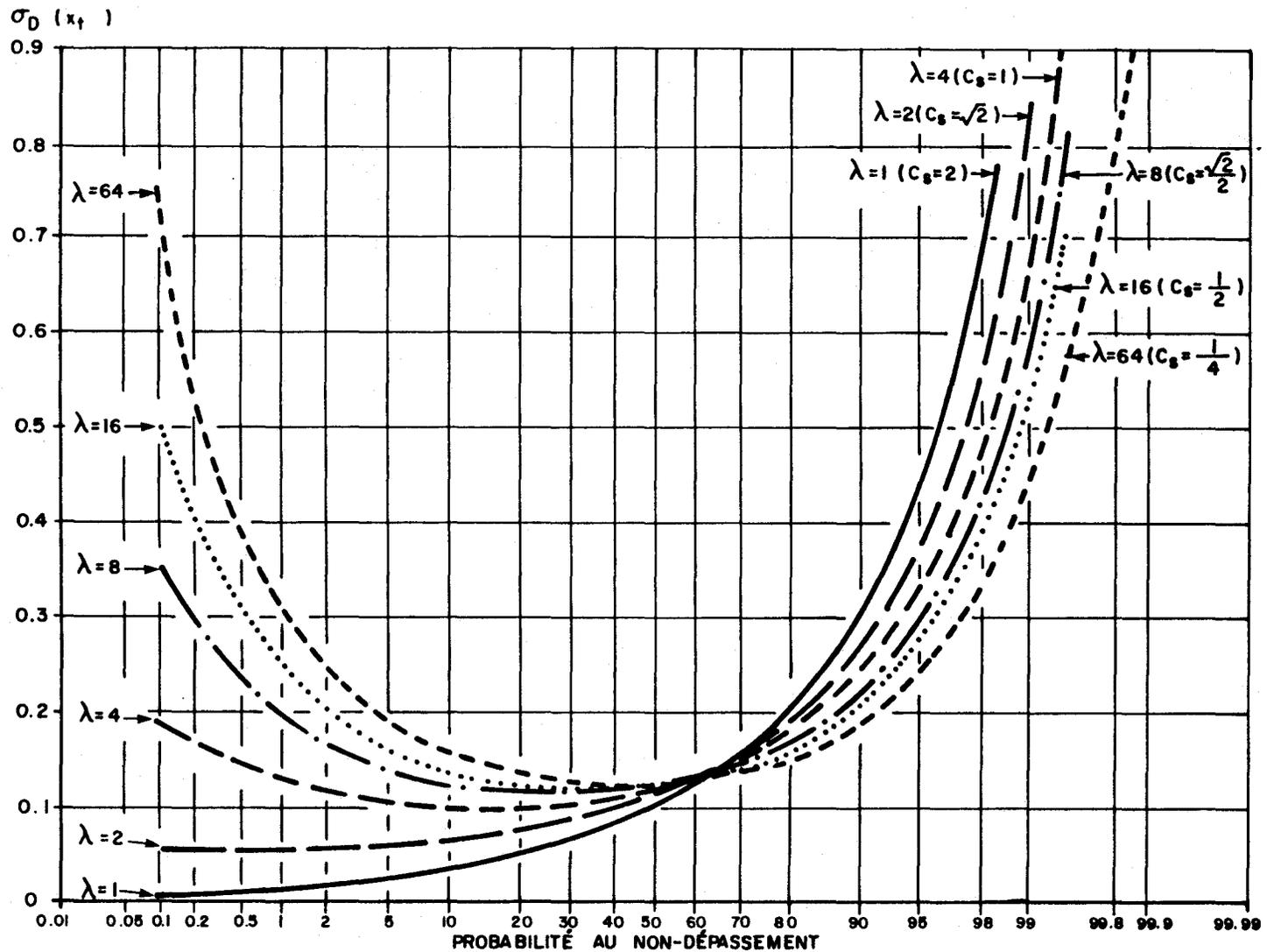


Figure 3.5 : Evolution de l'écart-type théorique  $\sigma_D(x_T)$  en fonction de la probabilité au non-dépassement pour  $N = 100$  et différentes valeurs de  $\lambda$  (Loi Gamma).

