

Université du Québec
Institut national de la recherche scientifique
Centre Energie Matériaux Télécommunications

**Estimation bayésienne des paramètres dans les modèles dynamiques de
comparaisons par paires**

Par
Rihem Bejaoui

Mémoire présenté pour l'obtention du grade de
Maître es Sciences, M.Sc.
en télécommunications

Jury d'évaluation

Examineur externe	Chadi M. Assi Université Concordia
Examineur interne	Amar Mitiche Institut National de la Recherche Scientifique
Directeur de recherche	Leszek Szczecinski Institut National de la Recherche Scientifique

Remerciements

Je souhaite avant tout remercier mon directeur de recherche Dr. Leszek Szczecinski pour le temps qu'il a consacré à m'apporter les outils méthodologiques et me proposer différentes alternatives d'aborder le problème qui ont été indispensables à la conduite de ce travail de recherche. Je le remercie aussi d'avoir lu et relu mon mémoire afin de me guider à apporter les corrections nécessaires. Je lui suis très reconnaissante pour sa patience et sa disponibilité et le temps qu'il a mis pour répondre des mes questions et m'éclaircir plusieurs détails.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury d'évaluation, Dr. Amar Mitiche et Dr. Chadi M. Assi d'avoir pris le temps de lire mon mémoire et de m'offrir des suggestions pour faire les corrections.

J'aimerais aussi démontrer ma reconnaissance envers mon ami Souheib Ben Amor pour sa patience et ses conseils pour optimiser mon code.

Finalement, je remercie toute personne qui a contribué de près ou de loin au bon déroulement de mes études à l'INRS y inclus les membres de ma famille, mes amis et mes professeurs de cours.

Résumé

La comparaison préférentielle survient dans le cadre d'une analyse des données où il s'avère impossible d'établir une mesure absolue et objective. De ce fait, on requiert à établir une mesure de comparaison relative selon un degré de préférence. Ce type de problème pourrait être abordé par une comparaison par paires qu'on pourrait généraliser pour comparer ou trier une population de plusieurs éléments. Ce genre de problème est omni-présent dans des domaines divers notamment dans le domaine sportif où pouvoir assurer le suivi des mérites des joueurs ou des équipes s'avérerait utile pour des fins d'évaluation des performances des participants, de prédiction des résultats des confrontations à venir ou pour faire des paris informés. L'approche bayésienne consiste à modéliser les résultats en tant que variables aléatoires et cherche à trouver les formes de distributions de probabilité. Le plus souvent, ceci ne peut être fait que d'une manière approximée. De plus, les mérites, des variables aléatoires, évoluent au cours du temps. Afin d'assurer le suivi des distributions a posteriori de ces mérites, on propose un modèle dynamique Markovien adapté pour une analyse de comparaison par paires où on modélise les observations par des variables binaires qui quantifient la défaite ou la victoire des deux entités en compétition. L'inférence des statistiques des distributions a posteriori se fait de manière similaire que les mises à jour proposées par le filtre de Kalman. Cette approche est appliquée sur les données générées synthétiquement ainsi que sur les données recueillies sur le site de la ligue nationale de Hockey pour la saison régulière 2017-2018. Nous avons réussi à valider notre modèle et approche pour les données synthétiques. A l'issue de l'analyse des données provenant de la ligue du hockey, nos résultats nous ont permis d'avoir un taux de fiabilité de prédiction de 59 % pour certains paramètres du modèle. Cependant, nous n'étions pas dans la possibilité de catégoriser un modèle en particulier qui s'adapte avec les données des matchs en question pour la durée totale de la saison régulière.

Mots-clés Modèle Markovien; inférence bayésienne; filtre de Kalman; comparaison par paires.

Abstract

Preferential data comparison takes place when conducting data analysis where it becomes hard to establish an objective measure for evaluation. Therefore, we opt to establish a relative measure to rank subjects according to a degree of preference. In this type of situation, pairwise data comparison can be deployed and generalized to multi-data comparison to rank a population of many elements. This kind of analysis can be useful in many fields such as in sports data analysis where tracking of teams' skills might become of high interest for evaluation, prediction and betting purposes. In this particular case, the skills evolve over time. In order to assure a dynamic tracking system of those, we propose a dynamic Markovian model to establish a pairwise comparison where we model our observation by binary variables that quantify the defeat and victory of the two entities in play. The inference of the statistics of posterior distributions was developed in a similar way as the Kalman filter updates and is applied to synthetic data sets as well as to the data from the National Hockey League regular season 2017 - 2018. Following our analysis, we are able to validate our model and approach on synthetic data. The results we obtained from applying our approach on the data from the hockey league showed a 59 % prediction accuracy for certain parameters of the model. Nevertheless, we were not able to select a better model that appropriately fits the data for the whole regular season.

