

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

Mémoire de maîtrise présenté à

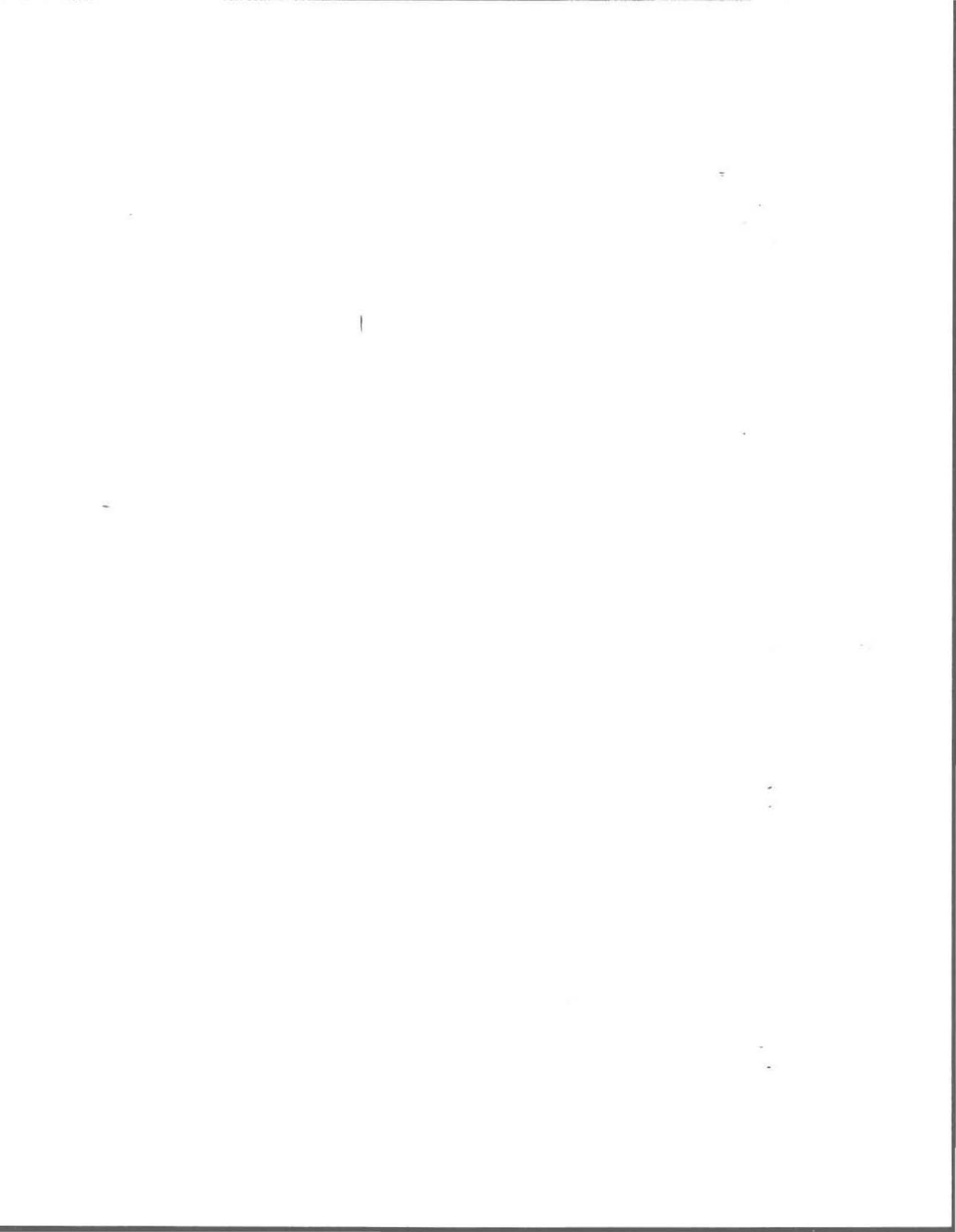
l'Institut national de la recherche scientifique

comme exigence partielle  
de la maîtrise ès sciences (eau)

par

Pierre Aubé

Amélioration de la précision des prévisions  
hydrologiques d'un modèle conceptuel par l'utilisation  
des filtres de kalman



## TABLE DES MATIÈRES

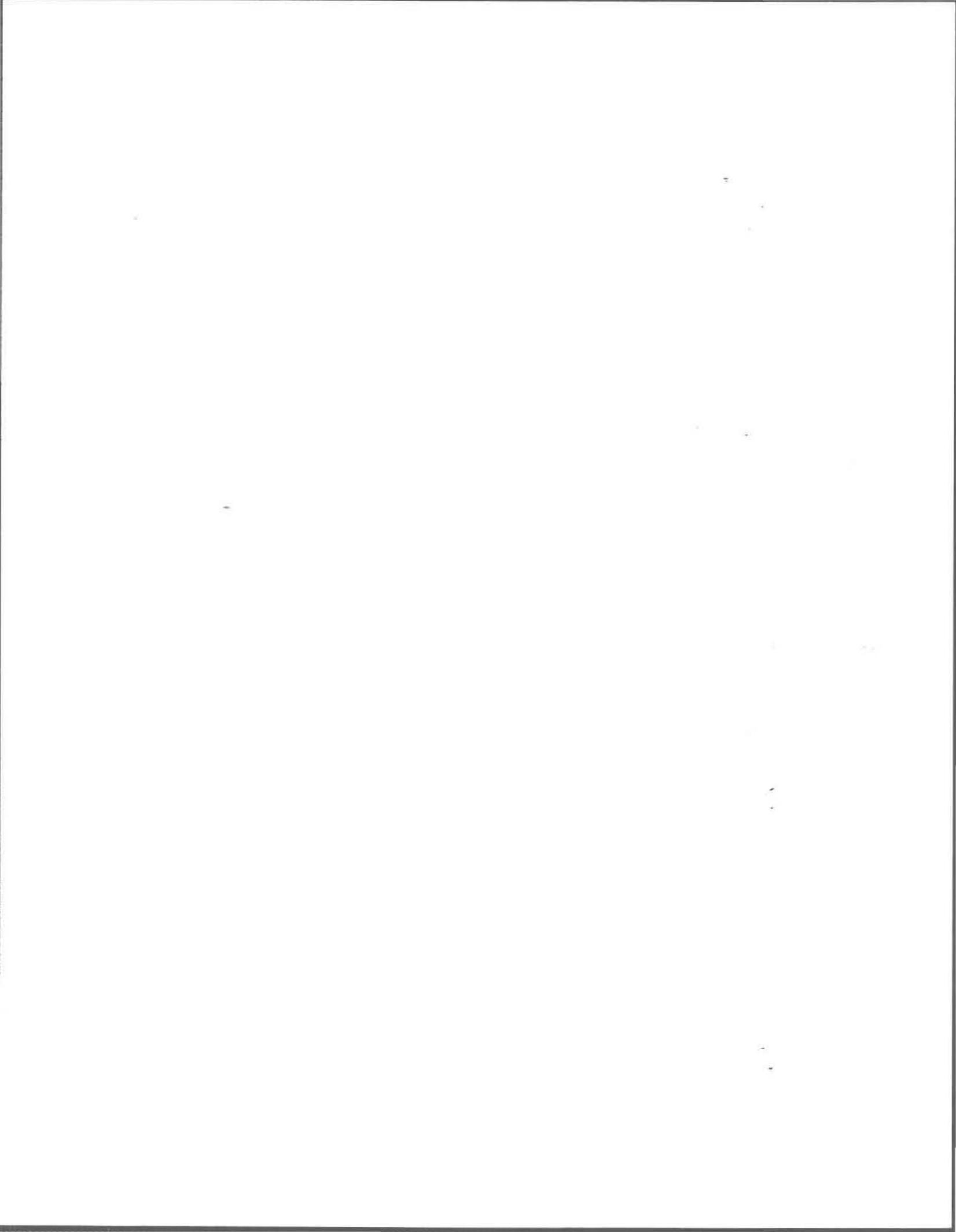
	PAGE
INTRODUCTION	
1. Prédiction en temps réel du comportement d'un système .....	4
1.1 Outil de prédiction .....	4
1.2 Étude d'un système .....	8
1.3 Méthodes de correction .....	12
1.4 Technique de filtrage .....	14
2. Le filtre de Kalman .....	21
2.1 Développement théorique du filtre .....	21
2.2 Problèmes associés à l'emploi du filtre de Kalman .....	34
2.2.1 Estimation des conditions initiales .....	34
2.2.2 Estimation des coefficients caractérisant la structure des modèles employés .....	35
2.2.3 Linéarisation des équations .....	42
2.3 Estimation des paramètres du modèle .....	43
3. Application du filtre de Kalman à un modèle déterministe conceptuel .....	46
3.1 Choix du modèle .....	46
3.2 Le modèle MDOR .....	48
3.3 Modification du modèle MDOR .....	54
3.3.1 Simplification du modèle MDOR .....	54
3.3.2 Dérivation des équations d'état .....	66
3.3.2.1 Prédiction des variables météorologiques ....	66
3.3.2.2 Prédiction du comportement du système "Lac" .....	69
3.3.2.3 Prédiction du comportement du sous-système "Fonte" .....	71
3.3.2.4 Prédiction du comportement du sous-système "Sol" .....	74
3.3.2.5 Prédiction des autres variables du bilan ....	77
3.4 Détermination des matrices du filtre de Kalman .....	78
3.4.1 Coefficients des équations de base .....	78
3.4.2 Caractéristiques statistiques des "bruits" .....	88
3.4.3 Conditions initiales .....	92
4. Discussion des résultats .....	95
4.1 Objectifs des simulations .....	95
4.2 Précision d'une prédiction .....	97
4.3 Longueur d'une prédiction .....	116

TABLE DES MATIÈRES (suite)

	PAGE
CONCLUSION .....	119
Bibliographie	
Annexe A - Le système "Lac"	
Annexe B - Le sous-système "Fonte"	
Annexe C - Le sous-système "Sol"	
Annexe D - Les variables du bilan hydrologique	

## LISTE DES TABLEAUX

- Tableau 1.1: Représentation de l'information "a priori"
- Tableau 2.1: Algorithme de filtrage
- Tableau 3.1a: Définition des sorties et des entrées de la figure 3.4
- Tableau 3.1b: Paramètres du modèle MDOR
- Tableau 3.2: But du programme CONST
- Tableau 3.3: Composantes des matrices du fichier DEBD9
- Tableau 3.4: Vecteur d'état ( $\underline{X}(t)$ )
- Tableau 3.5a: Représentation matricielle du terme  $\underline{\Phi}(t, t-1)$
- Tableau 3.5b: Représentation du terme  $\underline{F}(u; t-1)$
- Tableau 3.5c: Représentation matricielle du terme  $\underline{G} \underline{w}(t-1)$
- Tableau 3.6: Vecteur de mesure ( $\underline{Y}(t)$ )
- Tableau 3.7: Matrice d'échelle  $\underline{H}(t)$
- Tableau 3.8: Détermination des diagonales des matrices  $\underline{R}$  et  $\underline{Q}$
- Tableau 3.9: Détermination de  $\underline{P}(t_0|t_0)$
- Tableau 4.1: Simulation avec 13 variables d'état
- Tableau 4.2: Efficacité relative du filtre (13 variables d'état)
- Tableau 4.3: Efficacité relative du filtre (14 variables d'état)
- Tableau 4.4: Simulation avec 14 variables d'état
- Tableau C.1: Explication de la figure C. 2



## LISTE DES FIGURES

- Figure 1.1: Étude d'un système
- Figure 2.1: Processus de filtrage
- Figure 2.2a: Convergence de la prédiction
- Figure 2.2b: Problème de divergence
- Figure 2.3a: Variation de la covariance des erreurs de mesures ( $\underline{R}$ )
- Figure 2.3b: Variation de la covariance des erreurs du modèle ( $\underline{Q}$ )
- Figure 3.1: Discrétisation spatiale du bassin de la rivière Rimouski
- Figure 3.2: Schéma de production sur un élément (carreau)
- Figure 3.3: Conceptualisation simplifiée du modèle MDOR
- Figure 3.4: Exécution du modèle MDOR modifié
- Figure 3.5: Le programme CONST
- Figure 3.6: Le sous-système "Sol"
- Figure 4.1: Schéma de l'opération de filtrage effectuée à chaque jour
- Figure 4.2: Comparaison entre l'hydrogramme mesuré et l'hydrogramme calculé par le modèle MDOR
- Figure 4.3: Comparaison entre l'hydrogramme mesuré et l'hydrogramme calculé par le filtre de Kalman avec 13 variables d'état
- Figure 4.4: Comparaison entre l'hydrogramme mesuré et l'hydrogramme calculé par le filtre de Kalman avec 14 variables d'état
- Figure 4.5: Comparaison entre l'hydrogramme mesuré et l'hydrogramme calculé par le filtre de Kalman avec 25 variables d'état
- Figure 4.6: Comparaison entre la crue mesurée et la crue calculée par le filtre de Kalman
- Figure 4.7: Comparaison entre la crue mesurée et celle calculée par le modèle MDOR

LISTE DES FIGURES (suite)

- Figure 4.8: Prédiction pour les "k" prochains jours
- Figure B.1a: Organigramme de la sous-routine FONTE si  $T(t) > 0$
- Figure B.1b: Organigramme de la sous-routine FONTE si  $T(t) > 0$  (suite)
- Figure B.2: Organigramme de la sous-routine FONTE si  $T(t) \leq 0$
- Figure C.1: Le système Sol
- Figure C.2: Détermination des coefficients de la variable  $D(t)$

## INTRODUCTION

Quel temps fera-t-il demain ? Pleuvra-t-il ? Neigera-t-il ?  
Peut-on prédire l'avenir ? Et si oui, avec quelle probabilité de succès ?

Depuis le début des temps, les hommes s'interrogent sur ce que l'avenir leur réserve. À travers les siècles, les devins, augures et autres personnes dotées de pouvoirs mystiques, ont tenté de percer le voile entourant le futur dans le but de diminuer le sentiment d'insécurité associé à l'inconnu.

Même de nos jours, on tente de fissurer cette barrière temporelle. On réussit même à prédire certains événements météorologiques, avec, il faut le dire, plus ou moins de succès. On a réalisé que la capacité de prédire les événements était intimement liée au niveau de compréhension des différents processus engendrant l'événement. Les chercheurs ont donc développé une technique de solution de problèmes portant le nom d'"Analyse des systèmes". Cette méthode permet l'augmentation de la compréhension des processus importants des systèmes étudiés grâce à la synthèse et à l'analyse de toutes les informations disponibles.

Les gestionnaires appelés à administrer des systèmes de façon performante, peuvent se servir des techniques d'analyse des systèmes ou plus précisément, de la modélisation, pour évaluer les réponses du système à différentes stimulations. La modélisation est donc la pierre angulaire de la prédiction moderne. Elle est, en quelque sorte, la descendante des devins d'antan.

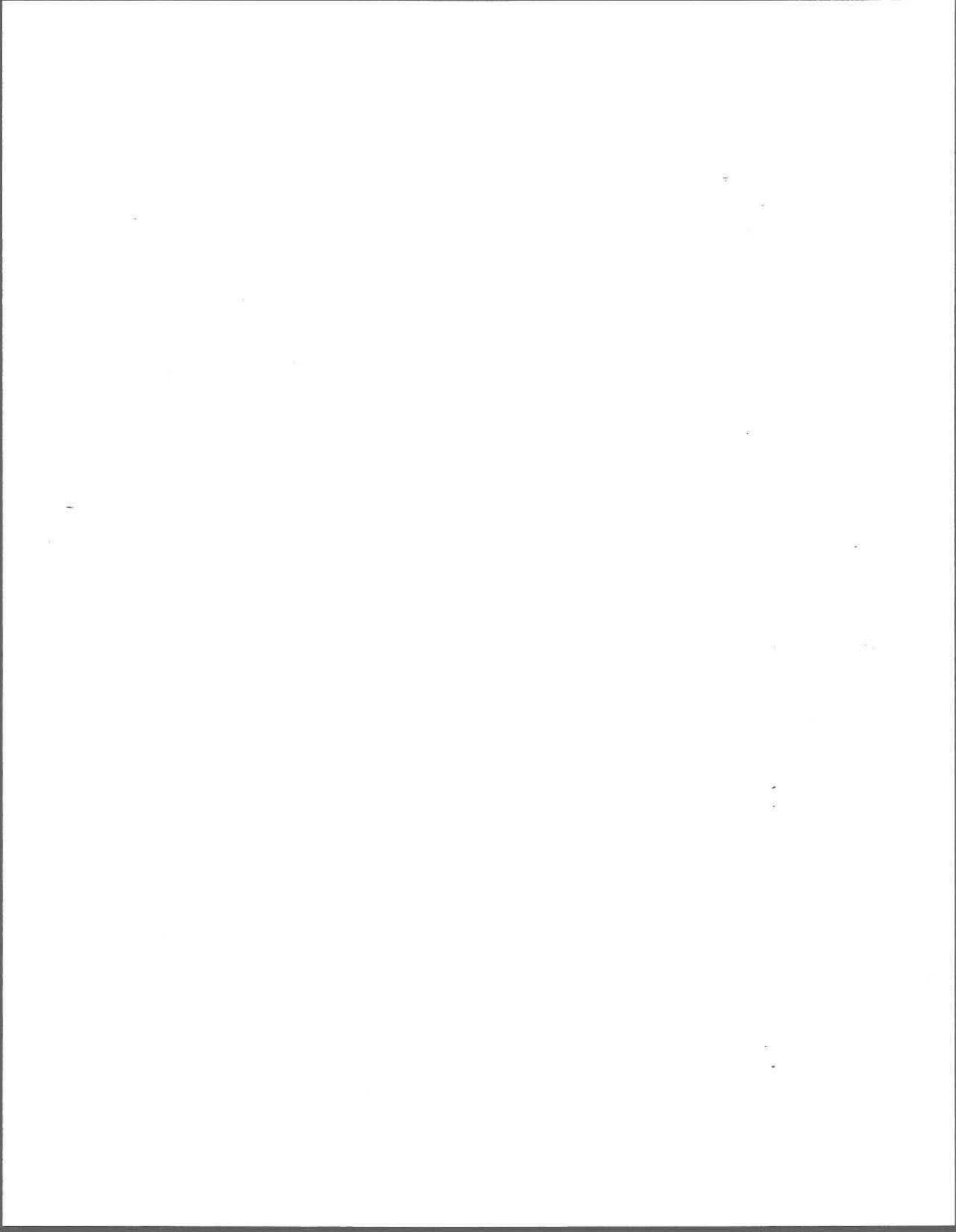
Cependant, les différences d'intérêt entre constructeurs et utilisateurs de modèles peuvent engendrer un dilemme. Les chercheurs, qui produisent la majeure partie des modèles, sont d'abord intéressés à améliorer la compréhension des processus impliqués dans le système. Ils génèrent donc, par le fait même, des modèles complexes et souvent lourds. Les gestionnaires quant à eux, recherchent plutôt un outil de travail leur permettant la "manipulation" du système. Il s'intéressent plus spécifiquement aux réponses possibles du système.

Les possibilités d'application des modèles imposent donc une contrainte supplémentaire lors de leur élaboration. Il faudra souvent faire un compromis entre la simplification et la représentativité, et ce, au détriment d'une certaine précision des résultats.

La perte de précision causée par cette simplification "imposée" peut être compensée par des mesures correctrices. L'utilisation du filtre de Kalman, méthode statistique associée au traitement des séries chronologiques, semble apporter des gains appréciables au niveau de la précision et de la longueur des prédictions, tout en respectant les contraintes associées à l'application des modèles.

Ce mémoire porte sur cette technique de filtrage qui permet une amélioration sensible de la prédiction en temps réel. Après avoir survolé quelques caractéristiques des systèmes hydrologiques, nous examinerons différentes facettes du domaine du filtrage en s'attardant plus spécifiquement à la théorie associée au filtre de Kalman.

Enfin, nous tenterons d'appliquer le filtre de Kalman à un modèle déterministe de type conceptuel (le modèle MDOR). Puis à l'aide de diverses simulations, nous évaluerons l'efficacité potentiel du filtre au niveau du gain de précision pour une opération de prédiction du débit de la rivière Rimouski.



## 1. PRÉDICTION EN TEMPS RÉEL DU COMPORTEMENT D'UN SYSTÈME

### 1.1 Outil de prédiction

Les gestionnaires qui ont à administrer des systèmes de façon performante utilisent des outils de prédiction de façon à évaluer les possibilités de réponses d'un système soumis à différentes stimulations. La prédiction est l'opération qui consiste à évaluer l'état d'un système dans une situation non observée mais située dans un futur possible. Par le fait même, elle permet une amélioration de la compréhension du comportement du système.

L'utilisation de modèles pour la prédiction est une approche moderne permettant l'estimation des états futurs d'un système. La modélisation consiste à reproduire symboliquement ou physiquement les principales composantes des phénomènes observés. Elle permet une réduction de la diversité et de la complexité de la réalité (Villeneuve, 1983), améliorant ainsi la compréhension des processus impliqués (intérêt au niveau de la recherche) et facilitant la "manipulation" des systèmes (intérêt au niveau de la gestion).

En modélisation hydrologique, on tente de représenter symboliquement les fonctions connues ou inconnues qu'expriment les composantes du cycle hydrologique (Snyder et Stall, 1965; Chapman, 1968). Plus particulièrement, dans le domaine qui nous intéresse, on essaie de traduire la fonction de transfert existant entre les données météorologiques et le débit (Nash et Sutcliffe, 1970; Bisson et Roberge, 1978).

L'ère de l'ordinateur, en permettant la résolution d'équations mathématiques complexes, a certes été un point tournant pour l'utilisation de modèles et a contribué à la popularité croissante des modèles mathématiques (Snyder et Stall, 1965).

Les modèles mathématiques se subdivisent en deux grandes classes, selon l'approche employée: stochastique ou déterministe (Daudelin, 1983; Morin, 1983; Clarke, 1973; Kirby, 1978). Les modèles stochastiques contiennent des relations mathématiques non représentatives des processus physiques du système. Certains de ces modèles supposent que les mesures (précipitations, débits, etc.) sont des variables aléatoires qui peuvent être modélisées par des distributions statistiques. Ces modèles se basent sur l'hypothèse que l'histoire du bassin hydrologique (résumée par les données historiques) contient toute l'information nécessaire à la connaissance passée, présente ou future du système (Lundberg, 1982).

Le principe des modèles déterministes est de représenter le plus fidèlement les processus importants du cycle hydrologique. Ils tentent donc de se rapprocher le plus possible de la physique du phénomène. Les modèles employés sont surtout de types conceptuels (paramétriques, schématisés) en raison de la complexité des phénomènes étudiés.

Idéalement le lien réunissant les données météorologiques et le débit est complètement déterministe et devrait donc suivre des lois physiques (Nash et Sutcliffe, 1970). Or, en raison d'une mauvaise compréhension du système causée par la complexité des phénomènes et par les différentes

interactions entre les processus impliqués, on doit adopter une approche empirique. Cette approche consiste à utiliser des concepts simplifiés basés sur des hypothèses "a posteriori".

Les modèles déterministes de type conceptuel utilisent souvent des équations empiriques fondées sur des hypothèses plausibles mais rarement testées expérimentalement et dont le résultat dépendra de la calibration de paramètres de signification physique souvent discutables (Morton, 1982). Une mauvaise calibration pourra avoir comme effet une augmentation de l'incidence des données historiques au détriment de la physique du phénomène. Pickup (1977), résume bien l'empirisme de certaines relations mathématiques: "This equation was chosen because it gives a good fit to observed data rather than for theoretical reasons".

Cette simplification nécessaire du système hydrologique donne donc une assez grande liberté au niveau de la conceptualisation du système par l'hydrologue. Ceci explique en partie le grand nombre de modèle rencontré. La plupart des modèles ont été construits dans un but précis et sont donc limités dans leur application. Plusieurs caractéristiques des variables hydrologiques (comme les disponibilités spatiales et temporelles des mesures) limitent la complexité des modèles de types opérationnels. En hydrologie appliquée, on devra souvent faire un compromis entre la simplification et la représentation de la réalité (Schermerhorn et Kuehl; Nash et Sutcliffe, 1970). Il n'existe pas de modèle idéal. Par définition, ils sont incomplets et imparfaits puisqu'ils tentent de représenter une réalité qui est généralement mal connue.

Le modèle est utilisé pour effectuer différents genres de simulation. La simulation permet la "digestion" de données d'entrées dans le but d'évaluer des fonctions de production et de transport. Elle permet donc la représentation de la réalité et évalue les performances du système, étape essentielle de l'analyse du système. Le but de la simulation peut être résumé par cette question: "What if ?" (Fiering et al., 1971).

Les simulations que nous allons effectuer dans cette étude seront des prédictions en temps réel. Ces opérations permettent d'évaluer le comportement du système pendant l'occurrence d'un évènement (Wood et Szollosi-Nagy, 1978; WMO, 1975). Elles facilitent donc la prise de décision à court terme grâce à la connaissance de l'état du système et de la prédiction de son état futur (Cluckie, Harwood et Harpin, 1980). La connaissance des conditions initiales du système (ex.: humidité du sol) est indispensable à ce type de prédiction puisqu'on modélise l'état présent du système (Quick, 1983).

La longueur de la prédiction hydrologique pourra être limitée par la longueur des prédictions météorologiques, qui servent de données d'entrée aux modèles, et par le temps de réponse du bassin considéré (Shermerhorn et Kuelh; Hogg, Pugsley, Schaefer et Yacowar, 1983).

L'utilisateur des modèles de prédiction en temps réel doit respecter deux contraintes liées à l'opération de prédiction:

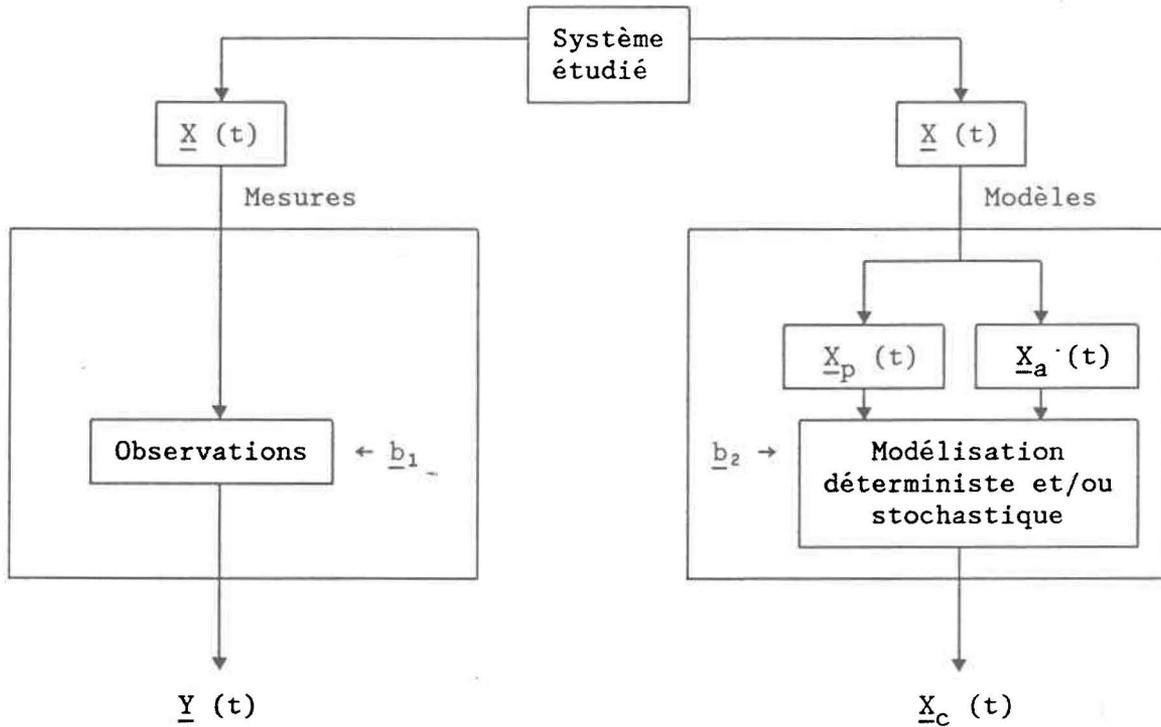
- 1) les simulations fréquentes, nécessaires à une opération de prédiction, limitent la complexité des modèles employés;
- 2) il doit essayer d'utiliser toute l'information disponible (Bisson et Roberge, 1983).

Lors d'une opération de prédiction, l'hydrologue doit estimer l'évolution du système à partir de son état initial et de certaines séries de données météorologiques. À chaque jour, il pourra ajuster sa prédiction en resimulant le système selon les nouvelles séries de données d'entrée. Ces conditions d'opération nécessitent un grand emploi de temps d'ordinateur, occasionnant ainsi des coûts élevés. Il sera donc préférable de choisir des modèles légers et opérationnels pour limiter les coûts associés à la partie informatique de l'opération de prédiction, même si cela doit être fait au détriment d'une certaine représentativité du système. Le gestionnaire qui veut profiter d'une base physique solide devra favoriser l'emploi de modèles de type déterministe.

## 1.2 Étude d'un système

La prédiction de l'évolution d'un système hydrologique est limitée par la connaissance de son état initial et par la compréhension de ses flux internes. Ces lacunes peuvent être comblées par deux genres d'informations: l'observation expérimentale (information "a posteriori") et les lois ou relations empiriques permettant de décrire le comportement d'un système (information "a priori"). Cependant, ces informations sont souvent incomplètes ou entachées d'erreurs (figure 1.1).

Figure 1.1  
Étude d'un système



- $\underline{X}(t)$  : vecteur de n variables d'état décrivant le système;  
 $\underline{X}_p(t)$  : composantes déterministes (n variables);  
 $\underline{X}_a(t)$  : composantes aléatoires (n variables);  
 $\underline{b}_2$  : bruits des modèles (n x 1);  
 $\underline{b}_1$  : bruits des mesures (m x 1);  
 $\underline{Y}(t)$  : mesures de m variables d'état ( $m \leq n$ ) (informations "a posteriori");  
 $\underline{X}_c(t)$  : variables calculées par le modèle (n x 1) (information "a priori");  
 $\underline{H}$  : matrice de mesures (m x n).

$$(1.1a) \rightarrow \underline{Y}(t) = \underline{H} \underline{X}(t) + \underline{b}_1$$

$$(1.1b) \rightarrow \underline{X}(t) = \underline{X}_p(t) + \underline{X}_a(t)$$

$$(1.1c) \rightarrow \underline{X}_c(t) = \underline{X}(t) + \underline{b}_2$$

L'information obtenue par l'observation expérimentale est limitée au nombre de variables mesurées et à l'échelle de temps utilisée. Ce sont surtout des contraintes logistiques qui conditionnent ainsi l'horizontalité et la verticalité de l'échantillonnage. De plus, l'information utile contenue dans les mesures peut être diluée par les erreurs de lecture et d'instrumentation. Nous représenterons les erreurs rattachées à l'information "a posteriori" par un résidu aléatoire non prévisible.

L'amalgamation des lois physiques et des relations empiriques dans une structure pertinente permet la modélisation déterministe du système. Cependant, pour rendre le modèle plus opérationnel, on devra simplifier certaines caractéristiques des processus hydrologiques (hétérogénéité, variabilité spatio-temporelle, processus non linéaire, etc...). Cette simplification limitera l'information utile qu'on peut obtenir du modèle (information "a priori") et diminuera la qualité des résultats des simulations.

Le modéliste peut donc définir deux composantes intrinsèques des variables importantes d'un système: une composante déterministe et une composante aléatoire (voir équation 1.1b, figure 1.1).

La composante déterministe peut être prédite à partir de la théorie scientifique. La composante aléatoire de la variable est non prévisible en raison d'un manque d'information. Amirthanathan (1982) définit ainsi l'incidence de la partie aléatoire d'une variable hydrologique: "C'est celle qui ne nous permet jamais d'être certain de ne pas avoir oublié notre parapluie".

Un modèle déterministe bien représentatif de la réalité, expliquera suffisamment le comportement des variables d'état pour rendre négligeable le résidu aléatoire (Isabel, 1983). Or, en raison de la simplicité des modèles déterministes utilisés en prédiction, on pourra observer une augmentation de l'importance de ce résidu aléatoire. L'utilisateur des modèles de prédiction qui doit optimiser la précision de sa prédiction devra tenir compte de cette composante en tentant de la modéliser.

La présence de ces résidus aléatoires nous amènent à définir la notion de "bruits". Les bruits sont des phénomènes fluctuants dont l'évolution ne peut être prévue exactement. La connaissance de leur valeur dans des conditions données ne permet pas le calcul exact de leur valeur dans des conditions voisines. Ces bruits peuvent intervenir à deux endroits lors de l'étude d'un système: au niveau des mesures ou au niveau des modèles (figure 1.1). Ces bruits pourront être causés par: la mauvaise représentativité du modèle, le fait que les paramètres peuvent être trop inégalement distribués pour être considérés invariables, les erreurs de mesures des données d'entrée et de sortie, le fait de considérer la distribution de la pluie comme homogène, etc... (Jackson, 1975; Bowles et Grenney, 1978; Lundberg, 1982; Quick, 1983). Les bruits ont comme effet de diminuer la qualité de nos informations.

### 1.3 Méthodes de correction

L'étude expérimentale des systèmes physiques est donc continuellement perturbée par l'influence de ces bruits. Or comme la gestion et la planification de la ressource eau imposent des estimations de plus en plus exactes des variables importantes du système, on doit chercher à quantifier l'effet de ces bruits. La perte de précision ou l'augmentation de l'incertitude causée par l'emploi de modèles simplifiés peut être compensée par des méthodes correctrices qui permettent de "coller" les résultats des simulations à la réalité (ou aux observations).

La méthode d'ajustement la plus simple consiste à corriger uniquement les sorties du modèle en multipliant les valeurs obtenues par un facteur qui est fonction de la différence entre les valeurs calculées et les valeurs observées. Il s'agit ni plus ni moins que d'un traitement statistique des résidus. C'est comme si on utilisait un modèle statistique pour compléter le modèle déterministe.

On peut aussi tenter de corriger les sources d'erreurs plutôt que les erreurs. L'importance relative de certains processus hydrologiques peut varier de façon spatiale et temporelle. Si les modèles représentent empiriquement ces processus, cela pourra se traduire par des valeurs de paramètre instables qui deviennent par le fait même moins représentatifs des processus qu'ils modélisent.

La calibration classique n'est alors plus tout à fait adéquate puisqu'elle fixe la valeur de paramètres qui intègrent trop de choses pour pouvoir être considérés totalement invariables avec le temps (Morton 1982). Le principe de la méthode d'ajustement qui porte le nom de : calibration en temps réel, consiste à considérer certains paramètres du modèle (les moins représentatifs) comme étant des variables aléatoires. On détermine dans un premier temps leurs valeurs initiales (soit par calibration classique, ou par une estimation simple) puis on corrige cette valeur à chaque jour en se servant des nouvelles mesures disponibles.

Une autre méthode correctrice consiste à corriger les valeurs des variables d'état du système à chaque jour. On entend ici par variables d'état, toutes variables importantes décrivant le système, qui sont utilisées pour former la structure du modèle et dont la connaissance de l'état futur permet la prédiction des sorties du système. On peut nommer comme exemple: l'humidité du sol ou le niveau des différents réservoirs conceptuels, les conditions météorologiques (température, précipitation), l'évaporation, le débit et même certains paramètres intégrateurs du modèle.

La variation de ces variables conditionne l'évolution temporelle ou le comportement du système. Le principe de cette méthode d'ajustement est de réduire l'écart entre les valeurs des variables d'état calculées et leurs mesures et ce, à chaque jour de l'opération. L'approche proposée est de modéliser stochastiquement le bruit associé à chaque variable importante du système. L'analyse stochastique sera alors imbriquée dans la structure du modèle déterministe (figure 1.1).

Cette dernière approche est possible par l'entremise des filtres numériques. Ce sont des méthodes stochastiques qui facilitent le traitement de l'information en tenant compte de façon rationnelle des incertitudes rattachées à l'étude d'un système. Plus précisément, les techniques de filtrage permettront d'estimer de façon optimale les variables d'état importantes d'un système à partir des informations "a priori" et "a posteriori".

#### 1.4 Technique de filtrage

Le filtrage est un terme emprunté au domaine du génie électrique où l'on utilise des filtres, dits "classiques"<sup>1</sup>, qui permettent l'extraction ou la réduction de parties indésirables d'un signal. On entend ici par signal toute information susceptible de nous renseigner sur un système donné. Ces filtres physiques sont constitués de condensateurs et d'inductances, destinés au traitement des signaux électriques (ex.: tensions électriques).

L'avènement d'ordinateurs de plus en plus sophistiqués a favorisé l'utilisation des filtres "numériques", qui n'ont pas d'existence physique comme les filtres classiques. Ces filtres sont des méthodes de calcul qui facilitent l'exploitation d'un signal traduit sous forme numérique. Le filtre numérique peut utiliser les deux catégories d'informations ("a priori" et "a posteriori").

---

<sup>1</sup> On les appelle aussi "analogiques", puisqu'ils traitent des signaux qui sont définis en continu.

On tentera d'effectuer la meilleure estimation possible des variables d'état ( $\underline{X}(t)$ ) à partir d'une combinaison de ces deux informations. L'utilisateur devra donc préciser ce qu'il entend par "meilleure estimation possible", ce qui impliquera la définition d'un critère d'optimisation qui sera en général les moindres carrés. Ce critère consiste à minimiser une forme quadratique représentant l'écart entre la solution obtenue ( $\hat{x}(t)$ ) et la solution idéale ( $x(t)$ ):

$$F^2 = \sum (\hat{x}(t) - x(t))^2$$

Le calcul de la fonction  $F^2$  nous donnera une mesure de la qualité du traitement des données bruitées par le filtre. Plusieurs raisons supportent le choix des moindres carrés comme critère d'optimisation:

- en statistique, la méthode du maximum de vraisemblance conduit à minimiser les moindres carrés;
- son utilisation conduit souvent à un système d'équations linéaires.

En général, on traite des signaux qui sont échantillonnés de façon discrète, c'est-à-dire que les données de mesure ne sont définies que pour des valeurs discrètes du temps. On travaille donc surtout avec des filtres "digitaux" (par opposition aux filtres analogiques) ce qui impliquera une discrétisation des équations en continu employées pour définir notre système.

Il existe plusieurs types de filtre: linéaire ou non linéaire, récursif ou non récursif. La plupart des filtres employés jusqu'à présent sont des filtres linéaires. L'expérience démontre qu'en plus de l'avantage de la simplicité et de l'efficacité, ils peuvent permettre le traitement d'un signal ayant un comportement non linéaire.

Les filtres non-récursifs estiment chaque variable d'état ( $x(t)$ ) au temps  $t$  à partir d'une somme pondérée ( $a_0$  à  $a_n$ ) des mesures ( $y(t)$ ) antérieures à l'instant  $t$ . Ces filtres n'utilisent donc que l'information donnée par les mesures. Ils sont de la forme:

$$\hat{x}(t) = a_0 y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = \sum_{i=0}^n a_i y(t-i) \quad 1$$

Les filtres récursifs estiment les  $x(t)$ , à partir d'une somme pondérée de la mesure au temps  $t$  ( $y(t)$ ) et de l'estimation de la variable au temps  $t-1$  ( $\hat{x}(t-1)$ ). Ils sont de la forme:

$$\hat{x}(t) = A \hat{x}(t-1) + B y(t) \quad (1.2)$$

Cette équation est intéressante puisqu'elle utilise les deux informations disponibles: l'information "a priori" ( $\hat{x}(t-1)$ ) et l'information "a posteriori" ( $y(t)$ ).

---

<sup>1</sup> Cette fonction de transfert est mieux connue sous le nom de "sommation de convolution":  $\hat{x}(t)$  est l'estimé de la variable  $x(t)$ .

Le filtre est en fait un modèle stochastique. Cependant, ce qu'il y a d'intéressant, c'est qu'il laisse le choix de la façon dont on veut représenter l'information "a priori" (voir tableau 1.1). Dans notre cas, cette information sera représentée par un modèle déterministe conceptuel. Le filtre ne sera alors plus considéré comme un modèle en soi, mais plutôt comme le complément du modèle déterministe. Il permettra ainsi le traitement de l'information obtenue du modèle. L'utilisateur devra cependant attribuer aux informations "a priori" et "a posteriori", un niveau de bruits qui exprimera le niveau de confiance qu'il accorde à chaque information. Le filtre deviendra donc une technique de traitement permettant d'extraire le maximum d'informations des signaux reçus selon la connaissance physique que nous avons du phénomène.

Le filtre de Kalman se présente sous la forme d'un algorithme de calcul qui permet la représentation de l'information "a priori" sous une forme analytique (modèle). Cependant, cette représentation doit être faite selon l'approche "State Space" qui consiste à expliquer l'état du système par à un processus markovien tel que:

$$x(t): f(x(t-1), x(t-2), \dots) \quad (1.3)$$

Le principe du processus markovien est que la connaissance des états passés du système et de la structure engendrant le comportement du système permet l'estimation des états présents du système. Il s'agit alors de représenter cette structure (ou le modèle) par une suite d'équations

Tableau 1.1  
Représentation de l'information "a priori"

MÉTHODES	INFORMATIONS "a priori"	
	SUR LA VARIABLE D'ÉTAT (X)	SUR LE BRUIT (B)
	Transformation de Fourier	composition spectrale
Transformation en z	composition spectrale	composition spectrale
Moindres carrés classique	forme analytique (ou) équation d'évolution	
Wiener	auto-corrélation et corrélation avec B	auto-corrélation et corrélation avec X
Kalman	équations d'état, propriétés statistiques des perturbations aléatoires	propriétés statistiques

Référence: Radix (1970)

linéaires aux différences finies (donc discrétisées), de la forme de l'équation 1.3, qui utilisent toutes les variables importantes du système (variables d'état).