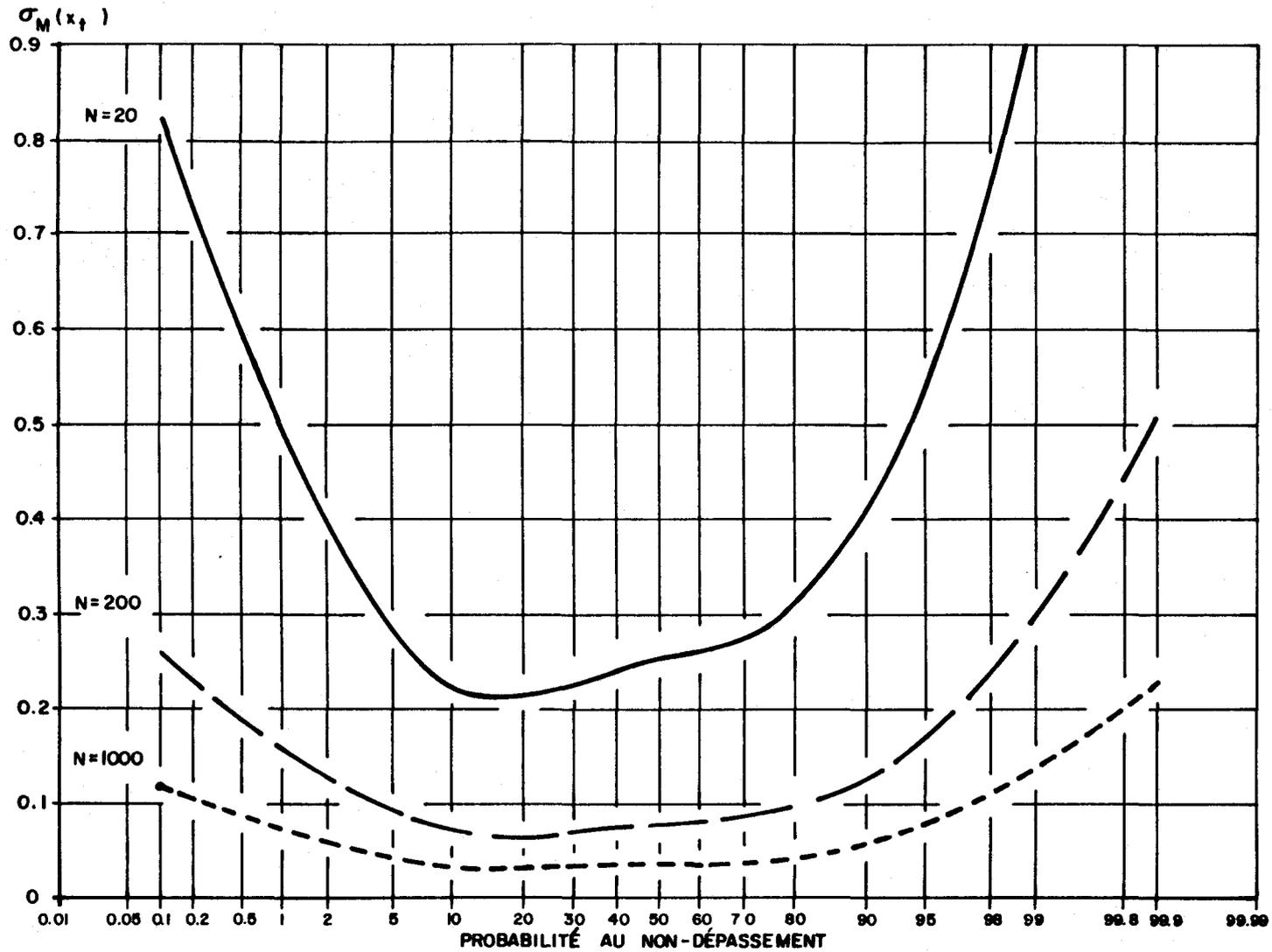


Figure 3.6 : Evolution de l'écart-type théorique  $\sigma_m(x_T)$  en fonction de la probabilité au non-dépassement pour  $\lambda = 8$  ( $C_S = 2/2$ ) et pour différentes valeurs de  $N$  (Loi Gamma, méthode des moments).

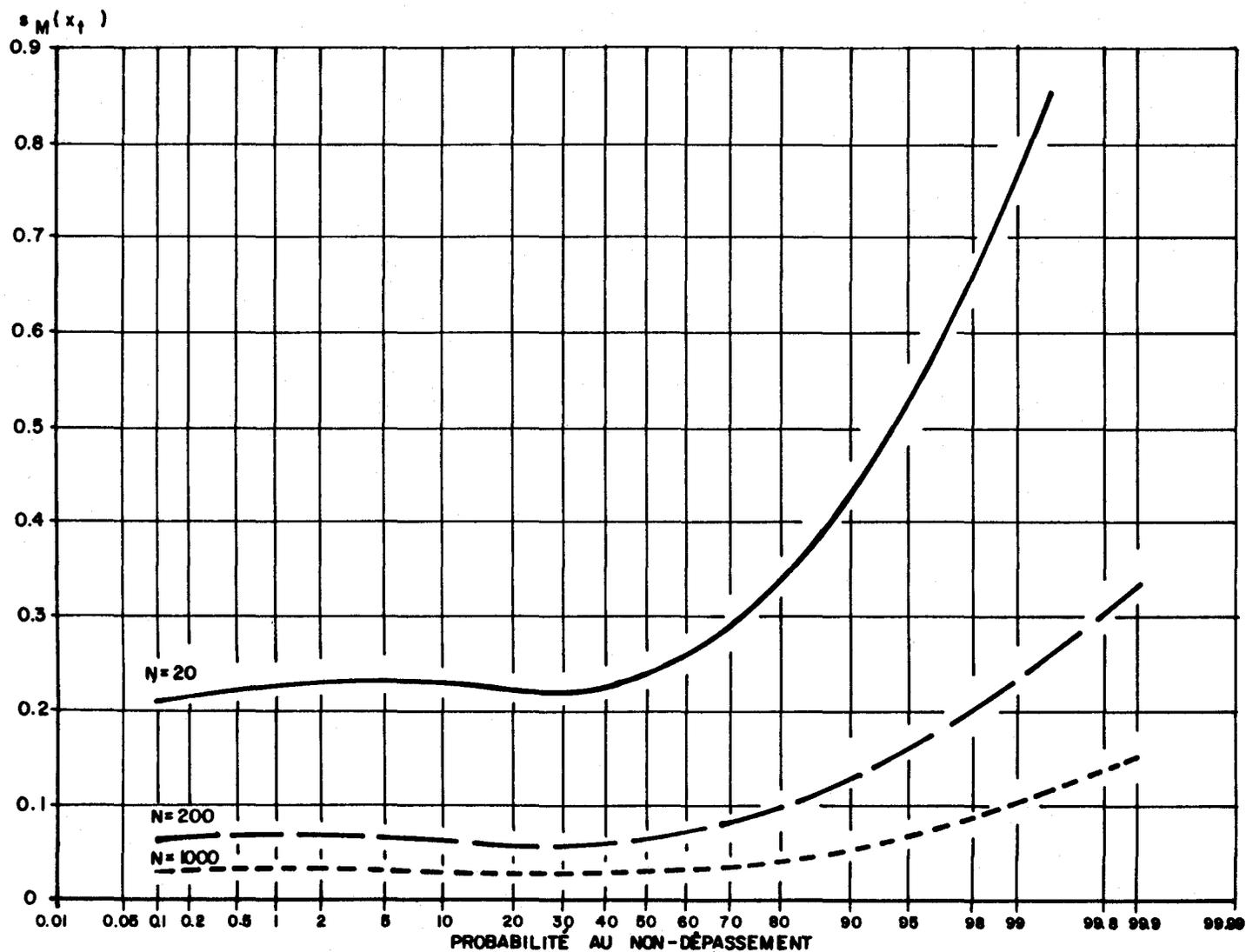


Figure 3.7 : Evolution de l'écart-type expérimental  $s_m(x_T)$  en fonction de la probabilité au non-dépassement pour  $\lambda = 8$  ( $C_S = 2/2$ ) et pour différentes valeurs de  $N$  (Loi Gamma, méthode des moments).