Keywords Hidden Markov Model; Bayesian inference; Kalman filter; pairwise comparison.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Abstract	vii
Table des matières	ix
Liste des figures	xi
Liste des tableaux	xiii
1 Introduction	1
1.1 Contexte du projet	1
1.2 Problématique et objectifs visés	2
1.3 Contributions	2
1.4 Structure du document	3
2 Modélisation et estimation	5
2.1 Modélisation	5
2.1.1 Modèle Mathématique	6
2.2 Principes de l'estimation bayésienne	7
2.2.1 Formalisme de l'inférence statistique	7
2.2.2 Paradigme bayésien	9
2.3 Estimation des paramètres	10
2.3.1 Estimation en bloque (hors ligne)	10
2.3.2 Estimation séquentielle (en ligne)	12
2.4 Discrimination du modèle	13
2.4.1 Cas des données statiques	13
2.4.2 Pour les données dynamiques	13
2.5 Métriques d'évaluation	14
2.5.1 Caractéristiques des métriques d'évaluation	14
2.5.2 Évaluation de la qualité d'estimation	15
2.5.3 Évaluation de la capacité de prédiction	15
3 Modèle statique	19
3.1 Modélisation	19
3.2 Estimation des paramètres et prédictions	21
3.2.1 Concavité de $\log P(\theta \mathcal{C})$	21

3.2.2	Estimation des paramètres	22
3.2.3	Prédiction	23
4	Modèle dynamique	25
4.1	Modélisation	25
4.2	Modèle linéaire	27
4.2.1	Description	27
4.2.2	Estimation des statistiques	28
4.2.3	Discrimination du modèle	29
4.2.4	Résultats	34
4.3	Modèle non linéaire	36
4.3.1	Description	36
4.3.2	Estimation des statistiques de la densité jointe a posteriori	36
4.3.3	Discrimination du modèle	38
4.3.4	Résultats	41
5	Analyse des résultats de matchs de Hockey	43
5.1	Description des données	43
5.2	Modélisation	44
5.3	Discrimination du modèle	45
5.3.1	Résultat avec le modèle de Thurnstone	45
5.3.2	Résultat avec le modèle de Bradley-Terry	51
5.4	Résultats	55
	Conclusion	57
	Références	59

Liste des figures

2.1	Représentation pour le modèle statique adaptée de [16]	13
2.2	Représentation pour le modèle dynamique adaptée de [16]	14
3.1	Représentation graphique du modèle statique	20
4.1	Représentation graphique du modèle dynamique	26
4.2	Evidence de Bayes et Erreur quadratique moyenne en fonction de β et α	32
4.3	Suivi temporel de l'évolution de l'état θ_k pour le cas linéaire	34
4.4	Suivi temporel des observations y_k pour le cas linéaire	35
4.5	Evidence de Bayes et divergence de Kullback - Leibler en fonction de β et α	39
4.6	Pertes moyennes en fonction de β et α	39
4.7	Gain moyen par match en fonction de β et α	40
4.8	Suivi temporel de l'état du système θ_k pour le cas binaire	41
5.1	Evidence de Bayes en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Thurnstone	46
5.2	Score de Brier en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Thurnstone	47
5.3	Erreur de prédiction en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Thurnstone	48
5.4	Gain net par match en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Thurnstone	50
5.5	Evidence de Bayes en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Bradley-Terry	51
5.6	Score de Brier en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Bradley-Terry	52
5.7	Erreur de prédiction en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Bradley-Terry	53
5.8	Gain net par match en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Bradley-Terry	54

Liste des tableaux

3.1	Distributions et fonctions cumulatives des variables gaussiennes et logistiques	23
4.1	Tableau descriptif des caractéristiques de réalisations synthétiques pour le cas linéaire	31
4.2	Tableau descriptif des caractéristiques de réalisations synthétiques pour le modèle binaire	39
5.1	Classement des équipes de la conférence Est pour la saison 2017 - 2018	55
5.2	Classement des équipes de la conférence Ouest pour la saison 2017 - 2018	55

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte du projet

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de classement des équipes sportives selon leurs mérites en se limitant aux résultats des matchs passés. Une telle étude est d'intérêt car elle nous permet non seulement de faire des classements mais aussi de faire des prédictions des résultats de matchs et ainsi placer des paris informés. Dans ce genre de problème, il y a du sens à supposer que ces mérites pourraient être influencés par certains facteurs à savoir les qualités des entraîneurs, les échanges des joueurs, ou les conditions des matchs. La littérature regorge d'approches de modélisations pour ce genre de problème dont certaines sont beaucoup plus complexes que d'autres. Suivant [4], nous pouvons distinguer trois types de modèles dont on fait souvent référence dans la littérature : des modèles statistiques tels les modèles de régression probit et les modèles de Poisson, les modèles d'apprentissage machine basés sur la théorie des graphes dont l'exemple le plus réputé est *Trueskill* [11], et des modèles de notation à l'instar de *Glicko* [7] et *ELO* [6]. Dans ce travail, nous développons un modèle inspiré du modèle de notation proposé dans *Glicko*.