La plupart des modèles hydrologiques ayant une structure linéaire s'adaptent à la notation "State-Space". Nous essaierons au chapitre 3 d'adapter un modèle déterministe de type conceptuel à l'algorithme du filtre de Kalman. L'opération de filtrage selon l'approche proposée comportera les étapes suivantes:

- identification de l'information "a priori", selon une forme mathématique (voir tableau 1.1);
- choix d'un filtre permettant la réduction des parties indésirables du signal;
- choix d'un critère d'optimisation permettant la détermination des coefficients du filtre.

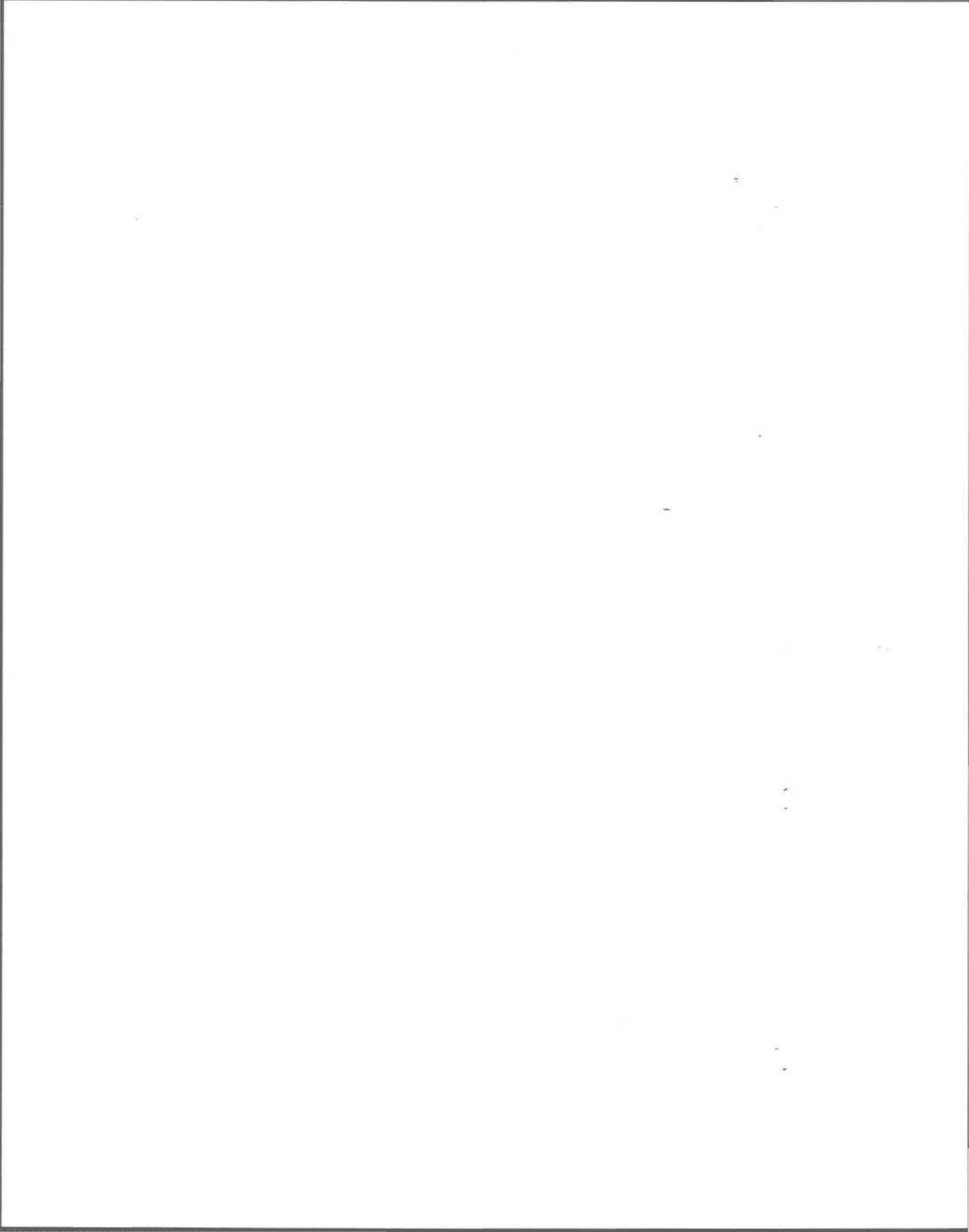
On pourra ensuite effectuer les opérations suivantes:

- estimation de  $\underline{X}(t)$  à chaque instant de mesure: filtrage;
- estimation de  $\underline{X}(t)$  entre les instants de mesure: lissage (interpolation);

- estimation de  $\underline{X}(t)$  à un instant postérieur aux dernières mesures: prédiction;
  
- estimation des paramètres du modèle décrivant  $\underline{X}(t)$ : calibration en temps réel.

|

Le filtrage numérique a été appliqué dans plusieurs activités dans lesquelles intervenaient la collecte et l'exploitation de données numériques. Citons des disciplines aussi variées que: l'aérospatiale, la navigation, l'économétrie, l'électronique ou l'acoustique.



## 2. LE FILTRE DE KALMAN

### 2.1 Développement théorique du filtre

Le filtre de Kalman est une méthode d'analyse qui permet l'estimation optimale, au sens des moindres carrés, de "l'état" d'un système, perturbé par la présence de bruits, grâce au traitement des deux types d'informations: l'information "a priori" et l'information "a posteriori". L'information "a priori" comprendra, dans ce cas ci: l'équation d'état (modèle dynamique stochastique) qui modélise le comportement du système, une estimation des conditions initiales et l'évaluation des propriétés statistiques des bruits. L'information "a posteriori" est représentée par l'équation de mesure qui relie mathématiquement les mesures aux variables d'état.

Le concept de "l'état" d'un système n'est qu'une convenance mathématique permettant l'utilisation de causalité et de structure interne dans la définition d'un système (Mehra, 1976). Intuitivement, l'état d'un système peut être décrit comme étant l'information minimale requise sur un système, nécessaire à la prédiction de son comportement futur. Pour un système complètement déterministe, l'état du système sera donné par une série de variables ( $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  ...  $x_n(t)$ ) regroupées dans le vecteur d'état ( $\underline{X}(t)$ ), qui représenteront les caractéristiques et/ou les processus importants du système. La connaissance des valeurs de ce vecteur au temps " $t_0$ ", des données d'entrée du système et de la structure du modèle

décrivant ce système, permettra la détermination du vecteur à tout temps "t". Pour un modèle de type stochastique, une extension de ce concept permettra la détermination de la distribution de probabilité des variables d'état dans le futur, à partir de la connaissance de l'état actuel et de l'histoire du système (Szollosi-Nagy et al., 1977).

L'équation d'état décrivant le système, peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle stochastique du premier ordre:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \theta(t); t) + w(t) \quad (2.1)$$

où

$\dot{x}(t)$ : dérivée de la variable  $x(t)$

$u(t)$ : force motrice du système

$\theta(t)$ : paramètre du modèle

$w(t)$ : bruits associés au modèle

Cette équation stipule que l'évolution de la variable  $x(t)$  peut être décrite à partir d'informations sur sa structure interne.

L'équation de mesure est donnée par:

$$y(t) = H(x(t), u(t), \theta(t); t) + v(t) \quad (2.2)$$

où

$y(t)$ : variables mesurées

$v(t)$ : bruits associés à la mesure

Comme ces deux informations sont jugées incomplètes, on leur attribue chacune un terme de bruit:  $v(t)$  et  $w(t)$ . Posons deux-hypothèses de départ permettant de faciliter le développement des équations 2.1 et 2.2:

- les paramètres du modèle ( $\theta(t)$ ) sont connus;
- il existe un lien direct entre les variables d'état ( $x(t)$ ) et les mesures ( $y(t)$ ), ce qui implique l'indépendance entre la force motrice ( $u(t)$ ) et les mesures.

Nous allons linéariser notre équation d'état de façon à faciliter son incorporation dans l'algorithme du filtre de Kalman<sup>1</sup>. En respectant ces hypothèses et en utilisant la notation matricielle, on peut réécrire les équations 2.1 et 2.2:

$$\dot{\underline{X}}(t) = \underline{A}(t) \underline{X}(t) + \underline{B}(t) \underline{u}(t) + \underline{G}(t) \underline{w}(t) \quad (2.3)$$

$$(nx1) \quad (nxn)(nx1) \quad (nx1)(lx1) \quad (nxp) \quad (px1)^2$$

$$\underline{Y}(t) = \underline{H}(t) \underline{X}(t) + \underline{v}(t) \quad (2.4)$$

$$(mx1) \quad (mxn)(nx1) \quad (mx1)^2$$

---

<sup>1</sup> Bien que ce soit plus complexe, le filtre peut aussi être appliqué à des systèmes non linéaires.

<sup>2</sup> Dimension des matrices et vecteurs utilisés dans les équations 2.3 et 2.4.

Les matrices  $\underline{A}$  et  $\underline{H}$  contiennent les paramètres du modèle. Les matrices  $\underline{B}$ ,  $\underline{G}$  et  $\underline{H}$  sont des matrices d'échelle qui indiquent les variables qui sont soumises à l'influence des forces matrices ( $\underline{u}(t)$ ), des bruits ( $\underline{w}(t)$ ) ou qui sont mesurées (équation 2.4). Dans ce dernier cas, on pourra avoir  $m \leq n$  selon le nombre de variables mesurées. Les matrices  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{H}$  et  $\underline{G}$  peuvent être dépendantes ou indépendantes du temps.

Une analyse statistique ou déterministe rigoureuse des incertitudes reliées aux deux équations est difficile. C'est pourquoi on se sert d'hypothèses simples sur la magnitude des incertitudes qu'on ajustera pour bien représenter les sources d'erreurs. On suppose donc, que nos bruits ont l'allure de "bruits blancs", c'est-à-dire qu'ils sont des variables non corrélées et imprévisibles et qu'ils ont une distribution qui suit une loi normale de moyenne 0 et de variacés  $\sigma^2$ . On aura donc:

$$\underline{w}(t) \rightarrow N(0, \underline{Q}) \quad (2.5)$$

$$\underline{v}(t) \rightarrow N(0, \underline{R}) \quad (2.6)$$

avec  $\underline{Q}$  et  $\underline{R}$  représentant respectivement la matrice de covariance des erreurs du modèle et la matrice de covariance des erreurs de mesures.

Pour effectuer le traitement numérique des données, il est nécessaire de discrétiser le modèle mathématique, s'il est constitué d'équations différentielles. L'équation 2.3 peut s'écrire sous la forme:

$$\underline{X}(t+1) = \underline{\Phi}(t+1,t) \underline{X}(t) + \underline{F}(u;t) + \underline{G} \underline{w}(t) \quad (2.7)^1$$

$$(nx1) \quad (nxn) \quad (nx1) \quad (nx1) \quad (n \times p) \quad (px1)$$

où  $\underline{\Phi}(t+1,t)$  est une matrice de transition qui permet la transformation de "l'état" du système à l'instant  $t$  à un "état" à l'instant  $t+1$ . Elle est la solution de l'équation différentielle suivante (Radix, 1970; Rauch, 1970 et Lettenmaier, 1976):

$$\dot{\underline{\Phi}}(t) = \underline{A}(t) \underline{\Phi}(t+1,t) \text{ avec } \underline{\Phi}(t,t) = \underline{I}$$

et:

$$\underline{F}(u;t) = \int_t^{t+1} \underline{\Phi}(t+1,\tau) \underline{B}(\tau) \underline{u}(\tau) \partial \tau \text{ (voir équation 2.3)}$$

Les équations d'état qui représentent le modèle choisie (équation 2.3), devront être réécrites sous la forme d'un processus markovien (équation 2.7) pour faciliter leur traitement par le filtre de Kalman. Les coefficients de l'équation 2.7, seront estimés de façon à tenir compte de la structure du modèle.

---

<sup>1</sup> Cette équation est analogue à la formulation d'un cycle markovien d'ordre 1 (voir l'équation 1.3). Notons que la matrice  $\underline{G}$  est considérée ici comme une constante (indépendante du temps).

La représentation du modèle sous la forme d'un processus markovien comporte un avantage au niveau du temps "ordinateur" puisqu'elle ne nécessite pas la mémorisation de longues séries de données. On n'aura besoin que de quelques valeurs numériques qui contiendront toutes l'information nécessaire à la mise à jour de notre estimation.

Le filtre de Kalman utilise l'approche Bayésienne (les probabilités conditionnelles). Il suppose que les variables sont aléatoires et essaie de leur attribuer les valeurs les plus probables, compte tenu de l'information disponible.

Sorenson (1970) a démontré (Bozic, 1979) que la meilleure prédiction du vecteur d'état est donnée selon l'équation d'état (équation 2.7), donc selon le modèle. En partant de l'hypothèse que les variables d'état suivent une loi normale on aura (Bowles, 1978):

$$\underline{X}(t) \rightarrow N(\hat{\underline{X}}(t|t), \underline{P}(t|t))$$

Le filtre de Kalman permettra donc deux estimations:

---

<sup>1</sup> Cela revient à dire que la meilleure estimation possible d'une variable  $x_i(t)$  est  $\hat{x}_i(t|t)$  avec une erreur possible de  $P_{ii}(t|t)$ .

$\hat{\underline{X}}(t|q)$  : estimation la plus probable de  $\underline{X}(t)$  en utilisant les mesures effectuées jusqu'à l'instant  $q$ . C'est une estimation optimale, au sens des moindres carrés, et en tenant compte des hypothèses de travail (structure du modèle et propriétés statistiques des bruits);

$\underline{P}(t|q)$  : estimation de la matrice de covariance des erreurs, soit:

$$E [(\underline{X}(t) - \hat{\underline{X}}(t|q)) (\underline{X}(t) - \hat{\underline{X}}(t|q))^T]$$

$$E((\underline{X}(t) - \hat{\underline{X}}(t|q))^2)$$

Le problème de l'estimation de l'état d'un système peut se résumer ainsi: connaissant une séquence de mesures ( $Y(t)$ ) reliée aux variables d'état par l'équation 2.4, on estime les variables d'état ( $X(t)$ ), dont le comportement est donné par l'équation 2.7, tout en minimisant une fonction de performance. Notons que le maximum de vraisemblance renforce le choix des moindres carrés comme fonction critère  $F^2$ . En fait, la fonction que nous minimiserons sera la trace de  $\underline{P}(t|t)$  (somme de la diagonale de la matrice):

$$F^2 = \sum (X_i(t) - \hat{X}_i(t|t))^2$$

Kalman a trouvé une solution à ce problème sous la forme du filtre récursif linéaire suivant:

$$\hat{\underline{X}}(t|t) = \underline{\alpha} \hat{\underline{X}}(t-1|t-1) + \underline{\beta} [Y(t) - \underline{\gamma} \hat{\underline{X}}(t-1|t-1)] \quad (2.8)$$

L'équation 2.8 est de la même forme que l'équation 1.2<sup>1</sup>. L'estimation du vecteur d'état ( $\hat{X}(t|t)$ ) est donc donnée par une sommation pondérée des estimations faites à une période antérieure et d'un terme représentant le gain d'information qu'apporte la nouvelle mesure. Ce dernier terme porte le nom d'innovation et se définit comme suit:

$$\underline{v}(t) = \underline{Y}(t) - \underline{\gamma} \hat{X}(t-1|t-1)$$

En partant des équations de départ (équations 2.4 et 2.7), en minimisant la fonction critère et en posant certaines hypothèses de non-corrélation<sup>2</sup>, Kalman a pu déterminer les coefficients de l'équation 2.8:

$$\begin{aligned}\underline{\alpha} &= \underline{\Phi}(t, t-1) \\ \underline{\beta} &= \underline{K}(t) \\ \underline{\gamma} &= \underline{H}(t)\underline{\Phi}(t, t-1)\end{aligned}$$

L'équation 2.8 devient:

$$\hat{X}(t|t) = \underline{\Phi}(t, t-1) \hat{X}(t-1|t-1) + \underline{K}(t) [\underline{Y}(t) - \underline{H}(t)\underline{\Phi}(t, t-1) \hat{X}(t-1|t-1)] \quad (2.9)$$

---

<sup>1</sup> Dans l'équation 1.2, en posant  $A = D - BC$ , on obtiendra:  
 $\hat{X}(t) = D \hat{X}(t-1) + B(y(t) - C \hat{X}(t-1))$

<sup>2</sup> Les hypothèses de non-corrélation sont entre autre:  
 $E(\underline{v}(t) \cdot (\underline{X}(t) - \hat{X}(t|t-1))^T) = 0$  et  $E(\underline{v}(t) \cdot \underline{w}(t)^T) = 0$

<sup>3</sup> Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $K$  et  $H$  peuvent être dépendants ou indépendants du temps. Le changement de  $\beta$  par  $K(t)$  a été fait pour avoir la même terminologie que la littérature.

avec  $\underline{\underline{K}}(t)$  déterminée de façon à minimiser la trace de  $\underline{\underline{P}}(t|t)$ , soit:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{K}}(t)} || \underline{\underline{P}}(t|t) || = 0$$

ce qui donne:

$$\underline{\underline{K}}(t) = \underline{\underline{P}}(t|t-1) \underline{\underline{H}}(t)^T [\underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{P}}(t|t-1) \underline{\underline{H}}(t)^T + \underline{\underline{R}}]^{-1} \quad (2.10)$$

$\underline{\underline{K}}(t)$  est la matrice de gain et est fonction de  $\underline{\underline{Q}}$  (indirectement) et de  $\underline{\underline{R}}$ , donc des propriétés statistiques des bruits. Elle représente le compromis entre la confiance que l'on accorde à notre modèle et la confiance qu'on accorde à la nouvelle mesure.

Kalman a réécrit l'équation 2.9, sous la forme d'un algorithme récursif (voir tableau 2.1). Le filtre suit alors une procédure séquentielle qui ne nécessite pas une mémorisation de longues séries de données d'entrée. L'opération de filtrage s'effectuera en deux étapes: une étape de prédiction et une de correction (tableau 2.1 et figure 2.1).

Comme le filtre de Kalman consiste en un calcul récurrent, on doit imposer des conditions initiales pour qu'il y ait démarrage. Un mauvais choix de  $\hat{\underline{\underline{X}}}(t_0|t_0)$  n'aura pas un si grand effet sur le reste de l'opération puisqu'il sera constamment corrigé par les nouvelles mesures. Par contre, un mauvais choix de  $\underline{\underline{P}}(t_0|t_0)$  ne pourra pas être corrigé puisque le calcul de la matrice  $\underline{\underline{P}}$  est indépendant des mesures (voir tableau 2.1).

Tableau 2.1  
Algorithme de filtrage<sup>1</sup>

PARAMÈTRES CONNUS	
- Conditions initiales :	$\hat{\underline{X}}(t_0 t_0), \underline{P}(t_0 t_0)$
- Structure du modèle :	$\underline{\Phi}, \underline{F}(u; t), \underline{G}$ (équation 2.7)
- Propriétés des bruits :	$\underline{Q}, \underline{R}$ (équations 2.5 et 2.6) <sup>2</sup>
- Séquence de mesures :	$\underline{Y}(t), \underline{H}(t)$ (équation 2.4)
OPÉRATION DE PRÉDICTION	
$\hat{\underline{X}}(t+1 t) = \underline{\Phi} \hat{\underline{X}}(t t) + \underline{F}(u; t)$	
$\underline{P}(t+1 t) = \underline{\Phi} \underline{P}(t t) \underline{\Phi}^T + \underline{G} \underline{Q} \underline{G}^T$	
OPÉRATION DE CORRECTION	
$\hat{\underline{X}}(t+1 t)$ devient $\hat{\underline{X}}(t t-1)$ et $\underline{P}(t+1 t)$ devient $\underline{P}(t t-1)$	
$\underline{K}(t) = \underline{P}(t t-1) \underline{H}(t)^T [\underline{H}(t) \underline{P}(t t-1) \underline{H}(t)^T + \underline{R}]^{-1}$	
$\underline{v}(t) = \underline{Y}(t) - \underline{H}(t) \hat{\underline{X}}(t t-1)$	
$\hat{\underline{X}}(t t) = \hat{\underline{X}}(t t-1) + \underline{K}(t) \underline{v}(t)$	
$\underline{P}(t t) = [\underline{I} - \underline{K}(t) \underline{H}(t)] \underline{P}(t t-1)$	

<sup>1</sup> Voir Radix (1970), Wood (1976) et Bozic (1979) pour la démonstration des formules.

<sup>2</sup> Avec les hypothèses suivantes:

i) indépendance entre les bruits du système et des mesures:

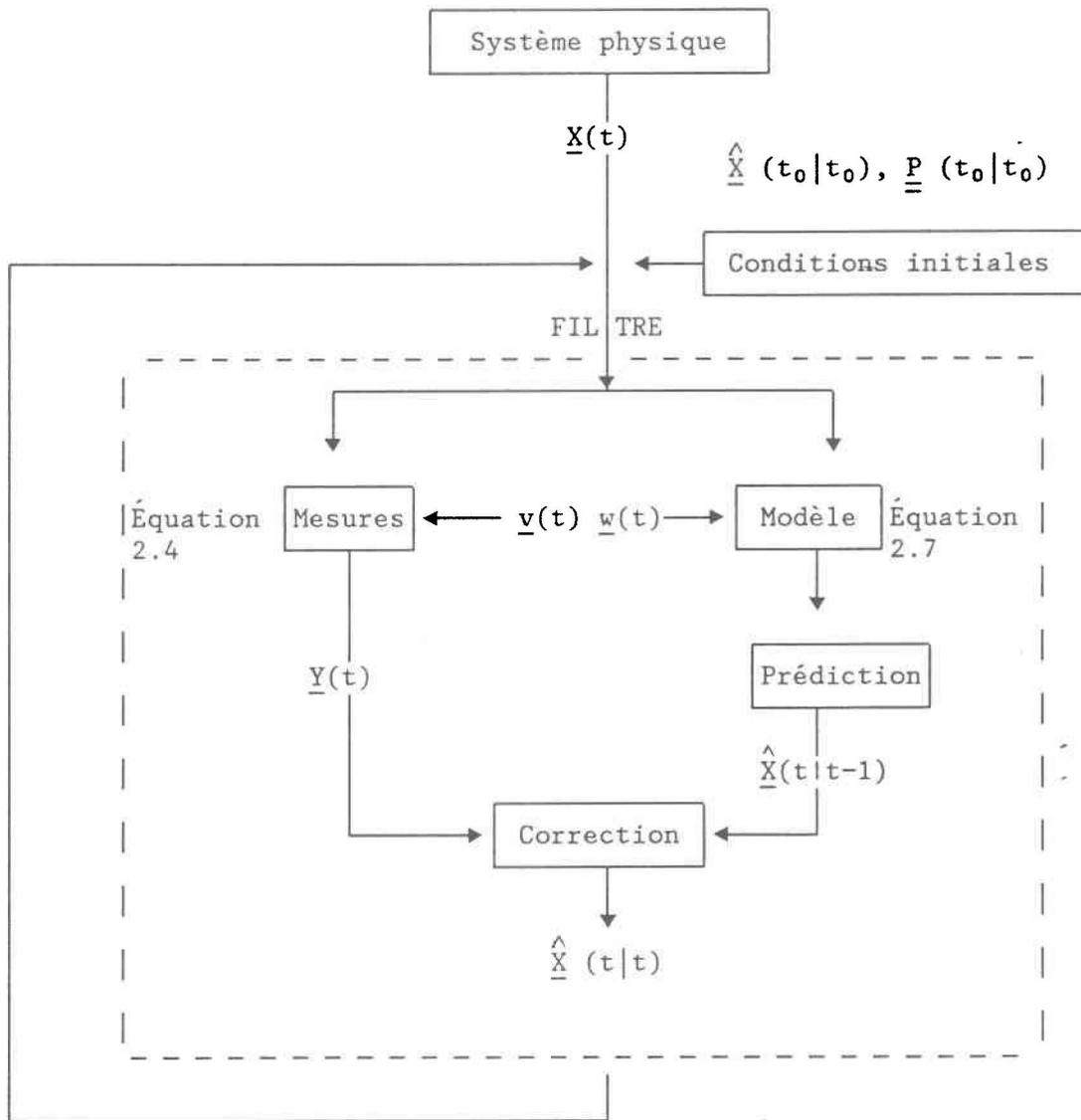
$$E(\underline{v}(t) \cdot \underline{w}(t)^T) = 0$$

ii) indépendance entre les bruits de mesures et l'erreur de l'estimation:

$$E(\underline{v}(t) \cdot (\underline{X}(t) - \hat{\underline{X}}(t|t-1))^T) = 0$$

(Radix, 1970; Wood, 1980; Amirthanathan, 1982).

Figure 2.1  
Processus de filtrage



Si on observe la variation des  $P_{ii}$  avec le temps, on aura la relation suivante:

$$\text{trace } \underline{\underline{P}}(t|t) \leq \text{trace } \underline{\underline{P}}(t|t-1) \quad (2.11)$$

Cette relation traduit le gain en précision que l'on attend des mesures ( $\underline{Y}(t)$ ). D'ailleurs, on pourra se servir des valeurs de la matrice  $\underline{\underline{P}}$  pour juger de la performance relative de différents modèles.

L'association du filtre de Kalman à un modèle déterministe permet la prédiction la plus probable (au sens des moindres carrés) de l'état futur du système étudié, représenté par son vecteur d'état ( $\underline{X}(t)$ ). Cependant, il sera nécessaire de réajuster l'estimation de ce vecteur d'état en utilisant toute nouvelle information disponible avant de recommencer l'opération de prédiction. C'est pourquoi il existe, dans l'algorithme du filtre de Kalman (tableau 2.1), une opération de correction qui tient compte de la confiance qu'on accorde aux mesures (définie par la matrice  $\underline{\underline{R}}$ ) et au modèle (matrice  $\underline{\underline{Q}}$ ).

Si on pose l'hypothèse que les mesures sont rigoureusement fidèles à la réalité (donc  $\underline{\underline{R}} = 0$ ), cela entraînera:

$$\underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{K}}(t) = \underline{\underline{I}} \quad (\text{voir équation 2.10})$$

et

$$\hat{\underline{X}}(t|t) = \underline{\underline{K}}(t) \underline{Y}(t) \quad (\text{voir équation 2.9})$$

Le filtre de Kalman réagit donc en corrigeant l'ancienne estimation ( $\hat{\underline{X}}(t|t-1)$ ) par la nouvelle mesure ( $\underline{Y}(t)$ ). L'utilisateur devra donc, par le biais des matrices  $\underline{Q}$  et  $\underline{R}$  évaluer la confiance qu'il accorde aux mesures et au modèle. Il doit être conscient que le filtre ne doit pas nécessairement se plier à toutes les extravagances des résultats expérimentaux ( $\underline{R} \neq 0$ ).

L'application du filtre de Kalman à un problème particulier devra suivre la procédure suivante:

- définition des modèles employés pour décrire le système (équation d'état) et de la relation liant les mesures aux variables d'état (équation de mesure) (équations 2.4 et 2.7);
- connaissance des propriétés statistiques des bruits ( $\underline{Q}$  et  $\underline{R}$ ) et des conditions initiales ( $\hat{\underline{X}}(t_0|t_0)$ ,  $\underline{P}(t_0|t_0)$ ) (équations 2.5 et 2.6);
- digitalisation et linéarisation des équations, examen des divergences;
- filtrage  $\rightarrow \hat{\underline{X}}(t|t)$ ,  $\underline{P}(t|t)$  (tableau 2.1);
- examen critique de l'opération de prédiction.

## 2.2 Problèmes associés à l'emploi du filtre de Kalman

### 2.2.1 ESTIMATION DES CONDITIONS INITIALES

L'estimation des conditions initiales ( $\hat{\underline{X}}(t_0|t_0)$ ,  $\underline{P}(t_0|t_0)$ ) devient nécessaire pour permettre le démarrage de la procédure de filtrage. Lettenmaier et Burges (1976), Radix (1970) et Rauch (1970) proposent d'utiliser comme valeurs de départ les mesures ( $\underline{Y}(t_0)$ ) et l'estimation des erreurs de mesures ( $\underline{R}$ ) et ce, pour les variables correspondantes (pour "m" variables, voir équation 2.4):

$$\begin{aligned}\hat{\underline{X}}(t_0|t_0) &\approx \underline{Y}(t_0) \\ \underline{P}(t_0|t_0) &\approx \underline{R}\end{aligned}$$

Si on a aucune connaissance "a priori" des conditions initiales, il est préférable de prendre des valeurs de  $\underline{P}(t_0|t_0)$  élevée ( $\rightarrow \infty$ ). On donnera ainsi peu de poids à  $\hat{\underline{X}}(t_0|t_0)$  dans l'algorithme récursif du filtre de Kalman pour le calcul des valeurs prédites du vecteur d'état ( $\hat{\underline{X}}(t_1|t_0)$ ,  $\hat{\underline{X}}(t_2|t_1)$ , etc.).

Certains auteurs (Lettenmaier, 1976; Amirthanathan, 1982) appliquent un algorithme récursif des moindres carrés à une courte série antérieure à la période d'intérêt. De cette façon, les dernières valeurs estimées de cette série peuvent servir de conditions initiales lors de l'opération de filtrage. En partant de la même logique, on peut tout simplement débiter notre opération de filtrage quelque temps avant la période d'intérêt. C'est ce que nous ferons lors de notre application.

De mauvaises valeurs de  $\hat{\underline{X}}(t_0|t_0)$  sont rapidement corrigées par l'introduction des nouvelles mesures dans l'algorithme de prédiction. Ce n'est pas le cas pour la matrice  $\underline{P}$  qui est indépendante des mesures. Radix (1970) note cependant qu'une erreur de près de 50% dans l'estimation de  $\underline{P}(t_0|t_0)$  influe très peu sur les valeurs futures du vecteur d'état.

Il pourrait être intéressant de mener certaines études par simulation artificielle pour estimer l'importance relative d'une mauvaise estimation des conditions initiales.

## 2.2.2 ESTIMATION DES COEFFICIENTS CARACTÉRISANT LA STRUCTURE DES MODÈLES EMPLOYÉS

Pour appliquer le filtre de Kalman, il est nécessaire de connaître la structure des modèles employés; ce qui implique la connaissance des matrices de transition ( $\underline{\Phi}$ ) et d'échelle ( $\underline{H}$ ), de la fonction motrice ( $\underline{F}(u; t)$ ), et la détermination des propriétés statistiques des bruits (matrice de covariance des erreurs de mesures:  $\underline{R}$ , matrice de covariance des erreurs du modèle:  $\underline{Q}$ ).

Les matrices  $\underline{\Phi}$  et  $\underline{H}$  ainsi que la fonction motrice  $\underline{F}$ , sont habituellement fixées par la structure des modèles employés et sont directement données lors de la représentation des équations sous forme discrète (voir équations 2.4 et 2.7).

La détermination des matrices  $\underline{Q}$  et  $\underline{R}$  est beaucoup plus complexe. On peut les considérer dépendantes ou indépendantes du temps selon qu'on juge que les processus sont non stationnaires ou stationnaires. Habituellement, on ne détermine que les valeurs de la diagonale de chaque matrice. La connaissance des corrélations croisées donne peu d'information et ne fait que compliquer l'opération de filtrage (Bowles, 1978). On pose donc l'hypothèse de non-corrélation entre les bruits de variables différentes.

Différentes approches permettent de déterminer les valeurs des diagonales des matrices: revue de littérature, essai et erreur, filtrage adapté, etc. La matrice de covariance des erreurs de mesure ( $\underline{R}$ ) doit intégrer toutes les erreurs reliées à l'opération d'échantillonnage, c'est-à-dire: erreurs dans la procédure analytique de laboratoire, erreurs d'échantillonnage, erreurs de lecture, hypothèse de linéarité entre une mesure et une variable d'état non mesuré (ex.: relation niveau-débit), etc.

On retrouve dans la littérature des valeurs concordantes de  $\underline{R}$  pour certains processus d'échantillonnage. Bowles (1978), Moore (1976) et Lettenmaier (1976) ont estimé les éléments de la diagonale de  $\underline{R}$  pour les variables suivantes: demande biologique en oxygène (DBO), oxygène dissous (OD), concentration en ions ammonium  $[\text{NH}_3]$ , concentration en nitrate  $[\text{NO}_3]$ , et concentrations d'azote organique. Ces données pourraient être utilisées pour des modèles de prédiction de qualité de l'eau.

La matrice de covariance des erreurs du modèle ( $\underline{Q}$ ) est plus délicate à déterminer. Jazwinski (1969) la décrit comme étant: "a fiction designed to account for system (process) model errors which are non-stationary and generally of rather low frequency".

Jazwinski a étudié l'applicabilité des filtres de Kalman dans la détermination des trajectoires des véhicules dans l'espace. Il a rencontré certaines difficultés reliées à des problèmes de divergence du filtre.

La divergence est une croissance des résidus, i.e.: une augmentation de la covariance des erreurs dans le temps (figures 2.2a et 2.2b). La théorie du filtrage linéaire présuppose un système dynamique complètement connu et précisément modélisé. Ces conditions ne sont presque jamais rencontrées en pratique, particulièrement en hydrologie (McLaughlin, 1976). Les imperfections des modèles peuvent causer des problèmes de divergence et d'instabilité dans les estimations. La matrice de covariance du filtre ( $\underline{P}(t|t)$ ) devient irréallement optimiste, le gain ( $\underline{K}$ ) devient petit et les mesures sont ignorées. Alors l'estimation diverge de la valeur vraie. À la limite, il pourra arriver que la matrice  $\underline{P}$  ne soit plus définie positive (Bowles, 1978). Il n'y a alors plus de minimum possible donc plus de possibilité de filtre optimal.

Il existe deux moyens de corriger la divergence; soit accroître la précision de la simulation (souvent impossible), soit représenter les imperfections du modèle par un bruit blanc:

$$\underline{w}(t) \rightarrow N(0, \underline{Q})$$

Figure 2.2a  
Convergence de la prédiction

Réf.: Lettenmaier et Burges (1976)

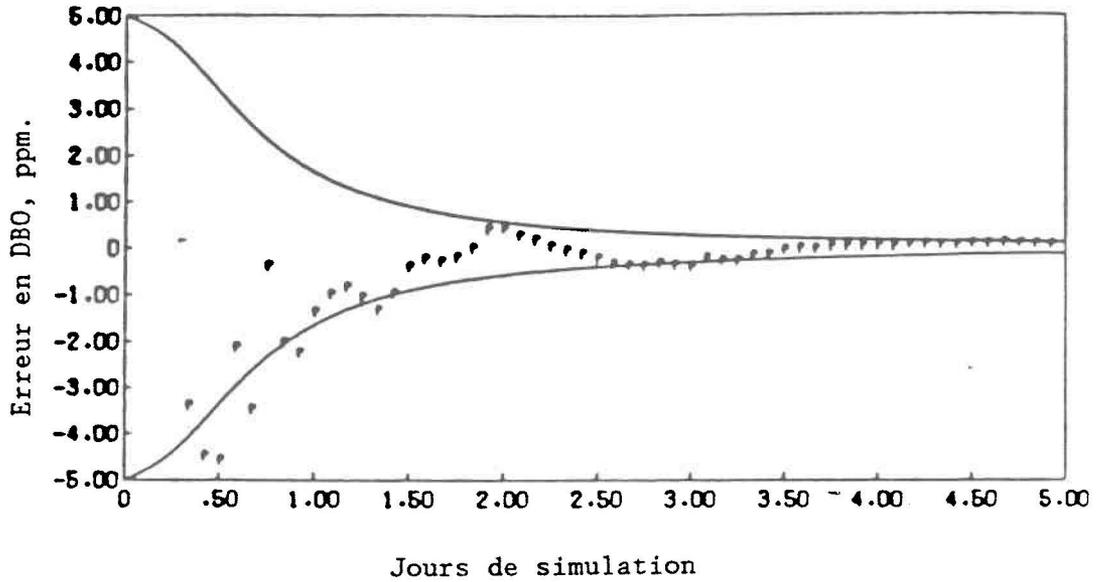
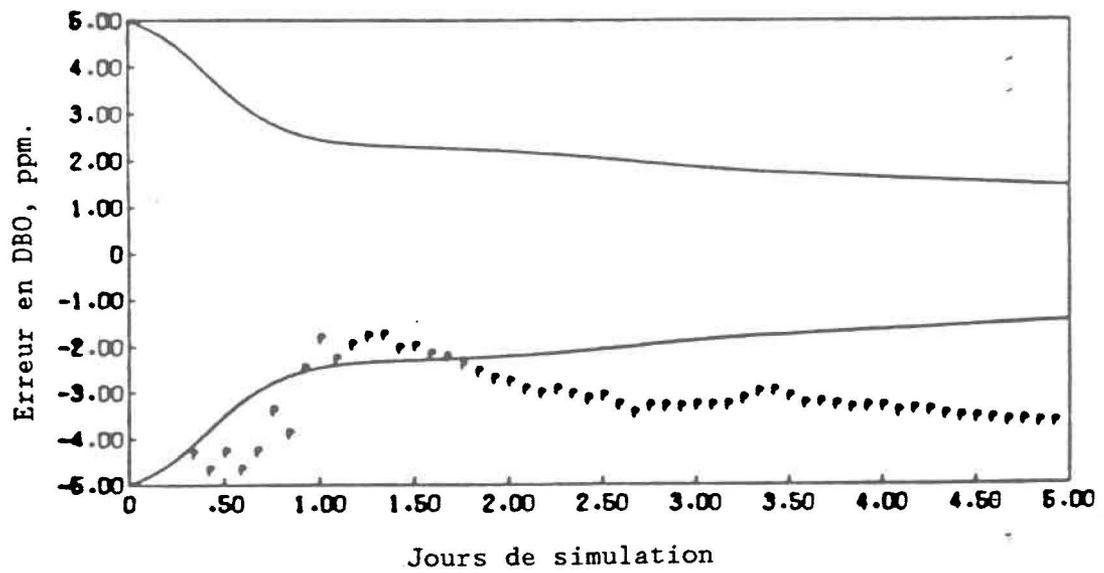


Figure 2.2b  
Problème de divergence

Réf.: Lettenmaier et Burges (1976)



La matrice  $\underline{\underline{Q}}$  est rarement déterminée par l'expérience car elle est trop dépendante des modèles employés. Elle doit compenser pour la relinéarisation de processus non linéaire, la discrétisation de processus continu, l'imperfection du modèle, etc... On doit aussi estimer  $\underline{\underline{Q}}$  de façon à éviter les problèmes de divergence. En général, on pourra l'estimer par essai et erreur (Bowles, 1978; Lettenmaier, 1976) quoique des méthodes plus théoriques comme le filtrage adapté (McBean, 1982; Mehra, 1969; Szollosi-Nagy, 1977; Todini, 1978), permettront d'estimer de façon plus optimale la matrice  $\underline{\underline{Q}}$ .

Une estimation incorrecte de la matrice  $\underline{\underline{Q}}$  peut conduire à un comportement sous-optimal du filtre. Cependant Sage et Husa (Mehra, 1976) ont démontré que cette estimation sous-optimale convergait généralement assez rapidement à la valeur optimale.

Il est important de comprendre la signification mathématique et physique des matrices  $\underline{\underline{R}}$  et  $\underline{\underline{Q}}$  dans l'opération de filtrage. Le filtre de Kalman se sert d'une combinaison pondérée de nos informations initiales (modèles et mesures) pour estimer l'état du système. Or, les poids sont fonction du niveau de confiance qu'on attribue à ces informations, ce qui est déterminé par les valeurs des diagonales des matrices  $\underline{\underline{Q}}$  et  $\underline{\underline{R}}$ .

On peut avoir des filtres trop timides, qui font peu confiance aux mesures par rapport au modèle ( $\underline{\underline{R}}$  fort et  $\underline{\underline{Q}}$  faible). Ceci impliquera une matrice de gain faible ( $\underline{\underline{K}}$  (t) tend vers 0). Le filtre ignorera alors les mesures lors de l'estimation du vecteur d'état (Bowles, 1978; McLaughlin, 1976; Radix, 1970):

$$\hat{\underline{X}}(t|t) = \hat{\underline{X}}(t|t-1)$$

Au contraire, un excès de confiance dans les mesures (R faible, Q fort) pourra conduire à:

$$\hat{\underline{X}}(t|t) = \underline{K}(t) \underline{Y}(t) \text{ (voir équations 2.9)}$$

Toute estimation incorrecte de Q, R ou P( $t_0|t_0$ ) conduit à des estimations incorrectes de P( $t|t$ ). Par contre une marge d'erreur allant jusqu'à 50%, peut ne pas perturber l'estimation des X( $t|t$ ) (Radix, 1970).

Mehra (1976) a fait un test de sensibilité sur l'importance d'une bonne estimation des matrices Q et R (voir figures 2.3a et 2.3b). On peut conclure de ces graphiques qu'il est préférable d'estimer la matrice R de façon conservatrice en assumant des valeurs plutôt élevées. Cependant, la matrice Q nécessite une estimation plus fidèle car la moindre dérive de sa valeur réelle influera sur la performance du filtre.

Enfin, Mehra (1969, 1976) conclut qu'une évaluation rigoureuse de Q et R permettra la conservation de deux caractéristiques statistiques; l'estimation sans biais et la consistance<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> On dit qu'un estimateur est sans biais si, en moyenne, il égale la valeur réelle du paramètre:  $E(\hat{\theta}) = \theta$ .  
On aura un estimateur "consistant", s'il converge vers la valeur réelle, lorsque la taille de l'échantillon augmente.