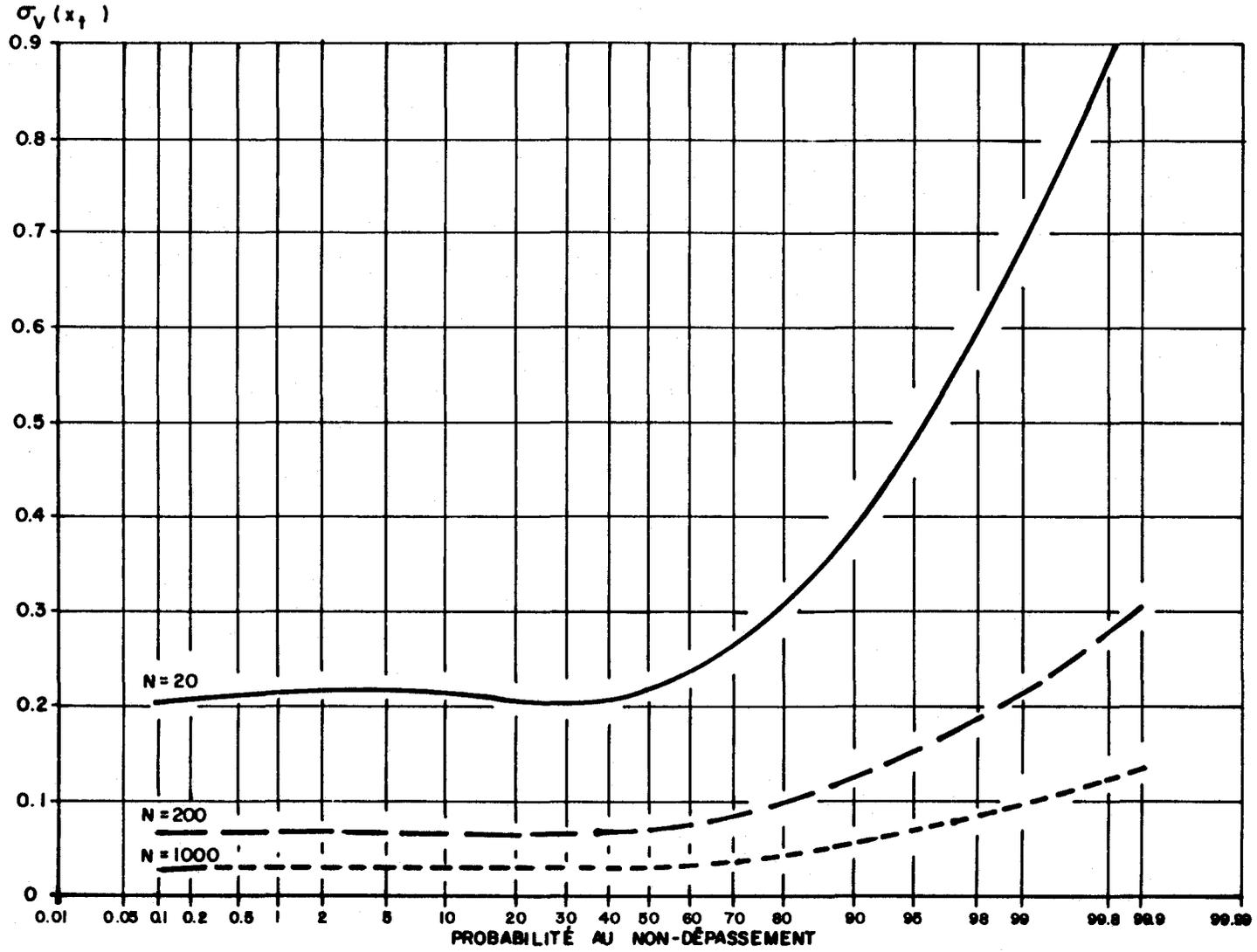


Figure 3.8 : Evolution de l'écart-type théorique  $\sigma_V(x_T)$  en fonction de la probabilité au non-dépassement pour  $\lambda = 8$  ( $C_S = 2/2$ ) et pour différentes valeurs de  $N$  (Loi Gamma, maximum de vraisemblance).

