

Université du Québec

Mémoire  
présenté à  
l'Institut national de la recherche scientifique  
(INRS-Eau)

comme exigence partielle  
de la  
maîtrise ès Sciences de l'eau  
par

Paul Boudreau  
(ing. jr., B.Sc.A. Génie Civil)

**MODELISATION DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE PAR ELEMENT FINIS  
AVEC DISCRETISATION VARIABLE (1D-2D)**

Juillet 1990

## REMERCIEMENTS

Je désire exprimer tout ma reconnaissance et mon appréciation à monsieur Michel Leclerc, mon directeur de thèse pour sa très grande disponibilité, son enthousiasme sans limites, et ses nombreux conseils qui ont été fort appréciés tout au long de ce travail.

Je tiens aussi à remercier monsieur André Parent, dessinateur, pour sa contribution aux illustrations de ce mémoire, ainsi que madame Elaine Parent, secrétaire, pour sa correction minutieuse du texte.

## RESUME

Cette thèse consiste à développer un élément de jonction pouvant coupler un modèle unidimensionnel (1-D) à un modèle bidimensionnel (2-D) afin de créer un modèle à degrés de discrétisation variable servant à modéliser les écoulements à surface libre. L'objectif visé par cette jonction est de pouvoir choisir le degré de discrétisation voulu au sein d'un même domaine en fonction de la précision requise et des ressources informatiques disponibles. A l'aide de l'élément de jonction, le modèle 1-D peut être utilisé afin de faciliter la prise en compte des conditions limites se trouvant au loin pour le cas d'un domaine à traiter en 2-D.

Le modèle 1-D est développé en utilisant une description trapézoïdale pour décrire la géométrie de la section d'écoulement. La formulation obtenue introduit de nombreux termes non-linéaires, y compris dans la matrice-masse. Tous ces termes sont pris en considération dans la méthode de Newton-Raphson. Le programme MEFLU déjà existant est utilisé comme modèle 2-D.

L'algorithme utilisé pour assurer la connectivité des modèles 1-D et 2-D est la "méthode des contraintes multiples". Cette méthode intervient dans l'espace d'accroissement des variables afin d'y introduire les contraintes nécessaires à la conservation de la quantité de mouvement et de la masse. L'algorithme est simple à implanter et ne demande pas de restructuration de la matrice tangente. Cette méthode est aussi très efficace au point de vue informatique. La méthode des contraintes multiples peut aussi être utilisée afin de faciliter la prise en compte des conditions limites, soit par l'imposition d'un débit sur une frontière ouverte ou par une relation niveau-débit.

L'étude de plusieurs cas théoriques a permis de vérifier les diverses fonctionnalités offertes par le modèle 1-D. Le modèle à degré de discrétisation variable a également donné des résultats satisfaisant lors des différents tests.



## TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS .....	i
RESUME .....	iii
TABLE DES MATIERES .....	v
LISTE DES TABLEAUX .....	vii
LISTE DES FIGURES .....	viii
<b>1 INTRODUCTION .....</b>	<b>1</b>
1.1 Préambule .....	1
1.2 Revue bibliographique .....	2
1.3 Objectifs de la recherche .....	3
<b>2 MODELE MATHEMATIQUE ET FORMULATION VARIATIONNELLE ...</b>	<b>4</b>
2.1 Modèle tridimensionnel .....	4
2.2 Modèle bidimensionnel .....	6
2.3 Modèle unidimensionnel .....	8
2.3.1 Equations 1-D .....	9
2.3.2 Géométrie des sections 1-D .....	12
<b>3 METHODE DES ELEMENTS FINIS .....</b>	<b>14</b>
3.1 Modèle variationnel 1-D .....	14
3.1.1 Intégration par partie et termes de contour .....	16
3.1.2 Discrétisation .....	18
3.1.3 Élément de base .....	19
3.1.4 Élément chapeau .....	20
3.1.5 Discrétisation d'un réseau d'écoulement .....	23
3.2 Modèle variationnel 2-D discrétisé .....	23
3.2.1 Description de l'élément .....	24
3.3 Méthode de résolution .....	25
3.3.1 Intégration numérique .....	25
3.3.2 Résolution non stationnaire .....	25
3.3.3 Résolution non linéaire .....	26
3.4 Condensation .....	27
3.4.1 Méthode retenue .....	28
<b>4 ETUDE DE CERTAINS ASPECTS DES CONDITIONS AUX LIMITES .....</b>	<b>31</b>
4.1 Termes de contour provenant du laplacien (modèle 1-D) .....	31
4.2 Sollicitation en débit (modèle 1-D) .....	32



4.3 Relation niveau-débit (modèle 1-D) .....	33
4.4 Connectivité 1D-1D .....	34
4.4.1 Egalité des hauteurs d'eau .....	36
4.4.2 Egalité des vitesses .....	36
4.4.3 Conservation du débit .....	37
4.5 Méthode des contraintes multiples .....	37
4.6 Connectivité 1D-2D .....	41
4.6.1 Contrainte sur la hauteur d'eau .....	41
4.6.2 Contrainte sur le débit .....	42
4.6.3 Contrainte sur la vitesse aux jonctions .....	44
4.6.4 Contrainte sur la pente .....	45
<b>5 EXEMPLES</b> .....	<b>49</b>
5.1 Ecoulement permanent uniforme .....	49
5.1.1 Donnée de base du problème .....	50
5.1.2 Relation niveau-débit comme condition aux limites .....	51
5.1.3 Connectivité 1D-1D (branches multiples) .....	52
5.1.4 Jonction 1D-2D: .....	53
5.1.5 Imposition d'un débit comme condition aux limites du modèle 2-D .....	54
5.2 Chute .....	54
5.2.1 Données du problème .....	55
5.2.2 Résultats .....	55
5.3 Onde de marée dans un canal rectangulaire fermé à une extrémité .....	58
5.3.1 Données du problème .....	58
5.3.2 Vérification du modèle 1-D .....	59
5.3.3 Essais de connectivité 1D-2D .....	62
<b>6 CONCLUSION</b> .....	<b>66</b>
<b>7 REFERENCES</b> .....	<b>68</b>

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 1: Modèle variationnel 1-D .....	17
Tableau 2: Solution analytique et numérique pour les niveaux d'eau du problème de l'onde dans un canal fermé à une extrémité .....	60
Tableau 3: Erreur relative sur les niveaux d'eau calculées en % .....	60
Tableau 4: Solution analytique et numérique pour les vitesses du problème de l'onde dans un canal fermé à une extrémité .....	61
Tableau 5: Erreur relative sur les niveaux d'eau calculées en % .....	61



## LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 1:	Choix des coordonnées .....	5
Figure 2:	Conventions du modèle 2-D .....	6
Figure 3:	Conventions du modèle 1-D .....	11
Figure 4:	Section transversale .....	13
Figure 5:	Fonctions des éléments 1-D .....	22
Figure 6:	Elément triangulaire à six noeuds .....	24
Figure 7:	Connectivité 1D-1D .....	35
Figure 8:	Convention <N-T> .....	43
Figure 9:	Contrainte sur la pente .....	47
Figure 10:	Utilisation d'une relation niveau-débit comme condition aux limites .....	52
Figure 11:	Connectivité 1D-1D .....	53
Figure 12:	Chute .....	57
Figure 13:	$h(Q)$ sur mouvement .....	57
Figure 14:	$h$ imposé .....	57
Figure 15:	$h(Q)$ sur conservation .....	57
Figure 16:	Maillage 1D-2D .....	62
Figure 17:	Profil longitudinal du niveau d'eau à $t=3600$ s .....	63
Figure 18:	Vitesse à $t=900$ s .....	63
Figure 19:	Niveau d'eau à l'extrémité fermée .....	64
Figure 20:	Vitesse à $s=2000$ .....	65

## 1. INTRODUCTION

---

### 1.1 Préambule

---

Les cours d'eau ont depuis longtemps été utilisés par l'homme pour combler divers besoins. Ces utilisations comprennent: la production d'hydro-électricité, l'alimentation en eau potable, la réception des eaux usées, les loisirs, la pêche, le transport maritime... L'étude des cours d'eau est rendue nécessaire afin de mieux comprendre les interactions engendrées sur le milieu par ces divers usages. Les connaissances ainsi acquises permettent de mieux aborder les problèmes d'aménagement des eaux. Les problèmes pouvant survenir sont: le transport des sédiments, la pollution des eaux, l'érosion, la modification de l'habitat naturel. Il n'y a pas très longtemps, la seule voie pour étudier les problèmes d'aménagement des eaux était l'utilisation des modèles réduits. Aujourd'hui, avec des ordinateurs de moins en moins coûteux, mais de plus en plus performants, il devient beaucoup plus intéressant d'utiliser les modèles numériques.

La science peut décrire le comportement physique des eaux grâce aux équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre ces équations. L'application des éléments finis à la mécanique des fluides s'est faite aux cours des années 70. Il existe maintenant des modèles unidimensionnel (1-D), bidimensionnel (2-D) et même tridimensionnel (3-D) permettant de simuler les écoulements à surface libre. Les modèles existants en 1-D, 2-D ou en 3-D sont pour la plupart indépendants les uns des autres. Il serait pourtant intéressant de pouvoir combiner ces différents modèles pour pouvoir profiter des avantages propres à chacun.

Le modèle 1-D peut servir d'extension non coûteuse en temps de calcul au modèle 2-D, pour aller chercher là où elles sont naturellement définies, les conditions aux limites du problème. Ainsi, le modèle 1-D peut servir à peu de frais à définir les conditions aux limites du modèle

2-D dans un estuaire à marée. Le développement d'un modèle à degré de discrétisation variable (1D-2D) pour les écoulements à surface libre est souhaitable afin de mieux utiliser les moyens disponibles.

## 1.2 Revue bibliographique

---

Beaucoup de modèles à une ou deux dimensions ont été conçus jusqu'à maintenant pour traiter les écoulements en surface libre. Parmi les modèles 1-D développés utilisant la méthode des éléments finis, on peut noter le modèle "1-D" développé par le MIT ainsi que le "FERNS" développé par la Water Planning and Management Branch d'Ontario (Krishnappan, 1987).

De nombreuses études portant sur la simulation à deux dimensions des écoulements dans les rivières, les fleuves et les estuaires par la méthode des éléments finis ont été menées au cours des dernières années (Cheng, 1978; Herrling, 1978; Walters et Cheng, 1980; Soulaïmani, 1983; Leclerc *et al.*, 1987). Les applications d'ordre environmental effectuées à l'aide de la méthode des éléments finis se multiplient.

Très peu de tentatives de couplage des modèles en éléments finis 1-D et 2-D ont été tentés. Herrling (1982) a réussi un tel couplage et il l'a appliqué avec succès sur la rivière Elbe. Il a transformé les équations des modèles 1-D et 2-D afin de ne conserver que les niveaux d'eau comme inconnues du problème. Toutes les équations des niveaux d'eau à la jonction sont réunies au sein d'une seule équation pour que le débit généré par la formulation du modèle 1-D soit neutralisé par l'intégrale des débits résultant de la formulation du modèle 2-D. Les vitesses 2-D sont calculées à partir des niveaux d'eau sur chaque élément. Les noeuds appartenant à plus d'un élément ont donc autant de valeurs pour la vitesse à ce noeud qu'il y a d'éléments adjacents aux noeuds. L'utilisation des niveaux d'eau comme seule inconnue des éléments 2-D, ce qui rend possible cette technique de couplage, nécessite un processus de lissage afin de retrouver les vitesses.

### 1.3 Objectifs de la recherche

---

Les objectifs de la présente recherche sont de:

- (a) développer un modèle 1-D pour simuler les écoulements à surface libre. Ce modèle doit être élaboré dans l'environnement MEF en utilisant la même approche numérique que le modèle à deux dimensions MEFLU (Leclerc *et al.*, 1987; Dhatt *et al.*, 1985 ). Ce modèle 1-D doit également être pourvu de toutes les fonctionnalités nécessaires à une utilisation indépendante normale.
- (b) développer un élément de jonction couplant le nouveau modèle 1-D au modèle MEFLU existant. Cet élément de raccord doit respecter les principes de conservation de la quantité du mouvement et de la masse.
- (c) améliorer la méthode de prise en compte des conditions aux limites en élaborant une approche permettant l'introduction de contraintes supplémentaires.

## 2. MODELE MATHEMATIQUE ET FORMULATION VARIATIONNELLE

---

### 2.1 Modèle tridimensionnel

---

En considérant l'eau comme incompressible, ce qui implique que sa masse spécifique est considérée constante, et en utilisant un système de coordonnées cartésiennes tel que définit à la figure 1, les équations générales<sup>1</sup> de conservation de la masse et du mouvement sont (Lai, 1986):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [1]$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\rho \partial x_j} + F_c + g \delta_{i3} \quad [2]$$

$$(u, v, w) = (u_j) = (u_i)^T; i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$$

$\delta_{ij}$ : symbole de Kronecker

$$i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1$$

$$i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$$

$\langle x, y, z \rangle$ : repaire cartésien;

$\langle u, v, w \rangle$ : composantes de la vitesse selon x, y et z respectivement;

---

<sup>1</sup> Les équations sont obtenues en intégrant sur une période  $T$  les équations de base locales instantanées. Les vitesses  $u, v, w$  et la pression  $P$  sont donc des valeurs moyennes sur cette période. Les contraintes de Reynolds découlent de cette manipulation.

$F_c$ : force de Coriolis;  
 $g$ : gravité;  
 $\rho$ : masse spécifique de l'eau;  
 $P$ : pression;  
 $\tau_{ij}$ : contraintes de Reynolds.

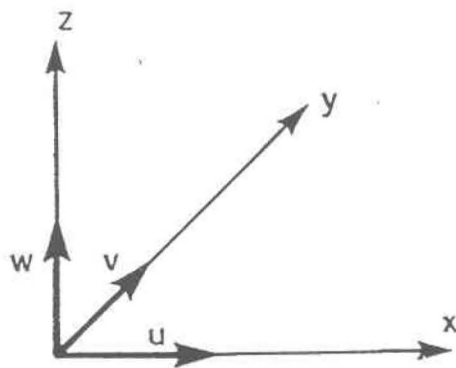


Figure 1      Choix des coordonnées.  
 (  $x$  vers l'est,  $y$  vers le nord et  $z$  orienté vers le zénith.)

2.2 Modèle bidimensionnel

En considérant que la pression est hydrostatique et en intégrant les équations tridimensionnelles sur la verticale (Soulaïmani, 1983), un modèle bidimensionnel est obtenu. En utilisant les conventions illustrées à la figure 2, les équations sont:

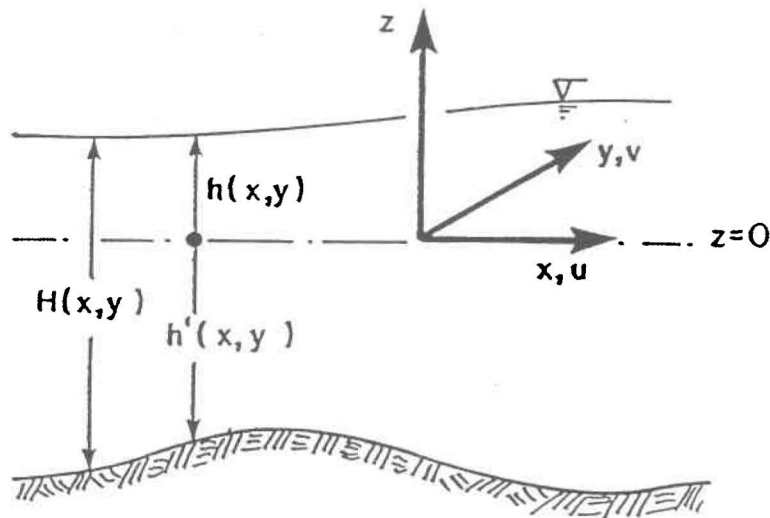


Figure 2 Conventions du modèle bidimensionnel.

Conservation de la masse:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

Conservation de la quantité de mouvement:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = F_x \tag{4}$$

$$\frac{\overset{(6)}{\partial v}}{\partial t} + u \frac{\overset{(7)}{\partial v}}{\partial x} + v \frac{\overset{(8)}{\partial v}}{\partial y} + g \frac{\overset{(9)}{\partial h}}{\partial x} = \overset{(10)}{F_y} \quad [5]$$

$$F_x = -\frac{\overset{(11)}{gn^2|V|u}}{H^{4/3}} + \overset{(12)}{f_c}v + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\overset{(13)}{\partial \tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{C_w \rho_a |W| W_x}{\rho H} \quad [6]$$

$$F_y = -\frac{\overset{(15)}{gn^2|V|v}}{H^{4/3}} - \overset{(16)}{f_c}u + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\overset{(17)}{\partial \tau_{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) + \frac{C_w \rho_a |W| W_y}{\rho H} \quad [7]$$

- $C_w$ : coefficient de traînée du vent;  
 $F_x$  ou  $F_y$ : résultantes des forces massiques exercées sur une particule d'eau selon x ou y;  
 $f_c$ : coefficient de Coriolis;  
 $g$ : gravité;  
 $h$ : hauteur d'eau;  
 $H$ : profondeur totale;  
 $n$ : coefficient de rugosité de Manning;  
 $u, v$ : composantes de la vitesse intégrées verticalement;  
 $V$ : vitesse du courant;  
 $W_x, W_y$ : composantes du vecteur vitesse du vent;  
 $(x, y)$ : coordonnées cartésiennes; lorsque les forces de Coriolis sont prises en compte, x est orienté à l'est et y au nord;  
 $\rho$ : masse spécifique de l'eau;  
 $\rho_a$ : masse spécifique de l'air;  
 $\tau_{ij}$ : contrainte de Reynolds;  
 $\mu_T$ : coefficient de viscosité turbulente.