Figure 2.3a  
Variation de la covariance des erreurs de mesures (R)

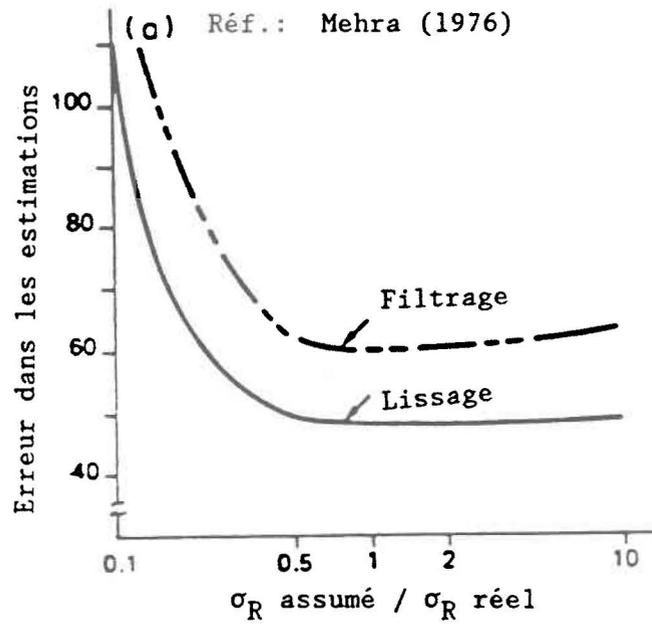
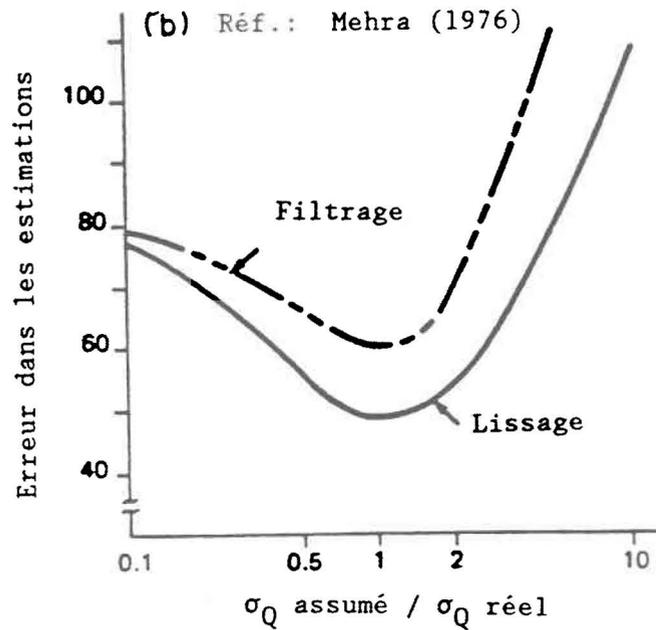


Figure 2.3b  
Variation de la covariance des erreurs du modèle (Q)



### 2.2.3 LINÉARISATION DES ÉQUATIONS

Le filtre de Kalman a été originalement conçu pour traiter des systèmes dont l'évolution est fixée par des équations différentielles linéaires. Or, le cycle hydrologique est plutôt constitué de processus ayant des comportements non linéaires. Les modèles utilisés en hydrologie auront donc une structure composée d'équations non linéaires. Par exemple, on pourra retrouver des équations comprenant le produit de deux variables d'état.

Le filtre de Kalman peut être appliqué indirectement à des systèmes non linéaires si on en connaît des solutions approchées, comportant des structures linéaires. Nous utiliserons la technique de l'expansion par la série de Taylor qui permet la linéarisation d'équations, en les représentant par une approximation du premier ordre. On pourrait évidemment tenir compte des ordres plus élevés, si l'amélioration obtenue justifie la charge de travail et les coûts supplémentaires.

L'équation de mesure, quant à elle, est rarement non linéaire dans le domaine des sciences de l'eau. Si c'était le cas, on pourrait aussi la linéariser de la même façon que les équations d'état. Le filtre de Kalman qui permettait une estimation optimale pour un système linéaire, ne permettra qu'une estimation sous-optimale dans le cas d'une approximation d'un système non linéaire.

### 2.3 Estimation des paramètres du modèle

L'identification des caractéristiques mathématiques et physiques d'un système peut se traduire concrètement par le développement d'un modèle mathématique. L'élaboration de ce modèle ne peut être complète sans une estimation des paramètres qui en composent la structure interne. Ces paramètres pourront être déterminés avant (calibration classique) ou pendant (calibration en temps réel) l'opération de prédiction.

La calibration classique est une technique d'identification des paramètres qui utilisent une série de données d'entrée recueillie antérieurement à la période d'utilisation. La méthode du maximum de vraisemblance permet la minimisation d'une fonction critère<sup>1</sup> qui mesure l'adéquation entre la série observée et la série simulée avec les paramètres choisis.

La méthode classique suppose "a priori":

- que la structure du modèle est connue à l'avance;
- que les paramètres du modèle sont invariables dans le temps.

En fait, cette dernière hypothèse implique que les valeurs des paramètres obtenus sont des valeurs moyennes qui peuvent intégrer un ensemble de processus et leur variabilité spatio-temporelle. On suppose que la

---

<sup>1</sup> Généralement les moindres carrés

meilleure estimation possible de la valeur des paramètres est celle déduisible de l'échantillon.

Lors de la calibration de modèles hydrologiques, on peut rencontrer deux genres de difficultés:

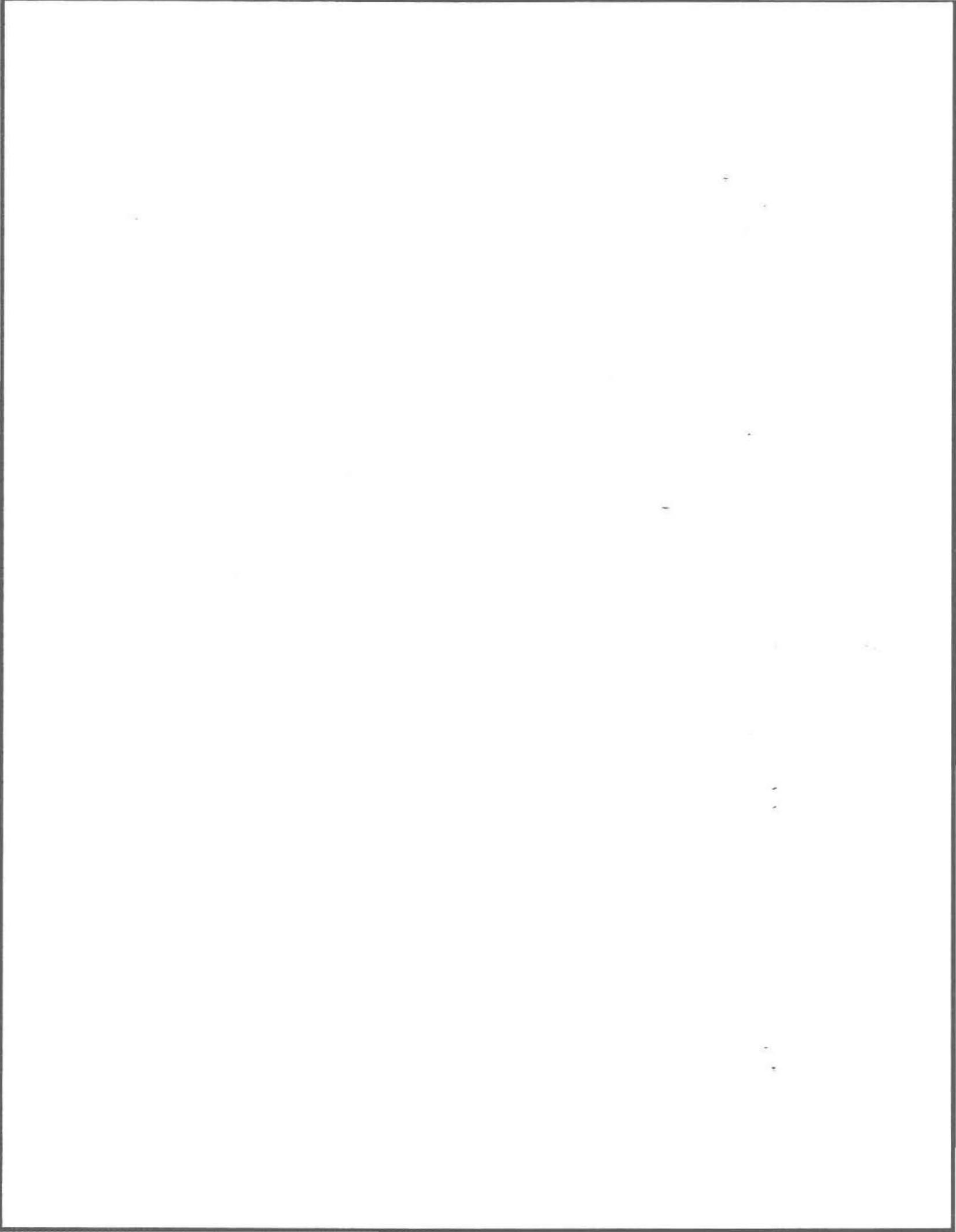
- des séries de mesures trop courtes;
- des "dérives" importantes dans les paramètres.

La dernière difficulté peut être attribuable: à la simplicité des modèles employés en prédiction, à des erreurs dans la structure du modèle (hypothèse de stationnarité des phénomènes), à l'incertitude associée à l'opération d'échantillonnage ou à la linéarisation de processus non linéaire. Une nouvelle approche qui tient compte de ces erreurs, consiste à faire varier la valeur des paramètres tout en laissant la structure du modèle fixe (Amirthanathan, 1982). On devra cependant se limiter à un intervalle physiquement acceptable de variation. Cette méthode, dite en temps réel, permet l'utilisation de nouvelles mesures pour "remettre à jour" les valeurs des paramètres. Elle adopte de plus, une approche tirée de la théorie Bayésienne. On suppose alors que les paramètres sont des variables aléatoires auxquelles on attribue des fonctions de répartition de probabilité, construites à partir des informations "a priori" (modèle) et "a posteriori" (mesure).

Certains auteurs (dont Bowles, 1978) soulignent que la calibration en temps réel est moins efficace "statistiquement" que d'autres techniques. Par contre elle donne de l'information sur la variabilité des paramètres du système; information pouvant être utilisée pour des développements ultérieurs. Les méthodes de calibration en temps réel peuvent aussi être utilisées pendant l'opération de filtrage.

Ces méthodes de mise à jour récursives des paramètres permettent de tenir compte des effets des changements physiographiques du bassin sur le débit du cours d'eau. Même si les changements dans les valeurs des paramètres semblent minimes, ils peuvent être la cause de variations importantes au niveau des résultats de nos simulations.

Ces différentes méthodes ne seront pas appliquées dans le cadre de notre étude. Elles pourraient cependant faire l'objet d'un mémoire spécifique qui examinerait les possibilités d'application de ces méthodes de calibration en temps réel de façon à comparer leur potentiel vis-à-vis les méthodes de calibration classique.



3. APPLICATION DU FILTRE DE KALMAN À UN MODÈLE DÉTERMINISTE CONCEPTUEL

3.1 Choix du modèle

Le filtre de Kalman est un outil qui permet un meilleur traitement d'un signal échantillonné en quantifiant les bruits qui y sont associés. Il a été utilisé, à plusieurs occasions, pour l'étude de systèmes modélisés par des équations différentielles linéaires (chute d'un corps en chute libre, trajectoire d'un missile, etc.). Cependant, le filtre de Kalman n'a pas, à notre connaissance, été appliqué à des modèles conceptuels.

Les modèles conceptuels se présentent sous une forme mathématique qui est difficilement adaptable à l'algorithme de calcul du filtre de Kalman (voir tableau 2.1). Ces modèles peuvent être constitués d'équations linéaires ou non linéaires (qui devront alors être linéarisées) dont le champ d'application aura à être limité afin d'éviter des problèmes de divergence lors des simulations. Ces divergences sont causées par la présence de discontinuités mathématiques. Concrètement, ce sont des zones dans l'espace vectoriel, où il n'existe pas de solution ou qu'on veut tout simplement éviter. On doit alors obliger le programme, ou seulement certaines équations, à respecter des directives afin d'éviter ces zones. De la même façon, le filtre de Kalman qui sera appliqué à ce modèle, devra respecter les mêmes contraintes.

Les modèles conceptuels sont particulièrement indiqués pour l'étude de systèmes complexes et sont, par le fait même, de plus en plus utilisés en hydrologie appliquée. Ils sont constitués en partie d'équations empiriques qui tentent de représenter, le plus fidèlement possible, la réalité physique des processus hydrologiques. Les modèles conceptuels peuvent être de type discrétisé ou agrégé.

Les modèles discrétisés sont supérieurs au niveau de la représentativité, puisqu'ils utilisent l'information physiographique détaillée de chaque unité ou parcelle du bassin étudié. Les modèles agrégés, en homogénéisant l'information, ignorent la variabilité spatiale des composantes du cycle hydrologique.

Les modèles discrétisés exigent énormément de temps de calcul, en raison de leur structure et de leur complexité. La répétition des calculs de transfert pour chaque parcelle de terrain alourdit le programme, et rend la calibration difficile. Les modèles agrégés, qui n'ont à appliquer leur fonction de production qu'une seule fois, en raison de l'hypothèse d'homogénéité du bassin, sont donc plus intéressants au niveau des opérations de contrôle en continu, comme la prédiction en temps réel.

Le modèle choisi pour cette étude est un compromis entre les modèles discrétisés et les modèles agrégés. Il utilise une information physiographique détaillée grâce à une discrétisation assez fine, mais évite les inconvénients de lenteur de simulation, généralement causés par la

structure de transfert de ce type de modèle. Il a donc l'avantage de la représentativité des modèles discrétisés tout en évitant les inconvénients de calcul, associés à leur lourdeur.

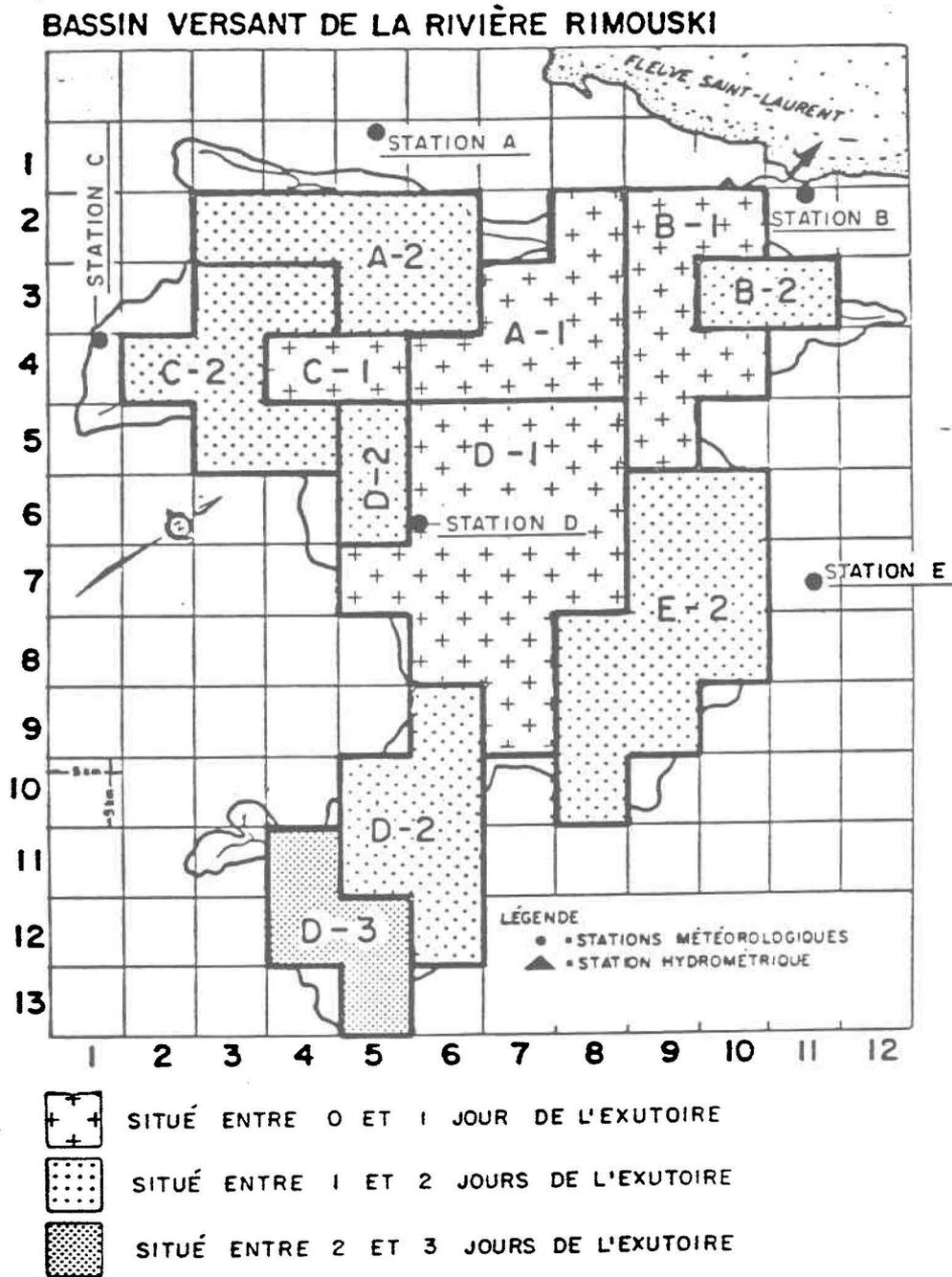
Le Modèle Discrétisé pour Optimisation Rapide (MDOR) a été élaboré en 1977 (Villeneuve et al.) pour ensuite être amélioré sous une nouvelle version informatisée, qui permet des simulations plus rapides et une utilisation plus simple. Sa structure de départ lui permet de tenir compte de la variabilité spatiale de l'information physiographique, mais les unités de discrétisations spatiales sont regroupées pour accélérer la simulation. C'est un modèle discrétisé ayant une fonction de transfert simplifiée.

### 3.2 Le modèle MDOR

Les résultats que nous utiliserons proviennent d'une simulation de ce modèle (avec des paramètres non ajustés) lorsque appliqué au bassin de la rivière Rimouski. Cette rivière a son embouchure sur la rive droite de l'estuaire du Saint-Laurent et traverse les monts Notre-Dame de la chaîne des Appalaches dans la péninsule gaspésienne. La superficie du bassin versant est de 1 590 km<sup>2</sup> (figure 3.1).

La première étape, préalable à l'application de ce modèle consiste à discrétiser le bassin étudié. On subdivise d'abord le bassin en unité de discrétisation spatiale (parcelle) de 5 km de côté. Puis, selon les distances entre chaque parcelle et l'exutoire, on détermine des zones isochrones. Chaque parcelle peut aussi être rattachée à la zone

Figure 3.1  
Discrétisation spatiale du bassin de la rivière Rimouski



Référence: Villeneuve et al. (1985)

d'influence d'une station météorologique de la région, évaluée par la méthode du polygone de Thiessen. La superposition de ces deux découpages permet la division du bassin en un nombre limité de zones, qui pourront être traitées comme des entités homogènes (figure 3.1).

Dans une seconde étape, on doit classer chaque parcelle dans un des trois types physiographiques suivants: carreau-terre, carreau-rivière, carreau-lac. On pourra alors calculer la production de chaque carreau, selon son type physiographique et selon la station météorologique qui l'influence (figure 3.2).

Enfin, les volumes d'eau produits dans chaque carreau sont cumulés directement à l'exutoire dans des proportions et selon le décalage temporel qui correspondent au découpage de la première étape.

L'équation suivante est le noeud du modèle:

$$\text{DÉBIT (JOUR)} = \sum_{\text{DECAL}=1}^{\text{TEMCON}} \sum_{\text{STAT}=1}^{\text{NBSTAT}} \sum_{\text{TYPE}=1}^3 [\text{PROD}(\text{STAT}, (\text{JOUR}-\text{DECAL}+1), \text{TYPE}) * \text{TRANS}(\text{STAT}, \text{DECAL}, \text{TYPE})] \quad (3.1)$$

où:

JOUR : numéro du jour de la simulation;

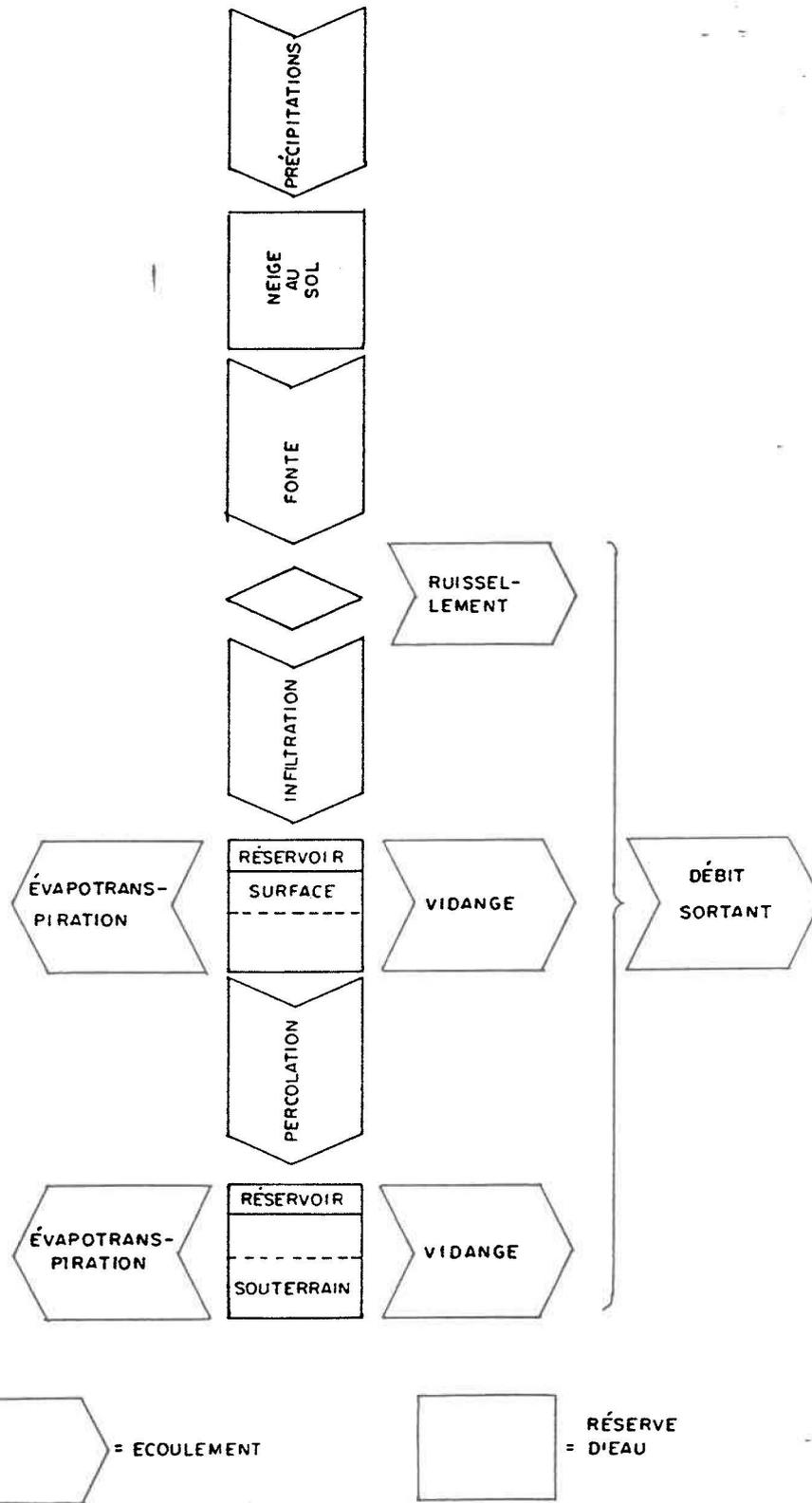
DECAL : temps de parcours à l'exutoire en jours (partie entière plus un);

TEMCON: temps de concentration du bassin en jours;

STAT : numéro de la station météorologique;

NBSTAT: nombre de stations météorologiques;

Figure 3.2  
Schéma de production sur un élément (carreau)



Référence: Villeneuve et al. (1985)

TYPE : type physiographique du carreau;  
TYPE = 1: carreau de type "terre"  
TYPE = 2: carreau de type "rivière"  
TYPE = 3: carreau de type "lac"

PROD (STAT, JOUR, TYPE): production pour le jour "JOUR" d'un carreau de type "TYPE" sous l'influence de la station "STAT";

TRANS (STAT, DECAL, TYPE): nombre de carreaux de type "TYPE" situés entre "DECAL-1" et "DECAL" jours de l'exutoire et sous l'influence de la station "STAT".

Le bassin de la rivière Rimouski a été subdivisé en 67 unités dont 47 carreaux-terre, 19 carreaux-rivière et 1 carreau-lac. Le temps de concentration du bassin (TEMCON) est de trois jours, ce qui définit trois zones isochrones. L'information sur la nature des carreaux et sur leur appartenance à la zone d'influence d'une station météorologique et à une zone isochrone est donnée par une matrice à trois dimensions: TRANS.

Le modèle MDOR est un modèle conceptuel constitué en partie d'équations non linéaires, et qui est soumis à certaines contraintes afin d'éviter des problèmes de divergences. Ce modèle a été utilisé pour générer les débits de la rivière Rimouski pour une période de 350 jours, à l'aide de la connaissance des séries chronologiques de longueur équivalente des données météorologiques (pluie, température, neige) et des caractéristiques physiques du bassin. C'est donc une opération de reproduction du

débit qui a été effectuée. Notons que pour cet exercice, les paramètres du modèle n'ont pas été ajustés (pas de calibration).

Le but de notre étude est d'utiliser ce modèle afin d'effectuer des opérations de prédiction et de les corriger selon la mécanique prévue par le filtre de Kalman. L'utilisation de ce filtre, dans sa forme la plus courante, nécessite une représentation du modèle sous la forme d'équations linéaires markoviennes d'ordre 1 (équation 2.7). Le filtre n'utilise donc que les informations passées et présentes dans le but de prédire les états futurs d'un système. Comme la forme présente du modèle MDOR, de par sa complexité et de par la nature des simulations possibles, se prête mal à la poursuite de notre étude, nous devons la modifier.

Nous allons donc construire une version simplifiée et linéarisée du modèle MDOR qui permettra une opération de prédiction. Chaque variable d'état devra être décrite sous la forme suivante:

$$\underline{X}(t) : f(\underline{X}(t-1), \underline{X}(t-2), \dots, \underline{w}(t)) \quad (3.2)$$

où:  $\underline{X}(t)$ : vecteur des variables d'état au jour "t"

$\underline{w}(t)$ : bruit associé à la détermination de la variable d'état

La construction de ce nouveau modèle comprendra les étapes suivantes:

- simplification de la structure du modèle MDOR;
- linéarisation des équations non linéaires;

- formulation des équations selon la forme de l'équation 3.2.

Ce modèle permettra le filtrage des données, grâce à une quantification de l'effet des bruits et l'utilisation en temps réel de toutes nouvelles informations.

### 3.3 Modification du modèle MDOR

#### 3.3.1 SIMPLIFICATION DU MODÈLE MDOR

Dans notre nouvelle version du modèle adaptable à l'algorithme de Kalman, il aurait été difficile d'utiliser le même principe que le modèle MDOR pour tenir compte du décalage temporel, auquel doit être soumises les parcelles situées à plus d'un jour de l'exutoire. Nous avons donc effectué une nouvelle discrétisation du bassin pour contourner cette difficulté.

Premièrement, il fallait obtenir une seule série chronologique de données d'entrée qui tienne compte de l'influence relative de chaque station météorologique du bassin et qui inclue l'effet du décalage temporel relié à la présence des trois zones isochrones. Cela a pu être fait par une pondération des données météorologiques effectuée selon l'équation suivante:

$$M(J) = \sum_{Stat=1}^5 \left( \text{Météo}(Stat,J) * \text{MAT}(Stat,1) + \right. \quad (3.3) \\ \left. \text{Météo}(Stat,J-1) * \text{MAT}(Stat,2) + \right. \\ \left. \text{Météo}(Stat,J-2) * \text{MAT}(Stat,3) \right) / \text{TOT}$$

où:

M(J) : nouvelles données météorologiques (pluie, neige ou température) pondérées au jour J;

Météo(Stat,J): anciennes données météorologiques (pluie, neige ou température) enregistrées à la station Stat, au jour J;

MAT(Stat,i) : nombre de carreaux, dans la zone d'influence de la station Stat, situé entre "i-1" et "i" jours de l'exutoire;

3

$$\text{MAT}(\text{Stat},i) = \sum_{k=1}^3 \text{TRANS}(\text{Stat},i,k)$$

TOT : nombre total de carreau.

La nouvelle donnée météorologique au jour "J" tiendra donc compte des valeurs réelles aux jours "J-2", "J-1" et "J", pondérées par le nombre de carreaux correspondants à chaque zone isochrone.

En considérant cette nouvelle série de données d'entrée, nous retrouvons sur notre bassin 67 parcelles qui sont situées dans une même zone isochrone, soit entre 0 et 1 jour de distance de l'exutoire. Nous pouvons simplifier en ne considérant plus que 3 carreaux qui correspondraient chacun à un type physiographique (terre, rivière ou lac) et qui seraient situés à l'exutoire du bassin étudié. On aura donc, un carreau-terre de dimensions égales à celles des parcelles initiales (5 km de côté) mais recevant 47 fois plus de précipitations (puisque'il représente les 47 carreaux-terre initiaux), un carreau-rivière recevant 19 fois plus de précipitation et

1 carreau-lac. La somme des débits produits par ces trois carreaux, lorsque soumis à notre nouvelle série de données d'entrée, donnera le débit du bassin à l'exutoire.

Enfin, nous avons aussi simplifié les schémas de production des carreaux (figure 3.3). Notons que le schéma du carreau-terre et du carreau-rivière est le même. À partir de ces schémas, nous pouvons déduire le bilan suivant:

$$Q(t) = Q_1(t) + \frac{(D(t) + R_{ui}(t))}{K_0} \quad (3.4)$$

où:

$Q(t)$  : débit à l'exutoire au temps  $t$  ( $m^3/sec$ );

$Q_1(t)$  : débit du carreau-lac au temps  $t$  ( $m^3/sec$ ) (DEBLAC)<sup>1</sup>;

$D(t)$  : débit des carreaux-terre et des carreaux-rivière (mm);

$R_{ui}(t)$ : ruissellement des carreaux-rivière (mm);

$K_0$  : constante permettant la transformation des unités  $m^3/sec$  ( $Q(t)$  et  $Q_1(t)$ ) à l'unité millimètre (mm).

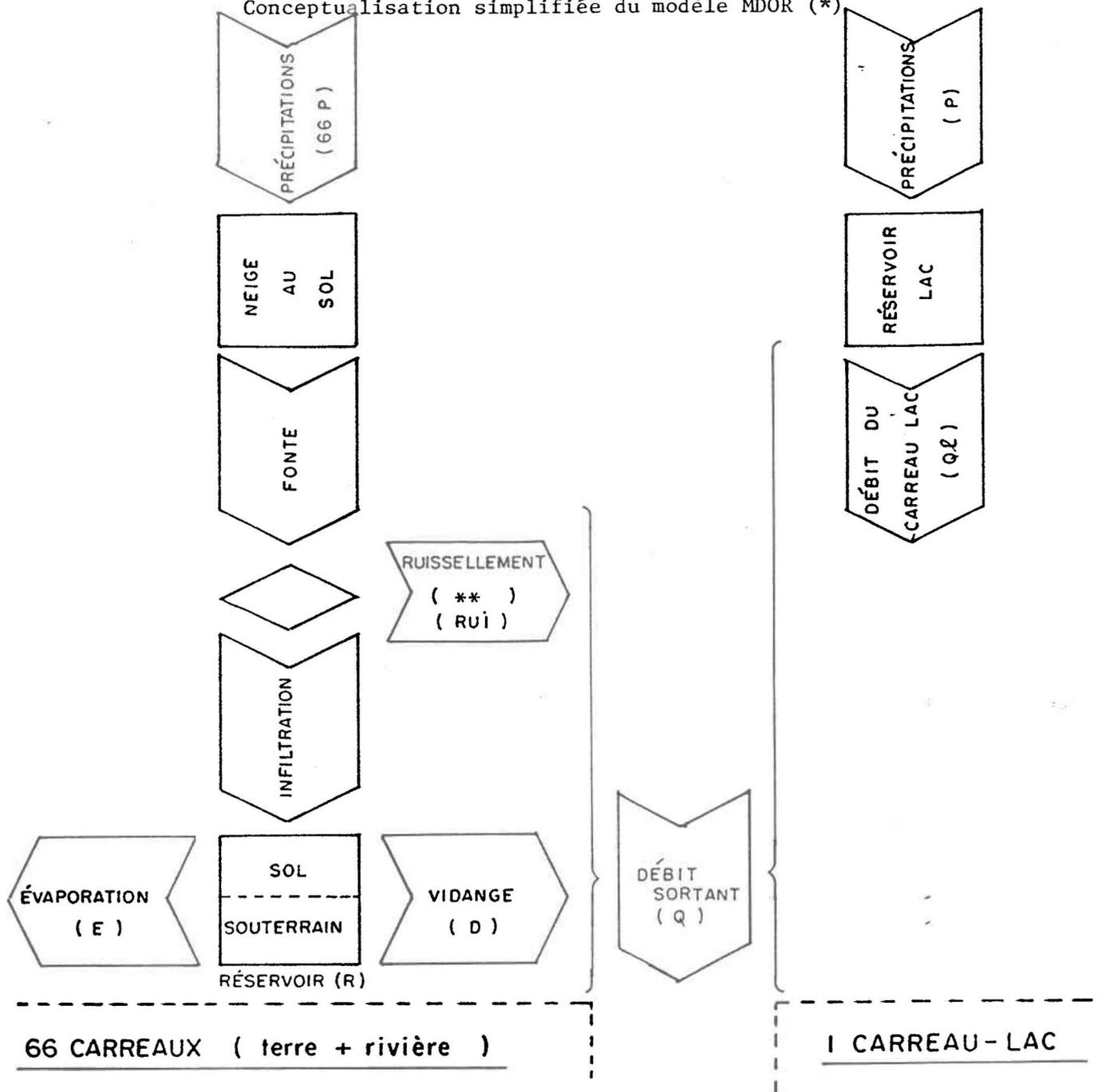
$$K_0 = 3,456 \frac{mm \cdot sec}{m^3}$$

---

<sup>1</sup> La parenthèse entoure le nom original de la variable tel qu'employé dans le modèle MDOR.

Figure 3.3

Conceptualisation simplifiée du modèle MDOR (\*)



\* VOIR AUSSI FIGURE 3-2

\*\* REMARQUE : LA VARIABLE DE FLUX REPRÉSENTANT LE RUISSELLEMENT N'EST FONCTIONNEL QUE POUR LES CARREAUX-RIVIÈRES, ELLE SERA DONC SOUMIS À L'EFFET DE 19\* PRÉCIPITATIONS .

On aura aussi:

$$R(t) - R(t - 1) = 66 P(t) - R_{ui}(t) - D(t) - E(t) \quad (3.5)$$

où:

$R(t)$ : niveau du réservoir au temps  $t$  (mm) (EAUTOT);

$P(t)$ : précipitation tombant sur un carreau au temps  $t$  (mm);

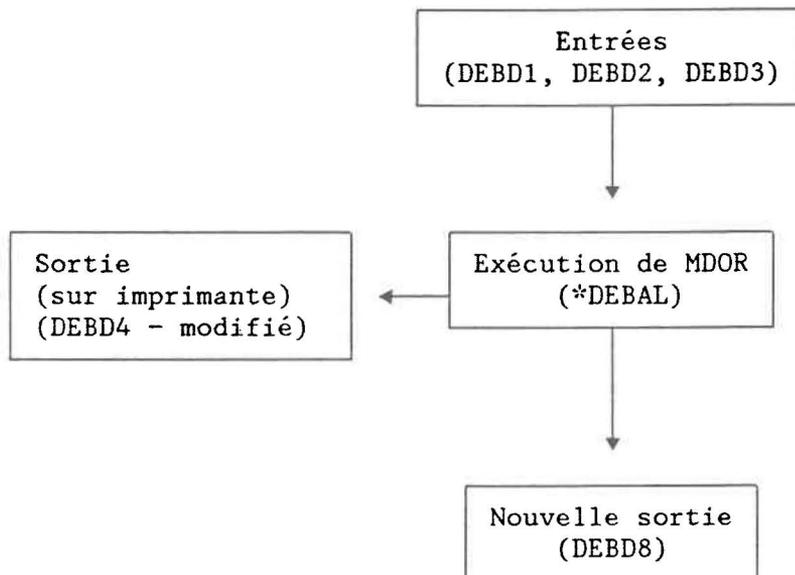
$E(t)$ : évaporation au temps  $t$  (mm) (EVATOT).

Notons que la variation du niveau du réservoir "neige" n'est pas prise en compte dans l'équation 3.5. En effet, sur une année, le bilan du réservoir neige sera nul.

Une simulation de cette modification du modèle MDOR permet d'obtenir les valeurs initiales des nouvelles variables d'état dérivées des équations 3.4 et 3.5, qui seront nécessaires au démarrage de l'opération de filtrage. À la figure 3.4 et aux tableaux 3.1a et 3.1b, nous avons énuméré les informations nécessaires à la poursuite de l'opération, qui ont été regroupées dans le fichier informatique DEBD8.

La pondération des données d'entrée a été effectuée par le biais du programme CONST (figure 3.5). Ce programme permet aussi de réécrire le fichier DEBD8, sous la forme de plusieurs matrices, de façon à faciliter le traitement des informations par le filtre de Kalman (tableaux 3.2 et 3.3).

Figure 3.4  
Exécution du modèle MDOR modifié



\*DEBAL : procédure exécutant MDOR  
DEBD1, DEBD2, etc.: différents fichiers utilisés par MDOR

- Voir aussi le tableau 3.1a

Tableau 3.1a  
Définition des sorties et des entrées de la figure 3.4

FICHIERS ORIGINAUX																					
<u>DEBD1</u>	<p>fichier comprenant:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- les paramètres du modèle MDOR (<math>K_1</math> à <math>K_{20}</math>) (voir tableau 3.1b)</li> <li>- les valeurs initiales des variables du modèle MDOR</li> </ul>																				
<u>DEBD2</u>	<p>fichier comprenant:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- les valeurs météo (température - T, pluie - P, neige - N) pour les cinq stations météo et pour chaque jour de la simulation</li> <li>- les mesures de débit à l'exutoire (<math>Q_m</math> ou DEBMES) pour chaque jour de la simulation (en <math>m^3/sec</math>)</li> </ul>																				
<u>DEBD3</u>	<p>fichier comprenant:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- la matrice TRANS (voir équation 3.1)</li> </ul>																				
<u>DEBD4</u>	<p>fichier comprenant:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- les fichiers DEBD1, DEBD2 et DEBD3</li> <li>- les valeurs de débit calculé par le modèle MDOR (<math>Q_c</math> ou DÉBIT) pour chaque jour de simulation (en <math>m^3/sec</math>)</li> <li>- l'hydrogramme des débits calculés par le modèle MDOR et des débits mesurés</li> <li>- le bilan de l'état du système</li> </ul>																				
FICHIERS MODIFIÉS OU SUPPLÉMENTAIRES																					
<u>DEBD4</u> modifié	<p>fichier comprenant:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- le fichier DEBD4</li> <li>- les variables agrégées suivantes:</li> </ul> <table style="margin-left: 40px; border: none;"> <tr> <td>NEITOT (<math>G_1</math>)</td> <td>Rui</td> </tr> <tr> <td>DEBLAC (<math>Q_1</math>)</td> <td>Sol<sub>1</sub></td> </tr> <tr> <td>EAUTOT (R)</td> <td>Sol<sub>2</sub></td> </tr> <tr> <td>EVATOT (E)</td> <td>Sou<sub>1</sub></td> </tr> <tr> <td></td> <td>Sou<sub>2</sub></td> </tr> </table>	NEITOT ( $G_1$ )	Rui	DEBLAC ( $Q_1$ )	Sol <sub>1</sub>	EAUTOT (R)	Sol <sub>2</sub>	EVATOT (E)	Sou <sub>1</sub>		Sou <sub>2</sub>										
NEITOT ( $G_1$ )	Rui																				
DEBLAC ( $Q_1$ )	Sol <sub>1</sub>																				
EAUTOT (R)	Sol <sub>2</sub>																				
EVATOT (E)	Sou <sub>1</sub>																				
	Sou <sub>2</sub>																				
<u>DEBD8</u>	<p>fichier contenant les informations nécessaires à la suite de l'opération:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- les fichiers DEBD1, DEBD2 et DEBD3</li> <li>- les variables</li> </ul> <table style="margin-left: 40px; border: none;"> <tr> <td><math>Q_m</math></td> <td>Rui</td> <td>Elac</td> <td><math>G_3</math></td> </tr> <tr> <td><math>Q_c</math></td> <td>Sol<sub>1</sub></td> <td>EV1</td> <td><math>G_4</math></td> </tr> <tr> <td>QLAC</td> <td>Sol<sub>2</sub></td> <td>EV2</td> <td><math>G_5</math></td> </tr> <tr> <td>R</td> <td>Sou<sub>1</sub></td> <td><math>G_1</math></td> <td><math>G_6</math></td> </tr> <tr> <td>E</td> <td>Sou<sub>2</sub></td> <td><math>G_2</math></td> <td></td> </tr> </table>	$Q_m$	Rui	Elac	$G_3$	$Q_c$	Sol <sub>1</sub>	EV1	$G_4$	QLAC	Sol <sub>2</sub>	EV2	$G_5$	R	Sou <sub>1</sub>	$G_1$	$G_6$	E	Sou <sub>2</sub>	$G_2$	
$Q_m$	Rui	Elac	$G_3$																		
$Q_c$	Sol <sub>1</sub>	EV1	$G_4$																		
QLAC	Sol <sub>2</sub>	EV2	$G_5$																		
R	Sou <sub>1</sub>	$G_1$	$G_6$																		
E	Sou <sub>2</sub>	$G_2$																			

Tableau 3.1a (suite)  
Définition des sorties et des entrées de la figure 3.4

avec (les variables suivantes sont exprimées en millimètre):

- QLAC: débit résultant du carreau - lac (voir figure 3.1)
- Elac: niveau du réservoir - lac
- R : niveau du réservoir qui représente les 66 carreaux (voir figure 3.3)<sup>2</sup>
- Sol<sub>1</sub>: niveau du réservoir - sol représentant les 47 carreaux - terre
- Sou<sub>1</sub>: niveau du réservoir - souterrain représentant 47 carreaux - terre
- Sol<sub>2</sub>: niveau du réservoir - sol représentant les 19 carreaux - rivière
- Sou<sub>2</sub>: niveau du réservoir - souterrain représentant les 19 carreaux - rivière
- E : évaporation des 66 carreaux
- EV1 : évaporation des 47 carreaux - terre
- EV2 : évaporation des 19 carreaux - rivière
- Rui : ruissellement combiné des 19 carreaux - rivière
- G<sub>1</sub> : niveau de neige au sol total pour les 66 carreaux
- G<sub>2</sub> : cumul des degrés - jours
- G<sub>3</sub> : température moyenne de la neige
- G<sub>4</sub> : eau libérée par la fonte dans les 66 carreaux
- G<sub>5</sub> : eau disponible générée par le sous-système FONTE, dans les 66 carreaux (figure 3.3)
- G<sub>6</sub> : portion de G<sub>4</sub> qui regèle
- R : Sol<sub>1</sub> + Sou<sub>1</sub> + Sol<sub>2</sub> + Sou<sub>2</sub>
- E : EV1 + EV2

---

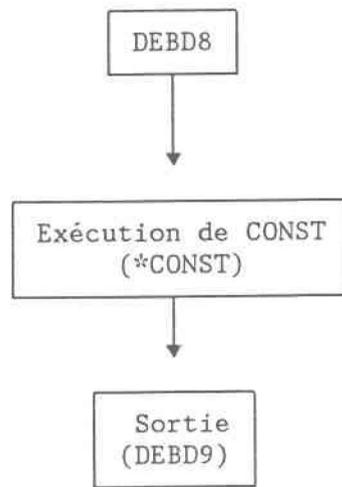
<sup>1</sup> QLAC = K<sub>0</sub> Ql (voir annexe A)

<sup>2</sup> Les 66 carreaux comprennent les 47 carreaux - terre et les 19 carreaux - rivière (figure 3.3).