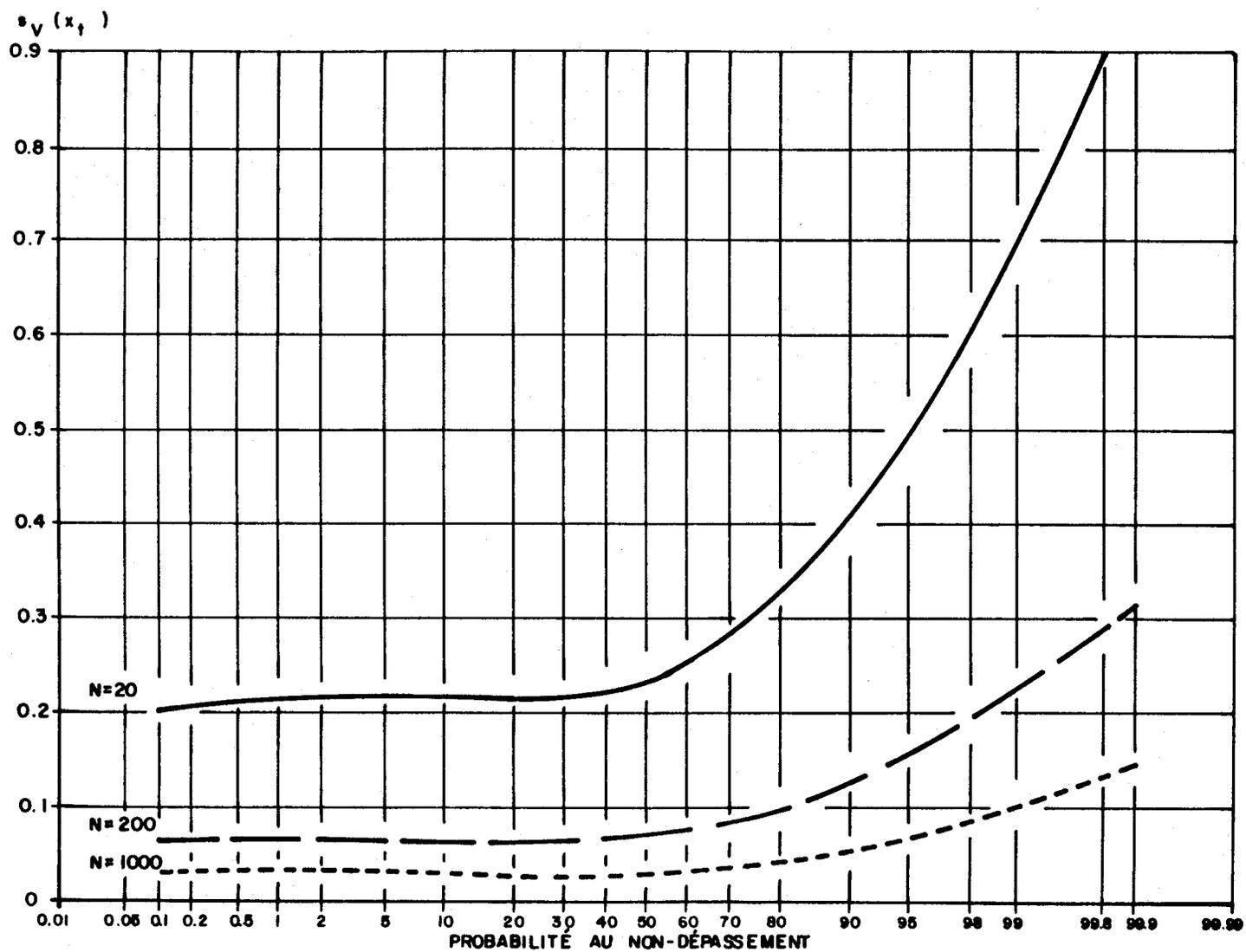


Figure 3.9 : Evolution de l'écart-type expérimental  $s_v(x_T)$  en fonction de la probabilité au non-dépassement pour  $\lambda = 8$  ( $C_S = 2/2$ ) et pour différentes valeurs de  $N$  (Loi Gamma, maximum de vraisemblance).

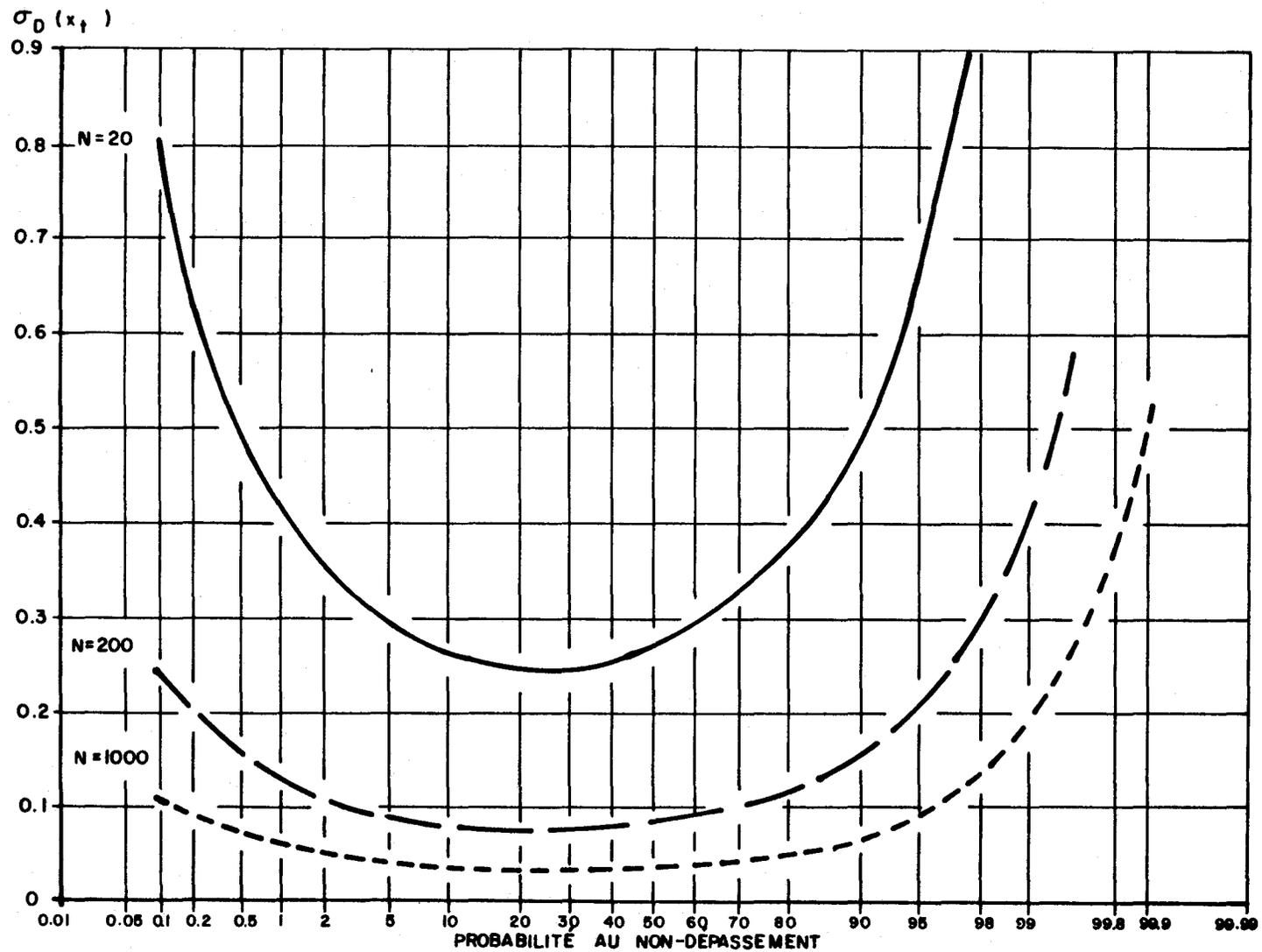


Figure 3.10: Evolution de l'écart-type théorique  $\sigma_D(x_T)$  en fonction de la probabilité au non-dépassement pour  $\lambda = 8$  ( $C_S = 2/2$ ) et pour différentes valeurs de  $N$  (Loi Gamma).

Tout d'abord pour  $N = 100$

- les variances expérimentales  $s_M$  obtenues par la méthode des moments (figure 3.2) et  $s_V$  obtenue par la méthode de M.V. (figure 3.4) conduisent à des courbes voisines pour les diverses valeurs de  $\lambda$ . Toutefois, pour les probabilités au non dépassement supérieures à .90,  $s_M$  est légèrement plus élevée que  $s_V$ , alors qu'il y a coïncidence des courbes pour les probabilités inférieures à .90. Cette observation confirme que la méthode du M.V. qui est optimale dans le cas de la loi Gamma, conduit à des estimations plus précises.
- la comparaison des variances théoriques asymptotiques  $\sigma_M$  (figure 3.1),  $\sigma_V$  (figure 3.3) et  $\sigma_D$  (figure 3.5) indique que l'on a de manière générale:

$$\sigma_V < \sigma_M < \sigma_D$$

Ce résultat est logique puisque, théoriquement, la méthode du M.V. est optimale et que, par ailleurs, la formule conduisant à  $\sigma_D$  est très générale, puisqu'elle est valable quelle que soit la distribution considérée, et est, par conséquent, moins précise.