Par analogie avec les contraintes d'un fluide visqueux, les contraintes de Reynolds sont définies comme suit:

$$\tau_{ij} = \mu_T \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i=1,2; \quad j=1,2 \quad [8]$$

Le coefficient de viscosité turbulente peut être estimé de différentes façons. Par exemple, en utilisant une méthode dite à "zéro équation" utilisant une loi de longueur de mélange (Rodi, 1980).

$$\mu_T = \rho l_m^2 \sqrt{2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \quad [9]$$

$l_m$ : longueur de mélange.

Les termes 1 et 6 représentent l'accélération locale (dans le temps) produite par un déséquilibre des forces au sein de l'écoulement. L'accélération convective est prise en compte par les termes 2, 3, 7 et 8. L'effet gravitationnel est donné par les termes 4 et 9. Les forces massiques sont définies par les équations [6] et [7]. Les forces massiques comprennent: le frottement du lit d'écoulement (termes 11 et 15), la force de Coriolis (termes 12 et 16), les compressions et cisaillements turbulents (contraintes de Reynolds, termes 13 et 17) et la contrainte du vent (termes 14 et 18).

### 2.3 Modèle unidimensionnel

Les équations unidimensionnelles sont obtenues en intégrant les équations bidimensionnelles latéralement d'une berge à l'autre (Yen, 1973; Lai, 1986). Certaines hypothèses de base sont automatiquement incluses car elles découlent des équations générales de continuité [1] et de mouvement [2]. Rappelons-les:

- l'eau est considérée comme un fluide incompressible et newtonien;
- la masse spécifique de l'eau est considérée homogène;  $\rho = \text{constante}$ ;

- l'accélération verticale de l'eau est très faible par rapport à l'accélération gravitationnelle. La pression est donc considérée hydrostatique;
- la bathymétrie du cours d'eau est fixe et ne change pas en fonction du temps.

Une hypothèse supplémentaire est retenue pour obtenir spécifiquement les équations 1-D:

- la pente du fond est faible et les méandres ne sont pas trop accentués ou rapprochés. La coordonnée curviligne  $s$  peut donc être prise le long du chenal principal d'écoulement.

### 2.3.1 Equations 1-D

---

Les conventions utilisées pour le modèle 1-D sont illustrées à la figure 3. Il est à noter que  $V$  est positif dans le sens de  $s$  et négatif dans le sens contraire.

L'équation de la continuité 2-D [3] intégrée verticalement devient:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(VA)}{\partial s} = 0 \quad [10]$$

$A$ : aire de la section d'écoulement;

$h$ : hauteur d'eau;

$V$ : vitesse moyenne de la section;

$s$ : coordonnée longitudinale.

Equation de mouvement 2-D [4] intégrée verticalement devient:

$$\frac{\partial(VA)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(V^2A) + gA \frac{\partial h}{\partial s} + gAS_f - v_T A \frac{\partial^2 V}{\partial s \text{ super } 2} = 0 \quad [11]$$

Le frottement au fond  $S_f$  est calculé en se servant du coefficient de rugosité  $n$  de Manning:

$$S_f = \frac{n^2 V |V|}{\tilde{H}^{4/3}} \quad [12]$$

$\tilde{H}$ : profondeur moyenne de la section (semblable au rayon hydraulique dans le cas des cours d'eau où la largeur domine nettement sur la profondeur);

$\nu_T$ : coefficient de viscosité cinématique turbulente.

Classiquement, les contraintes de Reynolds qui découlent de l'intégration temporelle des termes convectifs ( $\overline{V_i V_j}$ ), sont délaissées dans la formulation 1-D au profit des contraintes de frottement. Leur prise en compte devient une question d'ajustement de paramètres (calibrage). Dans le modèle 1-D développé, cette composante du bilan a été contrairement retenue afin de préserver l'analogie et l'homogénéité avec les modèles 2-D et 3-D. Les possibilités naturelles de raccordement numérique offertes par la forme variationnelle faible qui découle du traitement de ce terme (voir la section 3.1.1) sont de cette façon conservées.

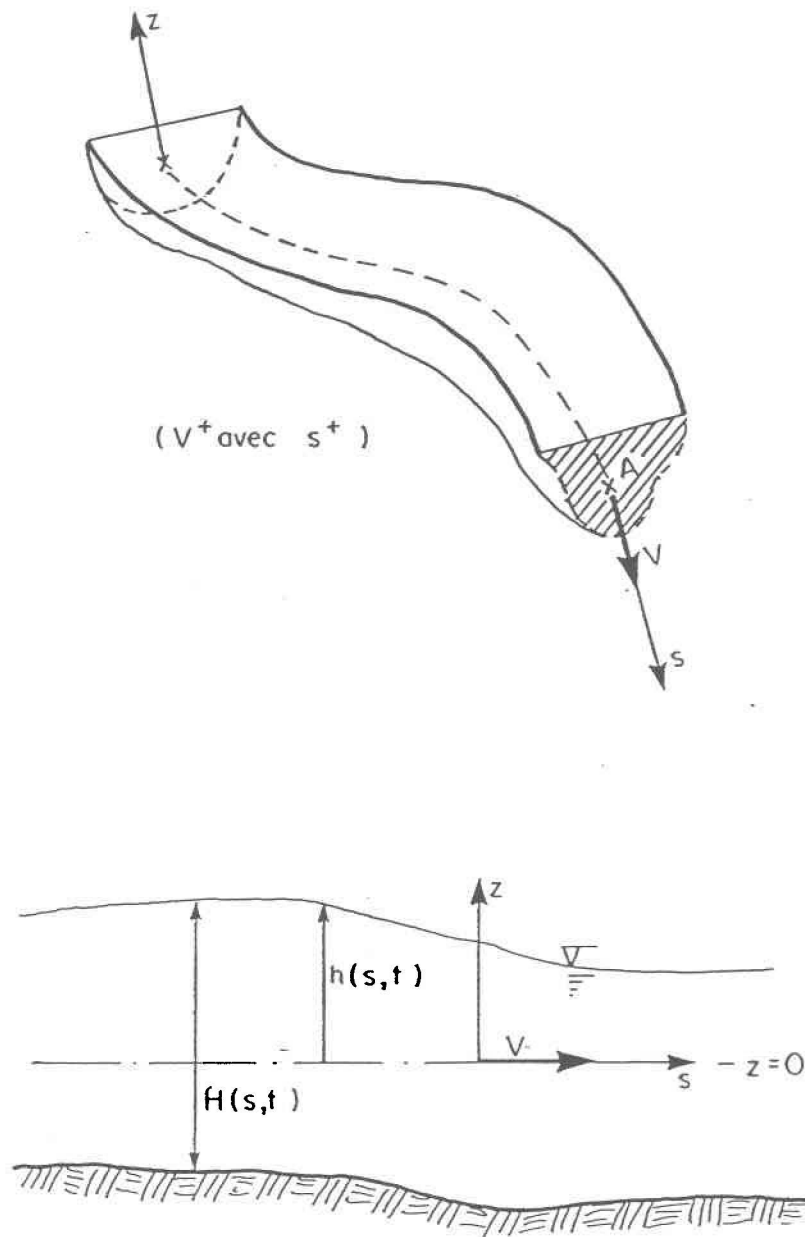


Figure 3 Conventions du modèle 1-D.

### 2.3.2 Géométrie des sections 1-D

La géométrie de la section d'écoulement est basée sur une description trapézoïdale. Il est plus facile de déterminer les coefficients de géométrie de la section en utilisant un système de référence locale. Ces coefficients sont ensuite traduits dans le système de coordonnées globale pour être introduits dans le modèle. La figure 4 expose les conventions utilisées pour décrire la géométrie de la section:

$$A = a_{L1} + a_{L2}\eta + a_{L3}\eta^2 \quad [13]$$

Avec:

$$a_{L2} = b_2$$

$$a_{L3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right)$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont les pentes moyennes des berges gauche et droite du cours d'eau à partir du niveau de référence locale vers le haut.

La géométrie de la section dans le système globale devient:

$$A = a_1 + a_2h + a_3h^2 \quad [14]$$

Avec:

$$a_1 = a_{L1} - a_{L2}D_z + a_{L3}D_z^2$$

$$a_2 = a_{L2} - 2a_{L3}D_z$$

$$a_3 = a_{L3}$$

La profondeur moyenne de la section est définie comme suit:

$$\bar{H} = \frac{A}{B} \quad [15]$$

Avec:

$$B = b_2 + \eta \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) = a_2 + 2a_3 h$$

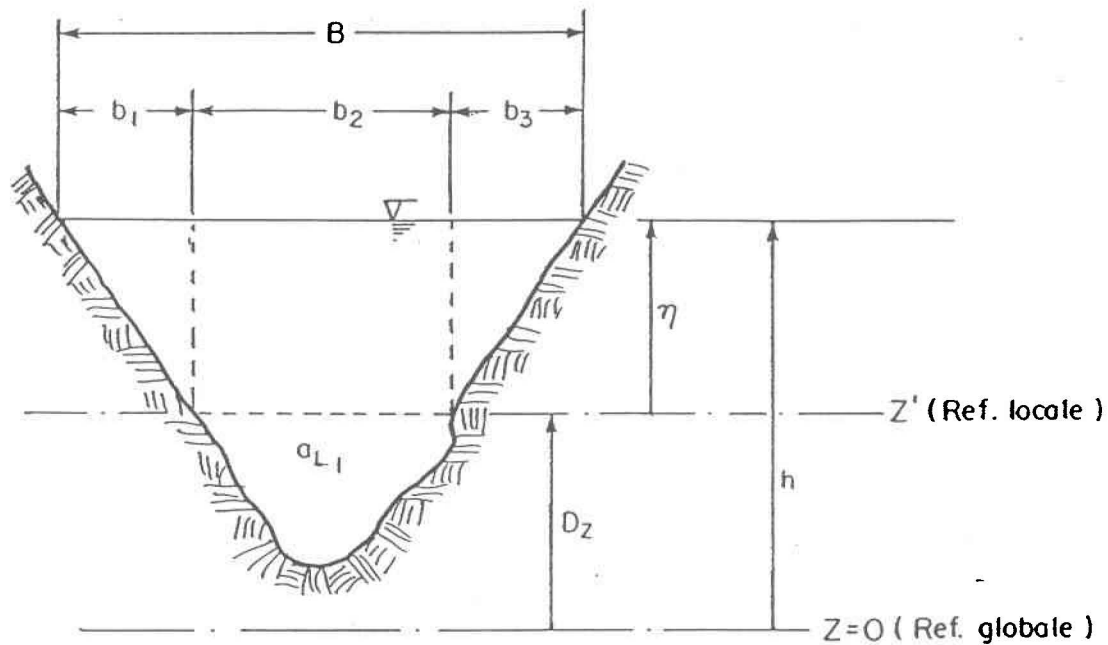


Figure 4 Section transversale.

### 3. METHODE DES ELEMENTS FINIS

---

#### 3.1 Modèle variationnel 1-D

---

La méthode des éléments finis consiste à obtenir un modèle variationnel qui sera ensuite discrétisé en utilisant une approximation simple des variables inconnues (Dhatt et Touzot, 1981). Généralement, en hydrodynamique, le modèle variationnel est obtenu en utilisant la méthode des résidus pondérés de Galerkin. Cette méthode consiste à chercher les degrés de liberté  $U$  pour que l'intégrale, du produit du système d'équation différentiel par une fonction de pondération, soit nulle.

Le système d'équations aux dérivées partielles (EDP) peut s'écrire:

$$[L_m]\{\dot{U}\} + [L_r]\{U\} + \{F\} = 0 \quad [16]$$

$\langle \rangle$ : vecteur ligne;

$\{ \}$ : vecteur colonne;

$[ ]$ : matrice;

$[L_r]$ : opérateur global de dérivation;

$[L_m]$ : opérateur des termes non stationnaires;

$\{U\}$ : vecteur global des degrés de liberté du système;

$\{\dot{U}\} = \frac{\partial \{U\}}{\partial t}$ : vecteur global des dérivées des degrés de liberté du système par rapport au temps;

$\{F\}$ : sollicitation.

Le résidu est défini comme:

$$[R(U)] = [L_m]\{\dot{U}\} + [L_r]\{U\} + \{F\} \quad [17]$$

Le résidu s'annule lorsque  $U$  est la solution de l'équation.

$\psi$  représentant la pondération, la formulation intégrale est:

$$W(U) = \int_s \langle \psi \rangle \{R(U)\} ds = 0 \quad [18]$$

Tel que mentionné précédemment, la méthode des résidus pondérés de type Galerkin est généralement utilisée pour la formulation intégrale. La formulation de type Galerkin est obtenue en choisissant comme pondération la première variation ( $\delta U$ ) des inconnues du problème:

$$\int_s \langle \delta U \rangle \{R(U)\} ds = 0 \quad [19]$$

L'équation de mouvement est pondérée par la première variation de la vitesse et l'équation de continuité par celle de la hauteur d'eau:

$$W_c = \int_s \delta h \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(VA)}{\partial s} \right) ds = 0 \quad [20]$$

$$W_m = \int_s \delta V \left( \frac{\partial(VA)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} (V^2 A) + gA \frac{\partial h}{\partial s} + gAS_f - v_T A \frac{\partial^2 V}{\partial s \text{ super } 2} \right) ds = 0 \quad [21]$$

$W_c$ : fonctionnelle de continuité;

$W_m$ : fonctionnelle de mouvement.

Cette procédure est généralement retenue pour l'élaboration des modèles d'écoulement en élément finis tant en 3-D (Soulaïmani, 1987; Leclerc, 1985; Robert, 1983) qu'en 2-D (Cochet, 1979; Soulaïmani, 1984; Leclerc et al., 1987).



### 3.1.1 Intégration par partie et termes de contour

L'intégration par partie des équations [20] et [21] fournit les formes intégrales dites "faibles". L'ordre de dérivation de la vitesse dans l'équation de mouvement est diminué sous la forme faible. Les conditions imposées aux fonctions d'interpolation admissibles pour la vitesse sont donc moins fortes. L'intégration par partie introduit aussi des termes de contour qui facilitent la prise en compte des conditions aux limites.

Pour la fonctionnelle de continuité [20]:

$$W_c = \int_s \delta h \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(VA)}{\partial s} \right) ds = 0 \quad [22]$$

L'intégration par partie porte sur le terme  $\frac{\partial(VA)}{\partial s}$

et donne:

$$\int_s \delta h \frac{\partial(VA)}{\partial s} ds = - \int_s \frac{\partial \delta h}{\partial s} VA ds + (\delta h VA)|_0^t \quad [23]$$

Le terme de contour ainsi obtenu  $(\delta h VA)|_0^t$  prend la forme d'un débit pondéré ce qui nous permet d'introduire une condition de sollicitation de ce type aux limites.

Dans la fonctionnelle de mouvement [21], l'intégration par partie du terme laplacien  $v_T A \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial s \partial s \partial s}$  donne :

$$\int_s \delta V v_T A \left( \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial s \partial s \partial s} \right) ds = - \int_s v_t \frac{\partial(\delta V A)}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial s} ds + \delta V v_T A \frac{\partial V}{\partial s} \Big|_0^t \quad [24]$$

On trouvera au tableau 1 le modèle variationnel faible 1-D exprimé en utilisant la forme expansée de l'aire de la section d'écoulement  $A$ .