Tableau 3.1b  
Paramètres du modèle MDOR

VALEUR DES PARAMETRES		
$K_1$	= PARAM( 1 ) =	0,100
$K_2$	= PARAM( 2 ) =	4,078
$K_3$	= PARAM( 3 ) =	0,987
$K_4$	= PARAM( 4 ) =	6,302
$K_5$	= PARAM( 5 ) =	344,900
$K_6$	= PARAM( 6 ) =	0,653
$K_7$	= PARAM( 7 ) =	45,000
$K_8$	= PARAM( 8 ) =	0,500
$K_9$	= PARAM( 9 ) =	1,687
$K_{10}$	= PARAM(10) =	2,445
$K_{11}$	= PARAM(11) =	79,370
$K_{12}$	= PARAM(12) =	10,050
$K_{13}$	= PARAM(13) =	0,057
$K_{14}$	= PARAM(14) =	0,001
$K_{15}$	= PARAM(15) =	0,996
$K_{16}$	= PARAM(16) =	0,300
$K_{17}$	= PARAM(17) =	0,320
$K_{18}$	= PARAM(18) =	0,000
$K_{19}$	= PARAM(19) =	0,000
$K_{20}$	= PARAM(20) =	0,000

Figure 3.5  
Le programme CONST



(Figure 3.4)

Tableau 3.2  
But du programme CONST

- permet la pondération des données météo selon l'équation 3.3
- permet le calcul des entrées nécessaires à l'utilisation du filtre de Kalman
- regroupe ces entrées sous forme de deux matrices (tableau 3.3)  
VARMES: matrice qui comprend 17 variables d'état  
K1 : matrice qui contient 16 coefficients de correction

Tableau 3.3  
Composantes des matrices du fichier DEBD9<sup>1</sup>

VARMES				
Qm	P	T	-	R
Rui	E	QLAC	Qc	Elac
G <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>5</sub>
G <sub>6</sub>	N	-	-	-

K1				
$\frac{\text{Sol}_2}{\text{R}}$	$\frac{\text{Sol}}{\text{R}}$	$\frac{\text{Sol}_1}{\text{R}}$	$\frac{\text{Sou}}{\text{R}}$	$\frac{\text{Sol}_2}{\text{Sol}}$
$\frac{\text{Sol}_1}{\text{Sol}}$	$\frac{\text{Sou}_1}{\text{R}}$	$\frac{\text{Sou}_2}{\text{R}}$	$\frac{\text{EV1}}{\text{E}}$	$\frac{\text{EV2}}{\text{E}}$

où:

$\text{Sol}_1 + \text{Sol}_2 = \text{Sol}$ : réservoir - sol (66 carreaux)

$\text{Sou}_1 + \text{Sou}_2 = \text{Sou}$ : réservoir - souterrain (66 carreaux)

<sup>1</sup> Voir aussi le tableau 3.1a

Dans les prochains chapitres, on déduira à partir des équations 3.4 et 3.5, de la structure des sous-routines du modèle MDOR et de certaines hypothèses, les équations linéaires markoviennes d'ordre 1 ou 2, qui permettront la prédiction de chaque variable importante du système. Nous pourrons alors appliquer l'algorithme de calcul du filtre de Kalman.

### 3.3.2 DÉRIVATION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

#### 3.3.2.1 Prédiction des variables météorologiques

(Pluie - P, Température - T, Neige - N)

Il peut être très complexe d'expliquer physiquement la variation des données météorologiques. Nous allons donc faire l'hypothèse que ces variables sont aléatoires et que leur variation ne dépend que du temps. Partons de l'équation différentielle suivante:

$$\dot{M} : f(t) \quad (3.6)$$

où: M: variable météo (P, T ou N)

À l'aide de l'expansion par la série de Taylor du premier ordre, on peut écrire:

$$M(t) = M(t-1) + \left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_{t-1} \Delta t \quad (3.7)$$

En posant :

- $\partial t \approx \Delta t = 1$  (intervalle unitaire);
- $\partial M \approx \Delta M$ ;
- $w(t)$ : bruit blanc ayant les propriétés statistiques suivantes:

$$w(t) \rightarrow N(0, q)$$

On aura :

$$M(t) = M(t-1) + \Delta M|_{t-1} + w(t)$$

$$M(t) - M(t-1) = \Delta M|_{t-1} + w(t) \quad (3.8)$$

En utilisant une propriété des bruits blancs ( $E[w] = 0$ ), on peut écrire :

$$E[\Delta M|_{t-1}] = E[\Delta M|_{t-2}] \quad (3.9)$$

Donc, "en moyenne", l'écart  $[M(t) - M(t-1)]$  est égal à l'écart  $[M(t-1) - M(t-2)]$ . On peut donc déduire que, compte tenu de nos connaissances, la meilleure prédiction qu'on peut faire de l'écart  $[M(t) - M(t-1)]$  est  $[M(t-1) - M(t-2)]$ . On réutilisera cette déduction aux sections suivantes.

En remplaçant la variable M dans l'équation 3.8 par les variables P, T ou N, on obtient les trois premières équations qui constitueront notre équation d'état:

$$P(t) = P(t-1) + [P(t-1) - P(t-2)] + w_1(t) \quad (3.10)$$

$$T(t) = T(t-1) + [T(t-1) - T(t-2)] + w_2(t) \quad (3.11)$$

$$N(t) = N(t-1) + [N(t-1) - N(t-2)] + w_3(t) \quad (3.12)$$

Les termes entre accolades ( $M(t-1) - M(t-2)$ ) représentent les taux de variation de ces variables d'état par rapport au temps ( $\Delta M/\Delta t$ ). Ces taux seront obtenus à partir des données d'entrée pondérées, et ce, avant la période de prédiction. Ce sont donc des informations "a priori". À partir de ces informations et d'une estimation des conditions initiales (ou de départ) des variables P, T et N ( $P(t_0)$ ,  $T(t_0)$  et  $N(t_0)$ ), les équations 3.10 à 3.12 permettront la prédiction de ces trois variables à n'importe quel temps ( $P(t)$ ,  $T(t)$  et  $N(t)$ ).

Ces valeurs prédites pourront être différentes des valeurs réelles, ce qui est démontré par l'existence des bruits associés aux équations ( $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$ , et  $w_3(t)$ ).

Par convention, et parce que l'écart ( $M(t-1) - M(t-2)$ ) pour ces trois variables, sera obtenu à partir des données d'entrée pondérées du modèle (information "a priori"), on utilisera la notation suivante:

$$M(t-1) - M(t-2) = \Delta M(t-1) \quad (3.13)$$

pour :

$$M = P, T \text{ ou } N$$

Notons que les deux équations 3.10 et 3.12 ( $M1 = P$  ou  $N$ ) sont soumises à la contrainte suivante :

$$M1(t) \geq 0 \quad (3.14a)$$

ou :

$$M1(t-1) \geq -\Delta M1(t-1) - w(t) \quad (3.14b)$$

### 3.3.2.2 Prédiction du comportement du système "Lac"

On doit déterminer des équations compatibles avec le filtre de Kalman, qui permettent la prédiction du débit produit par le système Lac (Q1 - voir figure 3.3). Ces équations peuvent être déduites à partir de la sous-routine PRODLAC du modèle MDOR. Cette dérivation effectuée à l'annexe A, a permis la détermination de trois équations linéaires stochastiques :

$$\begin{aligned} \text{Elac}(t) = & \text{Elac}(t-1) + (K(t-1) - K(t-2)) \\ & + (P(t-1) - P(t-2)) + (N(t-1) - N(t-2)) \\ & + CQ1(T(t-1) - T(t-2)) \end{aligned} \quad (\text{équation A.7.2})$$

$$\begin{aligned} Q_1(t) = & A_0 Q_1(t-1) + A_0 A_1 [(K(t-1) - K(t-2)) \\ & + (P(t-1) - P(t-2)) + (N(t-1) - N(t-2)) \\ & + CQ_1(T(t-1) - T(t-2))] \end{aligned} \quad (\text{équation A.7.4})$$

$$\begin{aligned} K(t) = & Elac(t-1) + (1 - K_0 A_0 A_1) [(K(t-1) - K(t-2)) \\ & + (P(t-1) - P(t-2)) + (N(t-1) - N(t-2)) \\ & + CQ_1(T(t-1) - T(t-2))] - K_0 A_0 Q_1(t-1) \end{aligned} \quad (\text{équation A.7.5})$$

La prédiction de l'évolution du système Lac et plus particulièrement du débit de ce système, nécessite donc la connaissance des trois nouvelles variables d'état suivantes:

$Q_1$  : débit produit par le réservoir-lac ( $m^3/sec$ );

$Elac$ : niveau relatif du réservoir nécessaire au calcul de  $Q_1$  (mm);

$K$  : bilan du réservoir-lac (mm).

De plus, on définit trois constantes qui déterminent les contraintes du modèle à respecter:

Si	$Elac(t) \leq 0$	$A_0 = 0$
Si	$Elac(t-1) \leq 0$	$A_1 = 0$
Si	$T(t) \leq 0$	$CQ_1 = 0$

Autrement,  $A_0 = 1$ ,  $A_1$  est donnée par l'équation A.8.1 et  $CQ_1$  est définie par les équations A.5.5 et A.5.3 de l'annexe A. Le débit résultant du carreau-lac pourrait être négligé, étant donné sa faible importance relativement à l'ensemble du bassin. Le gain d'information qu'apporte sa

contribution ne justifie guère les complications supplémentaires générées par l'ajout des trois variables d'état nécessaires à son calcul. Cependant, nous avons tenu à considérer ce système pour compléter notre exercice théorique sur l'application du filtre de Kalman.

### 3.3.2.3 Prédiction du comportement du sous-système "Fonte"

On doit, comme précédemment, représenter la séquence d'équations constituant la sous-routine FONTE, par un algorithme récursif markovien. Les nombreuses contraintes imposées dans cette sous-routine compliquent cette transformation d'équations et nécessitent la création des six variables d'état suivantes (voir aussi annexe B):

- $G_1$ : réserve de neige au sol (STONEI);<sup>1</sup>
- $G_2$ : cumul des degrés-jours (TEMCUM);
- $G_3$ : température de la neige (TEMNEI);
- $G_4$ : eau libérée par la fonte (EAUFON);
- $G_5$ : eau disponible (EAUDIS);
- $G_6$ : quantité d'eau qui regèle (CALFRI).

Ces variables pourront être prédites par les équations suivantes:

$$G_1(t) = G_1(t-1) + G_6(t) + N(t) - G_4(t) \quad (\text{équation B.1})$$

---

<sup>1</sup> Les parenthèses entourent les noms originaux de ces variables tels qu'employés dans le modèle MDOR.

$$G_2(t) = w_{11} G_2(t-1) + w_1 T(t-1) - w_1 (K_2 - XT)$$

(équation B.1.2)<sup>1</sup>

$$G_3(t) = (D_{11} + D_3) G_3(t-1) - D_3 G_3(t-2) + D_1 (P(t-1) - P(t-2))$$
$$+ D_2 (G_1(t-1) - G_1(t-2)) + (D_4 + D_5) T(t-1) - D_4 T(t-2) + D_5 X T$$

(équation B.6.4)

$$G_4(t) = G_{22} G_4(t-1) + G_{11} (T(t-1) - T(t-2))$$
$$+ G_{12} (P(t-1) - P(t-2)) + (G_{13} + G_{16}) N(t-1)$$
$$- G_{13} N(t-2) + G_{14} (G_2(t-1) - G_2(t-2)) + (G_{15} + G_{16})$$
$$G_1(t-1) - G_{15} G_1(t-2) + G_{16} XN$$

(équation B.5.4)

$$G_5(t) = G_4(t) + P(t) - G_6(t)$$

(équation B.2)

$$G_6(t) = C_{11} G_6(t-1) + C_2 (G_1(t-1) - G_1(t-2))$$
$$+ C_3 (G_3(t-1) - G_3(t-2)) + C_4 (T(t-1) - T(t-2))$$
$$+ C_1 P(t-1) + C_1 X P$$

(équation B.7.4)

---

<sup>1</sup>  $XT = [T(t-1) - T(t-2)] = \Delta T(t-1)$  (voir équation 3.13). Ce terme est considéré comme une constante donnée par le modèle.

La variable importante pour la suite des opérations est la variable  $G_5$ . Toutes les autres variables ne sont que des variables secondaires nécessaires à la prédiction de  $G_5$ .

Les deux équations décrivant les variables  $G_1(t)$  et  $G_5(t)$  (équations B.1 et B.2) peuvent être écrites selon une forme markovienne. En utilisant les équations B.5.4, B.7.4 et 3.8:

$$\begin{aligned}
 G_5(t) = & P_1 G_1(t-1) + P_2 G_1(t-2) + P_7 (G_2(t-1) - G_2(t-2)) \\
 & + P_8 (G_3(t-1) - G_3(t-2)) + P_9 G_4(t-1) + P_{10} G_6(t-1) \\
 & + P_3 P(t-1) + P_{11} P(t-2) + P_4 (T(t-1) - T(t-2)) \\
 & + P_5 N(t-1) + P_{12} N(t-2) + P_6
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 G_1(t) = & (1 - P_1) G_1(t-1) + (-P_2) G_1(t-2) + (-P_7) \\
 & (G_2(t-1) - G_2(t-2)) + (-P_8) (G_3(t-1) - G_3 \\
 & (t-2)) + (-P_9) G_4(t-1) + (-P_{10}) G_6(t-1) \\
 & + (1 - P_3) P(t-1) \\
 & + (-P_{11}) P(t-2) + (-P_4) (T(t-1) - T(t-2)) \\
 & + (1 - P_5) N(t-1) + (-P_{12}) N(t-2) + (XN + \dot{X}P - P_6)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

avec:

$$P_1 = G_{15} + G_{16} - C_2$$

$$P_2 = C_2 - G_{15}$$

$$P_7 = G_{14}$$

$$P_3 = G_{12} - C_1 + 1$$

$$P_{11} = - G_{12}$$

$$P_4 = G_{11} - C_4$$

$$XP = P(t - 1) - P(t - 2) = \Delta P(t-1) \text{ (équation 3.13)}$$

$$P_8 = - C_3$$

$$P_9 = G_{22}$$

$$P_{10} = - C_{11}$$

$$P_5 = G_{13} + G_{16}$$

$$P_{12} = - G_{13}$$

$$P_6 = (1 - C_1) XP - G_{16} XN$$

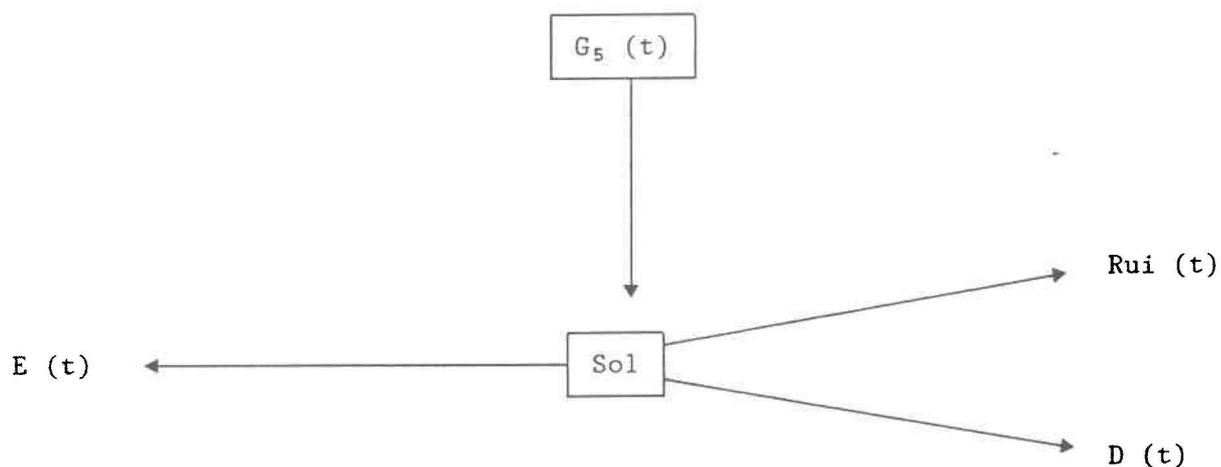
$$XN = N(t - 1) - N(t - 2) = \Delta N(t - 1)$$

Notons que les constantes et variables des équations précédentes ( $w_1$ ,  $w_{11}$ ,  $D_{11}$ ,  $D_1$  à  $D_5$ ,  $G_{22}$ ,  $G_{11}$  à  $G_{16}$ ,  $P_1$  à  $P_{12}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_1$  à  $C_4$ ,  $XP$ ,  $XT$  et  $XN$ ) servent à tenir compte des contraintes du modèle MDOR. Toutes ces variables sont des informations "a priori" car elles peuvent être calculées, à chaque pas de temps, à partir des sorties précédentes du modèle MDOR modifié.

#### 3.3.2.4 Prédiction du comportement du sous-système "Sol"

À partir des figures 3.3 et 3.6, on peut extraire trois variables d'état ( $R_{ui}$ ,  $EVAP$  ou  $E$  et  $D$ ) qui résument la fonction de production du compartiment "Sol". L'analyse des sous-routines  $RAPIDE$ ,  $INFILT$ ,  $EVATRA$ ,  $SOL$  et  $SOUTER$  du modèle MDOR a été nécessaire pour pouvoir dériver les trois équations décrivant ces variables d'état. Ces équations permettent la

Figure 3.6  
Le sous-système Sol



avec:

- $G_5(t)$  : eau libérée par la fonte (voir équation 3.15);
- $Rui(t)$  : eau de ruissellement rapide (générée uniquement par les carreaux rivières);
- $E(t)$  : évaporation (EVAP);
- $D(t)$  : écoulement provenant du sol formé de:
  - l'écoulement de surface;
  - l'écoulement du réservoir supérieur (SOL);
  - l'écoulement du réservoir inférieur (SOUTER).

prédiction de la réponse du sol. La difficulté de cette section est causée par les nombreuses contraintes imposées par le modèle MDOR. - De plus, ces contraintes peuvent varier selon la nature des carreaux (terre ou rivière).

Cette spécificité des contraintes a nécessité une dérivation des équations selon le type des carreaux. Il a donc fallu (voir l'annexe C) diviser le bassin de façon à considérer séparément les 47 carreaux-terre et les 19 carreaux-rivière. Deux séries d'équations ont été développées pour évaluer le comportement des deux différents types de carreaux.

Ces deux séries d'équations ont ensuite été additionnées pour permettre la création de trois équations stochastiques qui décrivent le comportement des trois variables d'état suivantes:  $R_{ui}(t)$ ,  $D(t)$  et  $E(t)$  et ce, pour l'ensemble des 66 carreaux.

Les trois équations dérivées sont les suivantes (voir l'annexe C):

$$\begin{aligned} R_{ui}(t) = & R_{ui}(t-1) + R_1 (G_5(t) - G_5(t-1)) + R_2 (K1(1, t-1) \\ & R(t-1) - K1(1, t-2) R(t-2)) \end{aligned} \quad (C.1.3)$$

$$\begin{aligned} E(t) = & EB_7 E(t-1) + E_1 (T(t-1) - T(t-2)) + EB_1 R(t-1) \\ & - EB_2 R(t-2) - I_9 R_{ui}(t-1) + EB_8 G_5(t) + EB_9 \\ & + I_9 R_1 G_5(t-1) \end{aligned} \quad (C.3.5)$$

$$\begin{aligned}
 D(t) = & \text{(cte 17)} R(t-1) + \text{(cte 18)} R(t-2) + \text{(cte 24)} E(t-1) \\
 & + [(\text{cte 21}) - (\text{cte 23}) P_4] (T(t-1) - T(t-2)) \\
 & + (\text{cte 22}) R_{ui}(t-1) + (\text{cte 23}) G_5(t) - R_1(\text{cte 22}) \\
 & G_5(t-1) + [A_{21} - (\text{cte 23}) P_6] \qquad \qquad \qquad \text{(C.4.4)}
 \end{aligned}$$

La description des coefficients  $R_1, R_2, EB_7, E_1, EB_1, EB_2, I_9, EB_8, EB_9, (\text{cte 17}), (\text{cte 18}), (\text{cte 24}), (\text{cte 21}), (\text{cte 23}), (\text{cte 22})$  et  $A_{21}$ , sont données à l'annexe C. Les coefficients de correction  $K_1(i, t-n)$  sont spécifiés au tableau 3.3 et la variable  $G_5(t)$  et les coefficients  $P_4$  et  $P_6$  sont décrits à l'équation 3.15.

### 3.3.2.5 Prédiction des autres variables du bilan

Les deux dernières variables d'état nécessaires à notre étude sont données par les équations du bilan hydrologique ( voir section 3.3.1). Il s'agit de la variable  $Q(t)$  qui représente le débit total à l'exutoire ( $m^3/sec$ ) et la variable  $R(t)$ , qui spécifie l'état de nos réservoirs. Nous avons transformé ces équations de façon à les formuler sous une forme markovienne:

$$\begin{aligned}
 Q(t) = & Q(t-1) + Q_3 R(t-1) + Q_4 R(t-2) + (Q_5 - Q_8 P_3) P(t-1) \\
 & + (Q_6 - Q_8 P_{11}) P(t-2) + (Q_7 - Q_8 P_4) (T(t-1) - T(t-2)) \\
 & + Q_8 G_5(t) + \frac{\text{cte 22}}{K_0} R_{ui}(t-1) + \frac{\text{cte 24}}{K_0} E(t-1) \\
 & - \frac{1}{K_0} D(t-1) + (A_0 - 1) Q_1(t-1) + A_0 A_1 (K(t-1) - K(t-2)) \\
 & - Q_9 G_5(t-1) + (Q_{10} - Q_8 P_5) N(t-1) + (Q_{11} - Q_8 P_{12}) N(t-2) \\
 & + (Q_{12} - Q_8 P_6) \qquad \qquad \qquad \text{(D.2)}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R(t) = & R_3 R(t-1) + R_4 R(t-2) + 66 P(t-1) + (R_5 - R_8 P_4) \\ & (T(t-1) - T(t-2)) + (R_6) R_{ui}(t-1) + R_7 E(t-1) \\ & + R_8 G_5(t) + R_9 G_5(t-1) + (R_{10} - R_8 P_6) \end{aligned} \quad (D.3)$$

On retrouve à l'annexe D, la définition des coefficients employés dans ces deux équations. La variable  $G_5(t)$  pourra être remplacée par l'équation 3.15.

### 3.4 Détermination des matrices du filtre de Kalman

#### 3.4.1 COEFFICIENTS DES ÉQUATIONS DE BASE

Nous avons dérivé au chapitre 3.3.2, les équations décrivant le comportement des 17 variables d'état importantes du système. La connaissance des valeurs de 8 de ces variables au temps "t" et "t-1" et des 8 autres au temps "t" permettra la prédiction du débit à l'exutoire (la dix-septième variable) au temps "t+1".

Une condition implicite à l'application du filtre de Kalman, nécessite que chaque variable utilisée dans une équation d'état soit elle-même décrite. Le vecteur d'état ( $\underline{X}(t)$  - tableau 3.4) devra donc comprendre en plus des 17 variables dont on parlait plus haut, les 8 variables dont on doit aussi connaître la valeur à "t-1" (R, P, T, K, N,  $G_1$ ,  $G_2$ , et  $G_3$ ).

Tableau 3.4  
Vecteur d'état ( $\underline{X}(t)$ )

	Équations décrivant ces variables
$Q(t)$	équations D.2 et 3.15
$R(t)$	équations D.3 et 3.15
$R(t-1)$	<sup>1</sup>
$P(t)$	équation 3.10
$P(t-1)$	<sup>1</sup>
$T(t)$	équation 3.11
$T(t-1)$	<sup>1</sup>
$R_{ui}(t)$	équations C.1.3 et 3.15
$E(t)$	équations C.3.5 et 3.15
$Q_1(t)$	équation A.7.4
$K(t)$	équation A.7.5
$K(t-1)$	<sup>1</sup>
$Elac(t)$	équation A.7.2
$D(t)$	équations C.4.4 et 3.15
$G_1(t)$	équation 3.16
$G_2(t)$	équation B.1.2
$G_3(t)$	équation B.6.4
$G_4(t)$	équation B.5.4
$G_5(t)$	équation 3.15
$G_6(t)$	équation B.7.4
$N(t)$	équation 3.12
$G_1(t-1)$	<sup>1</sup>
$G_2(t-1)$	<sup>1</sup>
$G_3(t-1)$	<sup>1</sup>
$N(t-1)$	<sup>1</sup>

$\underline{X}(t) =$

Dimension du vecteur  $\underline{X}(t)$ :  $25 \times 1$ ,  $n = 25$  (équation 2.7)

<sup>1</sup> Les 8 variables de la forme  $Z(t-1)$  seront décrites par une équation de la forme suivante:

$$Z(t-1) = Z(t-1)$$

Pour des convenances mathématiques, ces variables au temps "t-1", devront aussi être représentées par une équation mathématique. On emploiera donc une expression de la forme suivante:

$$Z(t-1) = Z(t-1)$$

Le tableau 3.4 énumère les 25 variables d'état qui constituent notre vecteur d'état, et indique les équations qui permettent de prédire ces variables.

Revenons à notre première équation matricielle qui sert de base à l'algorithme du filtre de Kalman (équation 2.7):

$$\begin{array}{cccccc} \underline{X}(t) & = & \underline{\Phi}(t, t-1) & \underline{X}(t-1) & + & \underline{F}(u; t-1) & + & \underline{G} & \underline{w}(t-1) \\ (nx1) & & (nxn) & (nx1) & & (nx1) & & (nxp) & (px1) \end{array}$$

Nous devons définir les matrices utilisées dans ces équations. L'amalgamation des équations d'état dérivées au chapitre précédent permet la détermination de la matrice de transition  $\underline{\Phi}(t, t-1)$ , et du vecteur représentant la force motrice  $\underline{F}(u; t-1)$ . Les tableaux 3.5a, b et c représentent respectivement les trois termes de droite de l'équation 2.7.

Dans l'équation 2.7, nous pouvons observer la présence d'un "bruit blanc" ( $w(t-1)$ ), dont on n'avait pas tenu compte lors de la dérivation de nos équations d'état (voir sections précédentes). Nous n'avons pas à spécifier de valeurs de "bruit blanc" pour les variables suivantes:



Tableau 3.5b  
Représentation du terme  $\underline{F}(u;t-1)^1$

$\underline{F}(u;t-1) =$

$Q_{12}$
$R_{10}$
0
XP
0
XT
0
$R_1 P_6$
$(EB_9) + (EB_8) P_6$
0
0
0
0
$A_{21}$
$XN + XP - P_6$
$-w_1 (K_2 - XT)$
$D_5 (XT)$
$G_{16} (XN)$
$P_6$
$C_1 (XP)$
XN
0
0
0
0

<sup>1</sup> : Deuxième terme de l'équation 2.7

Tableau 3.5c  
Représentation matricielle du terme  $\underline{\underline{G}} \underline{w} (t-1)^1$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

X

w <sub>1</sub>
w <sub>2</sub>
w <sub>3</sub>
w <sub>4</sub>
w <sub>5</sub>
w <sub>6</sub>
w <sub>7</sub>
w <sub>8</sub>
w <sub>9</sub>
w <sub>10</sub>
w <sub>11</sub>
w <sub>12</sub>
w <sub>13</sub>
w <sub>14</sub>
w <sub>15</sub>
w <sub>16</sub>
w <sub>17</sub>

- la matrice  $\underline{\underline{G}}$  a les dimensions suivantes:  
25 x 17, n = 25 et p = 17 (équation 2.7)
- le vecteur  $\underline{w}(t-1)$  a les dimensions suivantes:  
17 x 1, p = 17 (équation 2.7)

<sup>1</sup> Troisième terme de l'équation 2.7

$$\begin{array}{ll} R(t-1) = X(3; t) & G_1(t-1) = X(22; t) \\ P(t-1) = X(5; t) & G_2(t-1) = X(23; t) \\ T(t-1) = X(7; t) & G_3(t-1) = X(24; t) \\ K(t-1) = X(12; t) & N(t-1) = X(25; t) \end{array}$$

Les équations qui les décrivent sont rigoureusement exactes car elles peuvent être écrites sous la forme suivante (voir aussi tableaux 3.4 et 3.5).

$$Z(t-1) = Z(t-1)$$

Il reste donc 17 variables dans le vecteur d'état auxquelles on doit attribuer une valeur de "bruit blanc". La matrice  $\underline{G}$  de l'équation 2.7 permet de spécifier les variables dont le comportement est perturbé par un "bruit blanc". Les valeurs de la matrice  $\underline{G}$  (dimension de 25 x 17) sont présentées au tableau 3.5c.

Attardons nous maintenant à la deuxième équation matricielle de base, soit l'équation de mesure:

$$\begin{array}{l} \underline{Y}(t) = \underline{H}(t) \underline{X}(t) + \underline{v}(t) \quad (\text{voir équation 2.4}) \\ (m \times 1) \quad (m \times n) \quad (n \times 1) \quad (m \times 1) \end{array}$$

La matrice d'échelle  $\underline{H}(t)$  de cette équation est dimensionnée de façon à ne considérer que les variables d'état qui sont mesurées. Dans le

---

<sup>1</sup>  $X(i; t)$ : ième variable du vecteur  $\underline{X}(t)$

cadre de notre étude, puisque les variables d'état ne sont pas toutes mesurées, on aura:

$$m \leq n$$

Le vecteur de mesure ( $\underline{Y}(t)$ ) contient, en premier lieu, les trois variables météorologiques et la variable de débit:

$$Q(t), P(t), T(t) \text{ et } N(t)$$

De plus, on considérera dans ce vecteur de mesure ( $\underline{Y}(t)$ ), les quatre variables d'état suivantes:

$$R(t), R_{ui}(t), E(t) \text{ et } Q_1(t)$$

Les valeurs de ces variables seront obtenues à partir d'une simulation du modèle MDOR modifié, effectuée antérieurement au début de l'opération de filtrage. Ces huit variables contribueront donc à la correction de notre prédiction effectuée à partir de nos équations d'état (équation 2.7 et tableaux 3.5). Ces variables forment le vecteur  $\underline{Y}(t)$  dans l'ordre défini au tableau 3.6. Au tableau 3.7, on peut observer la matrice d'échelle ( $\underline{H}(t)$ ) qui permet de spécifier les variables d'état qu'on utilisera dans le vecteur de mesure. Notons que le vecteur  $\underline{y}(t)$  a une dimension équivalente au vecteur de mesure ( $m=8$ ).

Tableau 3.6  
Vecteur de mesure ( $\underline{Y}(t)$ )

$\underline{Y}(t)^* =$

Q (t)
P (t)
T (t)
R (t)
Rui (t)
E (t)
Q1 (t)
N (t)

\* Dimension (8 x 1): m = 8

Tableau 3.7  
Matrice d'échelle  $\underline{\underline{H(t)}}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

- Dimension:  $8 \times 25$ ,  $m = 8$  et  $n = 25$  (voir équation 2.4)

### 3.4.2 CARACTÉRISTIQUES STATISTIQUES DES "BRUITS"

Les bruits qui sont associés à nos équations d'état ( $\underline{w}(t)$ , voir équation 2.7) ou à nos équations de mesure ( $\underline{v}(t)$ , voir équation 2.4), peuvent être définis à partir de leurs propriétés statistiques. On sait que les bruits blancs sont caractérisés entre autres par les propriétés statistiques suivantes:

$$\underline{w}(t) \rightarrow N(0, \underline{Q}) \quad (\text{voir équation 2.5})$$

$$\underline{v}(t) \rightarrow N(0, \underline{R}) \quad (\text{voir équation 2.6})$$

On doit donc définir les matrices  $\underline{R}$  (matrice de covariance des erreurs de mesures) et  $\underline{Q}$  (matrice de covariance des erreurs du modèle) (voir section 2.2.2). Dans le cadre de notre étude, nous avons supposé que ces deux matrices étaient constantes dans le temps. De plus, on a défini des valeurs uniquement pour les diagonales des matrices, puisqu'on considère l'indépendance entre les bruits de variables différentes.

La matrice  $\underline{R}$  doit caractériser les bruits des huit variables du vecteur de mesure (tableau 3.6). Comme le débit ( $Q(t)$ ) est la seule variable dont la mesure est considérée "exacte" (sans bruit), la covariance de l'erreur de sa mesure sera nulle ( $R(1, 1) = 0$ ).

On se souvient que les données d'entrée (P, T et N) ont été pondérées pour être compatibles avec notre modèle simplifié (voir équation 3.3). Comme les valeurs utilisées comme mesure pour les variables P, T et N ne

représentent pas tout à fait la réalité, on leur a attribuées des valeurs de bruit. Celles-ci ont été évaluées du même ordre de grandeur que la variance des variables météo, calculée à partir de la série chronologique des données d'entrée pondérées:

$$\frac{\sum_i^n [M(t) - \bar{M}(t)]^2}{n - 1}$$

où:

M (t): donnée météo (P, T ou N) pondérée;

$\bar{M}(t)$ : moyenne de la série;

n : nombre de jours de la série (350).

Pour les autres variables, on a utilisé la variance calculée à partir des sorties du modèle MDOR modifié:

$$\frac{\sum (X_1(t) - \bar{X}_1(t))^2}{n - 1} \quad (3.17)$$

où:

X<sub>1</sub>(t): sorties du modèle MDOR (variables R(t), Rui(t), E(t) ou Ql(t));

$\bar{X}_1(t)$ : moyenne des X<sub>1</sub>(t);

n : nombre de jours de simulation (350).

Les valeurs de ces variances (arrondies) sont données au tableau 3.8. La matrice  $\underline{\underline{Q}}$  a été déterminée à peu près de la même façon que la matrice  $\underline{\underline{R}}$ . Les covariances représentant les données météo (P, T et N) ont été supposées semblables puisque les équations qui décrivent ces variables sont de la même forme (voir équations 3.10, 3.11 et 3.12). La valeur retenue est dans le même ordre de grandeur que la covariance des erreurs de mesure. Dans le même ordre d'idée, on a jugé que:

$$Q_R \cong R_R^1$$

$$Q_{Rui} \cong R_{Rui}$$

$$Q_{Rui} = Q_{Q1} = Q_K = Q_{Elac} = Q_{G_2} = Q_{G_3}$$

$$Q_E = Q_{G_1} = Q_{G_4} = Q_{G_5} = Q_{G_6}$$

Les 5 dernières covariances sont du même ordre de grandeur que la variance du débit calculé à partir des sorties de MDOR (voir équation 3.17).

Les valeurs des covariances ont été ajustées à la suite des essais de simulation de l'opération de filtrage (voir tableau 3.8). Notamment,

---

<sup>1</sup>  $Q_X$  et  $R_X$  sont respectivement la covariance des erreurs du modèle et la covariance des erreurs de mesure pour la variable X.

Tableau 3.8  
Détermination des diagonales des matrices  $\underline{\underline{R}}(*)$  et  $\underline{\underline{Q}}(**)$

$R(1, 1) =$	0 (Q)
$R(2, 2) =$	25 (P)
$R(3, 3) =$	10 (T)
$R(4, 4) =$	100 000 (R)
$R(5, 5) =$	100 (Rui)
$R(6, 6) =$	100 (E)
$R(7, 7) =$	100 (Q1)
$R(8, 8) =$	25 (N)

$Q(1, 1) =$	3 000 (Q)
$Q(2, 2) =$	100 000 (R)
$Q(3, 3) =$	10 (P)
$Q(4, 4) =$	10 (T)
$Q(5, 5) =$	100 (Rui)
$Q(6, 6) =$	1 000 (E)
$Q(7, 7) =$	100 (Q1)
$Q(8, 8) =$	100 (K)
$Q(9, 9) =$	100 (Elac)
$Q(10, 10) =$	10 000 (D)
$Q(11, 11) =$	1 000 ( $G_1$ )
$Q(12, 12) =$	100 ( $G_2$ )
$Q(13, 13) =$	100 ( $G_3$ )
$Q(14, 14) =$	1 000 ( $G_4$ )
$Q(15, 15) =$	1 000 ( $G_5$ )
$Q(16, 16) =$	1 000 ( $G_6$ )
$Q(17, 17) =$	10 (N)

\* Dimension 8 x 8 (m = 8) (équation 2.4)

\*\* Dimension 17 x 17 (p = 17) (équation 2.7)

les valeurs de covariances correspondant aux variables Q et D ont dû être augmentées (respectivement à 3 000 et 10 000) pour diminuer les divergences, apparues lors d'essais antérieurs.

Nous nous sommes contentés de cette évaluation primaire et approximative des matrices  $\underline{Q}$  et  $\underline{R}$  pour limiter l'étendue de notre étude. L'exploration des différentes avenues, permettant l'amélioration de l'estimation de ces deux matrices (voir section 2.2.2) aurait débordé du cadre de notre étude et aurait nécessité du temps et de la recherche supplémentaire. La porte reste cependant ouverte pour d'éventuelles recherches.

### 3.4.3 CONDITIONS INITIALES

L'estimation des conditions initiales du système est nécessaire au démarrage de l'opération de filtrage (voir section 2.2.1). On doit donc évaluer:

$$\hat{\underline{X}}(t_0 | t_0), \underline{P}(t_0 | t_0)$$

Les conditions initiales du vecteur d'état ( $\hat{\underline{X}}(t_0 | t_0)$ ) ont été évaluées en posant la même hypothèse qu'à la section 2.2.1, soit:

$$\hat{\underline{X}}(t_0 | t_0) \cong \underline{Y}(t_0)$$

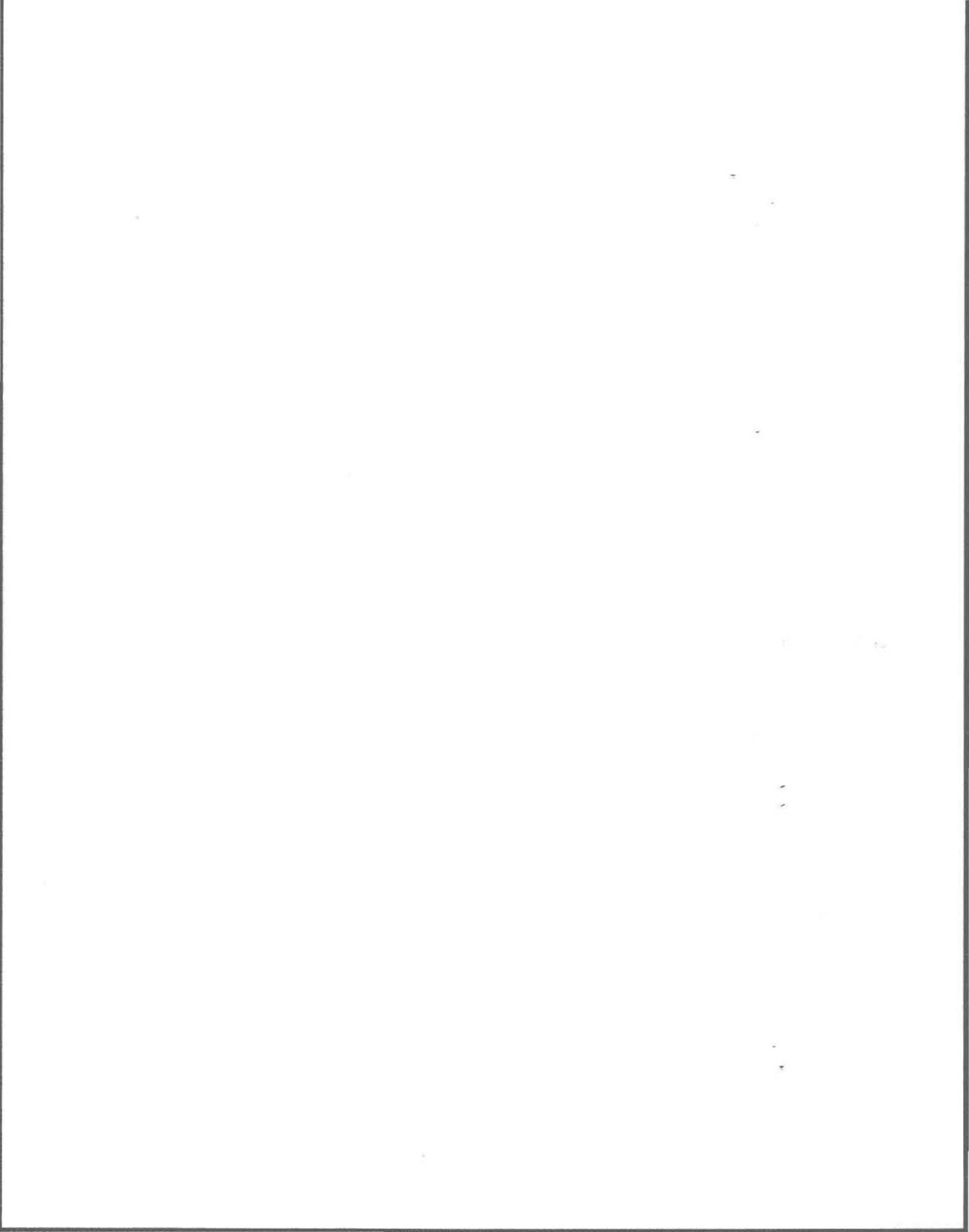
Évidemment, cette équation s'appliquera aux variables qui sont mesurées. Pour les autres, on a utilisé les sorties du modèle MDOR modifié qui sont antérieures au début de l'opération de filtrage. Quant aux valeurs initiales de la diagonale de la matrice de covariance des erreurs, on a respecté la philosophie de la section 2.2.1 à savoir que, les valeurs de covariance des erreurs du vecteur d'état sont du même ordre de grandeur que les valeurs des matrices  $\underline{R}$  et  $\underline{Q}$  (voir tableau 3.9).