- En ce qui concerne la méthode des moments, les variances théorique  $\sigma_M$  (figure 3.1) et expérimentale  $s_M$  (figure 3.2) diffèrent notablement sauf pour les probabilités voisines de .5. Le fait que la valeur observée  $s_M$  soit inférieure à  $\sigma_M$ , tend à prouver que les formules théoriques  $\sigma_M$  conduisent à une surestimation pour les faibles et fortes probabilités au non-dépassement. En pratique, il en résulte que les limites supérieures d'intervalles de confiance de  $x_T$ , obtenues à partir de  $\sigma_M$ , tant pour le débit de crue que pour les débits d'étiage sont surestimées.
- En ce qui concerne la méthode du M.V. les figures 3.3 et 3.4 montrent que  $\sigma_V$  et  $s_V$  sont très voisins et que l'on observe une légère différence seulement lorsque la probabilité au non-dépassement est supérieure à .7. Les estimations de la variance de  $x_T$  par la formule théorique donnant  $\sigma_V^2$  sont donc très réalistes.

Pour  $\lambda = 8$ , en faisant varier  $N$ , pour examiner le caractère asymptotique des formules conduisant aux variances théoriques, on confirme:

- que  $s_M$  et  $s_V$  sont très voisins (figures 3.6 et 3.7)
- que  $\sigma_V$  donne des valeurs très inférieures à  $\sigma_M$  et  $\sigma_D$  (figures 3.6, 3.8 et 3.10) quelle que soit la valeur de  $N$  et ce, surtout pour les probabilités au non-dépassement élevées ou faibles.

- La proximité des courbes de  $\sigma_V$  et  $s_V$  (figures 3.8 et 3.9)

On peut également noter que pour les petites tailles d'échantillon ( $N=20$ ), la variance obtenue s'éloigne très notablement de celle relative aux grandes tailles d'échantillon et ce fait est d'autant plus vrai que la probabilité au non-dépassement est élevée.

De plus, dans le cas des faibles probabilités au non-dépassement  $\sigma_M$  et  $\sigma_D$  conduisent à des surestimations très importantes comme le montre la comparaison des valeurs obtenues pour  $\sigma_M$  et  $\sigma_D$  avec celles relatives à  $s_V$  et  $s_M$ .

En conclusion, la comparaison graphique qualitative que l'on vient de faire:

- confirme la nette supériorité de la formule  $\sigma_V$  relative à la méthode du M.V.;
- montre le peu de différence entre les variances expérimentales  $s_V$  et  $s_M$ .

On peut en déduire qu'il est préférable d'utiliser la méthode du M.V. pour estimer les débits de crue ou d'étiage, surtout si les échantillons que l'on considère sont de faible taille ou de forte asymétrie. Si l'on utilise la méthode des moments, l'estimation de  $x_T$  sera, en général, bonne mais l'estimation de  $\text{var } x_T$  sera la plupart du temps fortement surévaluée.

### 3.2 Comparaison théorique

Il est intéressant de confirmer l'analyse graphique nécessairement subjective et globale par une comparaison objective et plus détaillée. Dans ce but, on utilise un test permettant la comparaison d'une variance théorique  $\sigma^2$  avec son estimation expérimentale  $s^2$ . Les détails de ce test sont décrits en annexe. Le test est utilisé en considérant les niveaux de signification de 5% et 1% et est appliqué à la comparaison d'une part de  $\sigma_M$  et  $s_M$  (méthode des moments) et d'autre part de  $\sigma_V$  et  $s_V$  (méthode du M.V.). Les résultats obtenus figurent dans:

- le tableau 3.1 où l'on regroupe les résultats pour chacune des 6 valeurs de  $\lambda$ , le décompte étant effectué sur les 12 valeurs de N;
- le tableau 3.2 où l'on regroupe les résultats pour chacune des 12 valeurs de N, le décompte étant effectué sur les 6 valeurs de  $\lambda$ .

L'examen du tableau 3.1 montre que:

- dans le cas de la méthode des moments (comparaison de  $\sigma_M$  et  $S_M$ ) quelle que soit la valeur de  $\lambda$ , il y a rejet systématique au niveau de 5% à l'exception des probabilités au non-dépassement comprises dans la gamme (.05 à .30) pour laquelle le niveau d'acceptation est généralement élevé. On confirme ainsi (cf. 3.1) que la variance expérimentale  $s_M^2$ , résultant des simulations, est significativement différente de la variance théorique  $\sigma_M^2$ ; la formule théorique asymptotique n'est donc pas acceptable dans le cas de la loi gamma à l'exception d'une faible région de probabilité au non-dépassement qui présente peu d'intérêt en pratique.

Tableau 3.1: Résultats du test de comparaison des variances théorique et expérimentale pour les 6 valeurs de  $\lambda$  considérées.

LAMBDA= 1							LAMBDA= 2							LAMBDA= 4						
MOMENTS				MAX. VRAIS.			MOMENTS				MAX. VRAIS.			MOMENTS				MAX. VRAIS.		
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N
.001	12	0	0	0	0	12	.001	12	0	0	0	0	12	.001	12	0	0	0	0	12
.005	12	0	0	0	0	12	.005	12	0	0	0	0	12	.005	12	0	0	0	0	12
.010	12	0	0	0	0	12	.010	11	0	1	0	0	12	.010	12	0	0	0	0	12
.020	7	4	1	0	0	12	.020	8	3	1	0	0	12	.020	6	5	1	0	0	12
.050	0	0	12	0	0	12	.050	1	1	10	0	0	12	.050	0	3	9	0	0	12
.100	0	1	11	0	0	12	.100	0	1	11	0	0	12	.100	0	0	12	0	0	12
.200	4	3	5	0	0	12	.200	0	0	12	0	0	12	.200	0	0	12	0	0	12
.300	12	0	0	0	1	11	.300	7	2	3	0	0	12	.300	0	2	10	0	0	12
.500	12	0	0	0	1	11	.500	12	0	0	0	0	12	.500	4	7	1	0	0	12
.700	0	0	12	0	0	12	.700	1	1	10	1	0	11	.700	1	1	10	0	0	12
.800	12	0	0	0	0	12	.800	0	3	9	1	0	11	.800	0	1	11	0	0	12
.900	12	0	0	0	0	12	.900	12	0	0	1	0	11	.900	1	1	10	0	0	12
.950	12	0	0	0	2	10	.950	12	0	0	1	0	11	.950	12	0	0	0	1	11
.980	12	0	0	3	0	9	.980	12	0	0	1	1	10	.980	12	0	0	0	1	11
.990	12	0	0	4	1	7	.990	12	0	0	1	1	10	.990	12	0	0	0	1	11
.995	12	0	0	5	1	6	.995	12	0	0	1	1	10	.995	12	0	0	0	1	11
.999	12	0	0	9	1	2	.999	12	0	0	1	4	7	.999	12	0	0	0	1	11