Tableau 1

Modèle variationnel 1-D

$$W_c = \int_s \delta h \left( a_2 \frac{\partial h}{\partial t} + 2a_3 h \frac{\partial h}{\partial t} \right) ds - \int_s \frac{\partial \delta h}{\partial s} (a_1 V + a_2 h V + a_3 h^2 V) ds$$

$$-(\delta h V A) \Big|_0^i = 0 \quad [25]$$

$$W_m = \int_s \left( \delta V \left( a_1 \frac{\partial V}{\partial t} + a_2 V \frac{\partial h}{\partial t} + a_2 h \frac{\partial V}{\partial t} + a_3 h^2 \frac{\partial V}{\partial t} + 2a_3 h V \frac{\partial h}{\partial t} \right. \right. \quad [26]$$

$$+ V^2 \frac{\partial a_1}{\partial s} + 2a_1 V \frac{\partial V}{\partial s} + h V^2 \frac{\partial a_2}{\partial s} + a_2 V^2 \frac{\partial h}{\partial s}$$

$$+ 2a_2 h V \frac{\partial V}{\partial s} + h^2 V^2 \frac{\partial a_3}{\partial s} + 2a_3 h V^2 \frac{\partial h}{\partial s} + 2a_3 h^2 V \frac{\partial V}{\partial s}$$

$$+ g a_1 \frac{\partial h}{\partial s} + g a_2 h \frac{\partial h}{\partial s} + g a_3 h^2 \frac{\partial h}{\partial s}$$

$$\left. + g n^2 \frac{(a_1 + a_2 h + a_3 h^2) |V| V}{\left( \frac{a_1 + a_2 h + a_3 h^2}{a_2 + 2a_3 h} \right)^{4/3}} \right)$$

$$+ v_T \frac{\partial V}{\partial s} \left( a_1 \frac{\partial \delta V}{\partial s} + \delta V \frac{\partial a_1}{\partial s} + a_2 h \frac{\partial \delta V}{\partial s} + a_2 \delta V \frac{\partial h}{\partial s} + \delta V h \frac{\partial a_2}{\partial s} \right.$$

$$\left. + a_3 h^2 \frac{\partial \delta V}{\partial s} + 2a_3 h \delta V \frac{\partial h}{\partial s} + h^2 \delta V \frac{\partial a_3}{\partial s} \right) ds$$

$$- \left( v_T \delta V A \frac{\partial V}{\partial s} \right) \Big|_0^i = 0$$

### 3.1.2 Discrétisation

La discrétisation du modèle variationnel  $W$  consiste à remplacer l'intégrale sur le domaine  $S$  par une somme d'intégrales sur des éléments discrets  $e$  (Dhatt et Touzot, 1981):

$$W = \sum W^e = 0 \quad [27]$$

Chaque terme  $W^e$  est calculé en utilisant des approximations nodales pour remplacer les variables et leurs premières variations:

$$V = \langle N_v(s) \rangle \{V_n\} \equiv \langle N_v \rangle \{V_n\} \quad [28]$$

$$\delta V = \langle N_v \rangle \{\delta V_n\}$$

$$h = \langle N_h \rangle \{h_m\}$$

$$\delta h = \langle N_h(s) \rangle \{\delta h_m\} \equiv \langle N_h \rangle \{\delta h_m\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial \langle N_v \rangle}{\partial s} \{V_n\}$$

avec :

$\langle N_v \rangle$  : fonctions d'interpolation de la vitesse;

$\langle N_h \rangle$  : fonctions d'interpolation des hauteurs d'eau;

$\langle V_n \rangle = \langle V_1 \dots V_n \rangle$  : valeurs nodales des vitesses;

$\langle h_m \rangle = \langle h_1 \dots h_m \rangle$  : valeurs nodales des hauteurs d'eau;

$n$  : nombre de noeuds pour les vitesses;

$m$  : nombre de noeuds pour les hauteurs d'eau.

Ainsi le terme gravitationnel de l'équation de mouvement devient sous forme discrétisée:

$$\int_e \delta V g A \frac{\partial h}{\partial s} ds = \langle \delta V_n \rangle \int_e \{N_v\} g A \frac{\partial \langle N_h \rangle}{\partial s} ds \{\delta h_m\} \quad [29]$$

On note que les valeurs nodales  $V_n$  et  $h_m$  sont de type paramétrique et peuvent être extraites de l'intégrale. De plus, le produit des fonctions  $\{N\} \langle N \rangle$  conduit à l'élaboration d'un système matriciel  $[K]$ .

### 3.1.3 Elément de base

Un consensus, visant à réduire les problèmes d'oscillations spatiales, s'est créé autour du choix d'une approximation quadratique pour décrire la vitesse tandis qu'une approximation linéaire décrit le niveau d'eau et la géométrie pour les éléments bidimensionnels (Robert, 1983). Il en est de même en 3-D et 1-D. A une dimension, notre élément comporte 3 noeuds d'interpolation équidistants où sont associées les vitesses. Les hauteurs d'eau sont rattachées aux noeuds des extrémités qui constituent aussi les noeuds géométriques de l'élément. L'élément 1-D est alors quadratique en vitesse et linéaire en hauteur d'eau.

Interpolation linéaire sur l'élément de référence:

$$\langle N_s \rangle = \langle N_h \rangle = \left( \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right) \quad \{h_m\} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad [30]$$

Interpolation quadratique sur l'élément de référence:

$$\langle N_v \rangle = \left( -\xi \frac{(1-\xi)}{2}, (1-\xi^2), \xi \frac{(1+\xi)}{2} \right) \quad \{V_n\} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad [31]$$

### 3.1.4 Élément-chapeau

Du point de vue mathématique, l'élément-chapeau conserve la même richesse d'approximation et les mêmes propriétés que l'élément précédent. Cependant l'utilisation d'un élément-chapeau permet de diminuer le nombre des fonctions d'interpolation nécessaire au problème. L'élément-chapeau est le complément logique et normale de la condensation (voir la section 3.4) qui permet une économie considérable du temps de calcul nécessaire à la résolution des problèmes.

L'élément-chapeau utilise les fonctions linéaires  $\frac{1-\xi}{2}$  et  $\frac{1+\xi}{2}$  dans le cadre de l'approximation quadratique. Seulement une fonction supplémentaire est nécessaire afin d'obtenir l'approximation quadratique. Lorsque les fonctions d'interpolation chapeau sont utilisées,  $V_2$  de l'approximation nodale quadratique est alors remplacée par  $\alpha$ , un paramètre général formé par une combinaison linéaire des trois vitesses de l'élément. L'approximation linéaire du niveau d'eau et de la géométrie demeure inchangée avec l'élément-chapeau. L'élément de base et l'élément chapeau ainsi que leurs fonctions respectives sont montrés à la figure 5.

Interpolation sur l'élément-chapeau de référence:

$$\langle N \rangle = \left\langle \frac{(1-\xi)}{2} ; (1-\xi^2) ; \frac{(1+\xi)}{2} \right\rangle \quad \{V_c\} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ \alpha \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad [32]$$

Recherchons les paramètres qui assureront l'identité entre l'élément de base et l'élément-chapeau:

$$\frac{(1-\xi)}{2}V_1 + (1-\xi^2)\alpha + \frac{(1+\xi)}{2}V_3 = -\xi\frac{(1-\xi)}{2}V_1 + (1-\xi^2)V_2 + \xi\frac{(1+\xi)}{2}V_3 \quad [33]$$

$$(1-\xi^2)\alpha = (1-\xi^2)\left(-\frac{V_1}{2} + V_2 - \frac{V_3}{2}\right) \quad [34]$$

$$\alpha = \left( -\frac{V_1}{2} + V_2 - \frac{V_3}{2} \right) \quad [35]$$

$$\{V_c\} = \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ \alpha = -\frac{V_1}{2} + V_2 - \frac{V_3}{2} \\ V_3 \end{array} \right\} \quad [36]$$

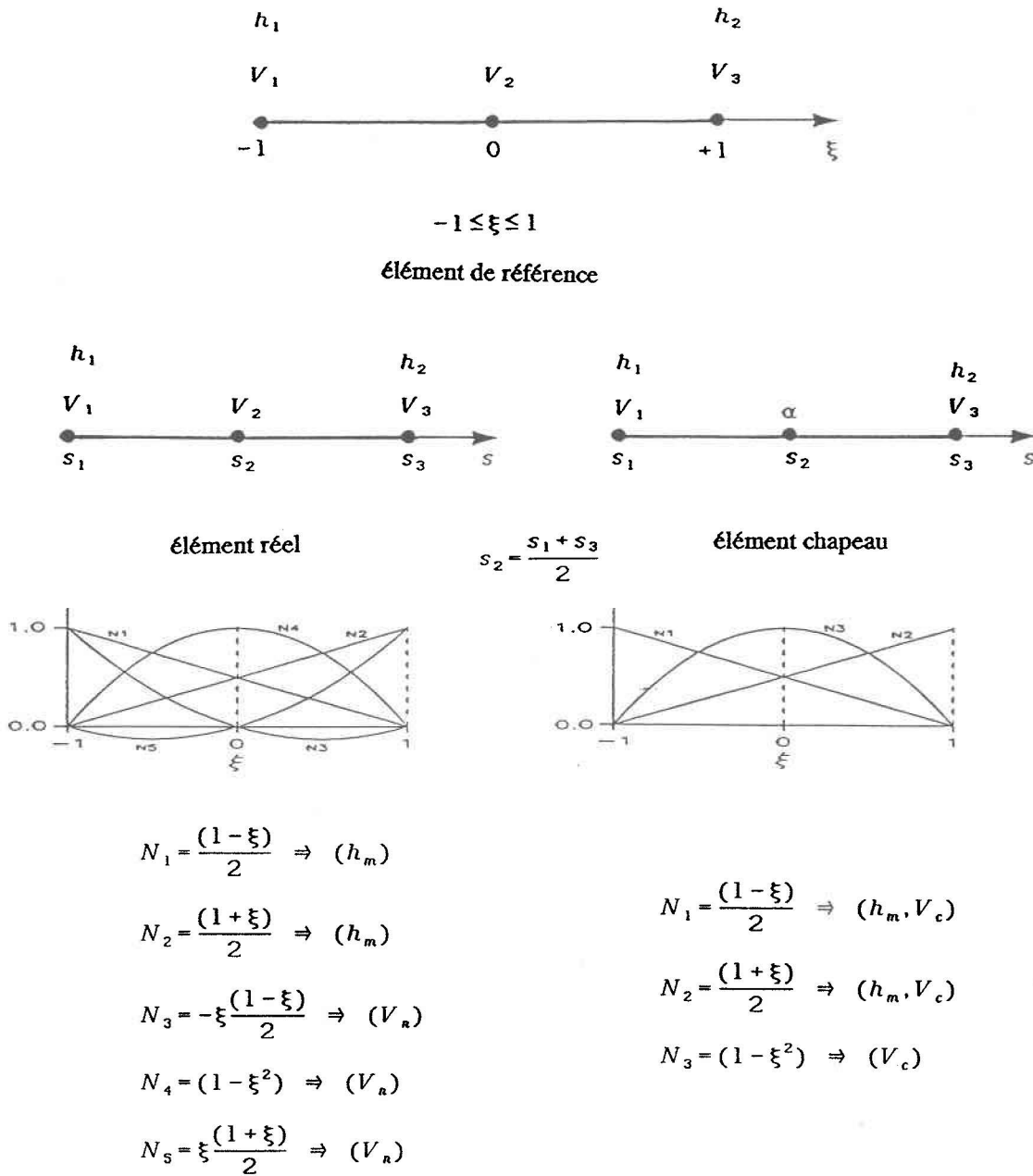


Figure 5 Fonctions des éléments 1-D.

### 3.1.5 Discrétisation d'un réseau d'écoulement

---

La géométrie et le niveau d'eau étant évalués linéairement, les caractéristiques de la section ne sont données que pour les noeuds des extrémités. Les caractéristiques d'une section donnée sont plus faciles à déterminer en utilisant un système de référence locale (voir la section 2.3.2). Entre les noeuds sommets, les sections sont évaluées de façon linéaire. La densité ou la grandeur des éléments est choisie afin d'assurer une bonne représentation du milieu. Le maillage est donc dicté par la bathymétrie du cours d'eau.

Lorsqu'il y a ramification, les caractéristiques de la section associées à un noeud faisant partie de la jonction 1D-1D doivent représenter une partie de la section totale du cours d'eau proportionnel à l'embranchement relié à ce noeud. La somme des sous-sections associée à chacun des noeuds faisant partie de la jonction 1D-1D doit être égale à la section totale du cours d'eau.

### 3.2 Modèle variationnel 2-D discrétisé

---

Le modèle 1-D ayant été élaboré à l'image du modèle 2-D, ce dernier utilise la même méthode de résolution. Une description élaborée de cette méthode est donnée dans Leclerc *et al.* (1987). Il existe une version améliorée du modèle 2-D comportant une fonctionnalité couvrant-découvrant (voir Leclerc *et al.*, 1990). Toutefois, la version utilisée dans le cadre de ce travail, étant une version antérieure, ne comportait pas cette possibilité.

Tout comme pour le modèle 1-D, la formulation intégrale du modèle 2-D est obtenue en utilisant la méthode des résidus pondérés de Galerkin. La première variation des vitesses pondère l'équation de mouvement et la première variation des hauteurs d'eau pondère l'équation de continuité. Après intégration par partie, le modèle variationnel devient:

$$\int_A \left( \delta h \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial(\delta h)}{\partial x} (Hu) - \frac{\partial(\delta h)}{\partial y} (Hv) \right) dA + \oint_S \delta h H u_N ds = 0 \quad [37]$$



$$\int_A \delta u \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{gn^2 |V| u}{H^{4/3}} - f_c v \right) dA \quad [38]$$

$$- \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\tau_{xx}}{\rho} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} \frac{\tau_{xy}}{\rho} \right) dA + \oint_s \delta u \left( \frac{\tau_{xx}}{\rho} + \frac{\tau_{xy}}{\rho} \right) ds = 0$$

$$\int_A \delta v \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{gn^2 |V| v}{H^{4/3}} + f_c u \right) dA \quad [39]$$

$$- \left( \frac{\partial \delta v}{\partial x} \frac{\tau_{yx}}{\rho} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} \frac{\tau_{yy}}{\rho} \right) dA + \oint_s \delta v \left( \frac{\tau_{yx}}{\rho} + \frac{\tau_{yy}}{\rho} \right) ds = 0$$

### 3.2.1 Description de l'élément

L'élément bidimensionnel utilise un triangle à 6 noeuds (T-6) pour décrire de façon quadratique les vitesses. Les noeuds sommets, qui constituent les noeuds géométriques, sont utilisés pour évaluer linéairement les hauteurs d'eau. Cet élément est présenté à la figure 6.

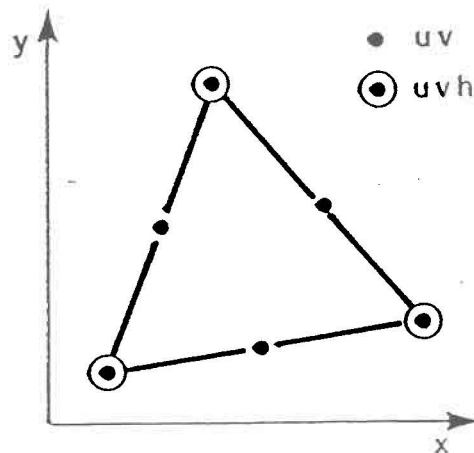
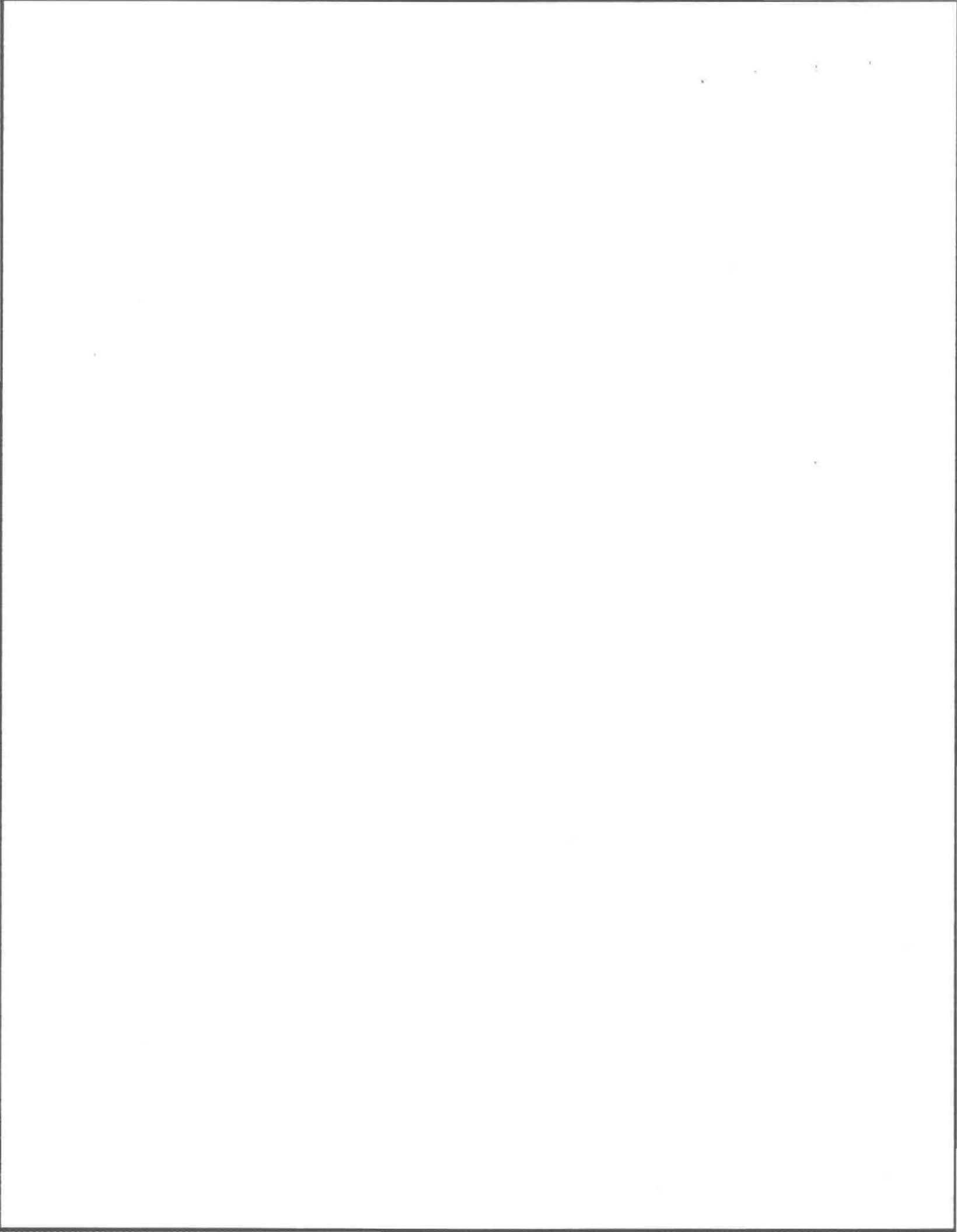


Figure 6 Elément triangulaire à six noeuds.