Ces valeurs ont cependant été corrigées à la suite de simulations antérieures pour éviter des problèmes de divergence qui causaient un accroissement des valeurs de la matrice  $\underline{P}$ .

Tableau 3.9  
Détermination de  $\underline{P}(t_0 | t_0)$  \*

$P(1, 1) =$	$0(Q(t))$
$P(2, 2) =$	$300\ 000(R(t))$
$P(3, 3) =$	$300\ 000(R(t-1))$
$P(4, 4) =$	$0(P(t))$
$P(5, 5) =$	$0(P(t-1))$
$P(6, 6) =$	$10(T(t))$
$P(7, 7) =$	$10(T(t-1))$
$P(8, 8) =$	$0(R_{ui}(t))$
$P(9, 9) =$	$1\ 000(E(t))$
$P(10, 10) =$	$0(Q_1(t))$
$P(11, 11) =$	$100(K(t))$
$P(12, 12) =$	$100(K(t-1))$
$P(13, 13) =$	$100(Elac(t))$
$P(14, 14) =$	$1\ 000(D(t))$
$P(15, 15) =$	$1\ 000(G_1(t))$
$P(16, 16) =$	$100(G_2(t))$
$P(17, 17) =$	$100(G_3(t))$
$P(18, 18) =$	$1\ 000(G_4(t))$
$P(19, 19) =$	$1\ 000(G_5(t))$
$P(20, 10) =$	$1\ 000(G_6(t))$
$P(21, 21) =$	$0(N(t))$
$P(22, 22) =$	$1\ 000(G_1(t-1))$
$P(23, 23) =$	$100(G_2(t-1))$
$P(24, 24) =$	$100(G_3(t-1))$
$P(25, 25) =$	$0(N(t-1))$

\* Dimension 25 x 25 (n = 25) (équation 2.7)



#### 4 DISCUSSION DES RÉSULTATS

##### 4.1 Objectifs des simulations

Le premier objectif de cette étude était l'application du filtre à un modèle déterministe conceptuel. Nous allons maintenant tenter d'évaluer si l'utilisation du filtre de Kalman peut améliorer les opérations de prédiction en temps réel et ce, principalement au niveau de la précision d'une prédiction. À l'aide de notre nouveau modèle déterministe (modèle MDOR modifié), auquel nous avons appliqué le filtre, nous allons effectuer des simulations qui permettront, à partir des données disponibles, la prédiction du vecteur d'état à chaque jour de la simulation.

Pour évaluer la capacité de nos simulations à rencontrer les objectifs visés, nous allons utiliser deux types d'indicateurs de performance. Le premier consiste à comparer l'hydrogramme mesuré avec l'hydrogramme calculé par le modèle MDOR (avant modification et avec des paramètres non ajustés) et celui calculé par le filtre de Kalman. Cet indicateur visuel permettra de juger de la capacité des modèles à "coller" à la réalité (représentée par les mesures).

Le deuxième indicateur est de nature mathématique. On comparera les variables d'état filtrées ( $X_{KAL}$ ) et celles générées par le modèle MDOR ( $X_{MDOR}$ ) aux mesures effectuées ( $X_{MES}$ ), à l'aide de deux critères mathématiques: l'écart-type et l'erreur relative. Ces critères peuvent être définis comme suit:

$$\sigma_{KAL} = \left[ \sum_i^n \frac{(X_{MES}(i) - X_{KAL}(i))^2}{n - 1} \right]^{1/2} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{MDOR} = \left[ \sum_i^n \frac{(X_{MES}(i) - X_{MDOR}(i))^2}{n - 1} \right]^{1/2} \quad (4.2)$$

$$R_{KAL}^* = \frac{\sigma_{KAL}}{\bar{X}_{MES}} \text{ (en \%)} \quad R_{MDOR}^* = \frac{\sigma_{MDOR}}{\bar{X}_{MES}} \text{ (en \%)} \quad (4.3)$$

où:

$X_{MES}(i)$  : mesure de la variable d'état X au jour "i"<sup>1</sup>;

$\bar{X}_{MES}$  : moyenne de la série de mesure de la variable d'état X;

$X_{MDOR}(i)$  : valeur de la variable d'état X au jour "i" obtenue par une simulation du modèle MDOR;

$X_{KAL}(i)$  : valeur de la variable d'état X au jour "i" prédite par l'opération de filtrage;

$R^*$  : rapport: "écart type"/"moyenne"<sup>2</sup>;

n : nombre de jours considérés.

---

<sup>1</sup> X peut représenter n'importe laquelle des 25 variables d'état du vecteur d'état ( $\underline{X}(t)$ ) (voir tableau 3.4).

<sup>2</sup> Le critère  $R^*$  représente en fait le pourcentage d'erreur de l'estimation par rapport aux mesures.

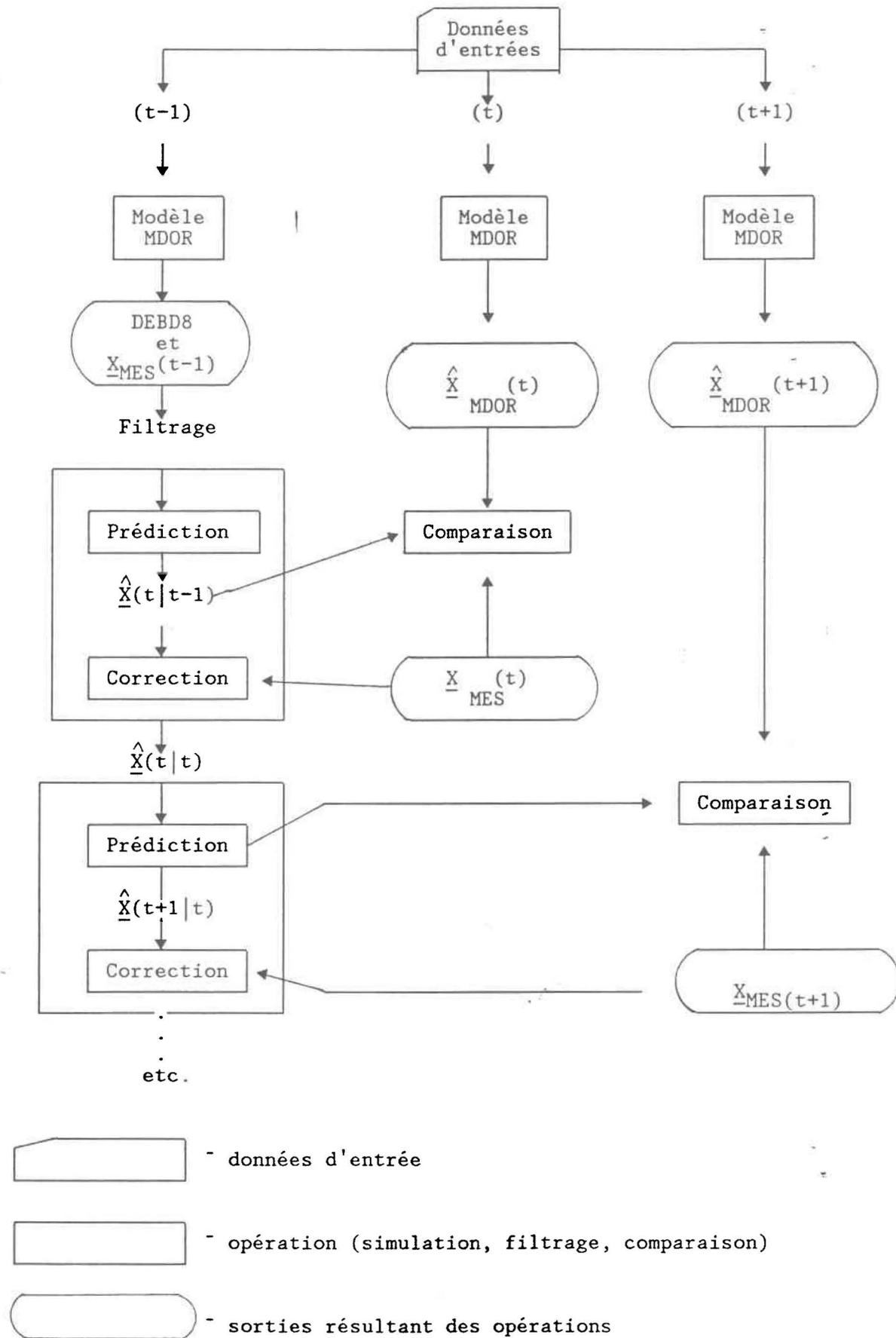
Lors des comparaisons entre l'efficacité du modèle MDOR et du filtre de Kalman, nous devons nous rappeler que le modèle MDOR ne permet pas de prédiction mais seulement une reproduction du débit. En effet, il peut disposer des données d'entrée correspondantes au jour de la simulation contrairement au filtre qui n'utilise que les données d'entrée antérieures au jour de simulation.

#### 4.2 Précision d'une prédiction

L'opération de filtrage a d'abord été effectuée à chaque jour selon le schéma reproduit à la figure 4.1. Nous avons effectué deux opérations de prédiction à l'aide du filtre de Kalman, pendant une période de l'année correspondant à l'été. Dans ces conditions climatiques particulières ( $N(t)$  et  $G_1(t) = 0$ ,  $T(t) \geq 0$ ), on peut négliger le sous-système FONTE (voir section 3.3.2.3), ce qui permet d'alléger notre opération de filtrage. Les onze dernières variables du vecteur d'état (voir tableau 3.4) pourront être ignorées, ce qui entraînera une diminution de la dimension du vecteur d'état et des matrices.

Lors de la première simulation, nous avons utilisé uniquement les treizes premières variables du vecteur d'état. De plus, on supposait que le vecteur de mesure ( $\underline{Y}(t)$ ) ne comprenait que les trois variables suivantes:  $Q(t)$ ,  $P(t)$  et  $T(t)$  ( $n = 13$  et  $m = 3$ , voir équations 2.7 et 2.4).

Figure 4.1  
Schéma de l'opération de filtrage effectuée à chaque jour



La simulation a été effectuée sur une période comprise entre les jours 141 et 290<sup>1</sup> (soit, de la mi-mai au mois d'octobre). Nous avons reproduit aux figures 4.2 et 4.3 l'hydrogramme mesuré et ceux calculés par le modèle MDOR et le filtre de Kalman (lorsque  $n = 13$ ). Nous pouvons observer que notre hydrogramme ( $Q_{KAL}$ ) colle beaucoup plus aux mesures que celui généré par le modèle MDOR ( $Q_{MDOR}$ ). On retrouve aussi une assez bonne concordance entre les pics calculés et observés. Cependant, on peut observer une sinuosité assez élevée dans la courbe de  $Q_{KAL}$  comme si le filtre utilisait un procédé d'essai et erreur. Ceci et la présence de 4 pics négatifs situés au début de la période de simulation démontre une certaine instabilité dans notre prédiction.

Les valeurs des critères  $\sigma$  et  $R^*$ , calculées pour la variable de débit et pour les 150 jours de simulation sont assez concluantes:

$$\bar{Q}_{MES} = 19,67$$

$$\sigma_{MDOR} = 14,96$$

$$R_{MDOR}^* = 76 \%$$

$$\sigma_{KAL} = 10,60$$

$$R_{KAL}^* = 53 \%$$

---

<sup>1</sup> Les données météo qui sont disponibles pour cette étude font partie d'une série chronologique qui s'échelonne sur 350 jours où le premier jour correspond au premier janvier.

Figure 4.2

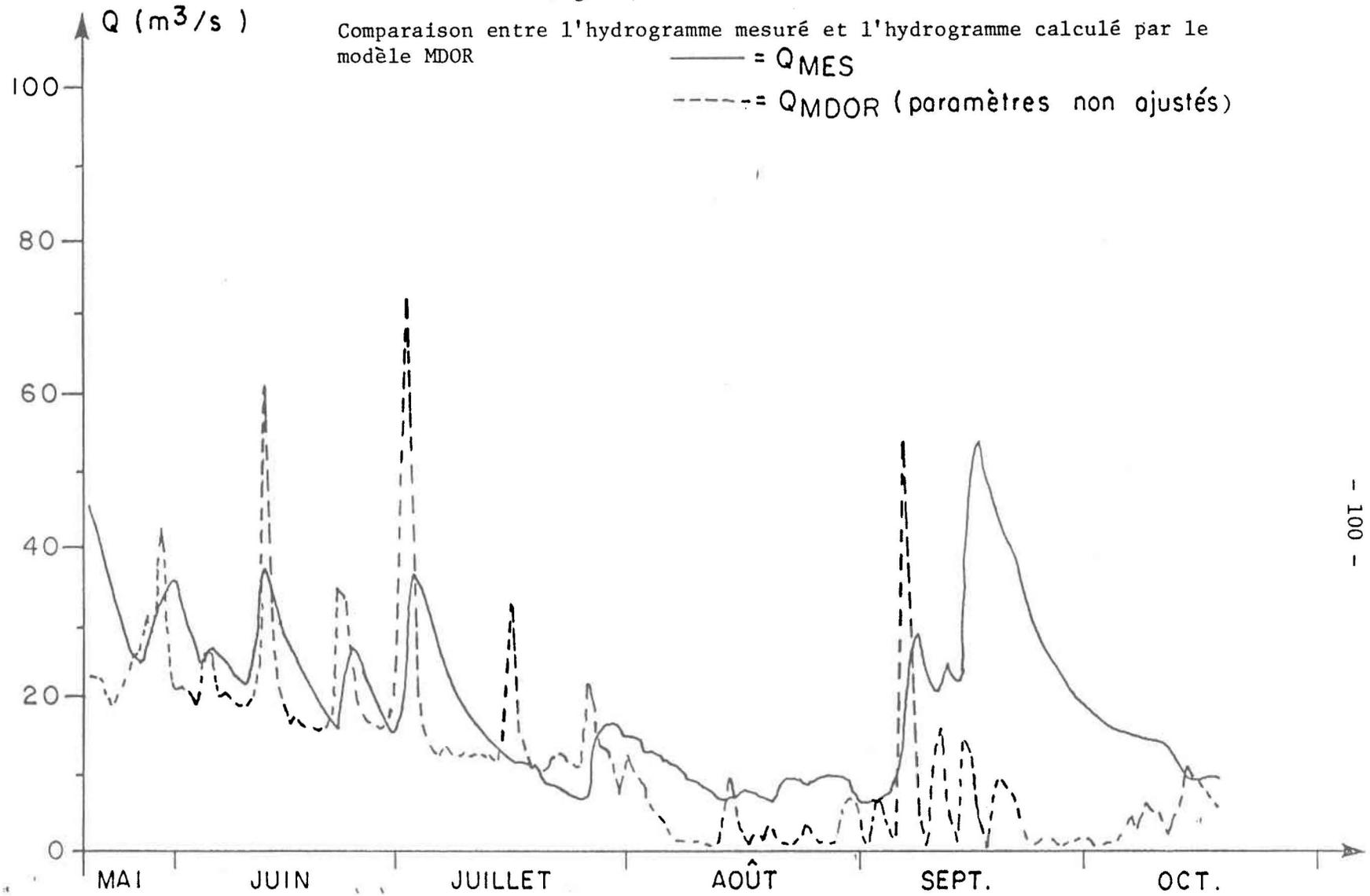
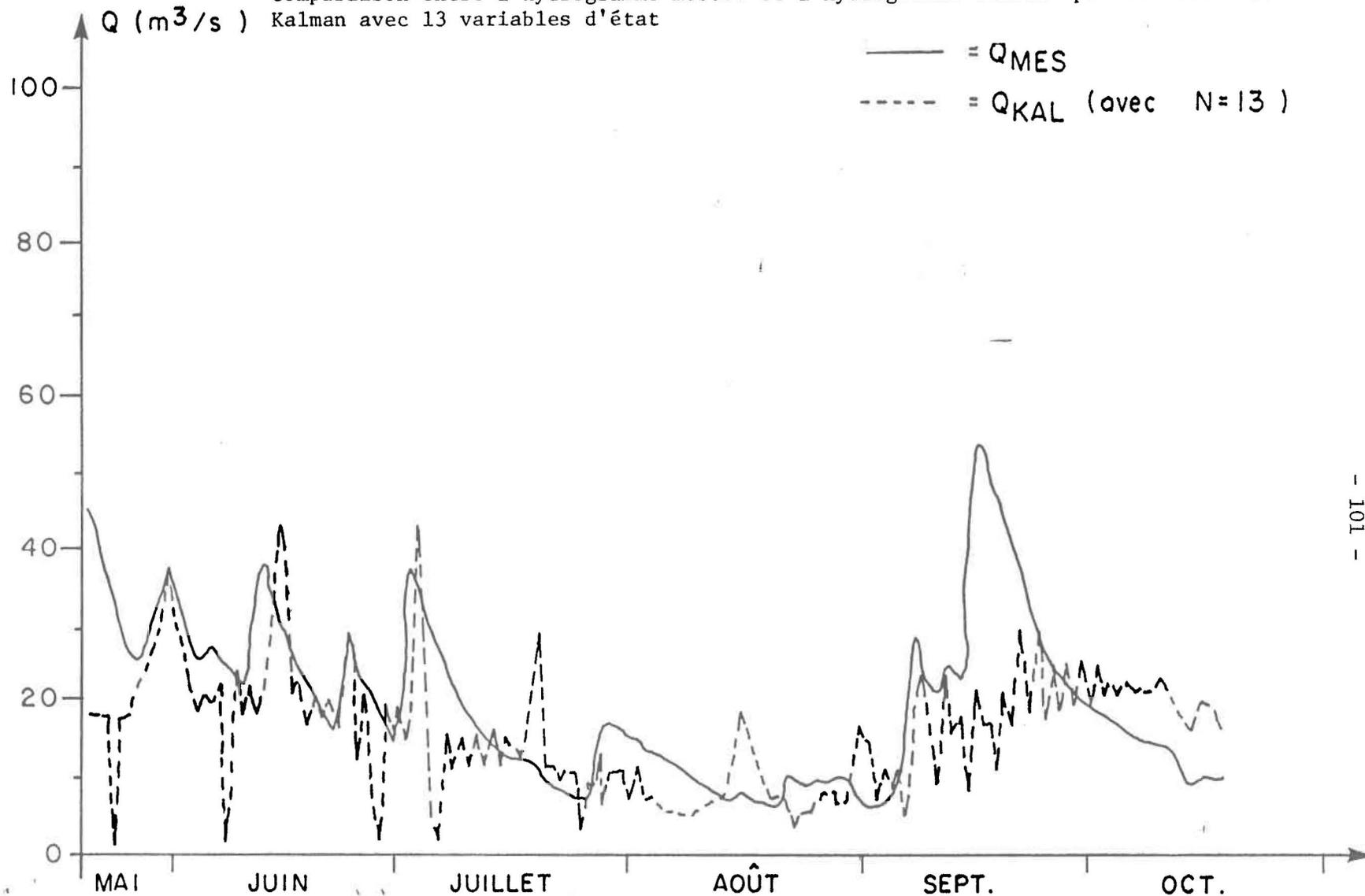


Figure 4.3

Comparaison entre l'hydrogramme mesuré et l'hydrogramme calculé par le filtre de Kalman avec 13 variables d'état



Elles confirment que, malgré l'utilisation d'informations supplémentaires (données d'entrée du jour de la simulation), le modèle MDOR ne peut générer de débits aussi optimaux que le filtre de Kalman. Le filtre de Kalman agit donc comme une sorte de méthode de calibration sur le modèle MDOR modifié. Au tableau 4.1, on peut observer un exemple du genre de sorties qui peut être générées par l'opération de filtrage. Ces sorties peuvent donner de l'information sur les variations des variables intrinsèques du système (R, R<sub>ui</sub>, E, Q<sub>1</sub>, etc.).

Comme les équations qui décrivent ces variables ont été dérivées du modèle MDOR, on devrait s'attendre à ce que les valeurs des variables obtenues par le filtrage s'approchent des valeurs obtenues par le modèle MDOR. Or, ce n'est pas tout à fait le cas. Au tableau 4.2, on a évalué, pour quatre variables d'état (R, R<sub>ui</sub>, Q<sub>1</sub> et E), l'écart type entre les valeurs obtenues du filtrage et les valeurs simulées par le modèle MDOR<sup>1</sup>. Cette évaluation de l'efficacité relative (par rapport au modèle MDOR) du filtre a été effectuée à partir d'une séquence de 15 jours de simulation. Comme référence, on a aussi inclus, au tableau 4.2, les valeurs des critères calculées pour le débit à partir de la même séquence de 15 jours. On peut observer qu'elles se situent dans le même ordre de grandeur que celles calculées pour la séquence de 150 jours.

---

<sup>1</sup> Pour ces quatre variables d'état, les mesures correspondent aux sorties du modèle MDOR (section 3.4.1).

Tableau 4.1  
Simulation avec 13 variables d'état<sup>1</sup>

JOUR 150																																																																																																									
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 10%;">X*</td><td style="width: 10%;">( 1 )</td><td style="width: 10%;">=</td><td style="width: 80%;">29,23</td></tr> <tr><td>X*</td><td>( 2 )</td><td>=</td><td>60 560,89</td></tr> <tr><td>X*</td><td>( 3 )</td><td>=</td><td>60 226,04</td></tr> <tr><td>X*</td><td>( 4 )</td><td>=</td><td>10,43</td></tr> <tr><td>X*</td><td>( 5 )</td><td>=</td><td>8,62</td></tr> <tr><td>X*</td><td>( 6 )</td><td>=</td><td>11,36</td></tr> <tr><td>X*</td><td>( 7 )</td><td>=</td><td>10,59</td></tr> <tr><td>X*</td><td>( 8 )</td><td>=</td><td>4,07</td></tr> <tr><td>X*</td><td>( 9 )</td><td>=</td><td>359,76</td></tr> <tr><td>X*</td><td>(10)</td><td>=</td><td>2,07</td></tr> <tr><td>X*</td><td>(11)</td><td>=</td><td>4,60</td></tr> <tr><td>X*</td><td>(12)</td><td>=</td><td>4,21</td></tr> <tr><td>X*</td><td>(13)</td><td>=</td><td>11,74</td></tr> </table>	X*	( 1 )	=	29,23	X*	( 2 )	=	60 560,89	X*	( 3 )	=	60 226,04	X*	( 4 )	=	10,43	X*	( 5 )	=	8,62	X*	( 6 )	=	11,36	X*	( 7 )	=	10,59	X*	( 8 )	=	4,07	X*	( 9 )	=	359,76	X*	(10)	=	2,07	X*	(11)	=	4,60	X*	(12)	=	4,21	X*	(13)	=	11,74	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 10%;">P*</td><td style="width: 10%;">( 1, 1 )</td><td style="width: 10%;">=</td><td style="width: 80%;">3 299,28</td></tr> <tr><td>P*</td><td>( 2, 2 )</td><td>=</td><td>2 580 312,90</td></tr> <tr><td>P*</td><td>( 3, 3 )</td><td>=</td><td>2 232 325,67</td></tr> <tr><td>P*</td><td>( 4, 4 )</td><td>=</td><td>21,56</td></tr> <tr><td>P*</td><td>( 5, 5 )</td><td>=</td><td>11,56</td></tr> <tr><td>P*</td><td>( 6, 6 )</td><td>=</td><td>16,18</td></tr> <tr><td>P*</td><td>( 7, 7 )</td><td>=</td><td>6,18</td></tr> <tr><td>P*</td><td>( 8, 8 )</td><td>=</td><td>974,59</td></tr> <tr><td>P*</td><td>( 9, 9 )</td><td>=</td><td>84 632,75</td></tr> <tr><td>P*</td><td>(10,10)</td><td>=</td><td>283,81</td></tr> <tr><td>P*</td><td>(11,11)</td><td>=</td><td>40 925,81</td></tr> <tr><td>P*</td><td>(12,12)</td><td>=</td><td>38 933,68</td></tr> <tr><td>P*</td><td>(13,13)</td><td>=</td><td>50 976,64</td></tr> </table>	P*	( 1, 1 )	=	3 299,28	P*	( 2, 2 )	=	2 580 312,90	P*	( 3, 3 )	=	2 232 325,67	P*	( 4, 4 )	=	21,56	P*	( 5, 5 )	=	11,56	P*	( 6, 6 )	=	16,18	P*	( 7, 7 )	=	6,18	P*	( 8, 8 )	=	974,59	P*	( 9, 9 )	=	84 632,75	P*	(10,10)	=	283,81	P*	(11,11)	=	40 925,81	P*	(12,12)	=	38 933,68	P*	(13,13)	=	50 976,64
X*	( 1 )	=	29,23																																																																																																						
X*	( 2 )	=	60 560,89																																																																																																						
X*	( 3 )	=	60 226,04																																																																																																						
X*	( 4 )	=	10,43																																																																																																						
X*	( 5 )	=	8,62																																																																																																						
X*	( 6 )	=	11,36																																																																																																						
X*	( 7 )	=	10,59																																																																																																						
X*	( 8 )	=	4,07																																																																																																						
X*	( 9 )	=	359,76																																																																																																						
X*	(10)	=	2,07																																																																																																						
X*	(11)	=	4,60																																																																																																						
X*	(12)	=	4,21																																																																																																						
X*	(13)	=	11,74																																																																																																						
P*	( 1, 1 )	=	3 299,28																																																																																																						
P*	( 2, 2 )	=	2 580 312,90																																																																																																						
P*	( 3, 3 )	=	2 232 325,67																																																																																																						
P*	( 4, 4 )	=	21,56																																																																																																						
P*	( 5, 5 )	=	11,56																																																																																																						
P*	( 6, 6 )	=	16,18																																																																																																						
P*	( 7, 7 )	=	6,18																																																																																																						
P*	( 8, 8 )	=	974,59																																																																																																						
P*	( 9, 9 )	=	84 632,75																																																																																																						
P*	(10,10)	=	283,81																																																																																																						
P*	(11,11)	=	40 925,81																																																																																																						
P*	(12,12)	=	38 933,68																																																																																																						
P*	(13,13)	=	50 976,64																																																																																																						
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 10%;">X</td><td style="width: 10%;">( 1 )</td><td style="width: 10%;">=</td><td style="width: 80%;">32,50</td></tr> <tr><td>X</td><td>( 2 )</td><td>=</td><td>60 676,82</td></tr> <tr><td>X</td><td>( 3 )</td><td>=</td><td>60 386,17</td></tr> <tr><td>X</td><td>( 4 )</td><td>=</td><td>11,99</td></tr> <tr><td>X</td><td>( 5 )</td><td>=</td><td>9,46</td></tr> <tr><td>X</td><td>( 6 )</td><td>=</td><td>11,24</td></tr> <tr><td>X</td><td>( 7 )</td><td>=</td><td>10,53</td></tr> <tr><td>X</td><td>( 8 )</td><td>=</td><td>4,87</td></tr> <tr><td>X</td><td>( 9 )</td><td>=</td><td>355,16</td></tr> <tr><td>X</td><td>(10)</td><td>=</td><td>2,40</td></tr> <tr><td>X</td><td>(11)</td><td>=</td><td>6,31</td></tr> <tr><td>X</td><td>(12)</td><td>=</td><td>6,08</td></tr> <tr><td>X</td><td>(13)</td><td>=</td><td>14,61</td></tr> </table>	X	( 1 )	=	32,50	X	( 2 )	=	60 676,82	X	( 3 )	=	60 386,17	X	( 4 )	=	11,99	X	( 5 )	=	9,46	X	( 6 )	=	11,24	X	( 7 )	=	10,53	X	( 8 )	=	4,87	X	( 9 )	=	355,16	X	(10)	=	2,40	X	(11)	=	6,31	X	(12)	=	6,08	X	(13)	=	14,61	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 10%;">P</td><td style="width: 10%;">( 1, 1 )</td><td style="width: 10%;">=</td><td style="width: 80%;">0,00</td></tr> <tr><td>P</td><td>( 2, 2 )</td><td>=</td><td>2 510 165,70</td></tr> <tr><td>P</td><td>( 3, 3 )</td><td>=</td><td>2 216 964,21</td></tr> <tr><td>P</td><td>( 4, 4 )</td><td>=</td><td>11,55</td></tr> <tr><td>P</td><td>( 5, 5 )</td><td>=</td><td>8,63</td></tr> <tr><td>P</td><td>( 6, 6 )</td><td>=</td><td>6,18</td></tr> <tr><td>P</td><td>( 7, 7 )</td><td>=</td><td>4,70</td></tr> <tr><td>P</td><td>( 8, 8 )</td><td>=</td><td>954,43</td></tr> <tr><td>P</td><td>( 9, 9 )</td><td>=</td><td>71 749,20</td></tr> <tr><td>P</td><td>(10,10)</td><td>=</td><td>272,99</td></tr> <tr><td>P</td><td>(11,11)</td><td>=</td><td>40 517,23</td></tr> <tr><td>P</td><td>(12,12)</td><td>=</td><td>38 236,56</td></tr> <tr><td>P</td><td>(13,13)</td><td>=</td><td>49 979,36</td></tr> </table>	P	( 1, 1 )	=	0,00	P	( 2, 2 )	=	2 510 165,70	P	( 3, 3 )	=	2 216 964,21	P	( 4, 4 )	=	11,55	P	( 5, 5 )	=	8,63	P	( 6, 6 )	=	6,18	P	( 7, 7 )	=	4,70	P	( 8, 8 )	=	954,43	P	( 9, 9 )	=	71 749,20	P	(10,10)	=	272,99	P	(11,11)	=	40 517,23	P	(12,12)	=	38 236,56	P	(13,13)	=	49 979,36
X	( 1 )	=	32,50																																																																																																						
X	( 2 )	=	60 676,82																																																																																																						
X	( 3 )	=	60 386,17																																																																																																						
X	( 4 )	=	11,99																																																																																																						
X	( 5 )	=	9,46																																																																																																						
X	( 6 )	=	11,24																																																																																																						
X	( 7 )	=	10,53																																																																																																						
X	( 8 )	=	4,87																																																																																																						
X	( 9 )	=	355,16																																																																																																						
X	(10)	=	2,40																																																																																																						
X	(11)	=	6,31																																																																																																						
X	(12)	=	6,08																																																																																																						
X	(13)	=	14,61																																																																																																						
P	( 1, 1 )	=	0,00																																																																																																						
P	( 2, 2 )	=	2 510 165,70																																																																																																						
P	( 3, 3 )	=	2 216 964,21																																																																																																						
P	( 4, 4 )	=	11,55																																																																																																						
P	( 5, 5 )	=	8,63																																																																																																						
P	( 6, 6 )	=	6,18																																																																																																						
P	( 7, 7 )	=	4,70																																																																																																						
P	( 8, 8 )	=	954,43																																																																																																						
P	( 9, 9 )	=	71 749,20																																																																																																						
P	(10,10)	=	272,99																																																																																																						
P	(11,11)	=	40 517,23																																																																																																						
P	(12,12)	=	38 236,56																																																																																																						
P	(13,13)	=	49 979,36																																																																																																						

- X\*(i) : ième variable du vecteur d'état prédite par le filtre (voir tableau 3.4)
- P\*(i,i): covariance des erreurs associées à la prédiction de la variable d'état (X\*(i))
- X(i) : ième variable du vecteur d'état corrigée en utilisant les mesures au jour "j"
- P(i,i) : covariance des erreurs associées à la correction de la variable d'état (X(i)) (notons que P(1,1) = 0,00, puisqu'on a supposé que la mesure du débit (X(1)) était le parfait reflet de la réalité)

$$Q_{MES} = X(1) = 32,50$$

$$Q_{MDOR} = 42,76$$

$$Q_{KAL} = X^*(1) = 29,23$$

<sup>1</sup>  $\underline{X}(t)$ : (13 x 1): n = 13

$\underline{Y}(t)$ : (3 x 1): m = 3

Tableau 4.2  
Efficacité relative du filtre (13 variables)<sup>1</sup>

$\bar{Q}_{MES}$	=	21,5		
$\sigma_{KAL}$	=	12,9	$R^*_{KAL} \cong$	60 %
$\bar{R}_{uiMES}$	=	0,6		
$\sigma_{KAL}$	=	26,7	$R^*_{KAL} \cong$	4450 %
$\bar{Q}l_{MES}$	=	0,2		
$\sigma_{KAL}$	=	1,9	$R^*_{KAL} \cong$	950 %
$\bar{E}_{MES}$	=	491,0		
$\sigma_{KAL}$	=	596,0	$R^*_{KAL} \cong$	121 %
$\bar{R}_{MES}$	=	27 600,0		
$\sigma_{KAL}$	=	8 387,0	$R^*_{KAL} \cong$	30 %

<sup>1</sup> Les critères ont été évalués pour une séquence de 15 jours pris au hasard dans la série de 150 jours. Rappelons que nous avons calculé pour la série de 150 jours les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{MES} &= 19,67 \\ \sigma_{KAL} &= 10,60\end{aligned}$$

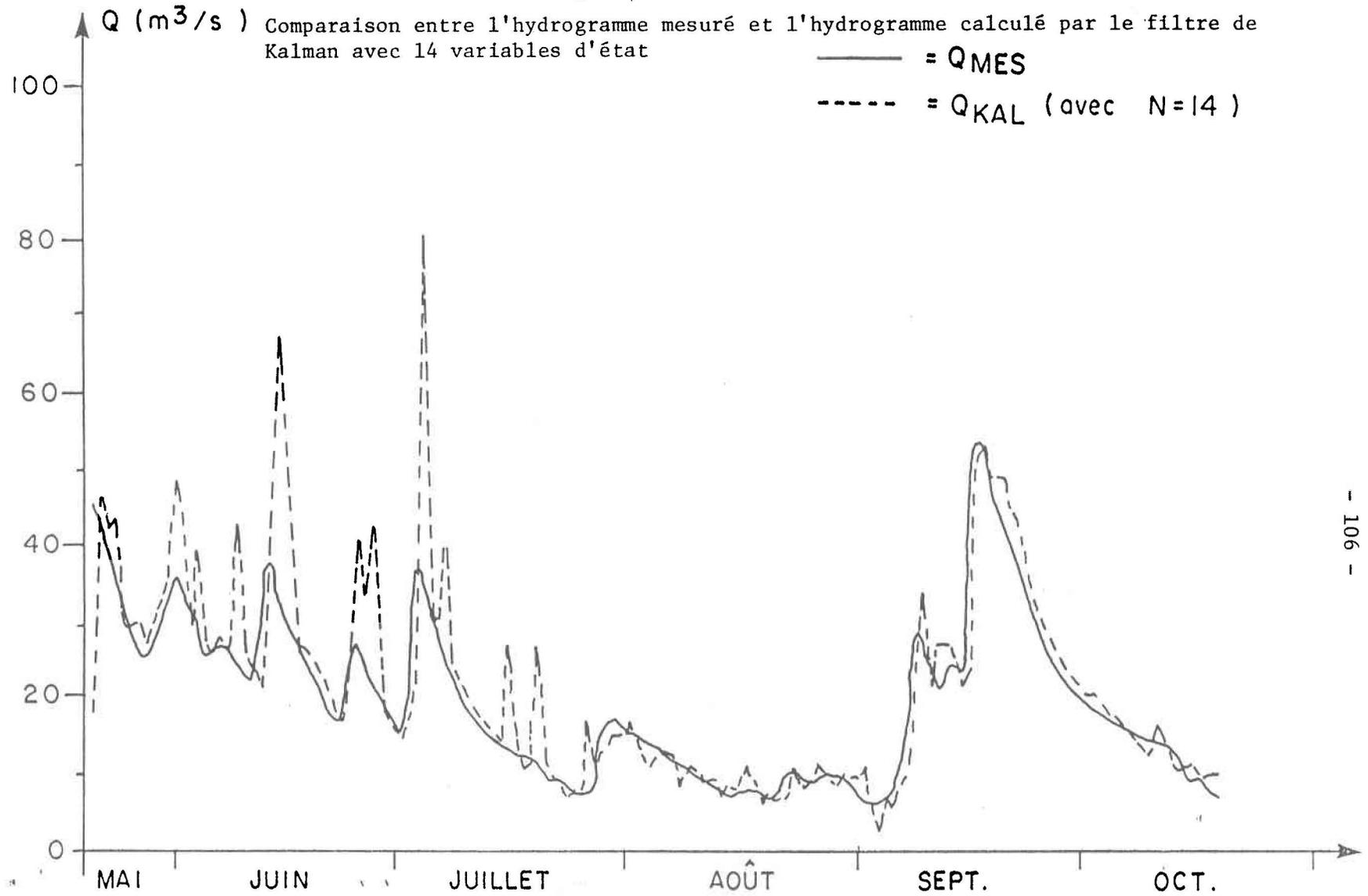
$$R^*_{KAL} \cong 53 \%$$

On peut déduire de ce tableau que les valeurs des variables  $R_{ui}$ ,  $Q_1$  et même  $E$ , ne se situent pas tout à fait dans le même ordre de grandeur dans les deux simulations (filtre et modèle MDOR). Ce problème est probablement associé à l'accroissement des covariances des erreurs de plusieurs variables d'état ( $P(i, i)$ ), observable entre autres au tableau 4.1. On n'a qu'à comparer la valeur de la covariance des erreurs attribuée à la variable  $R$  ( $P(2,2)$ ) avec sa valeur initiale de 300 000 (voir tableau 3.9). Cet accroissement peut être la cause de divergence entre les valeurs prédites et les valeurs réelles des variables d'état (section 2.2.2) ainsi que de l'instabilité de la prédiction observée à la figure 4.3.

Pour tenter de résoudre ces problèmes, nous avons effectué une deuxième simulation en considérant cette fois, les 14 premières variables ( $n = 14$ ) du vecteur d'état initial ( $\underline{X}(t)$ , voir tableau 3.4). De plus, nous avons utilisé sept variables d'état ( $Q, P, T, R, R_{ui}, Q_1$  et  $E$ ) dans notre vecteur de mesure ( $\underline{Y}(t)$ ,  $m = 7$ ) pour accroître l'horizontalité des corrections apportées à notre prédiction.

L'utilisation de quatre nouvelles variables de mesure ne peut que stabiliser notre simulation et rapprocher des valeurs mesurées, les valeurs filtrées des variables qui sont issues du modèle MDOR ( $R, R_{ui}, Q_1$  et  $E$ ). La simulation a été effectuée sur la même période que précédemment (jours 141 à 290). L'hydrogramme calculé par le filtre (lorsque  $n = 14$ ) est beaucoup plus proche de la réalité (figure 4.4) que les hydrogrammes précédents. On remarque une diminution de la sinuosité de la courbe (donc stabilisation de la prédiction) ainsi que la disparition des pics négatifs.

Figure 4.4



Curieusement, il existe une analogie entre la courbe de  $Q_{KAL}$  ( $n = 14$ ) et celle de  $Q_{MDOR}$ , au niveau des pics du début de la période de simulation. Cela est normal puisqu'on corrige maintenant nos valeurs filtrées par 4 variables issues du modèle MDOR (R, Rui, Q1 et E). Le filtre donne toujours des résultats plus optimaux que le modèle MDOR tel que confirmé par les valeurs des critères  $\sigma$  et  $R^*$  calculées pour les 150 jours de simulation:

$$\bar{Q}_{MES} = 19,67$$

$$\sigma_{MDOR} = 14,96$$

$$R_{MDOR}^* = 76 \%$$

$$\sigma_{KAL} = 7,83$$

$$R_{KAL}^* = 40 \%$$

Une comparaison entre ces critères et ceux calculés pour la simulation précédente indique que la simulation à treize variables est moins efficiente, au sens des moindres carrés, que la présente. De plus, on peut observer que les sorties de l'opération de filtrage à 14 variables se rapprochent beaucoup plus des valeurs mesurées (tableau 4.3).