LAMBDA= 8							LAMBDA= 16							LAMBDA= 64						
MOMENTS				MAX. VRAIS.			MOMENTS				MAX. VRAIS.			MOMENTS				MAX. VRAIS.		
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N
.001	12	0	0	0	1	11	.001	12	0	0	0	0	12	.001	12	0	0	0	0	12
.005	12	0	0	0	1	11	.005	11	1	0	0	0	12	.005	12	0	0	0	0	12
.010	12	0	0	0	1	11	.010	10	1	1	0	0	12	.010	9	3	0	0	0	12
.020	4	7	1	0	1	11	.020	6	4	2	0	0	12	.020	6	3	3	0	0	12
.050	1	2	9	0	1	11	.050	2	0	10	0	0	12	.050	2	1	9	0	0	12
.100	0	1	11	0	1	11	.100	0	0	12	0	0	12	.100	0	1	11	0	0	12
.200	0	0	12	0	0	12	.200	0	0	12	0	0	12	.200	0	0	12	0	0	12
.300	0	0	12	0	0	12	.300	0	0	12	0	0	12	.300	0	2	10	0	0	12
.500	0	3	9	0	0	12	.500	2	3	7	0	0	12	.500	2	3	7	0	1	11
.700	0	1	11	0	1	11	.700	0	2	10	0	0	12	.700	2	0	10	0	1	11
.800	0	1	11	0	1	11	.800	0	0	12	0	0	12	.800	0	2	10	0	1	11
.900	0	1	11	0	1	11	.900	1	2	9	0	4	8	.900	0	1	11	0	1	11
.950	4	5	3	1	0	11	.950	5	3	4	2	2	8	.950	1	2	9	0	0	12
.980	12	0	0	1	0	11	.980	10	1	1	3	1	8	.980	8	4	0	0	0	12
.990	12	0	0	1	1	10	.990	12	0	0	3	1	8	.990	12	0	0	0	0	12
.995	12	0	0	1	1	10	.995	12	0	0	3	1	8	.995	12	0	0	0	1	11
.999	12	0	0	1	1	10	.999	12	0	0	3	1	8	.999	12	0	0	0	1	11

\* test significatif au niveau de 1%;  
 O test significatif au niveau de 5% et non significatif au niveau de 1%;  
 N test non significatif au niveau de 5%;  
 P probabilité au dépassement.

- dans le cas de la méthode du M.V., l'hypothèse d'égalité des variances théorique  $\sigma_V^2$  et expérimentale  $s_V^2$  est généralement acceptée au niveau de 1%; il n'y a donc pas de différence très significative entre ces 2 variances à l'exception des faibles valeurs de  $\lambda = 1$  pour les probabilités au non-dépassement élevées correspondant aux périodes de retour élevées. Le cas  $\lambda = 16$  où l'on observe un taux de rejets de 25% pour les probabilités au non-dépassement excédant .80 ( $T=5$ ) est difficilement interprétable.

L'étude du tableau 3.2 où l'on examine le test d'égalité des variances théorique et expérimentale en fonction de N confirme:

- dans le cas de la méthode des moments l'écart significatif entre  $\sigma_M^2$  et  $s_M^2$ ;
- dans le cas de la méthode du M.V. l'égalité statistique entre la variance théorique  $\sigma_V^2$  et la variance expérimentale  $s_V^2$ . Les cas de rejets assez rares sont observés dans la région des hautes probabilités au non-dépassement.

#### 4. Conclusions

##### 4.1 Conclusions sur l'hypothèse de normalité

Ces conclusions sont tirées des analyses précédentes ainsi que de l'ensemble des valeurs obtenues pour les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement des valeurs  $x_T$  estimées pour  $\lambda$ ,  $\alpha$ , N fixés. Ces valeurs

Tableau 3.2: Résultats du test de comparaison des variances théorique et expérimentale pour les 12 valeurs de N considérées.

N# 20							N# 40							N# 60						
MOMENTS				MAX, VRAIS,			MOMENTS				MAX, VRAIS,			MOMENTS				MAX, VRAIS,		
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N
.001	6	0	0	0	0	6	.001	6	0	0	0	1	5	.001	6	0	0	0	0	6
.005	6	0	0	0	0	6	.005	6	0	0	0	1	5	.005	6	0	0	0	0	6
.010	5	1	0	0	0	6	.010	4	1	1	0	1	5	.010	6	0	0	0	0	6
.020	3	2	1	0	0	6	.020	4	0	2	0	1	5	.020	3	3	0	0	0	6
.050	0	2	4	0	0	6	.050	1	0	5	0	1	5	.050	0	0	6	0	0	6
.100	0	0	6	0	0	6	.100	0	2	4	0	1	5	.100	0	0	6	0	0	6
.200	0	0	6	0	0	6	.200	0	1	5	0	0	6	.200	1	0	5	0	0	6
.300	1	2	3	0	0	6	.300	1	0	5	0	0	6	.300	1	1	4	0	0	6
.500	3	0	3	0	0	6	.500	2	2	2	0	0	6	.500	4	0	2	0	0	6
.700	0	0	6	1	0	5	.700	0	0	6	0	0	6	.700	2	0	4	0	0	6
.800	1	1	4	1	0	5	.800	1	0	5	0	0	6	.800	1	1	4	0	0	6
.900	2	0	4	1	0	5	.900	2	0	4	0	0	6	.900	3	0	3	0	0	6
.950	4	1	1	1	1	4	.950	3	2	1	0	0	6	.950	3	1	2	0	0	6
.980	5	1	0	2	0	4	.980	5	1	0	1	0	5	.980	6	0	0	0	0	6
.990	6	0	0	2	0	4	.990	6	0	0	1	0	5	.990	6	0	0	1	0	5
.995	6	0	0	2	0	4	.995	6	0	0	1	0	5	.995	6	0	0	1	0	5
.999	6	0	0	2	0	4	.999	6	0	0	1	1	4	.999	6	0	0	1	1	4