### 3.3 Méthode de résolution

---

#### 3.3.1 Intégration numérique

---

La méthode d'intégration numérique utilisée pour l'élément 1-D est la méthode de Gauss à 7 points. Cette méthode permet l'intégration exacte des polynômes jusqu'à l'ordre 13 (Dhatt et Touzot, 1981). L'intégration numérique prend la forme suivante sur l'élément de référence:

$$\int_{-1}^1 Y(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r w_i Y(\xi_i) \quad [40]$$

- $\xi_i$  les coordonnées des  $r$  points d'intégration;
- $w_i$  les coefficients de pondération correspondants;
- $Y(\xi)$  est une fonction polynomiale;
- $Y(\xi_i)$  est la valeur de la fonction polynomiale au point  $\xi_i$ .

L'élément 2-D utilise la méthode directe dite de Hammer (Dhatt et Touzot, 1981).

#### 3.3.2 Résolution non stationnaire

---

La discrétisation des équations de conservation de la masse et du mouvement conduit à un système d'équations différentielles du premier ordre en  $t$ :

$$[C(U)]\{\dot{U}\} + [K(U)]\{U\} = \{F\} \quad [41]$$

- $[C]$ : matrice masse globale;
- $[K]$ : matrice de rigidité globale;

$\{F\}$ : vecteur des sollicitations globales;

$U$ : l'ensemble des inconnues ( $V, h$ ) au niveau global.

Les non linéarités présentes dans les termes non stationnaires du modèle 1-D expliquent que la matrice  $[C]$  soit fonction de  $\{U\}$ . L'équation [41] est donc résolue en utilisant la méthode d'Euler implicite. Cette méthode est utilisée autant par le modèle 1-D que par le modèle 2-D. Elle s'applique ainsi:

$$[C(U_{t+\Delta t})](\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\}) + \Delta t [K(U_{t+\Delta t})]\{U_{t+\Delta t}\} = \Delta t \{F_{t+\Delta t}\} \quad [42]$$

$$([C(U_{t+\Delta t})] + \Delta t [K(U_{t+\Delta t})])\{U_{t+\Delta t}\} = \Delta t \{F_{t+\Delta t}\} + [C(U_{t+\Delta t})]\{U_t\} \quad [43]$$

### 3.3.3 Résolution non linéaire

La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour traiter les non linéarités. La matrice masse du modèle 1-D étant non-linéaire, elle est aussi incorporée dans le même traitement. La matrice tangente  $[K_T]$  est obtenue en discrétisant la première variation  $\delta(W)$  de la forme intégrale de  $R$ .

Introduisons le résidu:

$$\{R(U_{t+\Delta t}^{i-1})\} = \Delta t \{F_{t+\Delta t}\} + [C(U_{t+\Delta t})]\{U_t\} - ([C(U_{t+\Delta t})] + \Delta t [K(U_{t+\Delta t})])\{U_{t+\Delta t}^{i-1}\} = 0 \quad [44]$$

Le système étant non linéaire, il faut chercher  $U^i$  pour que:

$$\{R(U_{t+\Delta t}^i)\} = \{R(U_{t+\Delta t}^{i-1} + \Delta U_{t+\Delta t}^i)\} = 0 \quad [45]$$

En développant le résidu en série de Taylor:

$$\{R(U_{t+\Delta t}^{i-1} + \Delta U_{t+\Delta t}^i)\} = \{R(U_{t+\Delta t}^{i-1})\} + \left[ \frac{\partial R}{\partial U} \right]_{t+\Delta t}^{i-1} \{\Delta U_{t+\Delta t}^i\} + \dots = 0 \quad [46]$$

$$-\left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]_{t+\Delta t}^{i-1} \{\Delta U_{t+\Delta t}^i\} = \{R(U_{t+\Delta t}^{i-1})\} \quad [47]$$

où:

$\{R(U_{t+\Delta t}^{i-1})\}$  est donné par [44]

$$-\left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]_{t+\Delta t}^{i-1} = [K_T] = -\{U_t\} \left[\frac{\partial C}{\partial U}\right]_{t+\Delta t}^{i-1} + [C(U_{t+\Delta t}^{i-1})] + \Delta t [K(U_{t+\Delta t}^{i-1})] + \left[U \left(\frac{\partial C}{\partial U} + \Delta t \frac{\partial K}{\partial U}\right)\right]_{t+\Delta t}^{i-1} \quad [48]$$

### 3.4 Condensation

Une méthode de condensation (prérésolution au niveau élémentaire) a été utilisée sur l'élément 1-D. Cette procédure permet de diminuer la taille de la matrice de rigidité globale et ainsi augmenter la vitesse de résolution du problème. Une partie du problème 1-D (vitesse inconnue au noeud du milieu) est résolue localement. Seules les inconnues  $V_1$  et  $V_3$  sont portées au niveau global. A une dimension, le gain n'est pas considérable, mais à deux et trois dimensions une économie appréciable du temps de calcul est réalisée.

La condensation de l'inconnue  $\alpha$  de l'élément-chapeau (voir la section 3.1.4) est l'opération complémentaire de l'utilisation de ce type d'élément. Cette procédure s'effectue sans problème, car l'inconnue de type  $\alpha$  d'un élément ne donne lieu à aucune interconnexion algébrique avec les inconnues des autres éléments adjacents. Topologiquement, les équations auxquelles participent les inconnues  $\alpha$  ont une taille ne dépassant pas celle de l'élément.

La condensation permet par la même occasion de simplifier les données d'entrées. Toutes les données qui se rapportent aux noeuds-milieux sont éliminées. Les données utilisées sont exactement les mêmes que celles qu'utiliserait un élément linéaire en hauteur d'eau et en vitesse même si en réalité la vitesse est traitée de façon quadratique.

La condensation peut se faire à deux étapes différentes: lors de l'assemblage de la matrice élémentaire ou lors de l'assemblage de la matrice globale.

La méthode n'intervenant qu'à l'intérieur de l'élément à l'avantage de ne pas exiger de modification de la librairie MEF. Par contre, sa mise en place demande assez d'effort, résultant d'une formulation mathématique assez compliquée.

### 3.4.1 Méthode retenue

La méthode retenue est mise en oeuvre lorsque les termes sont sous la forme d'Euler et de Newton-Raphson juste avant l'assemblage dans la matrice globale. Cette méthode est facile à implanter, mais elle exige des modifications dans la librairie MEF.

Avec le problème résolu par la méthode d'Euler et la méthode de Newton-Raphson, nous avons:

$$[K_T]\{\Delta U^i\} = \{R^i\} \quad [49]$$

La matrice tangente globale et le résidu global sont constitués par l'assemblage de matrices tangentes élémentaires et de résidus élémentaires ayant la même forme.

$$[K_T^e]\{\Delta U^e\} = \{R^e\} \quad [50]$$

Ce système peut être départagé topologiquement en tenant compte de  $\Delta U^e$ , les accroissements qui seront assemblés au niveau global, et de  $\Delta \alpha$ , les accroissements qui seront traités localement sur l'élément. Ainsi:

$$\{\Delta U^e\} = \begin{Bmatrix} \Delta U_c \\ \Delta \alpha \end{Bmatrix} \quad [51]$$

$$[K_T^e] = \begin{bmatrix} k_{Tuu} & k_{Tu\alpha} \\ k_{T\alpha u} & k_{T\alpha\alpha} \end{bmatrix} \quad [52]$$

$$\{R^e\} = \begin{Bmatrix} r_u \\ r_\alpha \end{Bmatrix} \quad [53]$$

Où:

$\Delta U_c$  accroissement des degrés de liberté élémentaire sauf celui condensé;

$\Delta \alpha$  accroissement du degré de liberté élémentaire condensé;

$T$  indice de matrice tangente;

$e$  indice élémentaire;

$\alpha$  indice du degré de liberté condensé;

$u$  indice des degrés de liberté globaux sauf  $\alpha$

Alors:

$$\begin{bmatrix} k_{Tuu} & k_{Tu\alpha} \\ k_{T\alpha u} & k_{T\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U_c \\ \Delta \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_u \\ r_\alpha \end{Bmatrix} \quad [54]$$

En dissociant l'équation contenant le degré de liberté  $\alpha$  des autres équations, on obtient:

$$[k_{Tuu}]\{\Delta U_c\} + [k_{Tu\alpha}]\{\Delta \alpha\} = \{r_u\} \quad [55]$$

$$[k_{T\alpha u}]\{\Delta U_c\} + [k_{T\alpha\alpha}]\{\Delta \alpha\} = \{r_\alpha\} \quad [56]$$

En isolant  $\Delta \alpha$  de l'équation précédente:

$$\{\Delta \alpha\} = [k_{T\alpha\alpha}]^{-1} (\{r_\alpha\} - [k_{T\alpha u}]\{\Delta U_c\}) \quad [57]$$

En remplaçant  $\Delta \alpha$  dans [55] par [57],

$$[k_{Tuu}]\{\Delta U_c\} + [k_{Tu\alpha}][k_{T\alpha\alpha}]^{-1} (\{r_\alpha\} - [k_{T\alpha u}]\{\Delta U_c\}) = \{r_u\} \quad [58]$$

$$([k_{Tuu}] - [k_{Tu\alpha}][k_{T\alpha\alpha}]^{-1}[k_{T\alpha u}])\{\Delta U_c\} = \{r_u\} - [k_{Tu\alpha}][k_{T\alpha\alpha}]^{-1}\{r_\alpha\} \quad [59]$$

Cette procédure nous donne un système matriciel réduit ayant la topologie de  $U_c$ ,

$$[k'_{Tuu}]\{\Delta U_c\} = \{r'_u\} \quad [60]$$

C'est ce système élémentaire réduit qui sera assemblé au niveau global.

La méthode de condensation intervenant juste avant l'assemblage de la matrice globale est mathématiquement simple en plus d'être facile à implanter. La modification de la librairie MEF est limitée à une sous-routine et ne nécessite que l'ajout de quelques lignes. Cette modification ne remet pas en question la versatilité de la librairie qui peut continuer à traiter différentes sortes d'éléments. Cette méthode permet de réduire de pratiquement 1/3 la taille de la matrice globale d'un problème unidimensionnel.



## 4. ETUDE DE CERTAINS ASPECTS DES CONDITIONS AUX LIMITES

---

### 4.1 Termes de contour provenant du laplacien (modèle 1-D)

---

Le terme de contour provenant de l'intégration par partie du laplacien (contraintes de Reynolds) est classiquement traité de la façon suivante: soit, la vitesse  $V$  est imposée alors  $\delta V = 0$  et le terme disparaît; soit, le terme tient lieu de sollicitation connue qui est introduite au second membre. Dans ce cas, cette sollicitation  $\{F\}$  est prise en compte dans le résidu. Si la vitesse ne peut être imposée ( $\delta V \neq 0$ ) et que le terme ne correspond pas à une sollicitation connue, l'hypothèse  $\left(\frac{\partial V}{\partial s} \ll 1\right)$  qui correspond à l'écoulement uniforme permettra de négliger ce terme. Si l'écoulement n'est pas uniforme, le terme provenant du laplacien doit au sens strict, s'assembler avec les autres termes de l'équilibre des forces.

Cette procédure ne cause pas de grosses difficultés informatiques particulières et peut apporter des améliorations notables dans la solution de certains problèmes.

Ce terme n'apparaissant qu'au contour du domaine, seuls les éléments 1-D des extrémités contiennent le terme de contour du laplacien. Ce terme prend la forme suivante:

$$\pm v_T \delta V (a_1 + a_2 h + a_3 h^2) \frac{\partial V}{\partial s} \Big|_0^l \quad [61]$$

Le choix du signe  $\pm$  de ce terme dépend de la position de l'élément sur lequel il est assemblé. En se basant sur la notation de l'équation [26] (résumé du modèle variationnel), il sera positif pour l'élément extrémité aval et négatif pour celui à l'amont si l'intégrale se calcule d'amont en aval. C'est une conséquence de l'intégration par partie.

Le terme de contour provenant du laplacien est souvent négligé dans les modèles traditionnels. Ainsi dans MEFLU 2-D, les termes de contour du laplacien sont négligés en supposant que

l'écoulement est uniforme dans la direction de l'écoulement aux frontières ouvertes et en imposant une condition de glissement au littoral. La sensibilité de ce terme a été vérifiée par un exemple (voir la section 5.2).

#### 4.2 Sollicitation en débit (modèle 1-D)

Comme il a été vu au chapitre 3 (voir la section 3.1.1), l'intégration par partie de l'équation de la continuité nous donne la forme faible et fait apparaître un terme de contour de type débit.

$$\int \delta h \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(VA)}{\partial s} \right) dS = \int \left( \delta h \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial \delta h}{\partial s} VA \right) dS + (\delta h VA)|_0^t = 0 \quad [62]$$

L'imposition d'un degré de liberté  $h$  a pour effet d'éliminer l'équation de continuité correspondante ( $\delta h = 0$ ). Si ce  $h$  se trouve aux limites du domaine, le terme de contour est par la même occasion éliminé. Lorsqu'on souhaite imposer un débit comme condition-limite, on laisse le degré de liberté  $h$  correspondant libre. L'équation de continuité n'est donc pas éliminée. Le terme de contour n'est pas assemblé à l'intérieur de l'équation de continuité, mais est plutôt remplacé par le débit à être imposé qui est introduit d'une façon semblable à une sollicitation ( $F$ ). Alors:

$$(\delta h VA)|_0^t = (\delta h Q)|_0^t \quad [63]$$

$Q$  étant le débit à imposer.

Ce terme de contour de type débit, qui habituellement est absent du modèle discrétisé, peut aussi être assemblé comme inconnu du problème dans certains éléments spéciaux de la même façon que le terme de contour du laplacien. Il s'agit de l'élément établissant la relation niveau-débit (4.3), de l'élément de connectivité 1D-1D (4.4) et de l'élément de jonction 1D-2D (4.6).

### 4.3 Relation niveau-débit (modèle 1-D)

Cette relation est très utile pour fermer le modèle à l'aval du domaine lorsque les conditions aux limites  $y$  sont inconnues. La relation niveau-débit peut aussi être utilisée partout sur le domaine où l'on veut imposer un niveau d'eau pour un débit donné. Un élément spécial est appelé pour imposer cette relation. L'élément impose la relation niveau-débit en "écrasant", c'est-à-dire en se superposant à l'équation de mouvement.

Ceci est fait en pénalisant par un coefficient important la relation niveau-débit qui va ensuite s'ajouter sur l'équation de mouvement. La pénalisation de la relation niveau-débit rend beaucoup plus importante par rapport à l'équation de mouvement, ce qui assure son respect. L'élément peut aussi assembler au besoin les termes de contour en débit provenant de l'intégration par partie de l'équation de la conservation. Cette possibilité est nécessaire lors de l'imposition de la relation niveau-débit aux limites amont et aval du domaine.

La relation niveau-débit prend la forme suivante:

$$Q = b(h - h_0)^d \quad [64]$$

L'équation imposant la relation niveau-débit est alors:

$$\beta b(h - h_0)^d - \beta V(\alpha_1 + \alpha_2 h + \alpha_3 h^2) = 0 \quad [65]$$

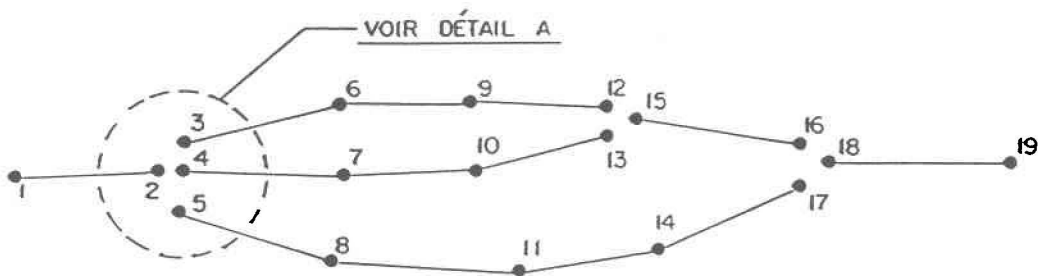
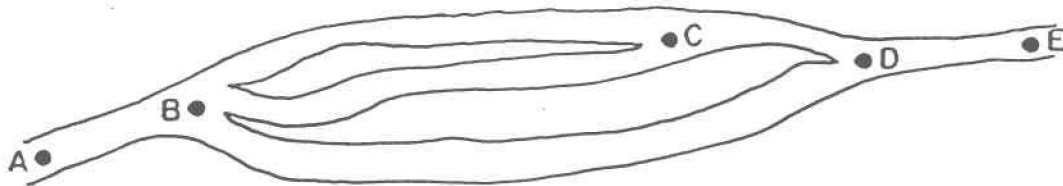
$Q$	débit;
$d$	coefficient dépendant de la section;
$b$	coefficient dépendant de la section;
$h$	hauteur d'eau;
$h_0$	hauteur caractéristique de référence;
$V$	vitesse moyenne sur la section;
$\beta$	coefficient de pénalité assurant le respect de l'équation.