Il existe encore des accroissements de la covariance des erreurs des variables d'état ( $P(i, i)$ ), mais d'un ordre beaucoup moins élevé que précédemment (voir tableau 4.4,  $P(2,2)$ ). Il faudrait, pour remédier à ce problème, réévaluer de façon optimale les matrices  $\underline{Q}$  et  $\underline{R}$  qui caractérisent les bruits associés aux modèles et aux mesures et aussi améliorer l'estimation des conditions initiales (particulièrement  $\underline{P}(t_0|t_0)$ ).

Tableau 4.3  
Efficacité relative du filtre (14 variables) <sup>1</sup>

$\bar{Q}_{MES}$	=	21,5		
$\sigma_{KAL}$	=	7,7	$R^*_{KAL} \cong$	36 %
$\bar{R}_{uiMES}$	=	0,6		
$\sigma_{KAL}$	=	6,5	$R^*_{KAL} \cong$	1 080 %
$\bar{Q}^1_{MES}$	=	0,2		
$\sigma_{KAL}$	=	1,5	$R^*_{KAL} \cong$	750 %
$\bar{E}_{MES}$	=	491,0		
$\sigma_{KAL}$	=	1 129,0	$R^*_{KAL} \cong$	230 %
$\bar{R}_{MES}$	=	27 600,0		
$\sigma_{KAL}$	=	2 101,0	$R^*_{KAL} \cong$	7,6 %

<sup>1</sup> Les critères ont été évalués pour les mêmes 15 jours que dans le tableau 4.2. Pour la série de 150 jours, on avait:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{MES} &= 19,67 \\ \sigma_{KAL} &= 7,83 \end{aligned}$$

$$R^*_{KAL} \cong 40 \%$$

Tableau 4.4  
Simulation avec 14 variables d'état <sup>1</sup>

JOUR 150			
X* ( 1 ) =	32,84	P* ( 1, 1 ) =	4 029,31
X* ( 2 ) =	68 522,80	P* ( 2, 2 ) =	249 712,72
X* ( 3 ) =	68 271,08	P* ( 3, 3 ) =	68 022,40
X* ( 4 ) =	10,26	P* ( 4, 4 ) =	20,67
X* ( 5 ) =	8,63	P* ( 5, 5 ) =	10,67
X* ( 6 ) =	9,16	P* ( 6, 6 ) =	15,61
X* ( 7 ) =	10,63	P* ( 7, 6 ) =	5,61
X* ( 8 ) =	3,68	P* ( 8, 7 ) =	179,20
X* ( 9 ) =	321,22	P* ( 9, 8 ) =	29 064,46
X* (10) =	1,61	P* (10,10) =	246,37
X* (11) =	1,96	P* (11,11) =	17 562,09
X* (12) =	0,11	P* (12,12) =	16 129,62
X* (13) =	7,51	P* (13,13) =	22 004,95
X* (14) =	100,79	P* (14,14) =	10 239,22
<hr/>			
X ( 1 ) =	32,50	P ( 1, 1 ) =	0,00
X ( 2 ) =	68 543,66	P ( 2, 2 ) =	67 981,88
X ( 3 ) =	68 325,25	P ( 3, 3 ) =	49 862,53
X ( 4 ) =	12,10	P ( 4, 4 ) =	10,62
X ( 5 ) =	9,79	P ( 5, 5 ) =	6,81
X ( 6 ) =	11,10	P ( 6, 6 ) =	5,51
X ( 7 ) =	12,51	P ( 7, 7 ) =	2,05
X ( 8 ) =	3,51	P ( 8, 8 ) =	63,89
X ( 9 ) =	496,24	P ( 9, 9 ) =	99,58
X (10) =	8,33	P (10,10) =	70,82
X (11) =	11,79	P (11,11) =	17 112,44
X (12) =	18,59	P (12,12) =	14 557,10
X (13) =	31,33	P (13,13) =	19 643,89
X (14) =	95,58	P (14,14) =	10 096,71

- X\*(i) : ième variable du vecteur d'état prédite par le filtre (voir tableau 3.4)
- P\*(i,i): covariance des erreurs associées à la prédiction de la variable d'état (X\*(i))
- X(i) : ième variable du vecteur d'état corrigée en utilisant les mesures au jour "J"
- P(i,i) : covariance des erreurs associées à la correction de la variable d'état (X(i)) (notons que P(1,1) = 0,00, puisqu'on a supposé que la mesure du débit (X(1)) était le parfait reflet de la réalité)

$$Q_{MES} = X(1) = 32,50$$

$$Q_{MDOR} = 42,76$$

$$Q_{KAL} = X^*(1) = 32,84$$

<sup>1</sup>  $\underline{X}(t)$ : (14 x 1): n = 14

$\underline{Y}(t)$ : ( 7 x 1 ): m = 7

Il faut souligner l'amélioration de la prédiction de la variable R (tableaux 4.2 et 4.3). Les variations de cette variable contribuent énormément à la formation du débit, particulièrement en période d'étiage. Une meilleure prédiction de cette variable ne peut qu'améliorer l'ensemble de notre opération de prédiction.

Pour compléter les opérations de prédiction journalière, nous avons effectué une autre simulation mais échelonnée sur une période de 300 jours (jours 41 à 341, du mois de février au mois de décembre). Nous avons alors dû inclure dans notre filtre les équations d'état, dérivées au chapitre 3.3.2.3, qui modélisent le comportement du sous-système Fonte. Nous avons donc utilisé 25 variables d'état ( $n = 25$ , voir tableau 3.4) et 8 variables de mesures ( $m = 8$ , voir tableau 3.6).

Deux sections de l'hydrogramme obtenu de ces simulations ont été reportées aux figures 4.5 et 4.6. La première section (figure 4.5) correspond à la même période (jours 140 à 290) considérée aux simulations précédentes (voir figures 4.2 à 4.4.). Comme on s'y attendait, c'est celle qui donne les meilleurs résultats, tant au niveau de la stabilité que de la concordance des pics, et ce, plus particulièrement dans la première partie de la période considérée (jours 140 à 190). Cette période correspondait en fait au début des simulations représentées aux figures 4.3 et 4.4. Ce n'est plus le cas pour la simulation à 25 variables puisque son démarrage débute au jour 41. On peut donc déduire que l'opération de filtrage a besoin d'une certaine période de rodage pour éliminer l'instabilité de ses prédictions et ce, en raison principalement de mauvaises estimations des

Figure 4.5

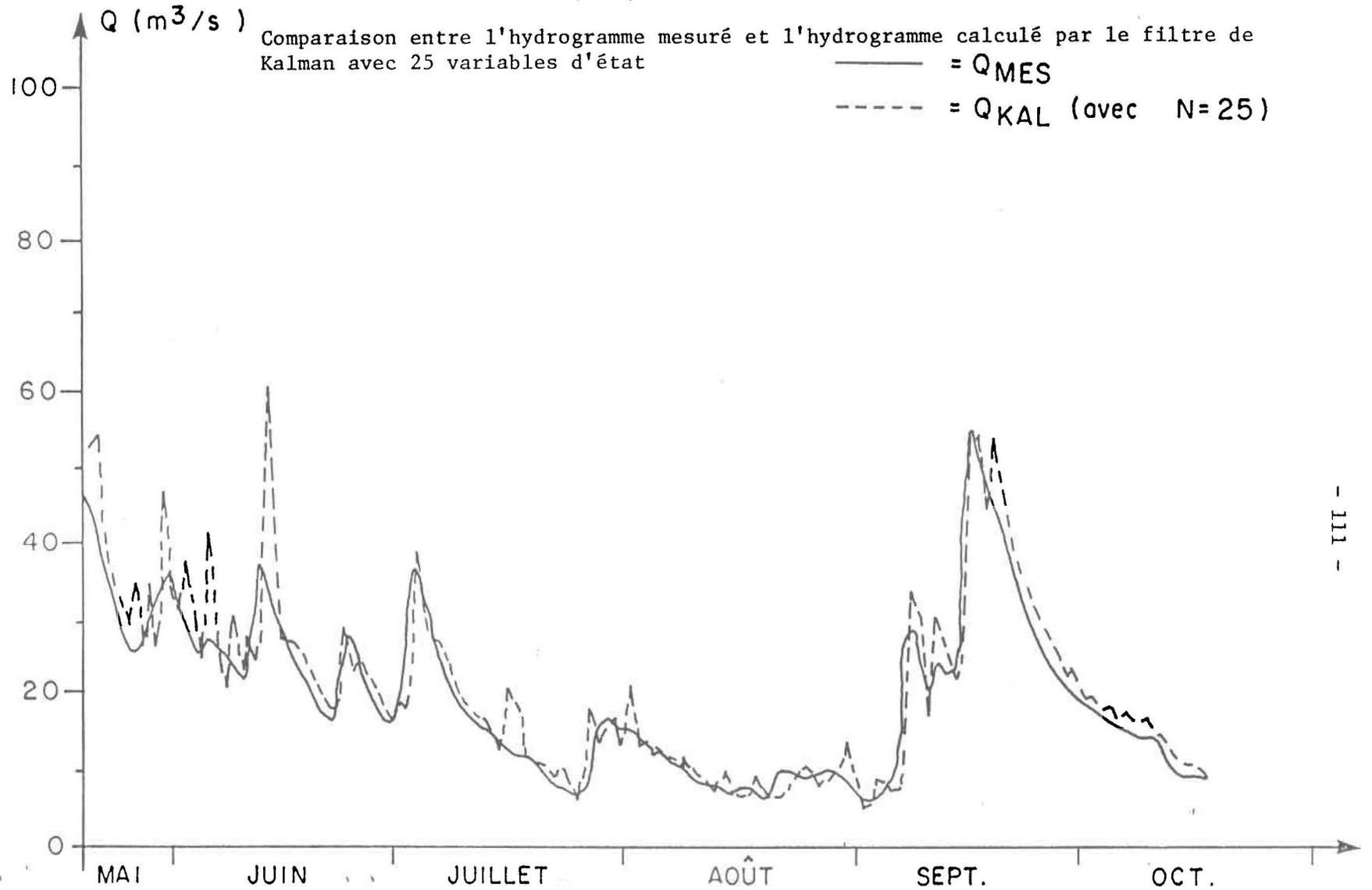
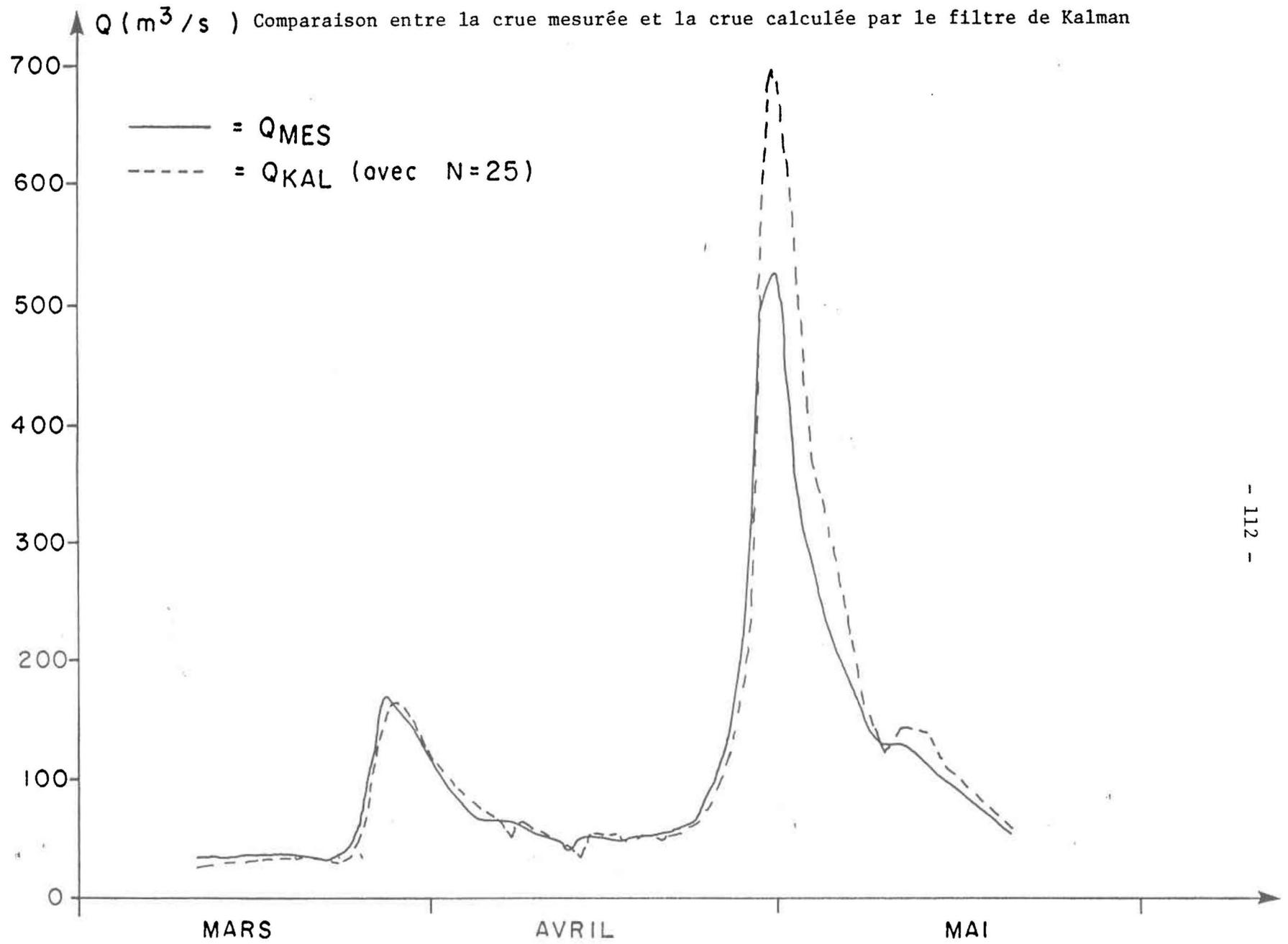


Figure 4.6

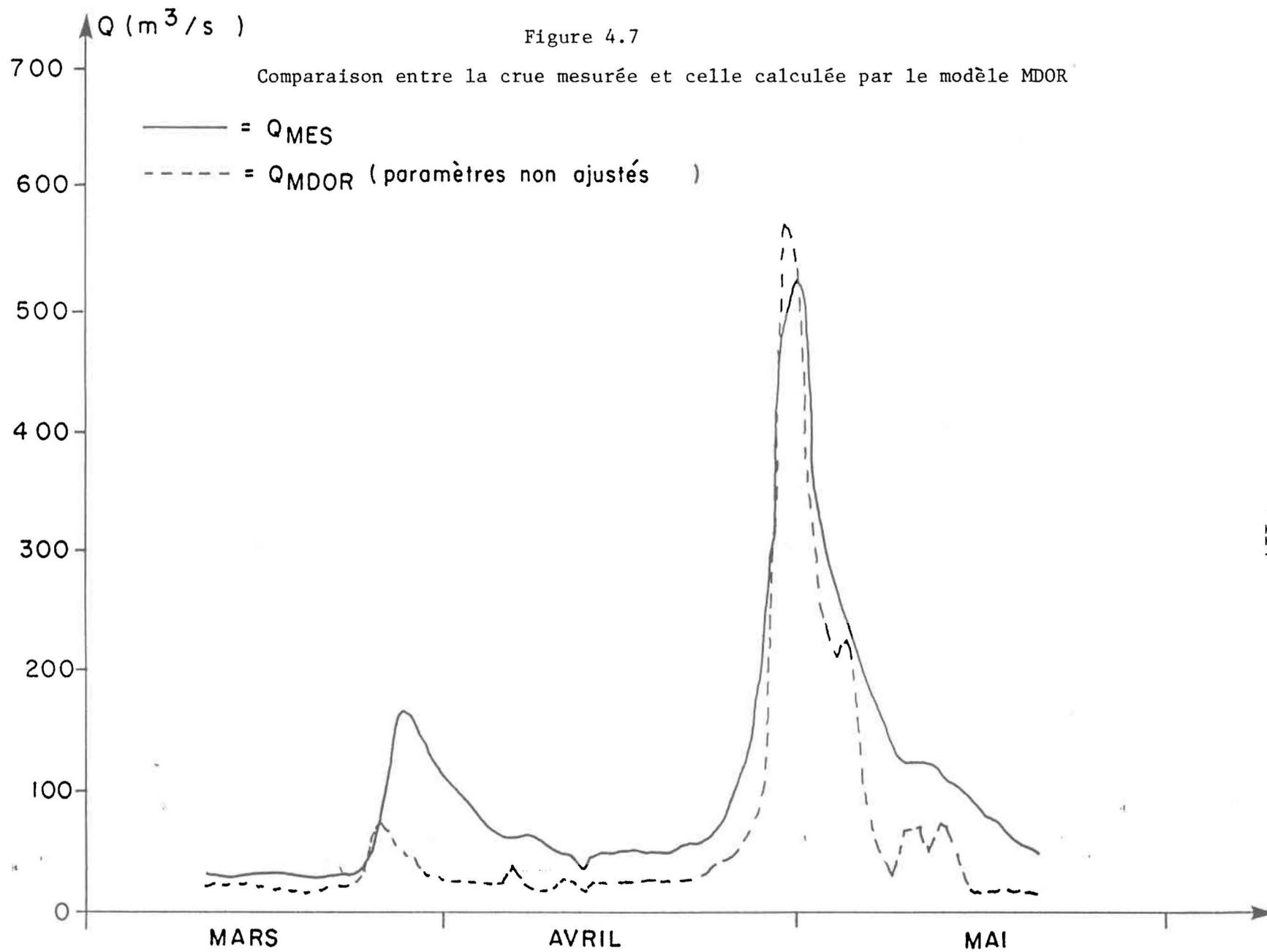


conditions initiales des variables d'état. La supériorité de cette simulation par rapport aux précédentes est confirmée par les valeurs des critères calculées pour la même séquence de 15 jours utilisée aux tableaux 4.2 et 4.3:

$$\bar{Q}_{\text{MES}} = 21,5$$
$$\sigma_{\text{KAL}} = 4,12 \quad R_{\text{KAL}}^* = 19\%$$

Les figures 4.6 (comparaison entre  $Q_{\text{KAL}}$  et  $Q_{\text{MES}}$ ) et 4.7 (comparaison entre  $Q_{\text{MDOR}}$  et  $Q_{\text{MES}}$ ) correspondent à la période de crue du printemps (jours 70 à 140, mois de mars au mois de mai). Pour accentuer les différences entre les courbes, nous avons changé d'échelles verticale et horizontale. Bien que les résultats obtenus du filtre soient plus proches des mesures dans l'ensemble que ceux obtenus du modèle MDOR, ils sont nettement plus déficients au niveau de la reproduction du maximum de crue. Cependant, on doit rappeler que le but de l'opération de filtrage étant la prédiction, on ne dispose donc pas de l'information sur les données météorologiques du jour de la simulation (contrairement au modèle MDOR). On tente plutôt de prédire ces mêmes données météorologiques à partir d'équations qui, il faut le dire, sont peut représentatives de la réalité (voir équations 3.10, 3.11 et 3.12).

La période correspondant à la crue maximum (jour 110 à jour 140) contribue pour près de 95% de la covariance (entre  $Q_{\text{KAL}}$  et  $Q_{\text{MES}}$ ) calculée pour 272 jours de simulation. Cela démontre bien la précision de cette



opération de prédiction. On pourrait se demander s'il est plus important de bien simuler la crue ou s'il est préférable de bien simuler l'ensemble du débit sur une période d'un an. Evidemment, la réponse dépendra des raisons pour lesquelles le gestionnaire a effectué la prédiction. Les valeurs des critères mathématiques calculées pour 272 jours de simulations sont:

$$\bar{Q}_{MES} = 41,88$$

$$\sigma_{MDOR} = 30,6 \quad R^*_{MDOR} = 73\%$$

$$\sigma_{KAL} = 23,2 \quad (n = 25) \quad R^*_{KAL} = 55\%$$

Comme nous l'avons souligné précédemment, le modèle MDOR utilisé pour nos simulations n'avait pas été calibré adéquatement. Il utilisait donc une série de paramètres non ajustés. Or, le filtre de Kalman, en plus de permettre une opération de prédiction et de donner des informations sur les variations des différentes variables d'état, a permis aussi une certaine calibration du modèle utilisé (modèle MDOR modifié), puisqu'il optimisait ses estimations en fonction d'un critère de performance (les moindres carrés). Dans une étude ultérieure, il pourrait être intéressant d'évaluer les possibilités réelles du filtre dans le domaine de la calibration en temps réel des paramètres d'un modèle. On n'aurait alors qu'à ajouter au vecteur d'état les paramètres qu'on veut optimiser.

#### 4.3. Longueur d'une prédiction

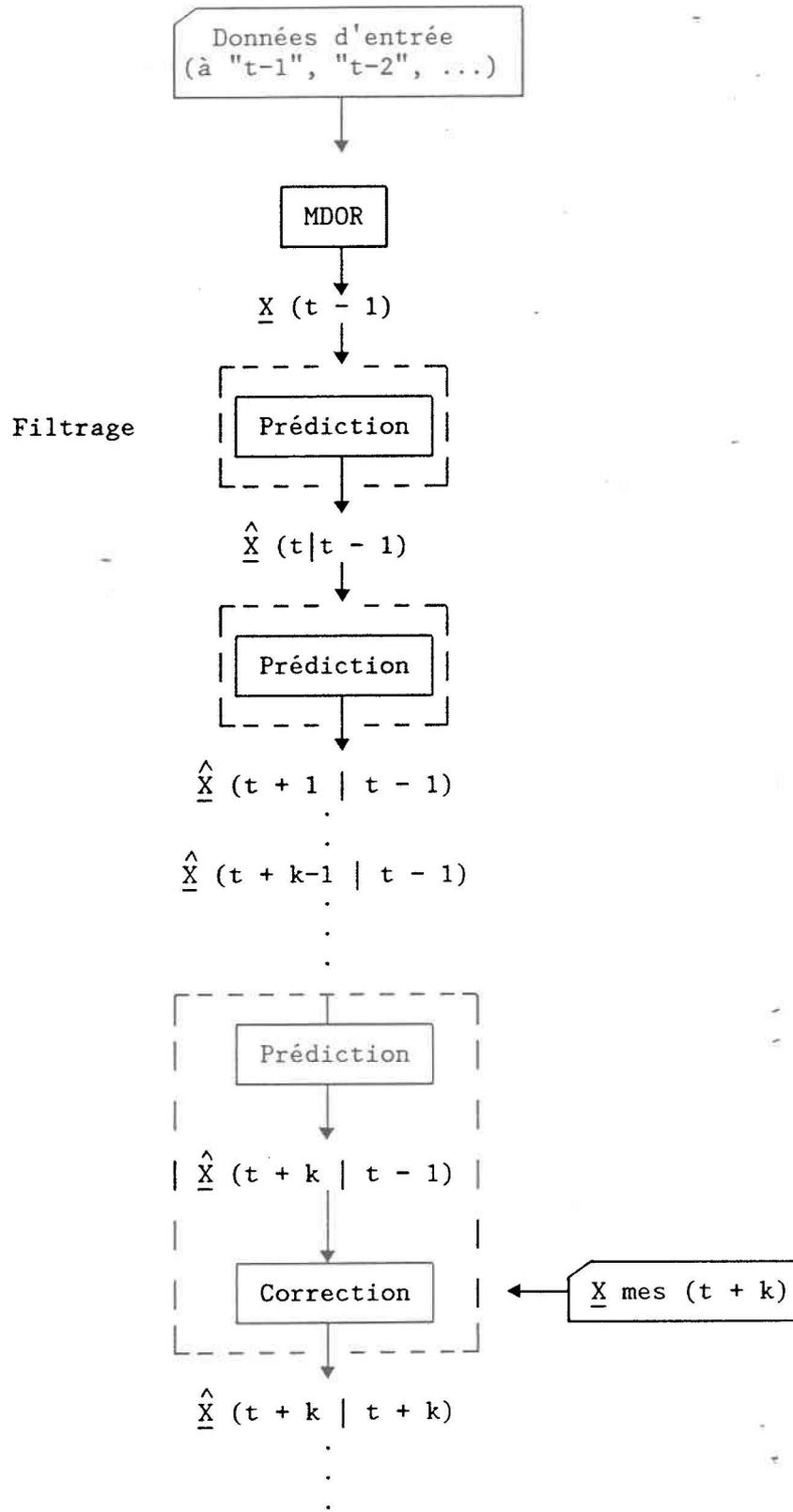
Nous avons démontré, à la section précédente, l'efficacité du filtre pour la prédiction "journalière". Nous avons aussi tenté d'évaluer les possibilités du filtre pour effectuer une prédiction faite plusieurs jours à l'avance.

Nous avons donc effectué une simulation selon le cheminement présenté à la figure 4.8. Pour permettre la prédiction pour les "k" prochains jours, il faut ignorer les mesures des "k" jours suivant le début de la simulation. De cette façon, la correction ne peut s'effectuer. On obtient donc, à partir des données antérieures au jour "t" (début de la simulation), une prédiction du vecteur d'état au jour "t + k" ( $\hat{X}(t + k | t - 1)$ ).

Les résultats obtenus s'éloignent passablement des valeurs recherchées ( $Q_{MES}$ ,  $R_{MES}$ , etc.) à mesure que s'accroît la longueur de la prédiction. À partir d'une longueur supérieure à cinq jours ( $k \geq 5$ ), les résultats ne représentent plus vraiment la réalité. Ceci est principalement causé par la faible représentativité de certaines équations d'état. On pense notamment aux trois équations d'état qui décrivent le comportement des variables météorologiques (P, T et N) et qui s'écrivent sous la forme suivante:

$$M(t) = M(t - 1) + \Delta M(t - 1) \quad (\text{voir équation 3.8})$$

Figure 4.8  
Prédiction pour les "k" prochains jours



Cette équation est suffisamment représentative pour les prédictions journalières. Ce n'est plus le cas pour une prédiction s'échelonnant sur plusieurs jours, ce qui résulte à des valeurs aberrantes, qui n'ont plus grand lien avec la réalité. Nous n'avons donc pas eu les résultats escomptés pour ce type de prédiction à plus long terme.

### CONCLUSION

Le concept du filtre de Kalman permet de relier intuitivement l'analyse en série de temps à la modélisation déterministe. Le filtre de Kalman est un opérateur mathématique, applicable aux modèles déterministes, qui utilise les informations passées, présentes et futures sur un système pour en améliorer les connaissances passées, présentes ou futures.

L'opération de filtrage tient compte de l'incertitude intrinsèque des différentes sources d'information. Il permet une correction de la prédiction à partir d'une pondération des mesures et des prédictions antérieures. On a pu observer qu'il pouvait compenser pour une mauvaise calibration d'un modèle.

Lorsque le filtre est optimal, il donnera une estimation à variance minimum (efficacité) qui tendra à égaler la valeur moyenne réelle de la population (sans biais). Il utilise toute l'information disponible soit: l'information "a priori" sur la mécanique d'un système (équation d'état) et sur les incertitudes (matrices  $\underline{Q}$  et  $\underline{R}$ ) ainsi que l'information "a posteriori" (mesures) qui est incorporée à l'opération de filtrage par le biais de mises à jour continues.

Le filtre est caractérisé par un certain processus d'apprentissage (voir équation 2.11) qui se traduit par une diminution des limites de confiance des estimations, et ce, de façon asymptotique (lorsque  $N \rightarrow \infty$ ). Ces estimations convergeront donc vers la valeur vraie à mesure que se déroulera notre simulation.

Cette dernière qualité ne s'appliquait pas vraiment à nos simulations. En effet, les résultats de nos simulations ont démontré une certaine instabilité au niveau de la matrice de covariances des erreurs (P), qui était probablement causée par une mauvaise évaluation des caractéristiques statistiques des bruits associés au système.

Il a été démontré (Bowles, 1978) que la performance du filtre était plus sensible aux erreurs de détermination de la structure interne du modèle qu'aux spécifications des matrices Q et R et/ou des conditions initiales. L'obtention de bonnes performances lors de nos simulations indiquent donc que nos équations d'état décrivent bien le système étudié. Cependant, une meilleure estimation des matrices d'erreurs (Q et R) et des conditions initiales aurait certainement diminué certaines instabilités observables en début de simulation.

La formulation de l'algorithme de calcul selon une équation markovienne de type récursive comporte plusieurs avantages:

- elle évite la nécessité de mémoriser des vieilles données d'entrée, ce qui diminue le besoin de "temps-ordinateur";
- elle permet la prédiction de toutes les variables d'état;
- elle permet d'observer les variations lentes de certains paramètres (calibration en temps réel).

Le filtre est donc une technique d'estimation séquentielle optimale adaptée à la détermination de tout système considéré stochastique. Il pourrait être appliqué à un processus de type décisionnel tel un système de gestion. Prenons, par exemple, la ressource-eau.

Le développement de cette ressource nécessite la formulation de stratégie et de politique d'opération. Le contrôle optimal du système "eau" doit se faire de façon à optimiser une fonction de performance. Pour arriver à une gestion efficace, on devra suivre les étapes suivantes:

- a) décrire le système et l'information disponible;
- b) définir une fonction de performance;
- c) déterminer les meilleures stratégies possibles en tenant compte de a et b.

Le problème peut se traduire ainsi: trouver, à partir de tous les scénarios possibles, celui qui minimise la fonction de performance tout en tenant compte des contraintes inhérentes à la dynamique interne du système. De plus, si on veut établir une bonne stratégie de développement, on devra tenir compte (donc tenter de quantifier) de la nature stochastique des systèmes hydrologiques.

Cet énoncé ressemble étrangement à celui employé pour décrire les objectifs du filtre de Kalman. Cela indique donc une partie du niveau d'application du filtre de Kalman. Dans cet optique, le filtre de Kalman

deviendra un outil pouvant faciliter la détermination d'une politique optimale de gestion. Le gestionnaire pourra suivre le cheminement suivant:

- trouver l'estimation optimum des  $x(t)$ ;
- déterminer la politique de contrôle en supposant que les estimations correspondent aux valeurs réelles.

Ce mélange de calcul stochastique et de théorie déterministe permet donc l'amélioration des connaissances d'un système. Il devient un outil complémentaire important, en permettant l'inclusion des incertitudes au domaine déterministe.

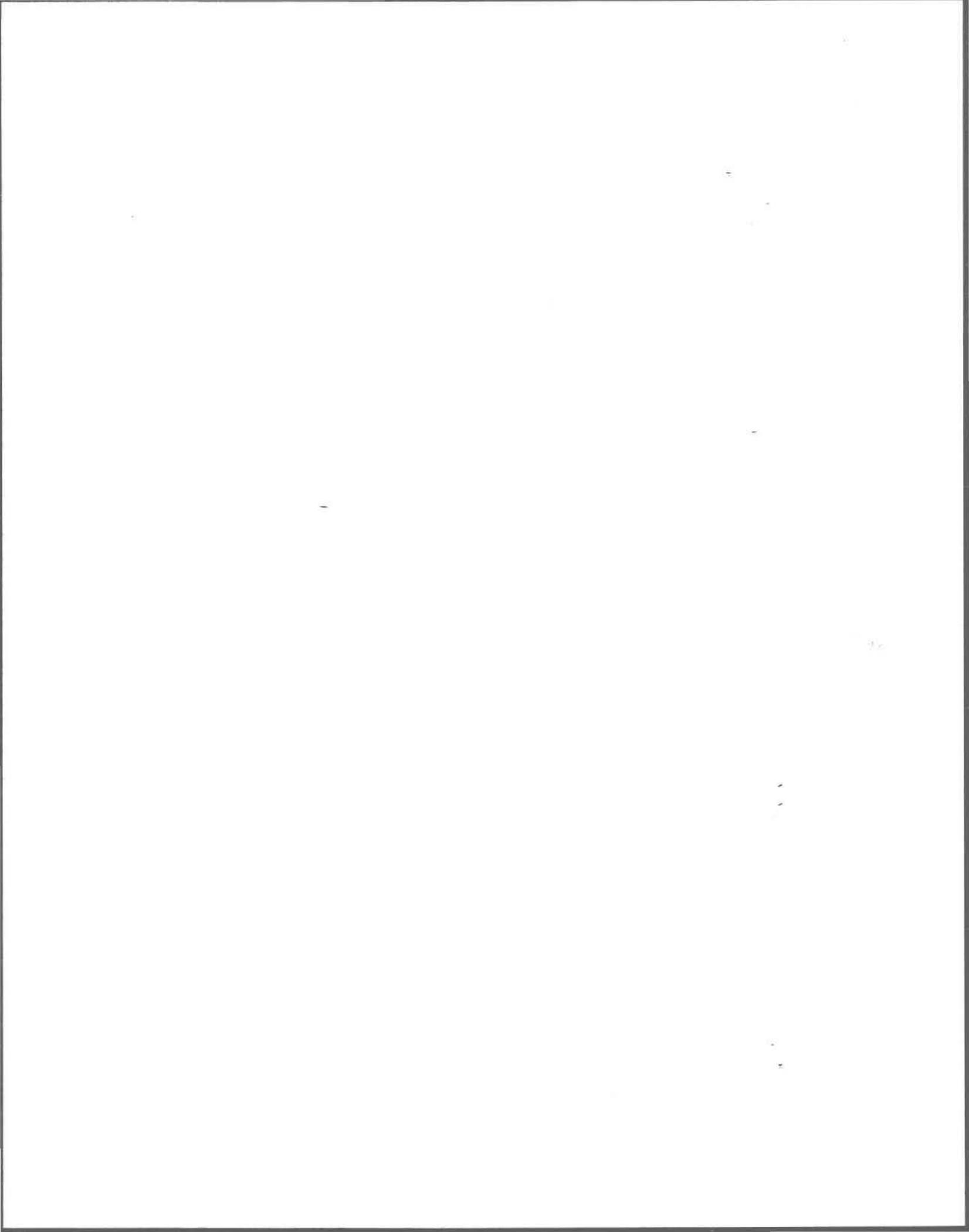
Le filtre de Kalman s'inscrit donc parfaitement dans la nouvelle mode de développement d'outil de gestion intégrée, qui favorise l'approche multidisciplinaire pour permettre l'amélioration de la compréhension et pour faciliter la manipulation des systèmes étudiés.

Dans cette étude, nous avons réussi à appliquer le filtre de Kalman à un modèle déterministe de type conceptuel. En plus de permettre une opération de prédiction, le filtre a compensé pour un manque de calibration du modèle. En effet, il effectue une certaine calibration puisqu'il optimise ses estimations en fonction d'un critère de performance. Bien que les performances du filtre aient été jugées satisfaisantes pour la prédiction journalière, il reste certains domaines qui mériteraient d'être

explorés. Notamment, nous avons pu remarquer que la longueur d'une prédiction était limitée (section 4.3) ce qui restreint le potentiel d'application de la technique. Il faudrait donc pour pallier à cette faiblesse, renforcer le sous système de prévision météorologique.

Nous nous sommes surtout limités à l'interprétation des débits simulés. Cependant, les résultats reliés aux autres variables d'état auraient certainement pu apporter certaines informations permettant d'améliorer les connaissances sur la mécanique d'un système hydrologique. De plus, une évaluation plus stricte des caractéristiques statistiques des bruits permettrait probablement une nette amélioration de certaines parties de nos simulations.

Enfin, il serait intéressant d'évaluer les possibilités de la calibration en temps réel des paramètres du modèle par rapport à la calibration classique et d'en évaluer l'utilité dans une opération intégrée se situant dans le domaine de la prédiction en temps réel.



## BIBLIOGRAPHIE

- AMIRTHANATHAN, G.E. (1982).  
Contribution des techniques de filtrage optimal à quelques problèmes hydrologiques. Thèse de doctorat, 194 p.
- BISHOP, R. (1983).  
A simplified streamflow forecasting model for a small watershed. Pour "Technical workshop on streamflow forecasting", 17 p.
- BISSON, J.L. et F. ROBERGE (1978).  
Modèle mathématique des apports hydrauliques. Dans: Manuel descriptif du système de prévision des apports naturels, appendice 7, volume A, 72 p.
- BISSON, J.L., et F. ROBERGE (1983).  
Prévision des apports naturels: expérience d'Hydro-Québec. Technical workshop on streamflow forecasting, 15 p.
- BOWLES, D.S. et W.J. GRENNEY (1978).  
Steady state river quality modeling by sequential extended Kalman filters. Présenté à "American geophysical union fall annual meeting", p. 84-86.
- BOZIC, S.M. (1979).  
Digital and Kalman filtering, 157 p.
- CHAPMAN, T.G. (1968).  
Catchment parameters for a deterministic rainfall - runoff model. Dans: "Land evaluation", par Stewart, p. 312-323.
- CLARKE, R.T. (1973).  
Mathematical models in hydrology. Food and agriculture organization of the United Nations (FAO), 282 p.
- CLUCKIE, I.D., HARWOOD, D.A. et R. HARPIN (1980).  
Three systems approaches to real time rainfall - runoff forecasting. Proceedings of the Oxford symposium, April, p. 389-396.
- COOPER, A.J. (1978).  
Streamflow forecasting. Dans: "Geophysical predictions", National academy of science, p. 193-201.
- DAUDELIN, S. (1983).  
Version préliminaire - thèse de maîtrise, 150 p.
- DAWDY, D.R. et R.W. LICHTY (1968).  
Methodology of hydrologic model building. Pour "U.S. Geological survey", p. 347-355.

- DAWDY, D.R. et T. O'DONNELL (1965).  
Mathematical models of catchment behavior. Proceedings of the American society of civil engineers, July, p. 123-137.
- DELLEUR, J.W. (1978).  
Les processus du type ARIMA pour la prévision et la simulation en hydrométéorologie. La houille blanche, 6: 391-400.
- DICKINSON, W.T., HOLLAND, M.E. et G.L. SMITH (1967).  
An experimental rainfall - runoff facility. Pour "Hydrology papers", Colorado state univesity, 82 p.
- DOOGE, J.C.I. (XXXX).  
Mathematical models of hydrologic systems. Pour "International symposium on mathematical modelling techniques in water resources systems", p. 171-189.
- FIERING, M.B., HARRINGTON, J.J. et R.J. DE LUCIA (1971).  
Water resources systems analysis. Pour le ministère d'Énergie, mines et ressources, Ottawa, p. 29-33.
- FLEMING, G. (1971).  
Comment on "River flow forecasting through conceptual models parts I, II and III". Journal of Hydrology, p. 351-356.
- GIGNAC, C., ROUSSELLE, J. et N. EL-JABI (XXXX).  
Application de modèles hydrologiques pour la prévision de crues. p. 153-163.
- HANEDA, M. et J. MATSUMOTO (1981).  
Statistical evaluation of water quality in the Omono river. Technology reports, Tohoku University, 46(2): 313-329.
- HINO, M. (1973).  
On line prediction of hydrologic system. International association for hydraulic research (IAHR), proceedings of the XVth conference, Istanbul, p. 121-129.
- HOGG, W.D., PUGSLEY, W.I., SCHAEFER, D.G. et N. YACOWAR (1983).  
Meteorological inputs to streamflow forecasting. Technical workshop on streamflow forecasting, Ontario, 16 p.
- ISABEL, D. (1983).  
Utilisation des méthodes numériques d'optimisation et d'analyse de sensibilité dans la calibration des modèles hydrologiques analytiques. Thèse de maîtrise, 154 p.
- JACKSON, B.B. (1975).  
The use of streamflow models in planning. Water Resources Research, 2(1): 54-63.

- JAZWINSKI, A.H. (1969).  
Adaptive filtering. Dans: "Automatica", Great Britain, 5: 475-485.
- KALMAN, R.E. (1960).  
A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of basic engineering, p. 35-45.
- KALMAN, R.E. (1978).  
A retrospective after twenty years: from the pure to the applied. Dans: "Application of Kalman filter to hydrology, hydraulics and water resources", proceedings of AGU conference of Pittsburgh, p. 31-54.
- KIRBY, W. (1978).  
Prediction of streamflow hazard. Dans: "Geophysical predictions", National academy of science, p. 202-215.
- LETTENMAIER, D.P. et S.J. BURGESS (1976).  
Use of state estimation techniques in water resources system modelling. Water resources bulletin, 12(1): 83-99.
- LUNDBERG, A. (1982).  
Combination of a conceptual model and an autoregressive error model for improving short time forecasting. Nordic Hydrology, p. 233-246.
- MARSALEK, J. (1979).  
Runoff from developing areas. Technical workshop on modelling activities related to flood damage reduction, Ottawa, p. 265-276.
- MANDEVILLE, A.N., O'CONNELL, P.E., SUTCLIFFE, J.V. et J.E. NASH (1970).  
River flow forecasting through conceptual models, part III. Journal of hydrology, 2: 109-128.
- MCBEAN, E.A. (1982).  
River flow forecasting using filter models. Technical workshop on streamflow forecasting, 18 p.
- MCLAUGHLIN, D.B. (1976).  
Application of Kalman filtering to groundwater basin modelling and prediction. Dans: "Real-time forecasting / control of water resources systems", E.F. Wood, p. 109-125.
- MEHRA, R.K. (1969).  
On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. Proceedings of the 1969 Joint automatic control conference, p. 494-505.
- MEHRA, R.K. (1976).  
A survey of time series modelling and forecasting methodology. Dans: "Real-time forecasting / control of water resources systems", E.F. Wood, p. 7-27.
- MEINHOLD, R.J. et N.D. SINGPURWALLA (1983).  
Understanding the Kalman filter. The American statistician, May, 37(2): 123-127.