N# 80							N# 100							N# 150						
MOMENTS				MAX, VRAIS,			MOMENTS				MAX, VRAIS,			MOMENTS				MAX, VRAIS,		
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N
.001	6	0	0	0	0	6	.001	6	0	0	0	0	6	.001	6	0	0	0	0	6
.005	5	1	0	0	0	6	.005	6	0	0	0	0	6	.005	6	0	0	0	0	6
.010	5	0	1	0	0	6	.010	6	0	0	0	0	6	.010	6	0	0	0	0	6
.020	3	2	1	0	0	6	.020	2	2	2	0	0	6	.020	4	2	0	0	0	6
.050	1	0	5	0	0	6	.050	0	0	6	0	0	6	.050	1	2	3	0	0	6
.100	0	0	6	0	0	6	.100	0	1	5	0	0	6	.100	0	0	6	0	0	6
.200	1	0	5	0	0	6	.200	0	0	6	0	0	6	.200	0	0	6	0	0	6
.300	1	1	4	0	0	6	.300	2	0	4	0	0	6	.300	2	0	4	0	1	5
.500	2	1	3	0	0	6	.500	2	2	2	0	0	6	.500	2	1	3	0	0	6
.700	0	0	6	0	0	6	.700	0	1	5	0	0	6	.700	0	0	6	0	0	6
.800	1	0	5	0	0	6	.800	1	0	5	0	0	6	.800	1	1	4	0	0	6
.900	3	0	3	0	1	5	.900	2	1	3	0	0	6	.900	2	0	4	0	0	6
.950	3	0	3	1	1	4	.950	5	0	1	0	1	5	.950	4	2	0	0	0	6
.980	4	1	1	2	0	4	.980	6	0	0	0	1	5	.980	6	0	0	0	0	6
.990	6	0	0	2	0	4	.990	6	0	0	0	1	5	.990	6	0	0	0	0	6
.995	6	0	0	2	0	4	.995	6	0	0	0	1	5	.995	6	0	0	0	1	5
.999	6	0	0	2	0	4	.999	6	0	0	1	1	4	.999	6	0	0	1	1	4

\* test significatif au niveau de 1%;  
 O test significatif au niveau de 5% et non significatif au niveau de 1%;  
 N test non significatif au niveau de 5%;  
 P probabilité au dépassement.

Tableau 3.2 (suite): Résultats du test de comparaison des variances théoriques et expérimentales pour les 12 valeurs de N considérées.

N= 200							N= 300							N= 400						
MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.					
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N
.001	6	0	0	0	0	6	.001	6	0	0	0	0	6	.001	6	0	0	0	0	6
.005	6	0	0	0	0	6	.005	6	0	0	0	0	6	.005	6	0	0	0	0	6
.010	6	0	0	0	0	6	.010	6	0	0	0	0	6	.010	5	1	0	0	0	6
.020	2	4	0	0	0	6	.020	1	5	0	0	0	6	.020	3	1	2	0	0	6
.050	0	1	5	0	0	6	.050	0	1	5	0	0	6	.050	0	0	6	0	0	6
.100	0	0	6	0	0	6	.100	0	0	6	0	0	6	.100	0	0	6	0	0	6
.200	0	0	6	0	0	6	.200	0	1	5	0	0	6	.200	0	1	5	0	0	6
.300	2	0	4	0	0	6	.300	2	0	4	0	0	6	.300	2	0	4	0	0	6
.500	3	2	1	0	0	6	.500	3	1	2	0	0	6	.500	3	0	3	0	0	6
.700	0	2	4	0	0	6	.700	0	0	6	0	0	6	.700	0	1	5	0	1	5
.800	1	1	4	0	0	6	.800	1	0	5	0	0	6	.800	1	1	4	0	1	5
.900	2	0	4	0	0	6	.900	2	0	4	0	0	6	.900	2	2	2	0	2	4
.950	4	1	1	0	0	6	.950	4	0	2	0	0	6	.950	4	0	2	2	0	4
.980	5	1	0	0	0	6	.980	6	0	0	0	0	6	.980	6	0	0	2	1	3
.990	6	0	0	0	1	5	.990	6	0	0	0	0	6	.990	6	0	0	2	1	3
.995	6	0	0	1	0	5	.995	6	0	0	0	1	5	.995	6	0	0	2	1	3
.999	6	0	0	1	1	4	.999	6	0	0	1	0	5	.999	6	0	0	2	2	2

N= 500							N= 750							N=1000						
MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.			MOMENTS			MAX. VRAIS.					
P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N	P	*	O	N	*	O	N
.001	6	0	0	0	0	6	.001	6	0	0	0	0	6	.001	6	0	0	0	0	6
.005	6	0	0	0	0	6	.005	6	0	0	0	0	6	.005	6	0	0	0	0	6
.010	6	0	0	0	0	6	.010	6	0	0	0	0	6	.010	5	1	0	0	0	6
.020	5	1	0	0	0	6	.020	4	2	0	0	0	6	.020	3	2	1	0	0	6
.050	1	0	5	0	0	6	.050	1	0	5	0	0	6	.050	1	1	4	0	0	6
.100	0	1	5	0	0	6	.100	0	0	6	0	0	6	.100	0	0	6	0	0	6
.200	1	0	5	0	0	6	.200	1	0	5	0	0	6	.200	0	0	6	0	0	6
.300	1	1	4	0	0	6	.300	2	1	3	0	0	6	.300	2	0	4	0	0	6
.500	3	2	1	0	0	6	.500	3	2	1	0	1	5	.500	2	3	1	0	1	5
.700	0	1	5	0	0	6	.700	1	0	5	0	1	5	.700	1	0	5	0	0	6
.800	1	1	4	0	0	6	.800	1	1	4	0	1	5	.800	1	0	5	0	0	6
.900	2	0	4	0	0	6	.900	2	1	3	0	2	4	.900	2	1	3	0	1	5
.950	4	1	1	0	0	6	.950	5	1	0	0	1	5	.950	3	1	2	0	1	5
.980	6	0	0	0	0	6	.980	6	0	0	0	1	5	.980	5	1	0	1	0	5
.990	6	0	0	0	1	5	.990	6	0	0	0	1	5	.990	6	0	0	1	0	5
.995	6	0	0	0	1	5	.995	6	0	0	0	1	5	.995	6	0	0	1	0	5
.999	6	0	0	0	1	5	.999	6	0	0	1	1	4	.999	6	0	0	1	0	5

\* test significatif au niveau de 1%;  
 O test significatif au niveau de 5% et non significatif au niveau de 1%;  
 N test non significatif au niveau de 5%;  
 P probabilité au débassement.

individuelles ne figurent pas dans ce rapport en raison de leur grand nombre (1296 valeurs individuelles pour chaque méthode d'ajustement considérée).