Les sections 5.1 et 5.2 portent sur des exemples utilisant cette fonctionnalité.

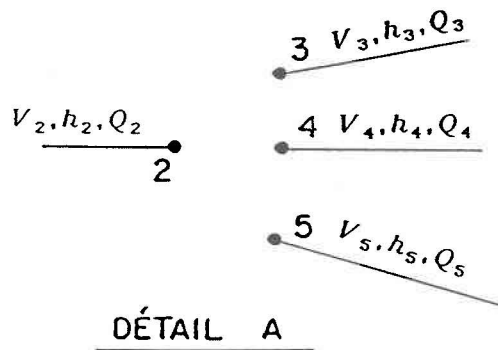
#### 4.4 Connectivité 1D-1D

---

Dans les cours d'eau, on rencontre souvent des îles ou des ramifications. Un modèle 1-D se doit de pouvoir modéliser ce genre de particularité. Un élément de jonction a été conçu pour pouvoir traiter ce genre de problème. L'élément est constitué de plusieurs noeuds ayant la même coordonnée et dont le nombre dépend du degré de la ramification. La connectivité 1D-1D est présentée à la figure 7. Cet élément utilise la même approche que l'élément imposant la relation niveau-débit. Des commodités ont été prévues pour assurer à la jonction soit, la conservation du débit, l'égalité des vitesses, l'égalité des hauteurs d'eau ou une combinaison de ces conditions.



noeuds A et E : limites du modèle  
 noeuds B,C et D : jonctions 1D-1D



égalité des vitesses:  
 $V_2 = V_3 = V_4 = V_5$   
 égalité des hauteurs d'eau:  
 $h_2 = h_3 = h_4 = h_5$   
 conservation du débit:  
 $\sum_{i=2}^5 Q_i = 0$

Figure 7 Connectivité 1D-1D.

#### 4.4.1 Egalité des hauteurs d'eau

---

L'égalité des hauteurs d'eau est introduite dans le processus de résolution en "écrasant", c'est-à-dire en se superposant à l'une ou l'autre des équations de conservation que l'on retrouve à la jonction. Sur chacune de celles-ci, sauf sur celle du premier degré de liberté en hauteur d'eau de la jonction appelé par le programme, on retrouve l'équation suivante:

$$\beta(h_i - h_{i-1}) = 0 \quad [66]$$

$$2 \leq i \leq N$$

- $N$ : nombre de noeuds de la connectivité 1D-1D;  
 $i$ : numéro du noeud où l'équation de conservation de la masse correspondante sera écrasé et indice du degré de liberté en hauteur d'eau du noeud concerné, l'indice  $i$  est une numérotation locale où seulement les noeuds de la connectivité 1D-1D sont présents.

Chaque hauteur d'eau est jumelée avec une autre inconnue en hauteur d'eau pour en assurer l'égalité. Il y aura  $N - 1$  équations de pénaliser pour que tous les degrés de liberté en hauteur d'eau de la connectivité 1D-1D soient égaux.

#### 4.4.2 Egalité des vitesses

---

L'égalité des vitesses est obtenue de la même façon que l'égalité des hauteurs d'eau. Sur chaque équation de mouvement sauf sur celle du premier degré de liberté en vitesse, on retrouve l'équation suivante:

$$\beta(V_i - V_{i-1}) = 0 \quad [67]$$

$$2 \leq i \leq N$$

- $N$ : nombre de noeuds de la connectivité 1D-1D;  
 $i$ : indice du degré de liberté vitesse correspondant au noeud  $i$  .

Chacune des extrémités de branche est considérée comme une limite ouverte. Les termes de contours en débit sont assemblés sur chacune des branches pour assurer la fermeture du modèle aux connectivités 1D-1D.

#### 4.4.3 Conservation du débit

La conservation du débit est réalisée en "écrasant" l'équation de mouvement du premier degré de liberté en vitesse faisant partie de l'élément de connectivité 1D-1D. L'équation de conservation du débit prend la forme suivante:

$$\sum_{i=1}^N \pm \beta (\alpha_{1i} + \alpha_{2i} h_i + \alpha_{3i} h_i^2) V_i = 0 \quad [68]$$

Le signe  $\pm$  est déterminé par le sens du débit soit entrant ou sortant.

#### 4.5 Méthode des contraintes multiples

La technique de pénalisation ayant connu un succès mitigé dans le cas de la connectivité 1D-2D, une autre approche fut privilégiée. Il s'agit de l'approche des contraintes multiples. C'est une généralisation de l'algorithme de la contrainte globale d'incompressibilité telle que présentée dans Leclerc (1985) et Dhatt *et al.* (1987).

Pour un problème non linéaire:

$$[K_T] \{\Delta U^t\} = \{R^t\} \quad [69]$$

Les  $n$  contraintes que l'ont veut imposer au système sont définies ainsi (sous la forme normale ou incrémentale):

$$\langle \alpha_j \rangle \{U^i\} = C_j \quad [70]$$

$$\langle \alpha_j \rangle \{\Delta U^i\} = \Delta C_j; \quad j = 1, n$$

où  $\langle \alpha_j \rangle$  est le coefficient de la  $j^{\text{ème}}$  contrainte et  $C_j$  est son résultat recherché.

Ces  $n$  contraintes sont imposées de la façon suivante. Parmi les équations correspondant topologiquement aux degrés de liberté concernés par les contraintes,  $n$  termes de la diagonale de la matrice tangente sont pénalisés par  $\lambda$ :

$$k_{ii\lambda_j} = k_{ii} + \lambda \quad [71]$$

Au second membre, l'effet de chaque pénalisation  $j$  de la diagonale est compensé par l'ajout d'un terme correctif  $r$  correspondant spécifiquement à l'équation  $i$ .

$$r_{i\lambda_j} = \lambda_j \Delta u_i \quad [72]$$

$\Delta u_i$  étant le degré de liberté correspondant à la  $i^{\text{ème}}$  équation.

Les résidus supplémentaires peuvent être définis à partir de chaque terme correctif provenant des pénalisations. Chaque résidus supplémentaires sont composés d'un vecteur  $R_j$  multipliant un degré de liberté correspondant à une des équations pénalisées. Le vecteur  $R_j$  est nuls sauf pour un terme correspondant au  $j^{\text{e}}$  terme pénalisé de la matrice tangente qui prend la valeur de la pénalisation  $\lambda$ . Chaque résidu supplémentaire correspond à un terme pénalisé tangent différent:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} + \lambda_1 & k_{23} & k_{24} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & \dots & k_{3n} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} + \lambda_2 & \dots & k_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & k_{n4} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \{\Delta U^i\} = \{R^i\} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \Delta u_{p1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \Delta u_{p2} + \dots + \{R_n\} \Delta u_{pn} \quad [73]$$



Dans  $\Delta u_{pn}$  l'indice  $pn$  identifie que c'est un degré de liberté correspondant à la  $n^{\text{ième}}$  équation pénalisée.

La forme expansée peut aussi être exprimée de la façon suivante:

$$[K_T]_{n\lambda} \{\Delta U^i\} = \{R^i\} + \sum_{j=1}^n \{R_j\} \Delta u_{pj} \quad [74]$$

En découplant, l'équation [74] devient:

$$[K_T]_{n\lambda} \{\Delta U_0\} = \{R\} \quad [75]$$

$$[K_T]_{n\lambda} \{\Delta U_j\} \Delta u_{pj} = \{R_j\} \Delta u_p ; j = 1, n \quad [76]$$

Avec:

$$\{\Delta U\} = \{\Delta U_0\} + \sum_{j=1}^n \{\Delta U_j\} \Delta u_{pj} \quad [77]$$

Réolvons les équations [75] et [76]:

$$\{\Delta U_0\} = [K_T]_{n\lambda}^{-1} \{R\} \quad [78]$$

$$\{\Delta U_j\} = [K_T]_{n\lambda}^{-1} \{R_j\} ; j = 1, n \quad [79]$$

$\Delta u_{pj}$  demeurent inconnus. Les contraintes peuvent être réécrites de la façon suivante en se servant de [77]:

$$\langle a_1 \rangle \{ \Delta U \} = \langle a_1 \rangle \{ \Delta U_0 \} + \langle a_1 \rangle \{ \Delta U_1 \} \Delta u_{p1} + \dots + \langle a_1 \rangle \{ \Delta U_n \} \Delta u_{pn} = \Delta C_1 \quad [80]$$

$$\langle a_2 \rangle \{ \Delta U \} = \langle a_2 \rangle \{ \Delta U_0 \} + \langle a_2 \rangle \{ \Delta U_1 \} \Delta u_{p1} + \dots + \langle a_2 \rangle \{ \Delta U_n \} \Delta u_{pn} = \Delta C_2$$

.

.

.

$$\langle a_n \rangle \{ \Delta U \} = \langle a_n \rangle \{ \Delta U_0 \} + \langle a_n \rangle \{ \Delta U_1 \} \Delta u_{p1} + \dots + \langle a_n \rangle \{ \Delta U_n \} \Delta u_{pn} = \Delta C_n$$

[80] devient sous forme matricielle:

$$[A] \{ \Delta u_p \} = \{ \Delta C \} - [A] \{ \Delta U_0 \} \quad [81]$$

On peut alors obtenir la solution  $\{ \Delta U \}$  en utilisant l'équation [77].

Cette méthode de résolution est simple à implanter et est très efficace au point de vue informatique. La largeur de bande de la matrice tangente n'est pas affectée par cette méthode et une seule triangularisation de la matrice tangente est nécessaire. La méthode demande plusieurs solutions supplémentaires à partir de la matrice tangente triangularisée, mais ceci ne demande pas un grand effort de calcul. La résolution du système des contraintes multiples n'est pas exigeante non plus au point de vue informatique car ce système n'est pas de grande dimension.

La méthode des contraintes multiples est très versatile. Cette méthode permet évidemment d'imposer les conditions nécessaires à la jonction des modèles 1-D et 2-D, mais elle peut aussi servir à plusieurs autres usages. Il peut s'agir d'imposer une relation niveau-débit sur un certain noeud, ou bien d'imposer un débit comme condition aux limites pour le modèle 2-D sans qu'il soit nécessaire de le distribuer arbitrairement sur les noeuds de une frontière ouverte.

#### 4.6 Connectivité 1D-2D

---

L'intégration au sein d'un même modèle des options 1-D et 2-D est souhaitable afin de répondre de façon plus efficace à certains problèmes. Ainsi, dans le cas d'une étude de l'impact d'une construction sur un cours d'eau, les conditions aux limites doivent être spécifiées assez loin de l'ouvrage pour ne pas être influencées par celui-ci. Un modèle strictement bidimensionnel demanderait un effort de calcul important seulement pour transférer dans la région d'étude les conditions aux limites nécessaires au problème. Un modèle 1-D pourrait très bien se charger de cette tâche à un coût informatique beaucoup moins grand. Le modèle 1-D serait connecté au modèle 2-D dans la région d'intérêt immédiate de l'étude pour former un seul modèle à degré de discrétisation variable.

Quatre contraintes différentes ont été étudiées afin de trouver les conditions nécessaires aux jonctions 1D-2D. La première assure l'égalité des niveaux d'eau, la deuxième impose l'égalité des débits, la troisième s'assure qu'il n'y ait pas de rupture de la pente de la ligne d'énergie et la quatrième s'assure de l'égalité des vitesses de part et d'autre de la jonction.

##### 4.6.1 Contrainte sur la hauteur d'eau

---

Cette contrainte a pour but d'assurer l'égalité à la jonction entre le niveau d'eau 1-D et la valeur moyenne du niveau d'eau sur la section 2-D:

$$\langle \alpha \rangle \{ \Delta U \} = h_{1D} - \bar{h}_{2D} = 0 \quad [82]$$

avec:

$h_{1D}$  est le niveau d'eau du noeud 1-D de la jonction:

$\bar{h}_{2D}$  est la moyenne de la hauteur d'eau le long de la frontière 2-D de la jonction.

$$\bar{h}_{2D} = \frac{\oint_{Sh} h_{2D} ds}{L} \quad [83]$$

où  $L$  est la longueur de la frontière 2-D à la jonction.

Le vecteur  $\langle \alpha \rangle$  est nul sauf pour les coefficients concernant les degrés de liberté en hauteur d'eau des noeuds présents à la jonction.

Considérons les sous-ensembles  $\langle \alpha_{hj} \rangle$  et  $\{\Delta h_j\}$  provenant de  $\langle \alpha \rangle$  et  $\{\Delta U\}$ . Ces sous-ensembles regroupent tous les coefficients et les accroissements des degrés de liberté en hauteur d'eau de la jonction.

$$\langle \alpha_{hj} \rangle \{\Delta h_j\} = h_{1D} - \bar{h}_{2D} \quad [84]$$

avec:

$$\langle \alpha_{hj} \rangle = \left\langle -1 \oint \langle N_h \rangle ds \right\rangle \quad [85]$$

$$\{\Delta h_j\} = \begin{Bmatrix} \Delta h_{1D} \\ \Delta h_{2D} \end{Bmatrix} \quad [86]$$

#### 4.6.2 Contrainte sur le débit

---

La contrainte a pour but d'assurer l'égalité du débit de part et d'autre de la jonction. La contrainte sur le débit utilise la convention de repère locale  $\langle N-T \rangle$  (normal et tangent). En utilisant cette convention, les vitesses normales sont négatives pour un débit entrant dans le domaine 2-D ou 1-D et positives pour un débit sortant. La convention  $\langle N-T \rangle$  était déjà existante pour le modèle 2-D et a été introduite sur le modèle 1-D pour la contrainte sur le débit. Cette convention est donnée à la figure 8.

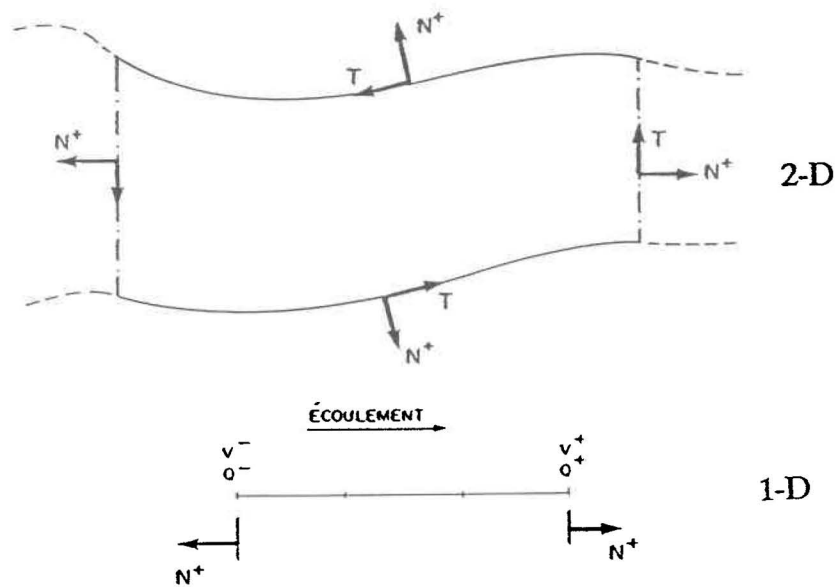


Figure 8 Convention <N-T>.

$$\langle a \rangle \{ \Delta U \} = Q_{1D} + Q_{2D} = 0 \quad [87]$$

avec:

$$Q_{1D} = (\alpha_1 + \alpha_2 h_{1D} + \alpha_3 h_{1D}^2) V_N \quad [88]$$

$$Q_{2D} = \oint_{(SQ)} H_{2D} u_N ds \quad [89]$$

Le vecteur  $\langle a \rangle$  est nul sauf pour les coefficients concernant les degrés de liberté des noeuds présents à la jonction.

Considérons les sous-ensembles  $\langle a_{Qj} \rangle$  et  $\{ \Delta U_{Qj} \}$  provenant de  $\langle a \rangle$  et  $\{ \Delta U \}$ . Ces sous-ensembles regroupent tous les coefficients et les accroissements des degrés de liberté de la jonction.

$$\langle a_{Qj} \rangle \{ \Delta U_{Qj} \} = Q_{1D} + Q_{2D} \quad [90]$$

avec:

$$\langle \alpha_{Qj} \rangle = \left\langle -(\alpha_1 + \alpha_2 h_{1D} + \alpha_3 h_{1D}^2) - (V_N \alpha_2 + 2V_N \alpha_3 h_{1D}) - \oint H_{2D} \langle N_u \rangle ds - \oint u_n \langle N_n \rangle ds \right\rangle \quad [91]$$

$$\{\Delta U_{Qj}\} = \begin{Bmatrix} \Delta V_N \\ \Delta h_{1D} \\ \Delta u_N \\ \Delta H_{2D} \end{Bmatrix} \quad [92]$$

#### 4.6.3 Contrainte sur la vitesse aux jonctions

Cette troisième contrainte vise à assurer l'égalité des vitesses à la jonction 1D-2D. Tout comme la contrainte sur le débit, la contrainte sur la vitesse utilise la convention de repère local <N-T>.

La contrainte sur la vitesse est assurée par une série de contraintes qui impose l'égalité entre la vitesse normale 1-D à la jonction et toutes les vitesses normales 2-D à la jonction prises individuellement. En tenant compte du repère local <N-T>, pour être physiquement égales, les vitesses normales 1-D et 2-D doivent être de signe contraire:

$$\langle \alpha \rangle \{\Delta U\} = V_N + u_N = 0 \quad [93]$$

avec:

$V_N$  est la vitesse normale au noeud 1-D de la jonction;

$u_N$  une vitesse normale d'un des noeuds 2-D de la jonction.