- MICHEL, C. (1983).  
Que peut-on faire en hydrologie avec un modèle conceptuel à un seul paramètre ? La houille blanche, 1: 39-44.
- MIMIKOU, M. (1983).  
Kalman filter empirical fitting on monthly rainfall - runoff responses. Nordic hydrology, p. 93-112.
- MOORE, R.J. et G. WEISS (1976).  
Real-time parameter estimation of a non-linear catchment model using extended Kalman filters. Dans: "Real-time forecasting / control of water resources systems", E.F. Wood, p. 83-92.
- MORIN, G. (1983).  
Simulation hydrologique à l'aide du modèle CEQUEAU, 37 p.
- MORTON, F.I. (1983).  
Fundamental problems in streamflow forecasting. Technical workshop on streamflow forecasting, 3 p.
- MORTON, F.I. (1982).  
Integrated basin response - A problem of synthesis or a problem of analysis ? Symposium canadien d'hydrologie 1982, p. 361-383.
- NASH, J.E. et J.V. SUTCLIFFE (1970).  
River flow forecasting through conceptual models part I - A discussion of principles. Journal of hydrology, p. 282-290.
- O'CONNELL, P.E., NASH, J.E. et J.P. FARREL (1970).  
River flow forecasting through conceptual models part II - The Brosna catchment at Ferbane. Journal of hydrology, p. 317-329.
- PECK, E.L., JOHNSON, E.R., KROUSE, K.M., CARROL, T.R. et J.C. SCHAAKE (1980).  
Hydrological update technique used by the U.S. national weather service. Hydrological forecasting, proceedings of the Oxford symposium, April, p. 419-424.
- PICKUP, G. (1977).  
Potential and limitations of rainfall - runoff models for prediction on ungauged catchments: a case study from the Papua New Guinea highlands. Journal of hydrology, 16(1): 87-103.
- PILGRIM, D.H. (1975).  
Model evaluation, testing and parameter estimation in hydrology. Dans: Chapman, T.H., Australia, p. 306-333.
- PUGSLEY, W.I. (1977).  
Meteorological support for flood forecasting in Canada. Technical workshop on streamflow forecasting, 1983, 11 p.

- QUICK, M.C. (1983).  
Computational procedures. Technical workshop on streamflow forecasting, 1983, 12 p.
- RADIX, J.C. (1970).  
Introduction au filtrage numérique, 240 p.
- RAUCH, H.E. (1970).  
Chapter 8 - Linear smoothing techniques. Theory and applications of Kalman filtering, C.T. Leondes, p. 165-181.
- SALOMONSON, V.V., AMBARUCH, R., RANYO, A. et J.P. ORMSBY (1976).  
Remote sensing requirements as suggested by watershed model sensitivity analyses, p. 1273-1284.
- SCHERMERHORN, V.P. et D.W. KUEHL (XXXX).  
Operational streamflow forecasting with the SSARR model, p. 316-327.
- SCHWARTZ, L. et E.B. STEAR (1968).  
A computational comparison of several non-linear filters. IEEE transactions on automatic control, p. 83-86.
- SHARMA, K.P. et R.H. MCCUEN (1983).  
Streamflow forecasting in remote areas. Journal of hydrology, p. 13-23.
- SITTNER, W.T. et K.M. KROUSE (1979).  
Improvement of hydrologic simulation by utilizing observed discharge as an indirect input - CHAT - Computed hydrograph adjustment technique, 125 p.
- SLATER, J.E., WALDEN, R.F. et G.H. MORTON (1983).  
Hydrometric input to forecasting. Technical workshop on streamflow forecasting, 14 p.
- SNYDER, W.M. et J.B. STALL (1965).  
Men, models, methods and machines in hydrologic analysis. Journal of the hydraulic division, ASCE, mars, p. 85-99.
- SZOLLOSI-NAGY, A. (1977).  
Discussion. Water resources bulletin, 13(3): 161-167.
- SZOLLOSI-NAGY, A., TODINI, E. et E.F. WOOD (1977).  
A state-space model for real-time forecasting of hydrological time series. Journal of hydrological sciences, 4(1): 61-76.
- TAMURA, H. et T. KAWAGUCHI (1976).  
Real-time estimation of orders and parameters of distributed lag models of river quality. Dans: "Real-time forecasting / control of water resources systems", E.F. Wood, p. 47-62.

- THOMPSTONE, R.M., SEN, D.K. et R. DIVI (1979).  
Hydrologic modelling and optimization techniques for operating multi-reservoir water resources systems. Proceedings of 4th national hydro-technique conference, River Basin management, mai, Vancouver, p. 132-150.
- TODINI, E. et D. BOUILLOT (1976).  
A rainfall - runoff Kalman filter model. Dans: "Systems simulation in water resources", North Holland, p. 69-81.
- TODINI, E. (1978).  
Mutually interactive state parameter (MISP) estimation. Dans: "Application of Kalman filter to hydrology, hydraulics and water resources", Chiu, Pittsburgh, p. 135-151.
- VILLENEUVE, J.P. (1983).  
Analyse de systèmes des eaux.
- VILLENEUVE, J.P., ISABEL, D. et S. HOULE (1985).  
Le modèle hydrologique MDOR, description et manuel d'utilisation. INRS-Eau, rapport scientifique n° 163, 90 p.
- WEEKS, W.D. et R.H.B. HEBBERT (1980).  
A comparison of rainfall - runoff models. Nordic Hydrology, 11: 7-24.
- WORLD METEO ORGANIZATION (1975).  
Intercomparison of conceptual models used in operational hydrological forecasting. Operational hydrology, rapport n° 7, W.M.O., Genève, 172 p.
- WOOD, E.F. et A. SZOLLOSI-NAGY (1976).  
Introduction. Dans: "Real-time forecasting / control of water resources systems", E.F. Wood, p. 1-7.
- WOOD, E.F. et A. SZOLLOSI-NAGY (1976).  
Introduction part I. Dans: "Real-time forecasting / control of water resources systems", p. 37-43.
- WOOD, E.F. et A. SZOLLOSI-NAGY (1978).  
An adaptive algorithm for analyzing short-term structural and parameter changes in hydrologic prediction models. Water resources research, 14(4): 577-581.
- WOOD, E.F. (1980).  
Filtering of large scale hydrological systems. Symposium of hydrological forecasting, Oxford, avril, p. 45-46.

ANNEXE A  
LE SYSTÈME "LAC"

La sous-routine PRODLAC du modèle MDOR peut être résumée par les équations suivantes:

$$EAULAC_1 = EAULAC_0 + P(t) + N(t) \quad (A.1)$$

$$EAULAC_2 = EAULAC_1 - EVAP(t) \quad (A.2)$$

a) Si:

$$EAULAC_2 \leq 0, QLAC = 0 \quad (A.3.1)$$

b) Sinon:

$$QLAC = K_{16} (EAULAC_2)^{1.5} \quad (A.3.2)$$

$$EAULAC_3 = EAULAC_2 - QLAC \quad (A.4)$$

$$EVAP(t) = (K_1) (6,11 \times 10^{CQ}) \text{ si } T(t) > 0 \quad (A.5.1)$$

$$EVAP(t) = 0 \text{ si } T(t) \leq 0 \quad (A.5.2)$$

et

$$CQ = \frac{7,5 T (t)}{T (t) + 237,5} \quad (A.5.3)$$

avec:

- EAULAC<sub>i</sub> : niveau relatif du réservoir lac à l'étape i;  
P (t), N (t) et T(t): données météo (pluie, neige, température) au temps t;  
EVAP (t) : évaporation au temps t;  
QLAC : débit du carreau lac en millimètre;  
K<sub>1</sub> à K<sub>16</sub> : paramètres du modèle MDOR (voir tableau 3.1b).

Nous allons remplacer la variable QLAC (mm) par Ql (m<sup>3</sup>/s):

$$QLAC = K_0 Ql \quad \text{et} \quad K_0 = 3,456$$

où K<sub>0</sub> est une constante d'unité permettant de passer de m<sup>3</sup>/s à mm (voir section 3.3.1).

Les équations A.1 à A.4 peuvent être réécrites sous une autre forme. Remplaçons d'abord la série des variables EAULAC<sub>i</sub> par les deux variables suivantes Elac (t) et K (t), où:

Elac (t): variable nécessaire au calcul du débit;

K (t) : bilan du réservoir lac.

On aura :

$$\text{Elac } (t) = K (t - 1) + P (t) + N (t) - \text{EVAP } (t) \quad (\text{A.6.1})$$

$$Q1 (t) = \frac{K_{16}}{K_0} (\text{Elac } (t))^{1.5}, \text{ (si Elac } (t) \geq 0) \quad (\text{A.6.2})$$

$$K (t) = \text{Elac } (t) - K_0 Q1 (t) \quad (\text{A.6.3})$$

EVAP (t) est définie par une équation non linéaire (A.5.1) mais est uniquement fonction de la température (f (T; t)). On va donc linéariser l'équation A.5.1 à l'aide de l'expansion par la série de Taylor:

$$\text{EVAP } (t) = \text{EVAP } (t - 1) + \left. \frac{\partial \text{EVAP}}{\partial T} \right|_{t-1} (T(t) - T(t-1)) \quad (\text{A.5.4})$$

avec :

$$\left. \frac{\partial \text{EVAP}}{\partial T} \right|_{t-1} = \frac{(\ln 10 \times K_1 \times 6,11 \times 7,5 \times 237,5) * 10^{CQ}}{(T(t-1) + 237,5)^2} = - CQ1 \quad (\text{A.5.5})$$

donc :

$$\text{EVAP } (t) = \text{EVAP } (t - 1) - CQ1 (T(t) - T (t - 1)) \quad (\text{A.5.6})$$

À partir de l'équation A.6.1, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \text{Elac (t)} - \text{Elac (t - 1)} &= (K (t - 1) - K (t - 2)) + (P (t) - P (t - 1)) \\ &+ (N (t) - N (t - 1)) - (\text{EVAP (t)} - \text{EVAP (t - 1)}) \end{aligned} \quad (\text{A.7.1})$$

En utilisant l'hypothèse de l'égalité des écarts pour les variables P, N et T (section §.3.2.1 et équation 3.13) et l'équation A.5.6, on obtient:

$$\begin{aligned} \text{Elac (t)} &= \text{Elac (t - 1)} + (K (t - 1) - K (t - 2)) + (P (t - 1) - P (t - 2)) \\ &+ (N (t - 1) - N (t - 2)) + CQ1 (T (t - 1) - T (t - 2)) \end{aligned} \quad (\text{A.7.2})$$

En linéarisant l'équation A.6.2, on obtient:

$$Q1 (t) = Q1 (t - 1) + A_1 (\text{Elac (t)} - \text{Elac (t - 1)}) \quad (\text{A.7.3})$$

avec:

$$A_1 = \frac{(1,5) K_{16}}{K_0} (\text{Elac (t - 1)})^{0,5} \text{ si } \text{Elac (t - 1)} > 0 \quad (\text{A.8.1})$$

$$A_1 = 0 \text{ si } \text{Elac (t - 1)} \leq 0$$

On doit aussi inclure la contrainte des équations A.3.1 et A.3.2.

On rajoute donc une constante  $A_0$  telle que:

$$A_0 = 0 \text{ si } Elac(t) \leq 0 \quad (A.8.2)$$

$$A_0 = 1 \text{ si } Elac(t) > 0$$

L'équation A.7.3 pourra s'écrire ainsi:

$$Q1(t) = A_0 Q1(t-1) + A_0 A_1 [(K(t-1) - K(t-2)) + (P(t-1) - P(t-2)) + (N(t-1) - N(t-2)) + CQ1(T(t-1) - T(t-2))] \quad (A.7.4)$$

Enfin on peut transformer l'équation A.6.3 à l'aide des équations A.7.2 et A.7.4:

$$K(t) = Elac(t-1) + (1 - K_0 A_0 A_1) [(K(t-1) - K(t-2)) + (P(t-1) - P(t-2)) + (N(t-1) - N(t-2)) + CQ1(T(t-1) - T(t-2))] - K_0 A_0 Q1(t-1) \quad (A.7.5)$$

On a donc défini trois variables d'état: K, Elac et Q1 et trois constantes qui expriment les contraintes du modèle MDOR ( $A_0$ ,  $A_1$  et CQ1):

$$CQ1 = 0 \text{ si } T(t) \leq 0 \quad (EVAP(t) = 0)$$

$$A_1 = 0 \text{ si } Elac(t-1) \leq 0$$

$$A_0 = 0 \text{ si } Elac(t) \leq 0$$

Sinon:

$$A_0 = 1$$

CQ1 est définie par l'équation A.5.5 et  $A_1$ , par l'équation A.8.1.

## ANNEXE B

### LE SOUS-SYSTÈME "FONTE"

La représentation, sous une forme markovienne, des équations de la sous-routine FONTE est assez complexe puisque l'on doit respecter les nombreuses conditions d'opération de la sous-routine (voir figures B.1a, B.1b et B.2). On a du créer six variables d'état pour permettre la prédiction de la sortie (la variable  $G_5$ ) du sous-système FONTE:

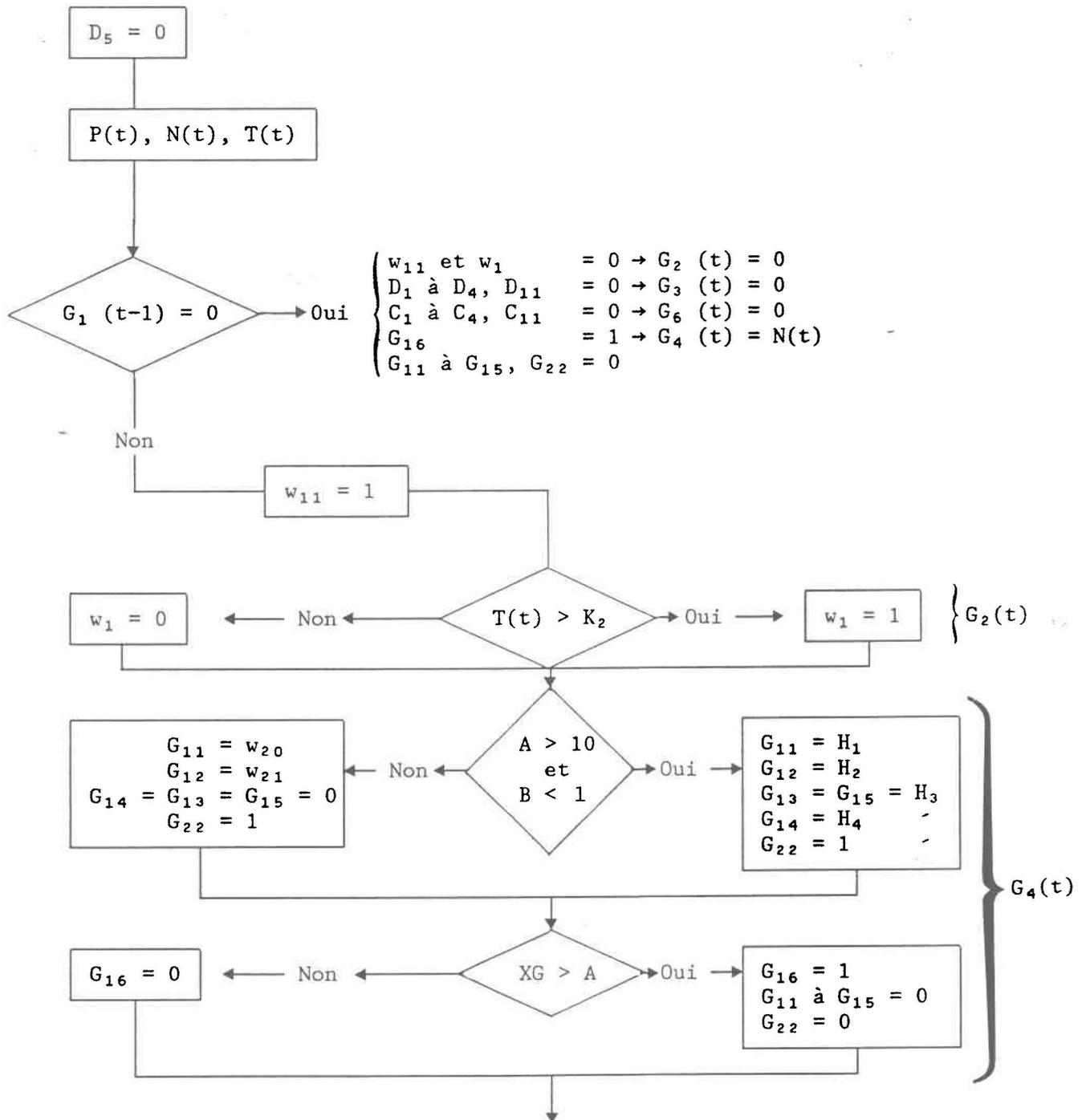
- $G_1$ : réserve de neige au sol (STONEI) <sup>1</sup>
- $G_2$ : cumul des degrés-jours (TEMCUM);
- $G_3$ : température de  $G_1$  (TEMNEI);
- $G_4$ : eau libérée par la fonte (EAUFON);
- $G_5$ : eau disponible pour la suite de l'opération (EAUDIS);
- $G_6$ : quantité d'eau qui regèle (CALFRI).

En suivant le même cheminement qu'aux figures B.1 et B.2, nous pouvons construire les six équations qui permettent la prédiction de ces six variables d'état.

---

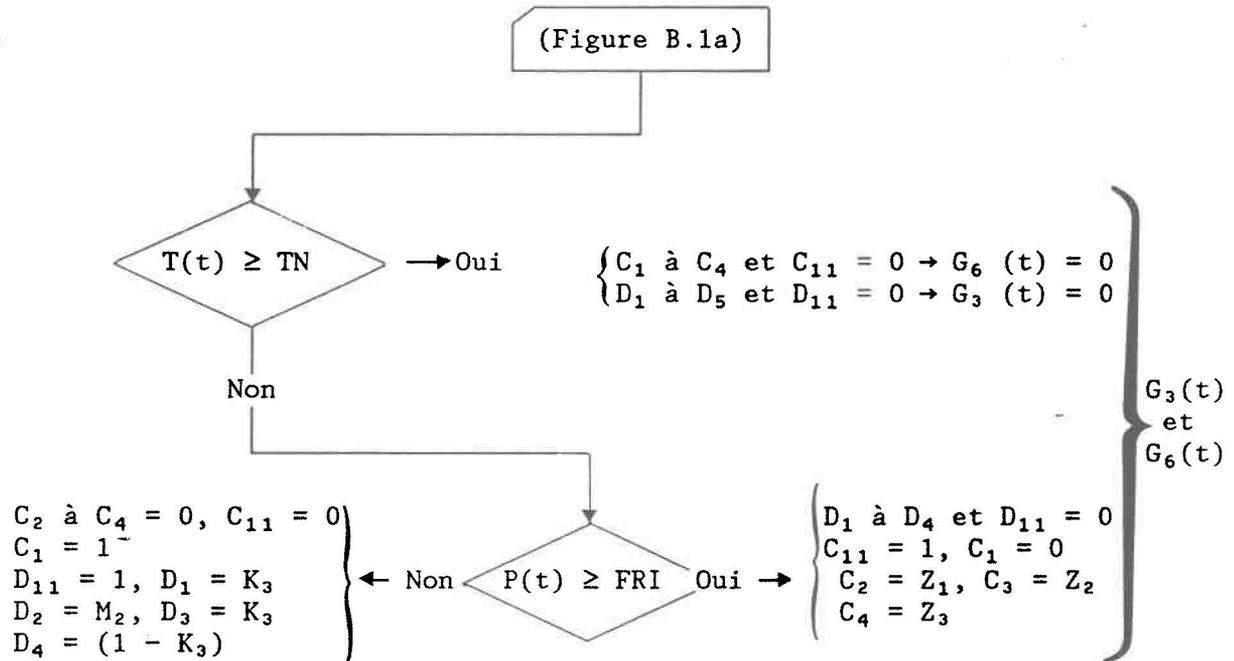
<sup>1</sup> Les mots entre parenthèses représentent les noms originaux de ces variables tels qu'employés dans le modèle MDOR.

Figure B.1a  
 Organigramme de la sous-routine FONTE si  $T(t) > 0$



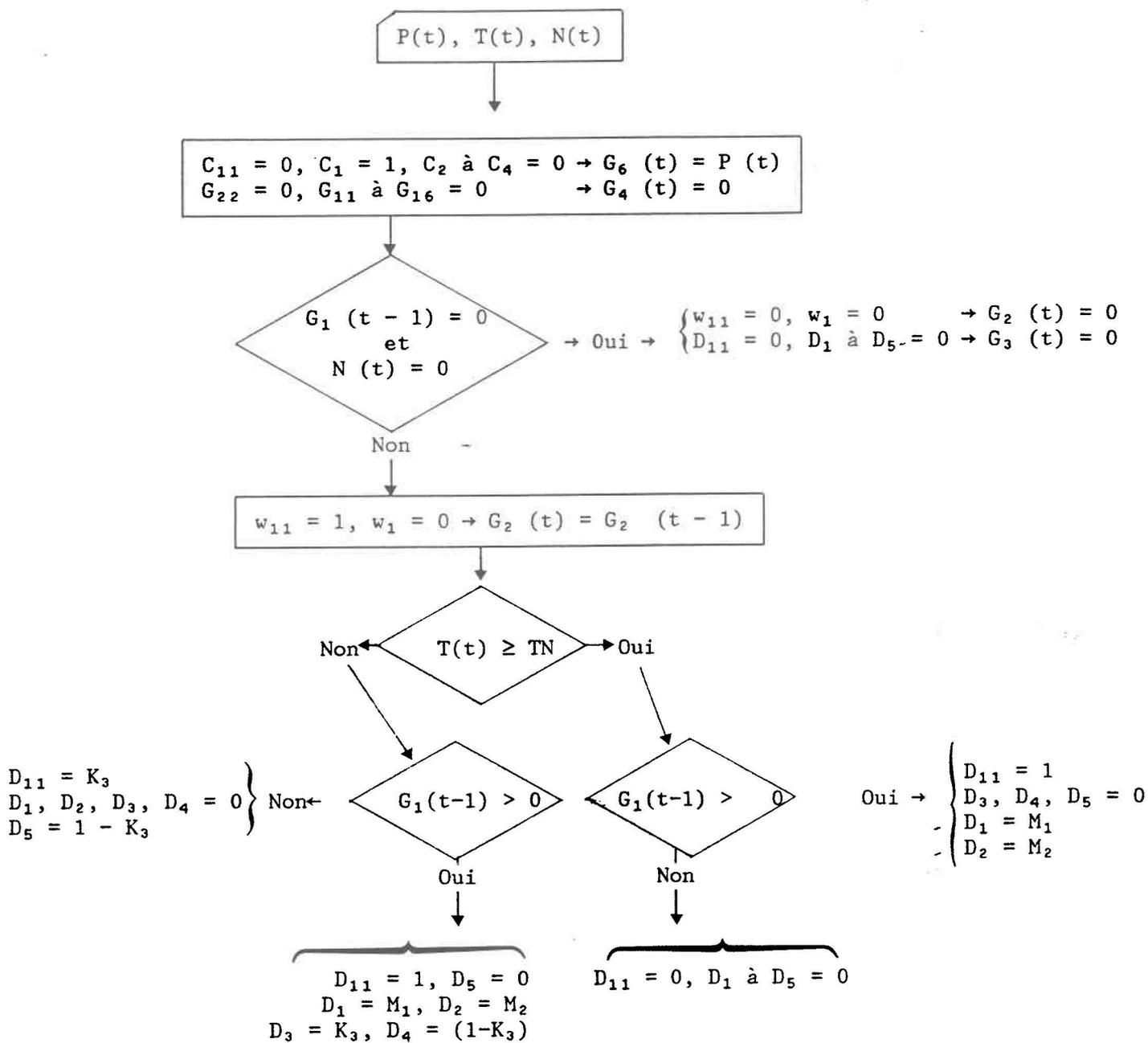
(Figure B.1b)

Figure B.1b  
(suite quand  $T(t) > 0$ )



- $K_i$  :  $i$ ème paramètre du modèle;  
 $A$  : neige totale au sol:  $G_1(t-1) + N(t)$ , voir équation B.3.1;  
 $B$  : voir équation B.3.2;  
 $w_{21}$  :  $(0,0126) (T(t-1))$ ;  
 $w_{20}$  : équation B.4.1;  
 $H_1$  à  $H_4$ : section 1.2.2.1;  
 $XG$  : équation B.5.1 ou B.5.2, suivant le cas (voir section 1.2.2.3);  
 $TN = \frac{-G_3(t-1)K_3}{(1-K_3)}$  (section 1.2.3.1);  
 $FRI = - (0,006) (G_1(t-1)) [K_3 G_3(t-1) + (1-K_3) T(t)]$  (section 1.2.3.2.1);  
 $Z_1$  à  $Z_3 =$  équation B.7.2;  
 $M_1$  à  $M_2 =$  équation B.6.3.

Figure B.2  
Organigramme de la sous-routine FONTE si  $T(t) \leq 0$



Voir figure B.1b pour la définition des variables

1) Si  $T(t) > 0$

1.1) Si  $G_1(t-1) = 0$

$$G_2(t) = 0, G_3(t) = 0, G_6(t) = 0$$

$$G_4(t) = N(t) = N(t-1) + \Delta N(t-1) \quad ^1$$

$$G_1(t) = G_1(t-1) + G_6(t) + N(t) - G_4(t) \quad (\text{B.1})$$

$$G_5(t) = G_4(t) + P(t) - G_6(t) \quad (\text{B.2})$$

1.2) Sinon, ( $G_1(t-1) > 0$ ): <sup>2</sup>

1.2.1) Prédiction de  $G_2(t)$

$$\text{Si } T(t) > K_2, G_2(t) = G_2(t-1) + T(t) - K_2$$

$$\text{Si } T(t) \leq K_2, G_2(t) = G_2(t-1)$$

On déduit l'équation générale suivante:

$$G_2(t) = w_{11} G_2(t-1) + w_1 (T(t) - K_2) \quad (\text{B.1.1})$$

en utilisant l'équation 3.11, on peut écrire:

$$G_2(t) = w_{11} G_2(t-1) + w_1 T(t-1) - w_1 (K_2 - \Delta T(t-1)) \quad (\text{B.1.2})$$

avec:

---

<sup>1</sup> Voir équations 3.12 et 3.13

<sup>2</sup>  $G_1(t-1)$  ne peut être négatif

$$w_{11} = 1 \quad \text{si} \quad G_1 (t - 1) > 0 \quad \text{et} \quad w_{11} = 0 \quad \text{autrement}$$

$$w_1 = 1 \quad \text{si} \quad T (t) > K_2 \quad \text{et} \quad w_1 = 0 \quad \text{autrement}$$

### 1.2.2) Prédiction de $G_4 (t)$

$G_4 (t)$ : minimum entre (FONPOT + MURIS) et  $A^1$

où:

FONPOT: fonte potentielle

$$= (1,326 + K_4 (0,384)) T (t) + 0,0126 T (t) P (t) + 2,286 \quad (\text{B.2.1})$$

$$= F_1 T(t) + X_3 T (t) P (t) + X_4 \quad (\text{B.2.2})$$

avec:

$$F_1 = 1,326 + K_4 (0,384)$$

$$X_3 = 0,0126$$

$$X_4 = 2,286$$

MURIS: coefficient de murissement de la neige;

$$A : \text{réserve de neige au sol} = G_1 (t - 1) + N (t) \quad (\text{B.3.1})$$

MURIS sera la valeur minimum entre 1 et la valeur du coefficient B

---

<sup>1</sup> Référence au modèle MDOR

où:

$$B = \frac{G_2(t) (F_1 T(t) + X_3 T(t) P(t))}{T(t) A} \quad (\text{B.3.2})$$

1.2.2.1) Si  $A > 10$  et  $B < 1$ ,  $\text{MURIS} = B$

$$G_4(t) = B * \text{FONPOT}$$

En utilisant les équations B.1.1 (avec  $w_{11} = 0$ ), B.2.2, B.3.1 et B.3.2, on aura:

$$G_4(t) = \frac{(G_2(t-1) + w_1 T(t) - w_1 K_2) (F_1 + X_3 P(t)) (F_1 T(t) + X_3 T(t) P(t) + X_4)}{(G_1(t-1) + N(t))} \quad (\text{B.3.3})$$

donc:

$$G_4(t): f(G_2(t-1), T(t), P(t), G_1(t-1), N(t); t)$$

À l'aide de l'expansion du premier ordre par la série de Taylor, on peut linéariser l'équation B.3.3.

$$\begin{aligned}
G_4(t) = G_4(t-1) &+ \frac{\partial G_4(t)}{\partial T(t)} \Big|_{t-1} \Delta T(t) + \frac{\partial G_4(t)}{\partial P(t)} \Big|_{t-1} \Delta P(t) + \frac{\partial G_4(t)}{\partial N(t)} \Big|_{t-1} \Delta N(t) \\
&+ \frac{\partial G_4(t)}{\partial G_2(t-1)} \Big|_{t-1} \Delta G_2(t-1) + \frac{\partial G_4(t)}{\partial G_1(t-1)} \Big|_{t-1} \Delta G_1(t-1) \quad (B.3.4)^1
\end{aligned}$$

En posant :

$$F_1 + X_3 P(t-1) = w_{20} \quad (B.4.1)$$

$$G_1(t-2) + N(t-1) = A(t-1) \quad (B.4.2)$$

$$G_2(t-2) + w_{10} T(t-1) - w_{10} K_2 = G_2(t-1) \quad (B.4.3)^2$$

On obtient les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial G_4(t)}{\partial T(t)} \Big|_{t-1} = \frac{w_{20}}{A(t-1)} (w_{20} G_2(t-1) + w_{10} w_{20} T(t-1) + w_{10} X_4) = H_1$$

$$\frac{\partial G_4(t)}{\partial P(t)} \Big|_{t-1} = \frac{X_3 G_2(t-1)}{A(t-1)} (2 w_{20} T(t-1) + X_4) = H_2$$

<sup>1</sup> On sait cependant que  $\Delta T(t)$ ,  $\Delta P(t)$  et  $\Delta N(t) \approx \Delta T(t-1)$ ,  $\Delta P(t-1)$  et  $\Delta N(t-1)$  (équation 3.9).

<sup>2</sup>  $w_{10}$  est l'équivalent de  $w_1$  (équations B.1.1 et B.1.2) pour un pas de temps antérieur; si  $T(t-1) > K_2$ ,  $w_{10} = 1$ , autrement  $w_{10} = 0$ .

$$\left. \frac{\partial G_4(t)}{\partial N(t)} \right|_{t-1} = \frac{-w_{20} G_2(t-1) (w_{20} T(t-1) + X_4)}{A^2(t-1)} = H_3$$

$$\left. \frac{\partial G_4(t)}{\partial G_2(t-1)} \right|_{t-1} = \frac{w_{20} (w_{20} T(t-1) + X_4)}{A(t-1)} = H_4$$

$$\left. \frac{\partial G_4(t)}{\partial G_1(t-1)} \right|_{t-1} = H_3$$

L'équation B.3.4 devient:

$$\begin{aligned} G_4(t) = & G_4(t-1) + H_1 (T(t-1) - T(t-2)) + H_2 (P(t-1) - P(t-2)) \\ & + H_3 (N(t-1) - N(t-2)) + H_3 (G_1(t-1) - G_1(t-2)) \\ & + H_4 (G_2(t-1) - G_2(t-2)) \end{aligned} \quad (B.5.1)$$

1.2.2.2) Sinon, MURIS = 1,0

$$G_4(t) = F_1 T(t) + X_3 T(t) P(t) + X_4$$

$$G_4(t) : f(T(t), P(t); t)$$

En utilisant toujours la série de Taylor pour linéariser cette équation, on obtient:

$$G_4(t) = G_4(t-1) + w_{20}(T(t-1) - T(t-2)) + [X_3 T(t-1)] (P(t-1) - P(t-2)) \quad (B.5.2)$$

1.2.2.3) Dans le cas où la variable  $G_4(t)$ , calculée par les équations B.5.1 ou B.5.2 (suivant le cas) est  $> A$  (équation B.3.1), on aura:

$$G_4(t) = A = G_1(t-1) + N(t) = G_1(t-1) + N(t-1) + \Delta N(t-1) \quad (B.5.3)$$

Construisons une équation générale qui permet la prédiction de  $G_4(t)$  et qui englobe les trois options possibles, données par les équations B.5.1, B.5.2 et B.5.3:

$$G_4(t) = G_{22} G_4(t-1) + G_{11} (T(t-1) - T(t-2)) + G_{12} (P(t-1) - P(t-2)) + (G_{13} + G_{16}) N(t-1) - G_{13} N(t-2) + G_{14} (G_2(t-1) - G_2(t-2)) + (G_{15} + G_{16}) G_1(t-1) - G_{15} G_1(t-2) + G_{16} \Delta N(t-1) \quad (B.5.4)$$

où:

- si la condition 1.2.2.1 est vraie:

$$\begin{array}{lll} G_{22} = 1 & G_{12} = H_2 & G_{14} = H_4 \\ G_{11} = H_1 & G_{13} = G_{15} = H_3 & G_{16} = 0 \end{array}$$

- si la condition 1.2.2.2 est vraie:

$$\begin{array}{ll} G_{22} = 1 & G_{12} = X_3 T(t-1) \\ G_{11} = w_{20} & G_{13} = G_{14} = G_{15} = G_{16} = 0 \end{array}$$

- si la condition 1.2.2.3 est vraie:

$$G_{16} = 1 \quad G_{22} = G_{11} = G_{12} = G_{13} = G_{14} = G_{15} = 0$$

1.2.3) Prédiction de  $G_3(t)$  et de  $G_6(t)$

$$1.2.3.1) \quad \text{Si } T(t) \geq \frac{-G_3(t-1)K_3}{(1-K_3)}$$

$$G_3(t) = 0 \quad (\text{B.6.1})$$

$$G_6(t) = 0 \quad (\text{B.7.1})$$

1.2.3.2) Sinon:

1.2.3.2.1) Si:

$$P(t) \geq - (0,006) (G_1(t-1)) [K_3 G_3(t-1) + (1-K_3) T(t)]$$

$$G_3(t) = 0 \quad (\text{B.6.2})$$

$$G_6(t) = - (0,006) [K_3 G_3(t-1) G_1(t-1) + (1-K_3) T(t) G_1(t-1)] \\ : f(G_1(t-1), G_3(t-1), T(t); t)$$

En linéarisant par la série de Taylor et en utilisant l'équation 3.9 pour  $\Delta T(t)$ , on aura:

$$G_6(t) = G_6(t-1) + Z_1 (G_1(t-1) - G_1(t-2)) + Z_2 (G_3(t-1) - G_3(t-2)) \\ + Z_3 (T(t-1) - T(t-2)) \quad (\text{B.7.2})$$

avec:

$$Z_1 = - (0,006) [K_3 G_3(t-2) + (1-K_3) T(t-1)] \\ Z_2 = - (0,006) (K_3 G_1(t-2)) \\ Z_3 = - (0,006) (1-K_3) G_1(t-2)$$

1.2.3.2.2) Sinon:

$$G_6(t) = P(t) = P(t-1) + \Delta P(t-1) \quad (\text{B.7.3})$$

$$G_3(t) = K_3 G_3(t-1) + (1 - K_3) T(t) + \frac{P(t)}{(0,006) G_1(t-1)}$$

En linéarisant, on obtient:

$$G_3(t) = G_3(t-1) + K_3(G_3(t-1) - G_3(t-2)) + M_1(P(t-1) - P(t-2)) + M_2(G_1(t-1) - G_1(t-2)) + (1 - K_3)(T(t-1) - T(t-2)) \quad (B.6.3)$$

avec:

$$M_1 = \frac{1}{(0,006) (G_1(t-2))}$$

$$M_2 = \frac{-P(t-1)}{(0,006) (G_1(t-2))^2}$$

On peut donc construire deux équations générales qui tiennent compte des différentes options possibles données par les équations B.6.1, B.6.2, B.6.3, B.7.1, B.7.2 et B.7.3:

$$G_3(t) = (D_{11} + D_3) G_3(t-1) - D_3 G_3(t-2) + D_1 (P(t-1) - P(t-2)) + D_2 (G_1(t-1) - G_1(t-2)) + (D_4 + D_5) T(t-1) - D_4 T(t-2) + D_5 \Delta T(t-1) \quad (B.6.4)$$

$$G_6(t) = C_{11} G_6(t-1) + C_2 (G_1(t-1) - G_1(t-2)) + C_3 (G_3(t-1) - G_3(t-2)) + C_4 (T(t-1) - T(t-2)) + C_1 P(t-1) + C_1 \Delta P(t-1) \quad (B.7.4)$$

où, dans le cas des:

- Conditions 1.2.3.1

$$D_{11}, D_1 \text{ à } D_5, C_{11}, C_1 \text{ à } C_4 = 0 \quad 1$$

- Conditions 1.2.3.2.1

$$\begin{array}{lll} D_{11}, D_1 \text{ à } D_5 = 0 & C_{11} = 1 & C_1 = 0 \\ C_2 = Z_1 & C_3 = Z_2 & C_4 = Z_3 \end{array}$$

- Conditions 1.2.3.2.2

$$\begin{array}{l} D_{11} = 1, D_1 = M_1, D_2 = M_2, D_3 = K_3, D_4 = (1 - K_3), D_5 = 0 \\ C_{11}, C_2, C_3 \text{ et } C_4 = 0, C_1 = 1 \end{array}$$

2) Si  $T(t) \leq 0$  (voir figure B.2)

$$G_6(t) = P(t) = P(t-1) + \Delta P(t-1) \quad (\text{voir équation B.7.4})$$

$$G_4(t) = 0 \quad (\text{voir équation B.5.4})$$

2.1) Si  $G_1(t-1) = 0$  et  $N(t) = 0$

$$G_2(t) = 0$$

$$G_3(t) = 0$$

---

<sup>1</sup> Le coefficient  $D_5$  est nécessaire pour tenir compte de la condition  $T(t) \leq 0$  (voir plus loin).

2.2) Sinon:

$$G_2 (t) = G_2 (t - 1)$$

$$2.2.1) \text{ Si } T (t) \geq \frac{- G_3 (t - 1) K_3}{(1 - K_3)}$$

2.2.1.1) Si  $G_1 (t - 1) > 0$

$$G_3 (t) = \frac{P (t)}{(0,006) G_1 (t - 1)}$$

en linéarisant et en se servant de l'équation 3.9 pour  $\Delta P$ , on obtient:

$$\begin{aligned} G_3 (t) = G_3 (t - 1) + & \frac{1}{(0,006) G_1 (t - 2)} \Delta P (t - 1) \\ + & \frac{P (t - 1)}{- (0,006) (G_1 (t - 2))^2} \Delta G_1 (t - 1) \end{aligned} \quad (B.8.1)$$

2.2.1.2) Sinon ( $G_1 (t - 1) = 0$ )

$$G_3 (t) = 0 \quad (B.8.2)$$

$$2.2.2) \text{ Si } T (t) < \frac{- G_3 (t - 1) K_3}{1 - K_3}$$

2.2.2.1) Si  $G_1 (t - 1) > 0$

$$G_3 (t) = G_3 (t - 1) K_3 + (1 - K_3) T (t) + \frac{P (t)}{(0,006) G_1 (t - 1)}$$

et en linéarisant:

$$G_3 (t) = G_3 (t - 1) + K_3 \Delta G_3 (t - 1) + (1 - K_3) \Delta T (t - 1)$$

$$+ \frac{1}{(0,006) G_1 (t - 2)} \Delta P (t - 1)$$

$$+ \frac{- P (t - 1)}{(0,006) (G_1(t - 2))^2} \Delta G_1 (t - 1) \quad (B.8.3)$$

2.2.2.2) Sinon ( $G_1 (t - 1) = 0$ )

$$G_3 (t) = G_3 (t - 1) K_3 + (1 - K_3) T (t - 1) + (1 - K_3) \Delta T (t - 1) \quad (B.8.4)$$

On peut donc élaborer une formule générale qui pourra représenter les équations B.8.1 et B.8.4 et qui peut s'écrire sous la même forme que l'équation B.6.4, avec les conditions suivantes:

- Condition 2.1

$$D_{11} \text{ et } D_1 \text{ à } D_5 = 0$$

- Condition 2.2.1.1

$$D_{11} = 1, D_3 \text{ à } D_5 = 0$$

$$D_1 = \frac{1}{(0,006) G_1 (t - 2)} \quad D_2 = \frac{- P (t - 1)}{(0,006) (G_1 (t - 2))^2}$$

- Condition 2.2.1.2

$$D_{11} \text{ et } D_1 \text{ à } D_5 = 0$$

- Condition 2.2.2.1

$$D_{11} = 1, D_3 = K_3, D_4 = 1, D_5 = 0$$

$$D_1 = \frac{1}{(0,006) G_1 (t - 2)} \quad D_2 = \frac{- P (t - 1)}{(0,006) (G_1 (t - 2))^2}$$

- Condition 2.2.2.2

$$D_{11} = K_3, (D_1 \text{ à } D_4) = 0$$

$$D_5 = 1 - K_3$$

La prédiction des variables importantes du sous-système FONTE peut donc se faire à l'aide des équations markoviennes suivantes:

$$G_2 (t) = w_{11} G_2 (t - 1) + w_1 T (t - 1) - w_1 (K_2 - \Delta T (t - 1))$$

(équation B.1.2)

$$G_3 (t) = (D_{11} + D_3) G_3 (t - 1) - D_3 G_3 (t - 2) + D_1 (P(t - 1) - P(t - 2)) \\ + D_2 (G_1 (t - 1) - G_1 (t - 2)) + (D_4 + D_5) T (t - 1) - D_4 T (t - 2) \\ + D_5 \Delta T (t - 1)$$

(équation B.6.4)

$$G_4 (t) = G_{22} G_4 (t-1) + G_{11} (T (t-1) - T (t-2)) + G_{12} (P (t-1) - P (t-2)) \\ + (G_{13} + G_{16}) N (t-1) - G_{13} N (t-2) + G_{14} (G_2 (t-1) - G_2 (t-2)) \\ + (G_{15} + G_{16}) G_1 (t-1) - G_{15} G_1 (t-2) + G_{16} \Delta N (t-1)$$

(équation B.5.4)

$$G_6 (t) = C_{11} G_6 (t-1) + C_2 (G_1 (t-1) - G_1 (t-2)) + C_3 (G_3 (t-1) - G_3 (t-2)) \\ + C_4 (T (t-1) - T (t-2)) + C_1 P (t-1) + C_1 \Delta P (t-1)$$

(équation B.7.4)

Les coefficients de ces équations sont calculés de façon à englober les contraintes qui seront définies par le cheminement suivi aux figures B.1 et B.2. Les deux dernières équations nécessaires sont définies par les équations B.1 et B.2

$$G_1 (t) = G_1 (t - 1) + G_6 (t) + (N (t - 1) + \Delta N (t - 1)) - G_4 (t) \quad (B.1)$$

$$G_5 (t) = G_4 (t) - G_6 (t) + (P (t - 1) + \Delta P (t - 1)) \quad (B.2)$$

Les variables  $G_4 (t)$  et  $G_6 (t)$  pourront être remplacées par les équations B.5.4 et B.7.4 (voir équations 3.15 et 3.16).