- pour les probabilités au non-dépassement intermédiaires, l'hypothèse de normalité de la distribution  $x_T$  est acceptable quelles que soient les valeurs de  $\lambda$  et de  $N$ .
- l'ensemble des résultats confirme la supériorité de la méthode du M.V. (ce qui est déjà connu théoriquement) surtout dans le cas d'échantillons de faible taille et de forte asymétrie de la population Gamma d'origine. L'estimation, par la méthode du M.V., conduit à une distribution de  $x_T$  plus proche de la normalité dans ces cas. Dans les autres cas, les deux méthodes d'ajustement donnent des résultats comparables.
- En ce qui concerne les débits de périodes de retour élevées ( $T > 50$ ) (forte probabilité au non-dépassement), l'hypothèse de normalité est douteuse:
  - si l'on considère des échantillons de faible taille ( $N < 40$ );
  - si les débits de crue proviennent d'une population gamma d'asymétrie assez élevée ( $\lambda < 2$  ou  $C_s > \sqrt{2}$ ).

#### 4.2 Conclusions sur l'égalité des variances théorique et expérimentale

En ce qui concerne la méthode des moments, il y a généralement un écart très significatif entre la variance expérimentale  $s_M^2$  et la variance théorique  $\sigma_M^2$  ; cette dernière qui est obtenue à partir d'une formule asymptotique n'est donc pas vraiment représentative.

En ce qui concerne la méthode du M.V., il y a généralement un très bon accord entre les variances théorique et expérimentale; la formule asymptotique donnant  $\sigma_V^2$  est donc représentative même pour les échantillons de petite taille. Les seuls cas de rejet sont observés dans le cas des probabilités au non-dépassement élevées.

La formule générale donnant  $\sigma_D^2$  conduit, comme dans le cas de  $\sigma_M^2$ , à une forte surestimation de la variance de  $x_T$ . La comparaison entre les variances expérimentales  $s_M^2$  et  $s_V^2$  montre qu'il y a, en général, peu d'écart entre les 2 méthodes d'ajustement, sauf dans le cas des plus faibles valeurs de  $\lambda$  qui ont été considérées, c'est-à-dire dans le cas des plus forts coefficients d'asymétrie.

#### 4.3 Recommandations

Malgré son emploi un peu plus complexe, la méthode du M.V. devrait être préférée à celle des moments dans l'ajustement d'une loi Gamma aux caractéristiques hydrologiques.

L'hypothèse de normalité de la distribution de  $x_T$  est douteuse dans le cas des périodes de retour élevées et lorsque les événements sont distribués suivant une loi Gamma d'asymétrie élevée. Dans ces cas, il serait important d'examiner la nature de la distribution de  $x_T$ .

Parmi les différentes formules asymptotiques permettant la détermination de la variance de  $x_T$ , la formule déduite de la méthode du M.V. doit être très nettement privilégiée.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BOBEE, B. (1973). Sample error of T-year events computed by fitting a Pearson Type 3 distribution. Water Resources Research, Vol. 9, No. 5, pp. 1264-1270.

BOBEE, B. et R. ROBITAILLE (1975). Etude sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement d'un échantillon, INRS-Eau, rapport scientifique No. 49, 22 pages.

BOBEE, B. et P. BOUCHER (1979-a). Comparaison des algorithmes de génération de la distribution Gamma et de ses formes dérivées. INRS-Eau, rapport scientifique No. 112, 78 pages, 3 annexes.

BOBEE, B. et P. BOUCHER (1979-b). Ajustement des distributions Pearson Type 3, Gamma, log-Pearson Type 3 et log-Gamma. INRS-Eau, rapport scientifique No. 105, 119 pages.

FOURGEAUD et FUSCH (1972). Statistiques. Dunaud, Paris, 2ème édition, 334 pages.

## ANNEXE

Tests de normalité  
et d'égalité des variances

### A.1 Test de normalité (Bobée et Robitaille, 1975)

Les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement non-biaisés d'un échantillon de taille N sont donnés respectivement par:

$$C_s = \frac{N (N-1)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N (x - \bar{x})^3}{(N-2) \left[ \sum_{i=1}^N (x - \bar{x})^2 \right]^{3/2}}$$

$$C_k = \frac{N (N^2-1) \sum_{i=1}^N (x - \bar{x})^4}{(N-2) (N-3) \left[ \sum_{i=1}^N (x - \bar{x})^2 \right]^2} - \frac{3 (3N-5)}{(N-2)(N-3)}$$

Il est possible de montrer que pour des échantillons tirés d'une population normale:

$C_s$  est distribué normalement avec:

- une moyenne  $\bar{C}_s = 0$

- une variance  $\text{var}(C_s) = \frac{6 N (N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}$

$C_k$  est distribué normalement avec :

- une moyenne  $\bar{C}_k = 3$

- une variance  $\text{var}(C_k) = \frac{24 N (N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)}$

A partir de ces résultats, il est possible de construire des tests de normalité, en effet :

$$u = \frac{C_s}{\text{var}(C_s)} \quad \text{et} \quad v = \frac{C_k - 3}{\text{var}(C_k)}$$

suivent des distributions normales  $N(0,1)$  pour des échantillons provenant d'une population normale.

Pour un échantillon de taille  $N$ , on calcule  $C_s$  et  $C_k$  et les valeurs correspondantes de  $u$  et  $v$ . On peut alors tester au niveau de signification  $\alpha$  les hypothèses  $H_0$  et  $H_0'$  telles que :

a)  $H_0 : \bar{C}_s = 0 \quad (H_1 : \bar{C}_s \neq 0)$

b)  $H_0' : \bar{C}_k = 3 \quad (H_1' : \bar{C}_k \neq 3)$

Pour un niveau de signification

-  $\alpha = 5\%$  , on accepte  $H_0$  et  $H_0'$  si  $|u| < 1.96$  et  $|v| < 1.96$  ,

-  $\alpha = 1\%$  , on accepte  $H_0$  et  $H_0'$  si  $|u| < 2.58$  et  $|v| < 2.58$  .

## A.2 Test d'égalité des variances

Soit  $s^2$  la variance non-biaisée d'un échantillon de taille  $N$  tiré d'une population normale de variance  $\sigma^2$ , alors  $\frac{(N-1) s^2}{\sigma^2}$  suit une distribution chi-deux à  $(N-1)$  degrés de liberté. On peut alors tester l'hypothèse:

$$H_0 : \sigma_2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma_2 \neq \sigma_0^2$$

On accepte  $H_0$  au niveau de signification  $\alpha$  si

$$\chi^2 (\alpha/2; N-1) < \frac{(N-1) s^2}{\sigma^2} < \chi^2 (1-\alpha/2; N-1) \text{ autrement, on accepte } H_1 .$$

Ceci revient à tester si  $s^2$  est une bonne estimation de la variance théorique  $\sigma_0^2$ .