Le vecteur < $\alpha$ > est nul sauf pour les coefficients concernant un des degrés de liberté en vitesse normale des noeuds 2-D ainsi que pour le degré de liberté en vitesse 1-D à la jonction.

Considérons les sous-ensembles  $\langle \alpha_{uj} \rangle$  et  $\{\Delta U_{uj}\}$  provenant de  $\langle \alpha \rangle$  et  $\{\Delta U\}$ . Ces sous-ensembles regroupent tous les coefficients et les accroissements des degrés de liberté de la vitesse normale 2-D choisie à la jonction ainsi que la vitesse normale 1-D de la jonction.

$$\langle \alpha_{uj} \rangle \{\Delta U_{uj}\} = V_N + u_N \quad [94]$$

avec:

$$\langle \alpha_{uj} \rangle = \langle -1 \quad -1 \rangle \quad [95]$$

$$\{\Delta U_{uj}\} = \begin{Bmatrix} \Delta V_N \\ \Delta u_N \end{Bmatrix} \quad [96]$$

Des contraintes identiques peuvent être définies en utilisant les différentes vitesses normales 2-D à la jonction. Si chaque vitesse 2-D normale à la jonction est introduite à l'intérieur d'une contrainte sur la vitesse, alors toutes les vitesses normales 2-D ainsi que la vitesse normale 1-D à la jonction seront égales.

#### 4.6.4 Contrainte sur la pente

---

Lors de certains essais avec contraintes en débit et en hauteur d'eau, une rupture de la pente fut remarquée au niveau de la jonction. L'imposition d'une contrainte sur la pente afin d'en assurer l'égalité de part et d'autre de la jonction pouvait s'avérer nécessaire.

Un algorithme simple a été développé à cette fin. La contrainte fait appel aux degrés de liberté en hauteur d'eau du premier élément 1-D de la jonction pour définir la pente 1-D. La figure 9 démontre la technique utilisée pour la contrainte sur la pente. Une série de noeuds 2-D se trouvant sur la jonction et sur la première rangée de noeuds à l'intérieur du domaine 2-D et ayant la hauteur d'eau comme degré de liberté servent à représenter la pente de la section 2-D à la jonction. La contrainte sur la pente est en fait une série de contraintes ou la pente 1-D est égalisée aux pentes 2-D constituées chacune d'un noeud 2-D à la jonction et d'un noeud sur la première rangée à l'intérieur du domaine 2-D.

Une contrainte typique sur la pente est définie comme suit:

$$\langle \alpha \rangle \{ \Delta U \} = \frac{\partial h_{1D}}{\partial s} - \frac{\partial h_{2D}}{\partial N} = 0 \quad [97]$$

Le vecteur  $\langle \alpha \rangle$  est nul sauf pour les coefficients concernant les degrés de liberté en hauteur d'eau des noeuds 1-D définissant la pente 1-D ainsi que pour une paire de degrés de liberté en hauteur d'eau 2-D servant à définir la pente 2-D tel que mentionné précédemment. Considérons les sous-ensembles  $\langle \alpha_{Pj} \rangle$  et  $\{ \Delta h_{Pj} \}$  provenant de  $\langle \alpha \rangle$  et  $\{ \Delta U \}$ . Ces sous-ensembles regroupent tous les coefficients et les accroissements des degrés de liberté des hauteurs d'eau des quatre noeuds nécessaires au transfert de la pente.



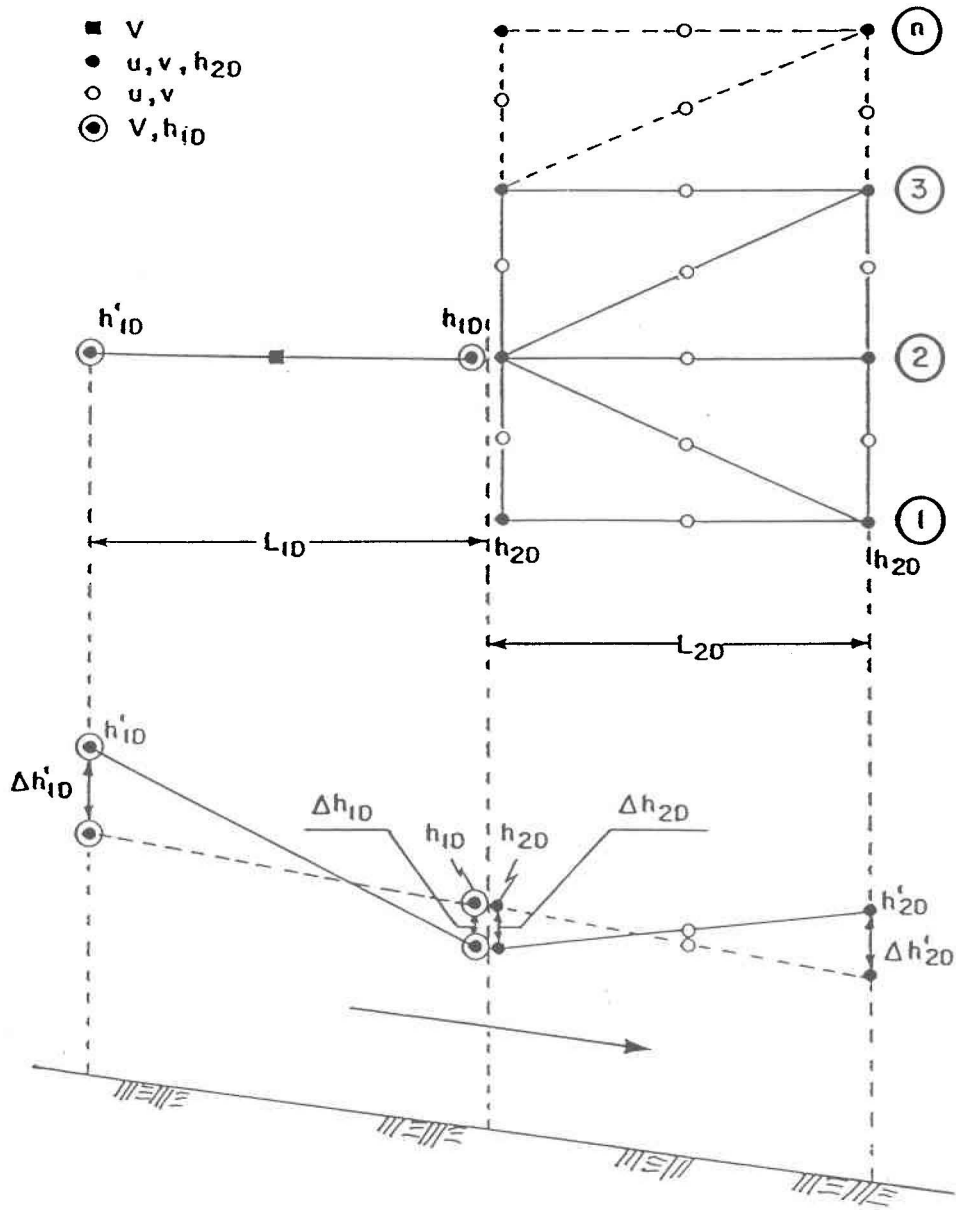


Figure 9      Contrainte sur la pente.

Modélisation des écoulements à surface libre par éléments finis avec discrétisation variable (1D-2D)

$$\langle \alpha_{Pj} \rangle \{ \Delta U_{Pj} \} = \frac{\partial H_{1D}}{\partial S} - \frac{\partial H_{2D}}{\partial N} \quad [98]$$

avec:

$$\langle \alpha_{Pj} \rangle = \left\langle -\frac{1}{L_{1D}} \quad \frac{1}{L_{1D}} \quad \frac{1}{L_{2D}} \quad -\frac{1}{L_{2D}} \right\rangle \quad [99]$$

$L_{1D}$  et  $L_{2D}$  sont définis à la figure 9.

$$\{ \Delta U_{Pj} \} = \begin{pmatrix} \Delta h_{1D} \\ \Delta h'_{1D} \\ \Delta h'_{2D} \\ \Delta h_{2D} \end{pmatrix} \quad [100]$$

Des contraintes similaires peuvent être définies en utilisant différentes paires de noeuds 2-D pour représenter la pente du côté 2-D.

Un algorithme plus élaboré devrait être développé en utilisant globalement l'ensemble des éléments 2-D voisin de la jonction pour caractériser la pente du 2-D. C'est sur l'ensemble des degrés de liberté en hauteur d'eau de ces éléments que serait basée la contrainte sur la pente du côté 2-D. Il serait bon de prévoir des éléments 1-D et 2-D de plus petites dimensions à la jonction afin de ne pas forcer inutilement le système lorsque la contrainte sur la pente est utilisée.

## 5. EXEMPLES

---

### 5.1 Ecoulement permanent uniforme

---

Un écoulement permanent uniforme implique:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad [101]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad [102]$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \quad [103]$$

En effectuant ces simplifications sur les équations 1-D de continuité [10] et de mouvement [11], on obtient:

Equation de continuité:

$$\frac{\partial(VA)}{\partial s} = 0 \quad [104]$$

Equation de mouvement:

$$gA \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{gAn^2V|V|}{H^{4/3}} = 0 \quad [105]$$

En considérant que:

$$-\frac{\partial h}{\partial s} = S \quad [106]$$

où  $S$  est la pente.

En simplifiant, on obtient la formule classique de Manning:

$$V = \frac{1}{n} H^{2/3} S^{1/2} \quad [107]$$

Un développement similaire peut être fait pour le modèle à deux dimensions.

Les tests effectués en utilisant la simulation d'un écoulement permanent uniforme dans un canal droit n'impliquent qu'une petite partie des termes contenus dans le modèle.

Cet exemple permet néanmoins de vérifier certaines fonctionnalités du modèle 1-D: la condensation du noeud central de l'élément, la relation niveau-débit, la connectivité 1D-1D. L'imposition d'un débit comme condition-limite pour le modèle 2-D ainsi que la jonction 1D-2D ont aussi fait l'objet de tests avec un exemple d'écoulement permanent uniforme.

### 5.1.1 Donnée de base du problème

---

(sauf la jonction 1D-2D et l'imposition d'un débit en 2-D):

Coefficient de rugosité de Manning  $n=0,02$

Largeur = 1 m

Pente = 0,001

Profondeur moyenne = 1 m

Formule de Manning:

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad [108]$$

Le rayon hydraulique  $R$  est pris comme la profondeur moyenne de l'écoulement pour s'harmoniser avec la formulation du modèle 1-D. La vitesse moyenne  $V$  dans le canal obtenu à partir de l'équation [108] est alors de 1,581 m/s et le débit est de 1,581 m<sup>3</sup>/s. La profondeur critique est de 0,634 m.

Les tests ont été effectués sur un domaine de 150 m de long contenant 15 éléments et sur des domaines de 90 m et 40 m de long dans le cas de l'élément connectivité 1D-1D.

### 5.1.2 Relation niveau-débit comme condition aux limites

---

Le problème d'écoulement uniforme est normalement déterminé par une condition au limite en hauteur d'eau ou en débit en amont et par une condition au limite en hauteur d'eau ou en vitesse en aval. Ce problème comporte une infinité de solutions si ni  $h$  et ni  $V$  ne sont imposés en aval. Le traitement en utilisant la relation  $Q(h)$  comporte l'avantage de libérer le patron d'imposition de condition aux limites lorsque  $Q$  est inconnu à priori (ex: onde de crue, marée) en un site où il existe relation univoque entre  $h$  et  $Q$ .

Relation niveau-débit utilisée:

$$Q = b(h - h_0)^d \quad [109]$$

$b = 1,581;$

$(h - h_0)$  = profondeur de l'eau du canal;

$d = 5/3.$

La condition au limite imposée en amont était soit la hauteur ou une sollicitation en débit. En aval, la relation niveau-débit (figure 10) ou la hauteur a été utilisée. Les tests effectués avec ou sans la condensation ont donnés des résultats identiques.

Dans tous les cas étudiés, les résultats obtenus sont identiques à la solution analytique.

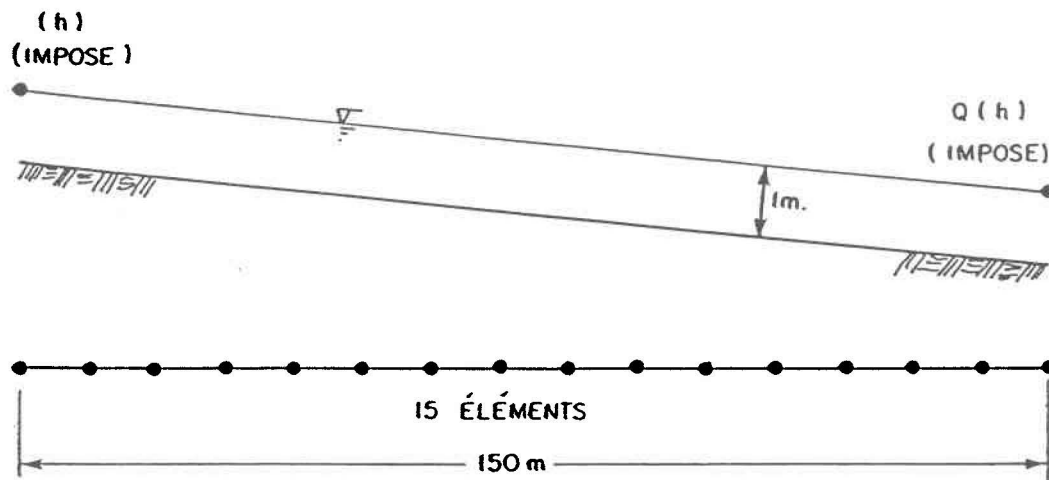


Figure 10 Utilisation d'une relation niveau-débit comme condition au limite.

### 5.1.3 Connectivité 1D-1D (branches multiples)

La connectivité 1D-1D a été testée en divisant le canal de 90 m mentionné à la section 5.1.1 en deux branches aval. Le canal de 40 m a été divisé en 4 branches amont se joignant à deux branches aval (figure 11). La largeur totale du canal a été maintenue à 1 m. La largeur du canal étant donnée par la somme des largeurs des branches aval ou amont. Des conditions aux limites en hauteur d'eau ont été imposées en aval tandis que les conditions aux limites en amont étaient soit des hauteurs ou des sollicitations en débit.

Ces tests ont permis de vérifier le bon fonctionnement de l'élément raccord. Les résultats obtenus correspondaient bien aux résultats analytiques.

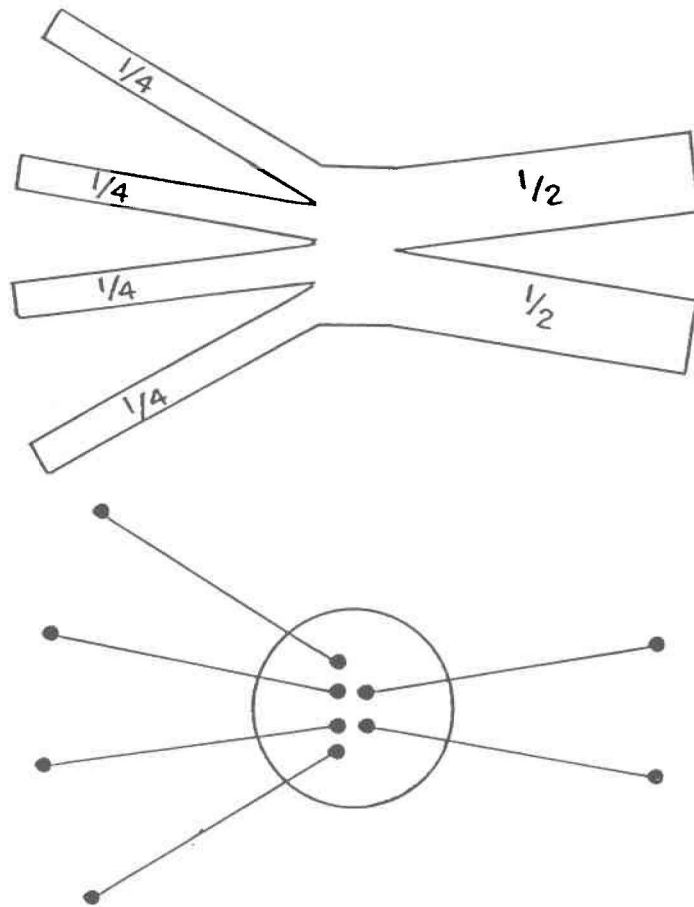


Figure 11      Connectivité 1D-1D.

#### 5.1.4 Jonction 1D-2D

---

Pour tester la jonction 1D-2D et l'imposition d'un débit sur le 2-D, les dimensions du canal ont été changées à 2000 m de long par 20 m de large. Les autres caractéristiques demeurant inchangées. Pour une pente de 0,001, un coefficient de Manning de 0,02 et une profondeur

de 1 m, la vitesse moyenne est toujours de 1,581 m/s. Le débit obtenu est de 31,62 m<sup>3</sup>/s. Pour la jonction 1D-2D, les premiers 1000 m ont été discrétisés en employant des éléments 1-D, et l'autre moitié en employant des éléments 2-D. Les conditions aux limites imposées étaient les hauteurs d'eau à l'amont et à l'aval. Les contraintes employées étaient le niveau d'eau et le débit. Encore là, les résultats obtenus sont parfaitement conformes à la solution analytique.