Notons que les variables  $\Delta P (t - 1)$  (équations B.7.4 et B.2),  $\Delta T (t - 1)$  (équations B.1.2 et B.6.4) et  $\Delta N (t - 1)$  (équations B.5.4 et B.1) sont considérées comme des constantes, à chaque pas de temps, car ils peuvent être déterminées à partir des sorties du modèle MDOR, disponibles au moment de notre prédiction. Ce sont donc des informations "a priori".

ANNEXE C  
LE SOUS-SYSTÈME "SOL"

On doit dériver les équations décrivant les variables importantes de ce sous-système, en tenant compte de la nature des carreaux. À partir du cheminement proposé à la figure C.1, on a élaboré trois équations qui décrivent le comportement des variables R<sub>ui</sub>, E et D. Ces équations respectent les contraintes présentes dans les sous-routines RAPIDE, INFILT, SOL, SOUTER et EVATRA du modèle MDOR.

A. Les 19 carreaux-rivières

1. Sous-routine RAPIDE

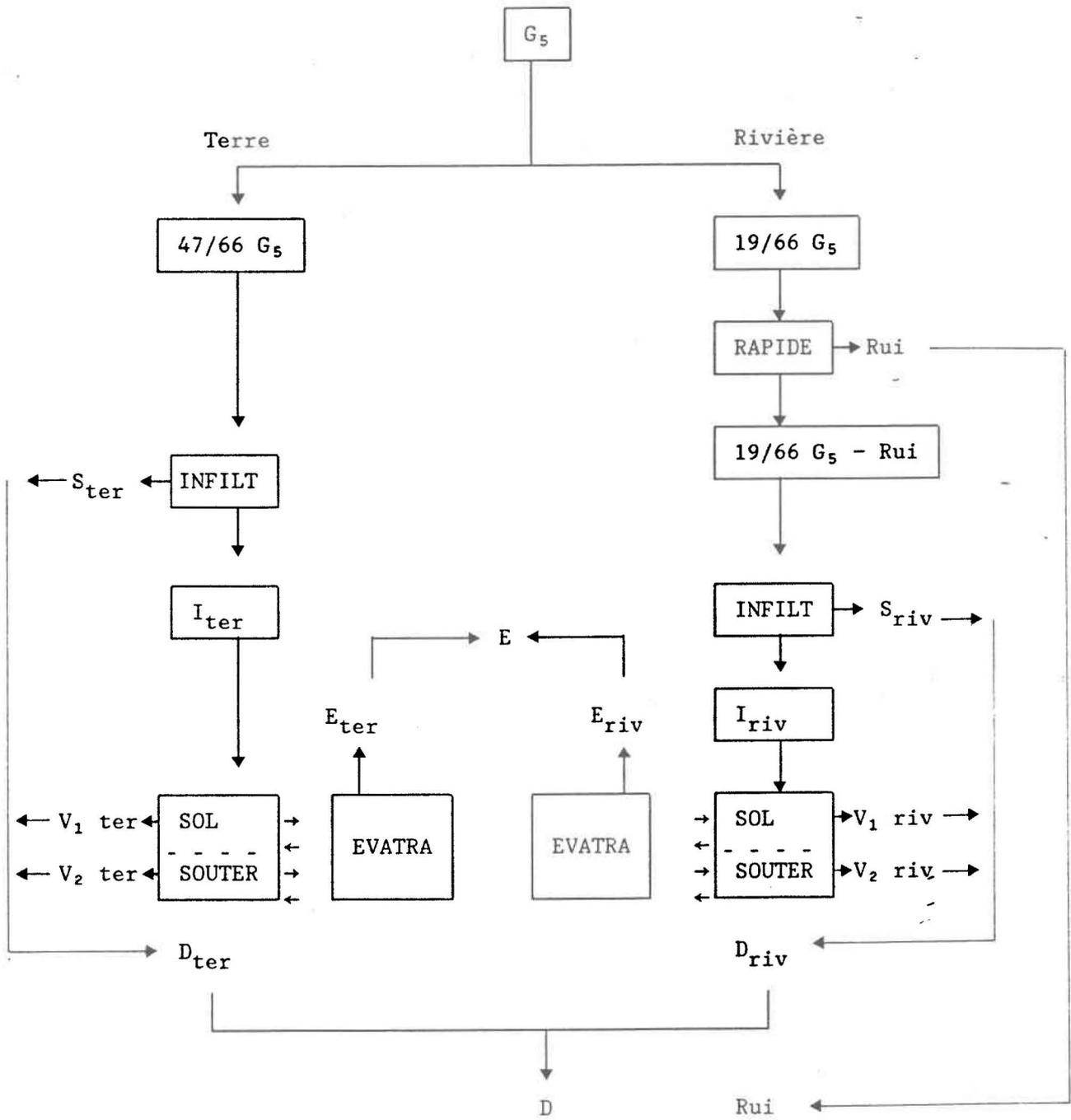
Elle permet de déterminer l'eau de ruissellement rapide, représentée par la variable RUI. Cette variable est exclusive aux carreaux-rivières. La variable d'entrée ("input") à la sous-routine RAPIDE est:

$$\frac{19 G_5 (t)}{66}$$

1.1) Si  $Sol_2 (t - 1) \leq \frac{19 K_{11}}{K_{15}}$

$$Rui (t) = Rui (t - 1) + \frac{Sol_2 (t - 2) K_{15}}{66 K_{11}} (G_5 (t) - G_5 (t - 1))$$

Figure C.1  
Le système Sol



$$+ \frac{G_5 (t - 1) K_{15}}{66 K_{11}} (\text{Sol}_2 (t - 1) - \text{Sol}_2 (t - 2)) \quad (\text{C.1.1})$$

1.2) Sinon:

$$\text{Rui} (t) = \text{Rui} (t - 1) + (G_5 (t) - G_5 (t - 1)) \quad (\text{C.1.2})$$

Pour des besoins pratiques, on transforme la variable  $\text{Sol}_2$  (réservoir-sol pour les carreaux-rivières) par la variable  $R$  (réservoir total) en utilisant les coefficients de correction ( $K1$ ) du tableau 3.3. Les équations C.1.1 et C.1.2 peuvent aussi s'écrire sous la forme:

$$\text{Rui} (t) = \text{Rui} (t - 1) + R_1 (G_5 (t) - G_5 (t - 1)) + R_2 (K1 (1, t - 1) R (t - 1) - K1 (1, t - 2) R (t - 2)) \quad (\text{C.1.3})^1$$

et, si  $K1 (1, t - 1) R (t - 1) \leq \frac{19 K_{11}}{K_{15}}$

$$R_1 = \frac{K1 (1, t - 2) R (t - 2) K_{15}}{66 K_{11}}$$

$$R_2 = \frac{G_5 (t - 1) K_{15}}{66 K_{11}}$$

---

<sup>1</sup> La variable  $G_5 (t)$  de l'équation C.1.3 est donnée par l'équation 3.15

sinon,

$$R_1 = 19/66 \qquad R_2 = 0$$

Les constantes  $R_1$  et  $R_2$  sont obtenues à partir des sorties du modèle MDOR.

## 2. Sous-routine INFILT

Elle permet le calcul de la première composante de l'écoulement total ( $D_{riv}$ )<sup>1</sup>, soit l'écoulement de surface ( $S_{riv}$ ) ainsi que le calcul de l'infiltration ( $I_{riv}$ ). La variable d'entrée ("input") de cette sous-routine est:

$$\frac{19}{66} G_5 (t) - R_{ui} (t) \qquad \text{(voir figure C.1)}$$

$$2.1) \quad \text{Si} \quad \frac{19}{66} G_5 (t) - R_{ui} (t) \leq 19 K_5$$

$$I_{riv} (t) = \frac{19 G_5 (t)}{66} - R_{ui} (t)$$

$$S_{riv} (t) = 0$$

---

<sup>1</sup>  $D = S$  (écoulement de surface) +  $V_1$  (écoulement provenant du réservoir sol) +  $V_2$  (écoulement provenant du réservoir souterrain)

2.2) Sinon:

$$I_{riv}(t) = 19 K_5$$

$$S_{riv}(t) = \frac{19 G_5(t)}{66} - R_{ui}(t) - 19 K_5$$

On peut donc déduire les deux équations suivantes:

$$I_{riv}(t) = (1 - I_4) \left| \frac{19 G_5(t)}{66} - R_{ui}(t) \right| + I_4 19 K_5 \quad (C.2.1)^1$$

$$S_{riv}(t) = I_4 \left| \frac{19 G_5(t)}{66} - R_{ui}(t) - 19 K_5 \right| \quad (C.2.2)$$

avec:

$I_4 = 0$  si la condition 2.1 est respectée

et, autrement:

$$I_4 = 1$$

---

<sup>1</sup> La variable  $G_5(t)$  est donnée par l'équation 3.15 et  $R_{ui}(t)$  est donnée par C.1.3.

Les deux variables  $I_{riv}$  et  $S_{riv}$  ne seront pas retenues pour la suite de notre opération. Elles ne servent que temporairement pour faciliter la dérivation des prochaines équations.

### 3. Sous-routine EVATRA

Elle détermine le pourcentage d'eau des réservoirs supérieur (SOL) et inférieur (SOUTER) qui sera évaporée.

3.1) L'analyse de la sous-routine permet la création de l'équation suivante:

$$E_{riv}(t) = X_{22} E_{riv}(t-1) + E_{12} (T(t-1) - T(t-2)) + Y_2 (Sol_2(t-1) - Sol_2(t-2)) \quad (C.3.1)$$

qui doit respecter les contraintes suivantes:

a) si  $T(t) < 0$  (équation 3.11) ou  $G_1(t) > 0$  (équation 3.16),

$$X_{22} = E_{12} = Y_2 = 0$$

b.1) si  $Sol_2(t-1) \leq \frac{19 K_{11}}{K_6}$

$$X_{22} = 1, E_{12} = \frac{\text{Soleil } K_9 K_6 K_{10}}{K_{11}} (Sol_2(t-2)) (T(t-1))^{(K_{10}-1)}$$

$$Y_2 = \frac{\text{Soleil } K_9 K_6}{K_{11}} (T (t - 1))^{K_{10}}$$

b.2) sinon

$$X_{22} = 1, E_{12} = [19 \text{ Soleil } K_9 K_{10}] (T (t - 1))^{(K_{10} - 1)}$$

$$Y_2 = 0$$

avec:

$$\begin{aligned} \text{Soleil} &= S_0 \text{ si } P(t) = 0 && (\text{voir équation 3.10}) \\ \text{Soleil} &= K_8 S_0 \text{ autrement} \end{aligned}$$

et:

$$S_0 = \frac{2}{\pi} \cos \left\{ - \tan \left[ \sin \left[ 0,409 \sin \left( 0,0172 \left[ \text{float} (\text{jour} - 164) \right] \right) \right] \right] \right\}$$

$$* \tan (0,01745 K_7) \}$$

3.2) Cependant, l'analyse des sous-routines SOL et SOUTER nous indique que:

$$E_{\text{riv}}(t) \leq \text{Sou}_2 (t - 1) + \text{Sol}_2 (t - 1) + I_{\text{riv}} (t)$$

En intégrant cette contrainte supplémentaire et en remplaçant:

$Sol_2 (t - 1)$  par  $K1 (1, t - 1) R (t - 1)$   
 $Sol_2 (t - 2)$  par  $K1 (1, t - 1) R (t - 2)$   
 $Sou_2 (t - 1)$  par  $K1 (8, t - 1) R (t - 1)$

(voir tableau 3.3)

On obtiendra l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
 E_{riv}(t) = & X_{22} E_{riv}(t - 1) + E_{12} (T(t - 1) - T(t - 2)) \\
 & + Y_2 (K1(1, t - 1) R(t - 1) - K1(1, t - 2) R(t - 2)) \\
 & + B_4 [(K1(8, t - 1) + K1(1, t - 1)) R(t - 1) + I_{riv}(t)]
 \end{aligned}$$

ou, si on regroupe:

$$\begin{aligned}
 E_{riv}(t) = & X_{22} E_{riv}(t - 1) + E_{12} (T(t - 1) - T(t - 2)) + \\
 & [Y_2 K1(1, t - 1) + B_4 (K1(8, t - 1) + K1(1, t - 1))] \\
 & R(t - 1) - Y_2 K1(1, t - 2) R(t - 2) + B_4 I_{riv}(t) \quad (C.3.2)
 \end{aligned}$$

avec, dans le cas où la condition 3.2 n'est pas respectée:

$$B_4 = 1 \quad \text{et } X_{22}, E_{12} \text{ et } Y_2 = 0$$

et sinon,  $B_4 = 0$  et les autres coefficients suivent les conditions exposées à la section 3.1. La variable  $I_{riv}(t)$ , est donnée par l'équation C.2.1.

#### 4. Sous-routines SOL et SOUTER

L'analyse de ces deux sous-routines permet la détermination des deux dernières composantes de la variable  $D_{riv}$  (soit  $V_{1riv}$  et  $V_{2riv}$ ) telles que démontrées à la figure C.1. La connaissance des variables  $V_{1riv}$  et  $V_{2riv}$  ainsi que de la variable  $S_{riv}$  (donnée par l'équation C.2.2), sont nécessaires au calcul de  $D_{riv}$  car:

$$D_{riv}(t) = S_{riv}(t) + V_{1riv}(t) + V_{2riv}(t)$$

On aura donc:

$$D_{riv}(t) = S_{riv}(t) + K_{14} \text{Sou}_2(t-1) + D_3 (\text{Sol}_2(t-1) +$$

$$I_{riv}(t) - E_{riv}(t)) + D_4 \quad (C.4.1)^1$$

Cette équation doit respecter les conditions suivantes:

a) Si  $E_{riv}(t) > \text{Sol}_2(t-1) + I_{riv}(t)$

$$D_3 = K_{14} \quad \text{et} \quad D_4 = 0$$

---

<sup>1</sup>  $S_{riv}(t)$ ,  $I_{riv}(t)$  et  $E_{riv}(t)$  sont données respectivement par les équations C.2.2, C.2.1 et C.3.2.

b.1) Sinon et si  $Sol_2 (t - 1) + I_{riv}(t) - E_{riv}(t) \geq 19 K_{11}$

$$D_3 = 1 \quad \text{et} \quad D_4 = 19 [K_{14} K_{12} - K_{11} + K_{11} K_{13}]$$

b.2) Sinon:

Si:

$$(1 - K_{13}) [Sol_2 (t - 1) + I_{riv}(t) - E_{riv}(t)] \leq 19 K_{12} / K_{17}$$

$$D_3 = K_{14} K_{17} (1 - K_{13}) + K_{13} \quad \text{et} \quad D_4 = 0$$

Sinon:

$$D_3 = K_{13} \quad \text{et} \quad D_4 = 19 K_{14} K_{12}$$

Les variables  $Sol_2 (t - 1)$  et  $Sou_2 (t - 1)$  peuvent être transformées en  $R (t - 1)$  par le biais des coefficients de correction (voir tableau 3.3).

#### B. Les 47 carreaux-terres

De la même façon que pour les carreaux-rivières, on peut déduire les équations qui correspondent aux 47 carreaux-terres.

1. Sous-routine RAPIDE

Elle ne s'applique pas aux carreaux-terre.

2. Sous-routine INFILT

La variable d'entrée est:  $47/66 G_5(t)$  (voir figure C.1).

$$I_{\text{ter}}(t) = (1 - I_2) \left| \frac{47}{66} G_5(t) \right| + I_2 47 K_5 \quad (\text{C.2.3})^1$$

$$S_{\text{ter}}(t) = I_2 \left| \frac{47}{66} G_5(t) - 47 K_5 \right| \quad (\text{C.2.4})$$

avec:

$$I_2 = 0 \quad \text{si} \quad \frac{47 G_5(t)}{66} \leq 47 K_5$$

et, autrement:

$$I_2 = 1$$

---

<sup>1</sup>  $G_5(t)$  est donné par l'équation 3.15.

### 3. Sous-routine EVATRA

$$\begin{aligned} E_{\text{ter}}(t) &= X_{11} E_{\text{ter}}(t-1) + E_{11} [T(t-1) - T(t-2)] \\ &+ Y_1 [\text{Sol}_1(t-1) - \text{Sol}_1(t-2)] \\ &+ B_3 [\text{Sou}_1(t-1) + \text{Sol}_1(t-1) + I_{\text{ter}}(t)] \end{aligned}$$

En remplaçant:

$$\begin{aligned} \text{Sol}_1(t-1) &\text{ par } K1(3, t-1) R(t-1) \\ \text{Sol}_2(t-2) &\text{ par } K1(3, t-2) R(t-2) \\ \text{Sou}_1(t-1) &\text{ par } K1(7, t-1) R(t-1) \end{aligned}$$

et en regroupant les termes communs, on aura:

$$\begin{aligned} E_{\text{ter}}(t) &= X_{11} E_{\text{ter}}(t-1) + E_{11} [T(t-1) - T(t-2)] \\ &+ B_3 I_{\text{ter}}(t) + [Y_1 K1(3, t-1) + B_3 (K1(7, t-1) \\ &+ K1(3, t-1))] R(t-1) - Y_1 K1(3, t-2) R(t-2) \end{aligned} \tag{C.3.3}$$

Cette équation doit respecter les contraintes suivantes:

a) Si  $E_{\text{ter}}(t) > \text{Sou}_1(t-1) + \text{Sol}_1(t-1) + I_{\text{ter}}(t)$

$$B_3 = 1 \quad \text{et} \quad X_{11} = E_{11} = Y_1 = 0$$

b) Sinon,  $B_3 = 0$

b.1) si  $T(t) < 0$  (équation 3.11) ou  $G_1(t) > 0$  (équation 3.16)

$$X_{11} = E_{11} = Y_1 = 0$$

b.2) sinon et si  $Sol_1(t-1) \leq 47 K_{11}/K_6$ :

$$X_{11} = 1$$

$$E_{11} = \frac{\text{Soleil } K_9 K_6 K_{10}}{K_{11}} Sol_1(t-2) (T(t-1))^{(K_{10}-1)}$$

$$Y_1 = \frac{\text{Soleil } K_9 K_6}{K_{11}} (T(t-1))^{K_{10}}$$

sinon,

$$X_{11} = 1 \quad Y_1 = 0$$

$$E_{11} = [47 \text{ Soleil } K_9 K_{10} (T(t-1))^{(K_{10}-1)}]^{-1}$$

La variable  $I_{\text{ter}}(t)$  de l'équation C.3.3 est donnée par l'équation C.2.3.

---

<sup>1</sup> La variable Soleil est définie à la section C.A.3.1.

#### 4. Sous-routines SOL et SOUTER

L'équation qui permet la prédiction de la variable  $D_{\text{ter}}(t)$  aura la même forme que pour celle qui a été développée pour les carreaux-rivières (voir équation C.4.1.).

$$D_{\text{ter}}(t) = S_{\text{ter}}(t) + K_{14} \text{Sol}_1(t-1) + D_4 (\text{Sol}_1(t-1) + I_{\text{ter}}(t) - E_{\text{ter}}(t)) + D_5 \quad (\text{C.4.2})$$

Cette équation doit respecter les conditions suivantes:

a) Si  $E_{\text{ter}}(t) > \text{Sol}_1(t-1) + I_{\text{ter}}(t)$

$$D_4 = K_{14} \quad D_5 = 0$$

b.1) Sinon et si  $\text{Sol}_1(t-1) + I_{\text{ter}}(t) - E_{\text{ter}}(t) \geq 47 K_{11}$

$$D_4 = 1 \quad D_5 = 47 [K_{14} K_{12} - K_{11} + K_{11} K_{13}]$$

b.2) Sinon:

Si:

$$(1 - K_{13}) \text{Sol}_1(t-1) + I_{\text{ter}}(t) - E_{\text{ter}}(t) \leq 47 K_{12} / K_{17}$$

$$D_4 = K_{14} K_{17} (1 - K_{13}) + K_{13} \quad D_5 = 0$$

Sinon:

$$D_4 = K_{13} \quad D_5 = 47 K_{14} K_{12}$$

Les variables  $S_{\text{ter}}(t)$ ,  $I_{\text{ter}}(t)$  et  $E_{\text{ter}}(t)$  sont données respectivement par les équations C.2.4, C.2.3 et C.3.3. Les variables  $S_{\text{ol}_1}(t - 1)$  et  $S_{\text{ou}_1}(t - 1)$  peuvent être transformées en variable  $R(t - 1)$  par le biais des coefficients de correction (tableau 3.3).

#### C. Les 66 carreaux (rivière et terre)

À partir des sections A et B, on peut dériver les équations qui représentent l'ensemble des 66 carreaux-terres ou rivières. La variable  $R_{\text{ui}}(t)$  est décrite par l'équation C.1.3 et les coefficients  $R_1$  et  $R_2$  sont déterminés "a priori" (à l'aide des sorties du modèle MDOR) selon les conditions de la section C.A.1.

La variable  $E(t)$  sera représentée par la somme des équations C.3.3 et C.3.2:

$$E(t) = E_{\text{ter}}(t) + E_{\text{riv}}(t)$$

On aura donc:

$$\begin{aligned}
E(t) = & X_{11} E(t-1) + (E_{11} + E_{12}) [T(t-1) - T(t-2)] - B_4 (1 - I_4) \\
& R_{ui}(t) + [Y_1 K1(3, t-1) + Y_2 K1(1, t-1) + B_3 (K1(3, t-1) \\
& + K1(7, t-1)) + B_4 (K1(1, t-1) + K1(8, t-1))] R(t-1) \\
& - [Y_1 K1(3, t-2) + Y_2 K1(1, t-2)] R(t-2) + [B_3 (1 - I_2) \\
& \frac{47}{66} + B_4 (1 - I_4) \frac{19}{66}] G_5(t) + [B_3 I_2 47 + B_4 I_4 19] K_5 \quad (C.3.4)
\end{aligned}$$

Les coefficients sont définis selon les conditions des sections C.A.2 ( $I_4$ ), C.A.3 ( $E_{12}$ ,  $Y_2$  et  $B_4$ ), C.B.2 ( $I_2$ ) et C.B.3 ( $X_{11}$ ,  $E_{11}$ ,  $B_3$ ). Les variables  $G_5(t)$  et  $R_{ui}(t)$  sont données par les équations 3.15 et C.1.3.

On peut réécrire de façon plus simple l'équation C.3.4 en regroupant les termes:

$$\begin{aligned}
E(t) = & EB_7 E(t-1) + E_1 (T(t-1) - T(t-2)) + EB_1 R(t-1) \\
& - EB_2 R(t-2) + I_9 R_1 G_5(t-1) - I_9 R_{ui}(t-1) \\
& + EB_8 G_5(t) + EB_9 \quad (C.3.5)
\end{aligned}$$

avec:

$$EB_7 = X_{11} = X_{22}$$

$$E_1 = E_{11} + E_{12}$$

$$\begin{aligned}
EB_1 = & Y_1 K1(3, t-1) + B_3 (K1(3, t-1) + K1(7, t-1)) \\
& + B_4 (K1(1, t-1) + K1(8, t-1)) - B_4 (1 - I_4) \\
& R_2 K1(1, t-1) + Y_2 K1(1, t-1)
\end{aligned}$$

$$EB_2 : [Y_1 K_1 (3, t - 2) + Y_2 K_1 (1, t - 2) - B_4 (1 - I_4) R_2 K_1 (1, t - 2)]$$

$$I_9 = B_4 (1 - I_4)$$

$$EB_8 = B_3 I_5 + B_4 I_6$$

$$I_5 = (1 - I_2) 47 / 66$$

$$I_6 = (1 - I_4) (19 / 66 - R_1)$$

$$EB_9 = B_3 I_7 + B_4 I_8$$

$$I_7 = I_2 47 K_5$$

$$I_8 = I_4 19 K_5$$

Enfin, la variable  $D(t)$  sera définie par la somme des équations C.4.1 et C.4.2:

$$D(t) = D_{riv}(t) + D_{ter}(t)$$

On obtient donc l'équation suivante:

$$D(t) = S(t) + K_{14} \text{Sou}(t - 1) + D_1 (\text{Sol}(t - 1) + I(t) - E(t)) + D_2 + D_7 (\text{Sol}_1(t - 1) + I_{ter}(t) - E_{ter}(t)) + D_8 \quad (C.4.3)$$

Les variables  $E(t)$ ,  $I_{\text{ter}}(t)$  et  $E_{\text{ter}}(t)$  sont données par les équations C.3.4, C.2.3 et C.2.4. Les variables  $S(t)$  et  $I(t)$  sont obtenues par la somme des équations C.2.2 et C.2.4 (pour  $S(t)$ ) et C.2.1 et C.2.3 (pour  $I(t)$ ). Les variables  $Sou(t-1)$ ,  $Sol(t-1)$  et  $Sol_1(t-1)$  peuvent être transformées en variable  $R(t-1)$  par le biais des coefficients de correction (tableau 3.3).

$$\begin{aligned} Sou(t-1) &= Sou_1(t-1) + Sou_2(t-1) = K1(4, t-1) R(t-1) \\ Sol(t-1) &= Sol_1(t-1) + Sol_2(t-1) = K1(2, t-1) R(t-1) \\ Sol_1(t-1) &= K1(3, t-1) R(t-1) \end{aligned}$$

Les coefficients  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_7$  et  $D_8$  sont définis selon les conditions des sections C.A.4 et C.B.4. Ces conditions sont résumées à la figure C.2 et au tableau C.1.

Si on remplace les variables définies à l'instant "t" par leurs équations respectives et qu'on regroupe certains coefficients, on aura une équation de type markovienne qui permet la prédiction de la variable  $D(t)$ :

$$\begin{aligned} D(t) &= (\text{cte 17}) R(t-1) + (\text{cte 18}) R(t-2) + (\text{cte 24}) E(t-1) \\ &+ (\text{cte 22}) Rui(t-1) - R_1 (\text{cte 22}) G_5(t-1) + (\text{cte 23}) G_5(t) \\ &+ [(\text{cte 21}) - (\text{cte 23}) P_4] [T(t-1) - T(t-2)] \\ &+ [A_{21} - (\text{cte 23}) P_6] \end{aligned} \quad (C.4.4)$$

avec:

$$\begin{aligned} (\text{cte 17}) &= K_{14} K1(4, t-1) - R_2 I_4 K1(1, t-1) + D_1 \\ &[K1(2, t-1) - R_2 (1 - I_4) K1(1, t-1) - EB_1] + D_7 \\ &[K1(3, t-1) - (Y_1 K1(3, t-1) + B_3 [K1(7, t-1) \\ &+ K1(3, t-1)])] \end{aligned}$$

Figure C.2  
Détermination des coefficients de la variable D(t)

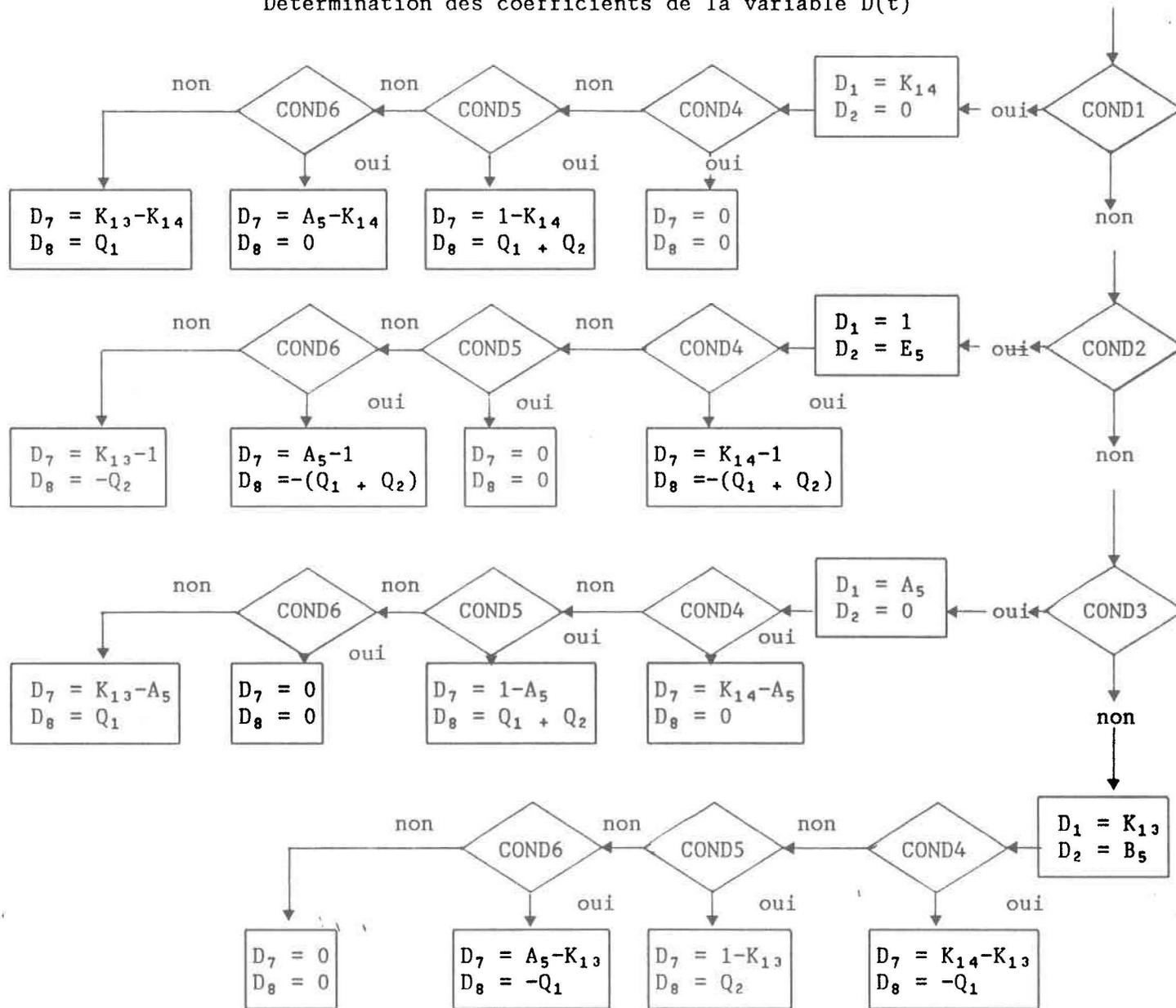


Tableau C.1  
Explication de la figure C.2

COND1:	$E_{riv}(t) > Sol_2 (t - 1) + I_{riv}(t)$ (voir section C.A.4.a)
COND2:	$Sol_2 (t - 1) + I_{riv}(t) - E_{riv}(t) \geq 19 K_{11}$ (section C.A.4.b.1)
COND3:	$(1 - K_{13}) (Sol_2 (t - 1) + I_{riv}(t) - E_{riv}(t)) \leq \frac{19 K_{12}}{K_{17}}$ (section C.A.4.b.2)
COND4:	$E_{ter}(t) > Sol_1 (t - 1) + I_{ter}(t)$ (section C.B.4.a)
COND5:	$Sol_1 (t - 1) + I_{ter}(t) - E_{ter}(t) \geq 47 K_{11}$
COND6:	$(1 - K_{13}) (Sol_1 (t - 1) + I_{ter}(t) - E_{ter}(t)) \leq \frac{47 K_{12}}{K_{17}}$

$$E_5 = 66 [K_{14} K_{12} - K_{11} + K_{11} K_{13}]$$

$$A_5 = K_{14} K_{17} (1 - K_{13}) + K_{13}$$

$$B_5 = 66 K_{14} K_{12}$$

$$Q_1 = 47 K_{14} K_{12}$$

$$Q_2 = 47 K_{11} K_{13} - K_{11}$$

$$\begin{aligned} \text{(cte 18)} &= R_2 I_4 K1 (1, t - 2) + D_1 [R_2 (1 - I_4) K1 (1, t - 2) + EB_2] \\ &+ D_7 [Y_1 K1 (3, t - 2)] \end{aligned}$$

$$\text{(cte 24)} = - D_1 EB_7 + D_7 [- X_{11} K1 (9, t - 1)]$$

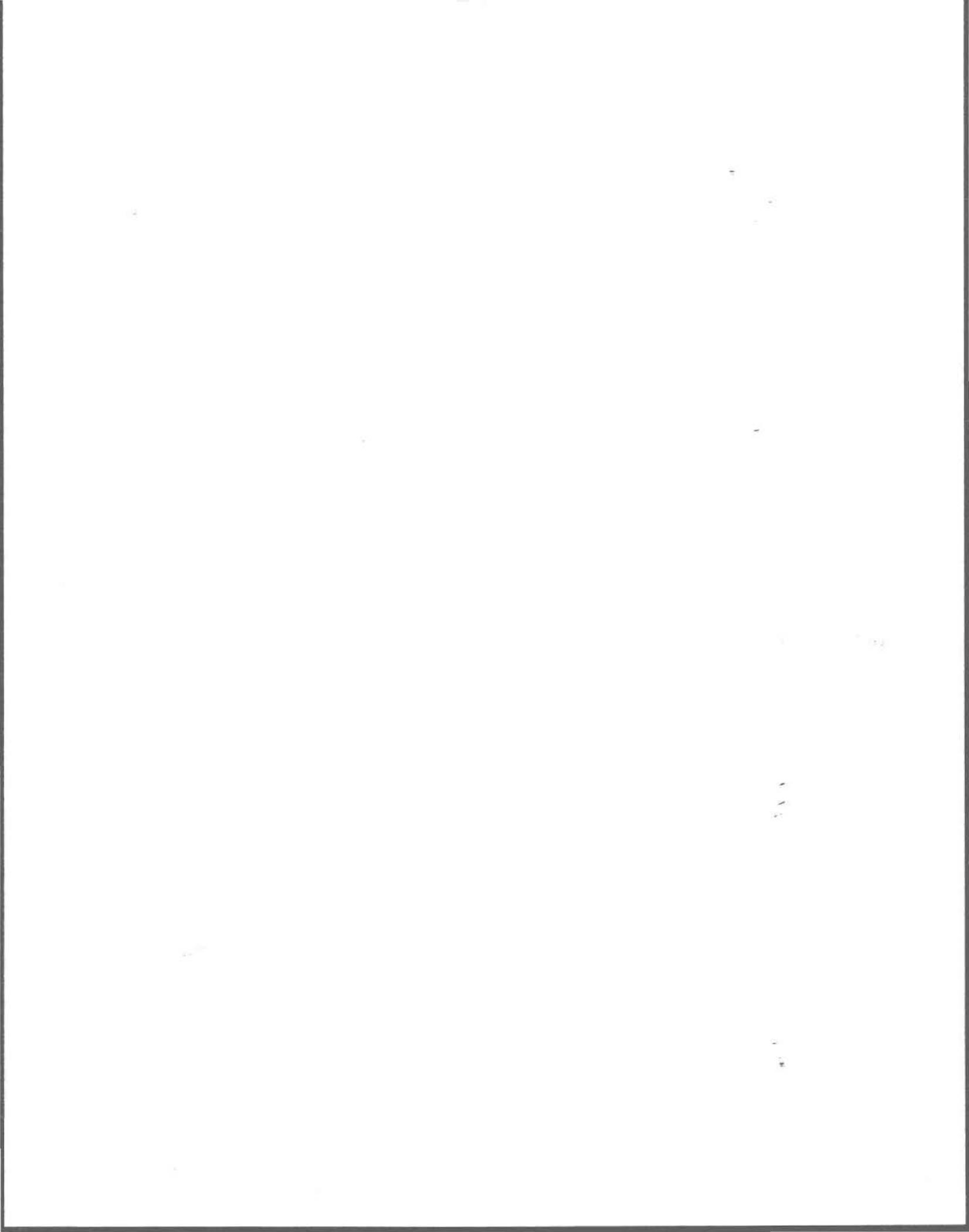
$$\text{(cte 22)} = D_1 [I_9 - (1 - I_4)] - I_4$$

$$\text{(cte 23)} = T_2 + D_1 [I_6 + I_5 - EB_8] + D_7 [(1 - B_3) I_5]$$

$$T_2 = 47 I_2 / 66 + I_4 (19 / 66 - R_1)$$

$$\begin{aligned} \text{(cte 21)} &= D_1 [(I_5 + I_6) P_4 - [E_1 + EB_8 P_4]] + D_7 [I_5 P_4 \\ &- [E_{11} + B_3 I_5 P_4]] + T_2 P_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= D_2 + D_8 + T_2 P_6 - (I_7 + I_8) + D_1 [(I_5 + I_6) P_6 + (I_7 + I_8) \\ &- (EB_9 + EB_8 P_6)] + D_7 [(1 - B_3) (I_7 + I_5 P_6)] \end{aligned}$$



ANNEXE D

LES VARIABLES DU BILAN HYDROLOGIQUE

Les deux dernières variables (Q (t) et R (t)) qui sont nécessaires à notre opération sont définies par les équations 3.4 et 3.5:

$$Q(t) = Q_1(t) + \frac{D(t)}{K_0} + \frac{R_{ui}(t)}{K_0} \quad (3.4)$$

$$R(t) = R(t-1) + 66 P(t) - R_{ui}(t) - D(t) - E(t) \quad (3.5)$$

Les variables  $Q_1(t)$ ,  $D(t)$ ,  $R_{ui}(t)$ ,  $P(t)$  et  $E(t)$  peuvent être obtenues respectivement par les équations A.7.4 (section 3.3.2.2), C.4.4 (section 3.3.2.4), C.1.3 (section 3.3.2.4), 3.10 (section 3.3.2.1) et C.3.5 (section 3.3.2.4). L'utilisation de ces équations permet la reformulation des équations 3.4 et 3.5, sous une forme qui sera compatible avec le filtre de Kalman (équation markovienne). L'équation 3.4 peut aussi s'écrire ainsi:

$$Q(t) = Q(t-1) + (Q_1(t) - Q_1(t-1)) + \frac{(D(t) - D(t-1))}{K_0} + \frac{(R_{ui}(t) - R_{ui}(t-1))}{K_0} \quad (D.1)$$

De là:

$$\begin{aligned}
 Q(t) = & Q(t-1) + Q_3 R(t-1) + Q_4 R(t-2) + (Q_5 - Q_8 P_3) P(t-1) \\
 & + (Q_6 - Q_8 P_{11}) P(t-2) + (Q_7 - Q_8 P_4) (T(t-1) - T(t-2)) \\
 & + Q_8 G_5(t) + \frac{(cte\ 22) R_{ui}(t-1)}{K_0} + \frac{(cte\ 24)}{K_0} E(t-1) - \frac{1}{K_0} \\
 & D(t-1) + (A_0 - 1) Q_1(t-1) + A_0 A_1 (K(t-1) - K(t-2)) \\
 & - Q_9 G_5(t-1) + (Q_{10} - Q_8 P_5) N(t-1) + (Q_{11} - Q_8 P_{12}) \\
 & N(t-2) + (Q_{12} - Q_8 P_6) \qquad \qquad \qquad (D.2)
 \end{aligned}$$

avec:

$$Q_3 = \frac{(cte\ 17) + R_2 K_1(1, t-1)}{K_0}$$

$$Q_4 = \frac{(cte\ 18) + R_2 K_1(1, t-2)}{K_0}$$

$$Q_5 = A_0 A_1 + Q_8 P_3$$

$$Q_6 = -A_0 A_1 + Q_8 P_{11}$$

$$Q_7 = (CQ1) A_0 A_1 + \frac{(cte\ 21) - (cte\ 23) P_4}{K_0} + Q_8 P_4$$

$$Q_8 = \frac{\text{cte } 23 + R_1}{K_0}$$

$$Q_9 = \frac{R_1 (\text{cte } 22) - R_1}{K_0}$$

$$Q_{10} = A_0 A_1 + Q_8 P_5$$

$$Q_{11} = - A_0 A_1 + Q_8 P_{12}$$

$$Q_{12} = \frac{A_{21} - (\text{cte } 23) P_6}{K_0} + Q_8 P_6$$

et:

$$\begin{aligned} R(t) = & R_3 R(t-1) + R_4 R(t-2) + (66) P(t-1) + (R_5 - R_8 P_4) \\ & (T(t-1) - T(t-2)) + R_6 R_{ui}(t-1) + R_7 E(t-1) \\ & + R_8 G_5(t) + R_9 G_5(t-1) + (R_{10} - R_8 P_6) \end{aligned} \quad (D.3)$$

avec:

$$R_3 = 1 - R_2 K_1(1, t-1) - EB_1 - (\text{cte } 17)$$

$$R_4 = R_2 K_1(1, t-2) + EB_2 - (\text{cte } 18)$$

$$R_5 = R_8 P_4 - E_1 - ((cte 21) - (cte 23) P_4)$$

$$R_6 = - 1 - I_9 - (cte 22)$$

$$R_7 = - EB_7 - (cte 24)$$

$$R_8 = - R_1 - EB_8 - (cte 23)$$

$$R_9 = R_1 - I_9 R_1 + R_1 (cte 22)$$

$$R_{10} = 66 XP - EB_9 - (A_{21} - (cte 23) P_6) + R_8 P_6$$