### 5.1.5 Imposition d'un débit comme condition au limite du modèle 2-D

---

Les mêmes dimensions et les mêmes caractéristiques que pour le test de jonction 1D-2D ont été utilisées. Les conditions aux limites sont fournies par une contrainte imposant le débit sur la frontière ouverte amont et le niveau d'eau imposé sur la frontière avale. L'utilisation de l'algorithme des contraintes multiples pour imposer le débit nous évite le problème de définir arbitrairement une distribution du débit sur la frontière. Le débit doit être respecté globalement sur l'ensemble des noeuds de la section frontière ( $S_Q$ ) de façon globale. Les résultats obtenus sont excellents. La sensibilité au degré de liberté choisi pour imposer la contrainte est à peu près nulle.

## 5.2 Chute

---

Cet exemple simule le bief d'amont d'une chute. C'est un écoulement permanent graduellement varié dans un canal droit. Des gradients de vitesse et de niveaux d'eau se forment à l'approche de la chute. Plusieurs termes du modèle 1-D qui étaient nuls pour un écoulement permanent uniforme sont alors mis à contribution. Cet exemple a permis de faire ressortir le rôle joué par le terme de contour provenant du laplacien en plus de permettre la vérification des termes du modèle en présence de gradients de vitesse et de hauteur d'eau.



### 5.2.1 Données du problème

---

Largeur = 1 m

Longueur = 1150 m

Coefficient de rugosité de Manning  $n=0,02$

Pente = 0,001

Profondeur moyenne = 3 m

Profondeur critique = 2,15 m

50 éléments sur les premiers 1000 m

60 éléments sur les derniers 150 m

Conditions limites amont en débit =  $9,8667 \text{ m}^3/\text{s}$

Conditions limites aval: relation niveau-débit ou hauteur imposée.

Relation niveau-débit utilisée:

$$Q = b(h - h_0)^d \quad [110]$$

$b = 9,8667$ ;

$(h - h_0)$  = profondeur de l'eau du canal;

$d = 5/3$ .

### 5.2.2 Résultats

---

Les simulations effectuées avec ce problème ont démontré le bon fonctionnement de la condensation. Les résultats obtenus avec ou sans condensation étaient identiques. Peu importe le dessin d'imposition retenu, les résultats étaient identiques sauf pour l'extrémité aval du domaine (figure 12).

L'imposition d'une relation niveau-débit par pénalisation superposée à l'équation de mouvement ne permet pas de visualiser le rôle du terme de contour provenant du laplacien. La pénalité utilisée pour imposer la relation niveau-débit empêche l'équation du mouvement de s'exprimer. Ainsi, les simulations effectuées avec la relation  $Q(h)$  imposée sur l'équation de mouvement avec ou sans le terme de contour du laplacien ont donné des résultats identiques. Les résultats de cet essai sont présentés à la figure 13.

L'imposition de la relation  $Q(h)$  sur l'équation de continuité (figure 15) ne permet pas d'obtenir exactement le niveau d'eau souhaité comme condition limite. Ceci est sans doute dû à l'affaiblissement de l'équation de continuité causée par la procédure de pénalisation utilisée.

L'imposition d'un niveau d'eau comme condition au limite aval, permet de bien voir l'influence du terme de contour en laplacien (figure 14). On note que la simulation utilisant le terme de contour en laplacien présente de moins grandes oscillations que la simulation ne l'utilisant pas.

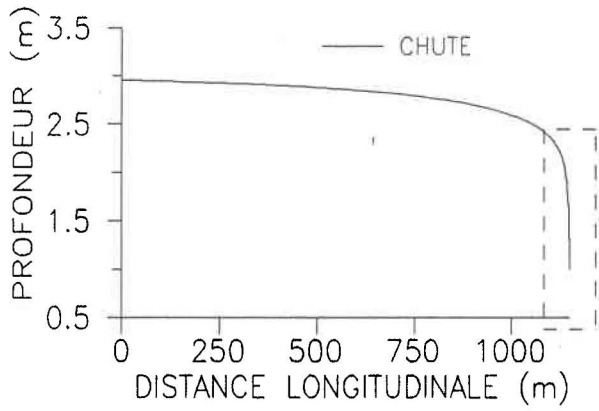


Figure 12 Chute.

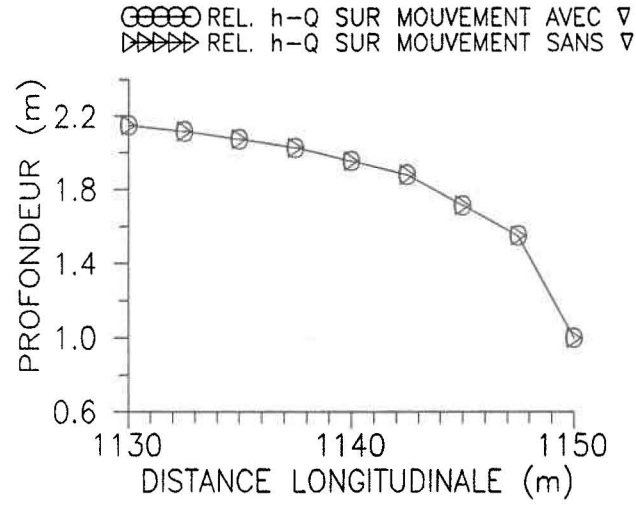


Figure 13 h(Q) sur mouvement.

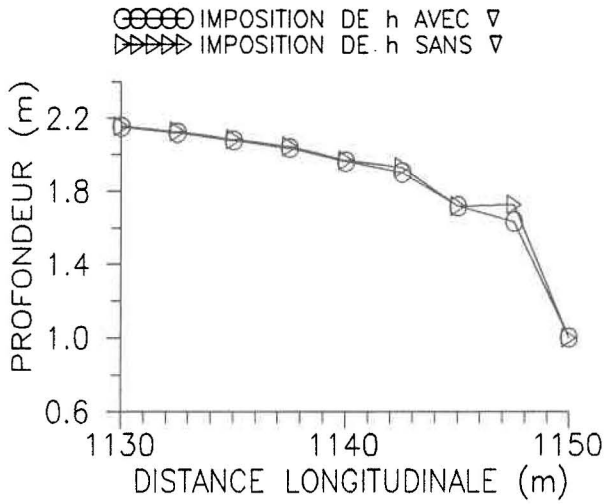


Figure 14 h imposé.

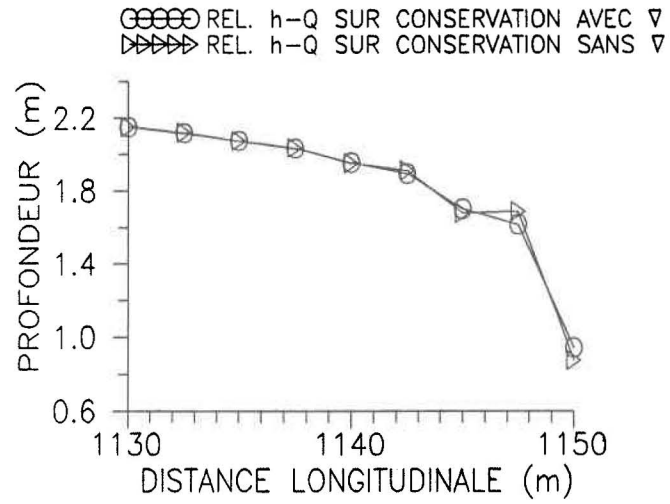


Figure 15 h(Q) sur conservation.

### 5.3 Onde de marée dans un canal rectangulaire fermé à une extrémité

---

Cet exemple est souvent employé pour vérifier les modèles 1-D et 2-D car une solution analytique est donnée par Lamb (1932) pour ce problème simplifié. Robert (1983), Walters et Cheng (1980) et Soulaïmani (1983) l'ont notamment utilisé pour vérifier leurs modèles. Les termes de friction et d'accélération convective étant négligés, cet exemple permet de vérifier la composante temporelle du modèle.

#### 5.3.1 Données du problème

---

Le modèle mathématique est défini comme suit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial s} = 0 \quad [111]$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(HV)}{\partial s} = 0 \quad [112]$$

$h$ : hauteur d'eau;

$V$ : vitesse moyenne sur la section;

$t$ : temps;

$H$ : profondeur totale.

Pour ce cas, la solution analytique est:

$$h = \alpha \frac{\cos ks}{\cos kL} \cos \omega t \quad [113]$$

$$V = \alpha \frac{c \sin ks}{H \cos kL} \sin \omega t \quad [114]$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$V = 0 \text{ à } s = 0$$

$$h = a \cos \omega t \text{ à } s = L$$

$s$  : distance horizontale  $0 \leq s \leq L$  (m);

$\alpha$  : amplitude de l'onde (m);

$L$  : longueur du canal (m);

$\omega$  : fréquence angulaire =  $\frac{2\pi}{T} rad/s$ ;

$k$  : nombre d'onde =  $\frac{\omega}{\sqrt{gH}}$  (m<sup>-1</sup>);

$c$  : célérité de l'onde =  $\sqrt{gH}$  (m/s);

$H$  : profondeur du canal à l'équilibre (m);

$T$  : période de l'onde = 3600 s.

Le cas étudié est le même que celui étudié par Walters et Cheng (1980). Il s'agit d'un canal rectangulaire de 4000 m par 2000 m fermé à une extrémité. La profondeur est constante à 10 m. Une onde d'une amplitude de 0,1 m avec une période d'une heure est imposée à l'extrémité ouverte. La vitesse normale à la frontière fermée est imposée nulle.

### 5.3.2 Vérification de modèle 1-D

Les essais utilisant le modèle 1-D ont donné des résultats semblables aux résultats obtenus dans la littérature. Le tableau 2 compare les niveaux d'eau du modèle 1-D pour  $t = 2h$  avec ceux obtenus par d'autres modèles existants. Le tableau 4 fait de même pour les vitesses obtenues pour  $t = 2,25h$ . Des discrétisations utilisant 4, 8 et 16 éléments 1-D ont été utilisées. Les erreurs relatives sur les niveaux d'eau entre les valeurs numériques et analytiques sont très faibles, plus petite que 2 % (tableau 3). Les erreurs relatives sur les vitesses calculées sont un peu plus grandes et tout particulièrement à la frontière ouverte (tableau 5).

Le même phénomène a été noté dans la littérature (Soulaïmani, 1983; Robert, 1983; Walters et Cheng, 1980). Le cas utilisant 4 éléments 1-D donne des erreurs relatives beaucoup plus grandes, sans doute causées par une discrétisation spatiale pas assez raffinée.

Tableau 2

Solution analytique et numérique pour les niveaux d'eau  $h$  (m) à  $t = 2h$  du problème de l'onde dans un canal fermé à une extrémité.

X (m)	THEO.	BOUDREAU ELEM1D			SOULAIMANI 2D			WALTERS et CHENG	MEFLU 2D
		4 él. dt=150	8 él. dt=150	16 él. dt=150	ELEMN dt=150	ELEMC dt=150	ELEMB dt=150	2D dt=300	dt=150
0	0,131	0,129	0,129	0,129	0,129	0,130	0,129	0,131	0,129
1000	0,129	0,127	0,127	0,127	0,127	0,128	0,127	0,130	0,127
2000	0,123	0,122	0,122	0,122	0,121	0,122	0,122	0,123	0,122
3000	0,113	0,113	0,113	0,112	0,112	0,113	0,113	0,114	0,113
4000	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Tableau 3

Erreur relative sur les niveaux d'eau calculés en %.

X (m)	BOUDREAU ELEM1D			SOULAIMANI 2D			WALTERS et CHENG	MEFLU 2D
	4 él. dt=150	8 él. dt=150	16 él. dt=150	ELEMN dt=150	ELEMC dt=150	ELEMB dt=150	2D dt=300	dt=150
0	1,3	1,5	1,5	1,5	0,8	1,5	0,0	1,4
1000	1,2	1,4	1,5	1,6	0,8	1,6	0,8	1,3
2000	1,0	1,1	1,1	1,6	0,8	0,8	0,0	1,0
3000	0,3	0,4	0,5	0,9	0,0	0,0	0,9	0,4
4000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Tableau 4

Solution analytique et numérique pour les vitesses (m/s) à  $t = 2:15h$  du problème de l'onde dans un canal fermé à une extrémité.

X (m)	THEO.	BOUDREAU ELEM1D			SOULAIMANI 2D			WALTERS et CHENG	MEFLU 2D
		4 él. dt=150	8 él. dt=150	16 él. dt=150	ELEMN dt=150	ELEMC dt=150	ELEMB dt=150	2D dt=300	dt=150
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000	0,023	0,021	0,022	0,022	0,022	0,022	0,019	0,023	0,021
2000	0,045	0,042	0,043	0,043	0,043	0,043	0,04	0,045	0,043
3000	0,066	0,061	0,063	0,063	0,064	0,066	0,061	0,065	0,062
4000	0,084	0,069	0,075	0,078	0,081	0,082	0,075	0,075	0,071

Tableau 5

Erreur relative sur les niveaux d'eau calculés en %.

X (m)	BOUDREAU ELEM1D			SOULAIMANI 2D			WALTERS et CHENG	MEFLU 2D
	4 él. dt=150	8 él. dt=150	16 él. dt=150	ELEMN dt=150	ELEMC dt=150	ELEMB dt=150	2D dt=300	dt=150
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000	6,6	2,3	5,7	4,3	4,3	17,4	0,0	6,9
2000	6,1	5,0	4,9	4,4	4,4	11,1	0,0	5,4
3000	7,8	5,2	4,9	3,0	0,0	7,6	1,5	6,8
4000	17,5	10,3	6,8	3,6	2,4	10,7	10,7	15,3

### 5.3.3 Essais de connectivité 1D-2D

Le maillage utilisé pour tester le modèle à degré de discrétisation variable est donné à la figure 16. Les résultats obtenus en utilisant le modèle à degré de discrétisation variable sont satisfaisants si les contraintes sur la vitesse et le niveau d'eau sont utilisées (figures 17, 18, 19 et 20). Les degrés de liberté utilisés pour introduire les contraintes sont le niveau d'eau 1-D pour la contrainte sur le niveau d'eau et les vitesses normales 2-D pour les vitesses. Le problème présente une sensibilité au choix des degrés de liberté pour imposer les contraintes et pouvait ne pas converger pour certaines combinaisons de degrés de liberté.

Les essais effectués avec une combinaison des contraintes sur la pente, le débit et le niveau d'eau n'ont pas données de bons résultats. Si, pour certain cas, les niveaux d'eau étaient excellents, dans tous les cas, les erreurs sur les vitesses moyennes étaient grandes et il y avait une variabilité latérale importante des vitesses 2-D à la jonction. Il y avait encore là, une sensibilité au choix des degrés de liberté utilisé pour imposer les contraintes.

Les essais utilisant la contrainte sur la pente, en combinaison avec d'autres contraintes, avaient tendance à surestimer le niveau d'eau. La contrainte sur la pente semble forcer une solution non naturelle au problème en imposant que la pente soit la même de chaque côté de la jonction, ce qui est faux en réalité.

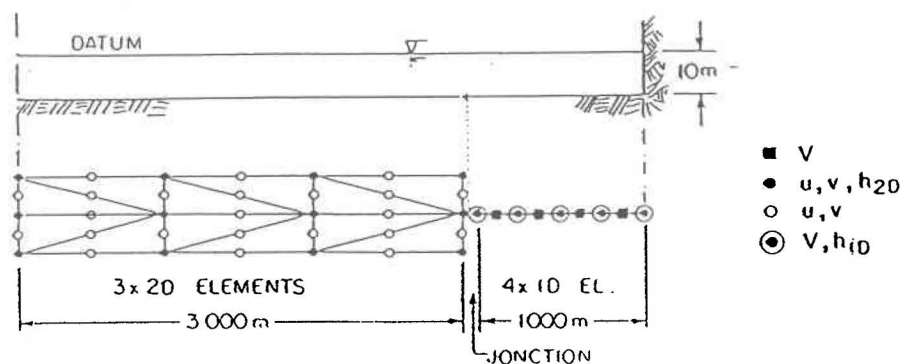


Figure 16 Maillage 1D-2D.



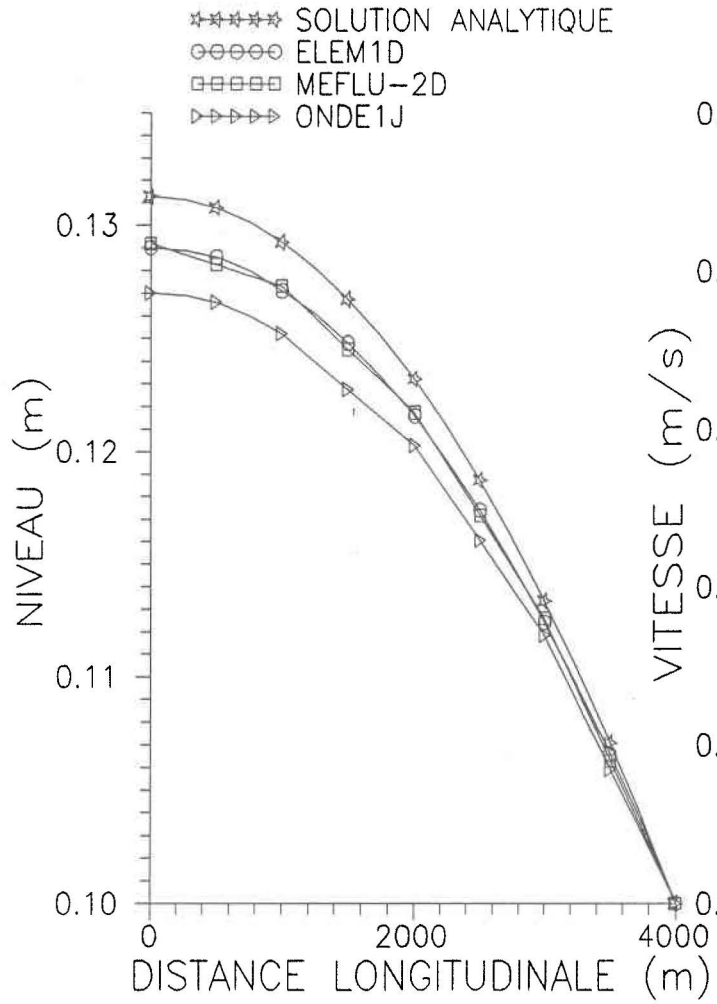


Figure 17 Profil longitudinal du niveau d'eau à  $t = 3600$  s.

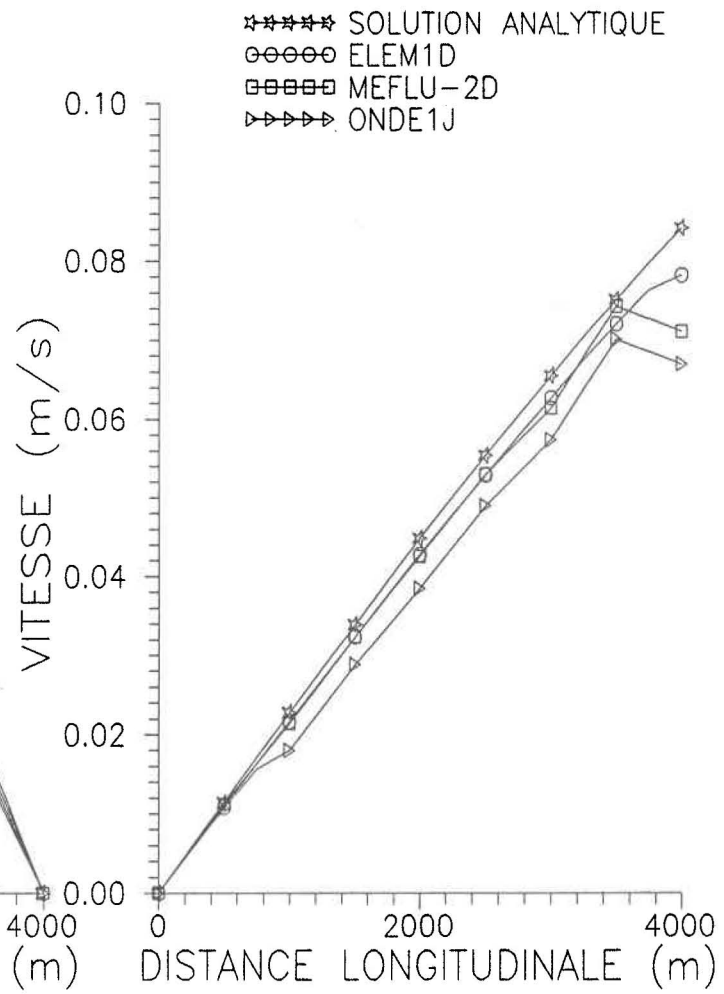


Figure 18 Vitesse à  $t = 900$  s.

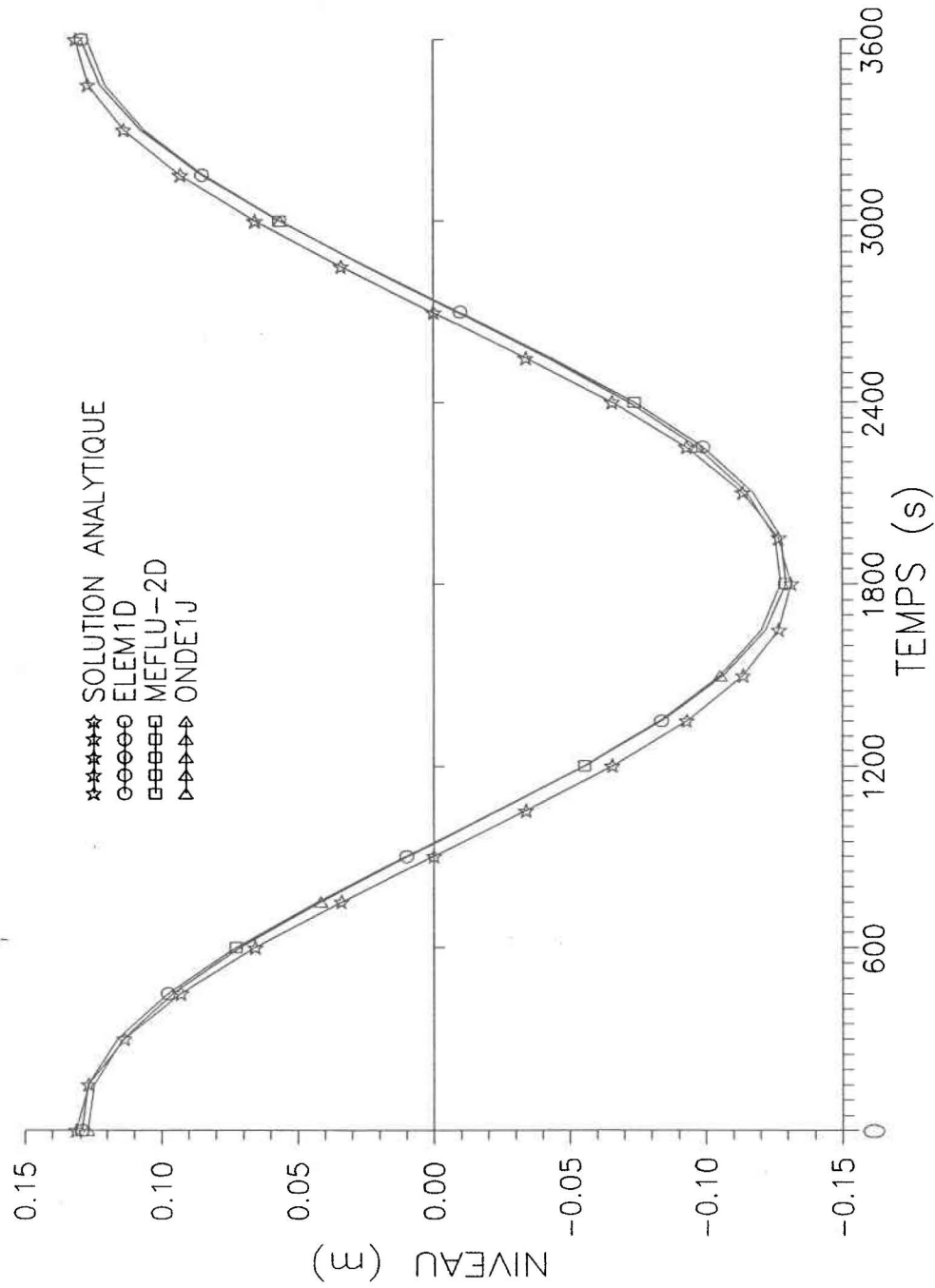


Figure 19 Niveau d'eau à l'extrémité fermée.

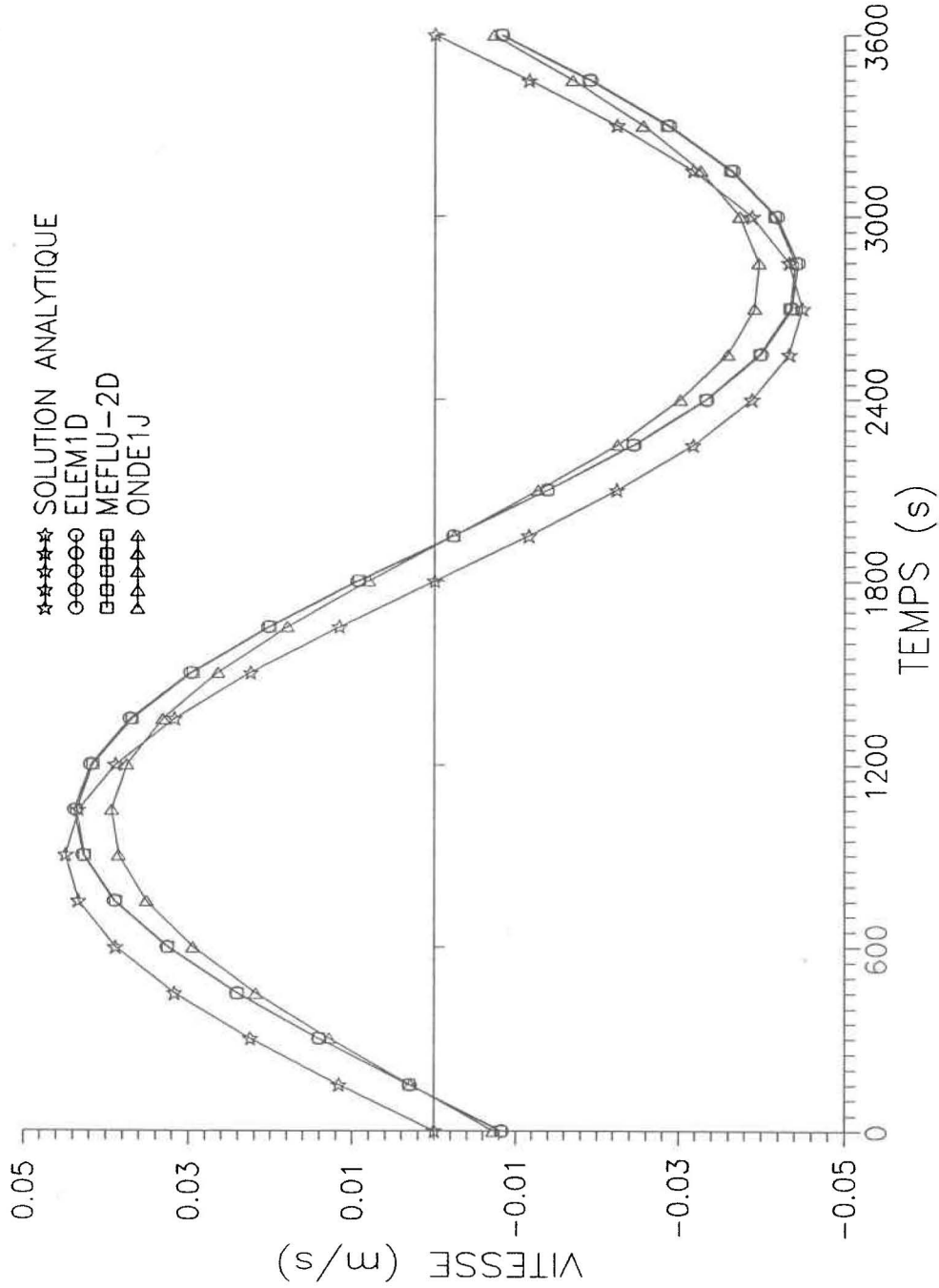


Figure 20 Vitesse à s = 2000.

## 6. CONCLUSION

---

Les objectifs qui avaient été posés au départ ont été atteints. Un modèle 1-D pour simuler les écoulements à surface libre a été développé. Les diverses fonctionnalités du modèle, qu'il s'agisse de la connectivité 1D-1D, de la relation niveau-débit, ou de la condensation statique, ont été testées avec succès. Un élément de jonction couplant le modèle 1-D au modèle 2-D a été conçu et les tests effectués avec celui-ci se sont avérés satisfaisants.

Tout en visant à rencontrer ces deux objectifs principaux, diverses techniques et formulations ont pu être expérimentées. Le terme de contour provenant du laplacien du modèle 1-D a été assemblé comme inconnu du problème et son rôle a été démontré par l'exemple de la chute. Les non linéarités de la matrice masse du modèle 1-D ont été résolues à l'aide de la méthode Newton-Raphson. La technique des contraintes multiples a été utilisée pour imposer un débit de façon globale sur une section sur le modèle 2-D. Cette même technique conviendrait très bien pour imposer une relation niveau-débit.

Malgré les succès obtenus lors des essais, certains problèmes demeurent. Le plus important est la sensibilité au choix des degrés de liberté utilisé pour appliquer les contraintes. Si pour certains cas étudiés, le choix des degrés de liberté n'avait pas d'importance, pour d'autre, l'imposition des contraintes sur certains degrés de liberté pouvait aller jusqu'à empêcher le modèle de converger. Il serait souhaitable de poursuivre les études pour mieux comprendre de quelles façons la méthode des contraintes multiples intervient dans le problème afin de déterminer les causes exactes de ce comportement et d'établir des critères sur le choix des degrés de liberté à utiliser. L'étude de cas pratiques pour lesquels il existe des mesures réelles serait très importante afin de vérifier le bon fonctionnement de la connectivité 1D-2D et au besoin, de l'améliorer. Pour ce faire, une meilleure harmonisation des modèles 1-D et 2-D reste à faire afin de diminuer les interventions manuelles pour construire les fichiers de données des problèmes 1D-2D.

Afin de bénéficier d'un outil pouvant pleinement s'adapter au changement des caractéristiques physiques de l'écoulement, il serait intéressant de développer une connectivité 2D-3D. Il en résulterait alors un modèle à degrés de discrétisation variable 1D-2D-3D d'une grande souplesse d'utilisation.

**7. REFERENCES**

- CHENG, R. T. (1978).** Modeling of hydraulic systems by finite-element methods. In: *Advances in Hydrosience*, V11, p. 207-284.
- COCHET, J.F. (1979).** Modélisation d'écoulements stationnaires et non-stationnaires par éléments finis. Thèse de docteur-ingénieur, Université de Compiègne (France), 142 p.
- DHATT, G. AND M. LECLERC (1987).** An algorithm for the global volume conservation constraint in lake circulation. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, V7, Jan., p. 919-925.
- DHATT, G., M. LECLERC, P. DUPUIS ET A. SOULAIMANI (1985).** Modélisation des écoulements à surface libre lents et rapides. Rapport No TAO-85-02 et INRS-eau, Rapport No RS-187, 125 p.
- DHATT, G. et G. TOUZOT (1981).** Une présentation de la méthode des éléments finis. Presses de l'Université Laval, Québec, 543 p.
- HERRLING, B. (1978).** Computation of shallow water waves with hybrid finite elements. *Ad. in Water Res.*, V1, Dec., p. 313-320.
- HERRLING, B. (1982).** Coupling of 1- and 2-dimensional finite elements for the computation of tidal flow in estuaries. *Ad. in Water Res.*, V5, Dec., p. 227-232.
- LAI, C. (1986).** Numerical modeling of unsteady open-channel flow. In: *Advances in Hydrosience*, V14, p. 161-333.
- LAMB, H. (1932).** *Hydrodynamics*. 6<sup>th</sup> ed., Dover, New-York, 738 p.
- LECLERC, M. (1985).** Modélisation tridimensionnelle des écoulements à surface libre par éléments finis: application au lac Saint-Jean (Québec). Thèse de D. Ing., UTC (Compiègne-France), 294 p.

- LECLERC M. et G. DHATT (1986).** Utilisation d'une contrainte globale de conservation de volume pour la convergence des modèles de courants de dérive dans les lacs. Comptes rendus du VI<sup>e</sup> Colloque international sur la "Simulation des écoulements par éléments finis". INRIA, Antibes-France, juin, p. 395-400.
- LECLERC, M., G. DHATT, J.L. ROBERT, J.C. TESSIER, A. SOULAIMANI, P. DUPUIS et Y. MATTE (1987).** Modélisation des écoulements de l'Archipel de Montréal par éléments finis: aspects divers de l'application. Rev. Int. des Sciences de l'eau, 3(2): 41-56.
- LECLERC, M., G. DUMAS, J.F. BELLEMARE ET G. DHATT (1990).** A finite element model of estuarine and river flows with moving boundaries. Ad. in Water Res. (sous presse).
- RODI, W. (1980).** Turbulence modeling: a state of the art review. IAHR, Delft.
- ROBERT, J.L. (1983).** Modélisation tridimensionnelle des écoulements à surface libre, permanents et non permanents, par la méthode des éléments finis. Thèse Ph.D., Université Laval, Québec, 148 p.
- SOULAIMANI, A. (1987).** Contribution à la résolution numérique des problèmes hydrodynamiques à surface libre. Rapport GCS-87-02 (Thèse de doctorat), génie civil, Université Laval, 241 p.
- SOULAIMANI, A. (1983).** Nouveaux aspects de l'application de la méthode des éléments finis en hydrodynamique. Thèse de M.sc.A., génie civil, Université Laval.
- WALTERS R.A. AND R.T. CHENG (1980).** Accuracy of an Estuarine Hydrodynamic Model Using Smooth Elements. Wat. Res. Res., 16(1): 187-195.
- YEN, B. C. (1973).** Open-channel flow equations revisited. J. Eng. Mech. Div. Am. Soc. Civ. Eng., 99(EM5): 979-1009.