1.2 Problématique et objectifs visés

Dans le cadre de ce travail, nous voulons développer une approche de suivi dynamique des mérites des équipes sportives à partir des historiques de matchs compte tenu des particularités de ces quantités. Pour arriver à ces fins, nous nous sommes fixé les objectifs suivants:

- Développer et caractériser un modèle probabiliste dynamique capable de capturer les changements et les incertitudes auxquelles les mérites sont assujettis.
- Développer une méthode qui sera fonctionnelle avec des données minimales et/ou clairsemées.
- Trouver et bien exploiter des approximations pertinentes pour faciliter le suivi sans altérer significativement les estimations.
- Choisir et utiliser des métriques d'évaluations adéquats à la tâche en incluant la métrique de maximisation de gain de paris.

1.3 Contributions

Dans le cadre de ce travail:

- nous développons une revue de la littérature des approches et applications similaires à la nôtre. Nous avons étudié certaines de ces méthodes et nous en avons adopté quelques unes dans notre travail.
- nous proposons un algorithme itératif de suivi de mérites qui varient au cours du temps en s'inspirant de l'algorithme de suivi du filtre de Kalman mais en le généralisant pour le cas non linéaire où le bruit d'observation n'est pas forcément additif (une limite du filtre de Kalman étendu).
- nous étudions les choix des hyper-paramètres adéquats du modèle selon divers critères dont le gain monétaire net.
- nous appliquons ces algorithmes non seulement aux données synthétiques mais aussi aux données provenant de la ligue nationale du hockey professionnel.

1.4 Structure du document

Ce document est organisé comme suit:

Chapitre 2 fait référence aux notions théoriques et littéraires sur lesquelles se base notre recherche. Il explique certaines approches auxquelles on a recours dans l'analyse du problème et explicite les suppositions qui justifient la validité de ces méthodes.

Chapitre 3 Dans ce chapitre, on aborde le problème d'estimation de mérites en étudiant un cas simple où on suppose l'invariabilité de ces derniers au cours du temps et on décrit les approches utilisées pour y aboutir.

Chapitre 4 Le chapitre 4 s'attaque à la problématique de base qu'est le suivi et la mise à jour des mérites en fonction du temps. On élucide la solution pour un cas linéaire simple et un cas binaire plus général. On évalue les performances des approximations et algorithmes qu'on utilise par rapport à la qualité de prédiction.

Chapitre 5 Dans ce chapitre, on exploite les méthodes développées dans le chapitre précédent pour estimer les variations des mérites des équipes de la ligue nationale du Hockey pour la saison 2017-2018.

Chapitre 2

Modélisation et estimation

2.1 Modélisation

Le problème de comparaison directe par paire concerne les données où l'on ne peut établir des degrés de préférence que d'une manière subjective. Ceci s'avère être le cas quand on est dans l'incapacité de trouver un critère d'évaluation objectif et mesurable. Et donc, quantifiant un degré de préférence entre les objets nous permet de les classer les uns par rapport aux autres. Il existe plusieurs applications utiles de ce genre d'analyse et dans ce travail nous nous intéressons au classement des équipes selon leurs performances dans les matchs. Ce processus requiert la présence d'un ensemble d'objets à classer, et d'autant de juges pour les classer que nécessaire. Les juges définiront les critères selon lesquels les scores seront attribués. [5]

1. **Modèle de base:** Supposons que l'on dispose de m objets A_1, A_2, \dots, A_m à être comparés par n juges. Chaque juge créera r_γ répliques de toutes les $\binom{m}{2}$ comparaisons possibles. Soient $\chi_{ij\gamma\delta}$ tel que $i, j = 1, 2, \dots, m$ $i \neq j$, $\gamma = 1, 2, \dots, n$ et $\delta = 1, 2, \dots, r_\gamma$ des variables aléatoires binaires qui prennent la valeur 1 si juge γ préfère A_i à A_j et 0 le cas échéant lors de sa $\delta^{\text{ème}}$ comparaison. On note $P(\chi_{ij\gamma\delta}) = \pi_{ij\gamma\delta}$ avec $0 \leq \pi_{ij\gamma\delta} \leq 1$ et $\pi_{ij\gamma\delta} + \pi_{ji\gamma\delta} = 1$. Dans le cas particulier où ni la réplique ni le choix de juge n'ont d'effet important, on peut simplifier $\pi_{ij\gamma\delta} = \pi_{ij}$. En appliquant le modèle ci-sus décrit, les objets A_i pourraient être classés selon leur probabilités de préférence moyenne $\pi_i = \frac{1}{m-1} \sum_j \pi_{ij}$ où $j \in \{1, \dots, m ; j \neq i\}$. Le fait qu'on ait $\pi_i \geq \pi_j$ ne se traduit pas forcément par $\pi_{ij} \geq \frac{1}{2}$ [5].

2. **Modèle linéaire** : On suppose maintenant que l'on peut attribuer une valeur θ_i qui quantifie le mérite de l'objet A_i . Alors, on pourrait établir une échelle de mérite à tous les objets qu'on souhaite classer. Les mérites observés (ou mesurés) varient d'une réalisation à une autre et peuvent ainsi être représentés par des variables aléatoires continues qu'on dénote par Θ_i et Θ_j respectivement. Dans le cadre d'une comparaison par paire entre deux objets A_i et A_j , A_i sera choisi si $\Theta_i - \Theta_j > 0$ sinon c'est A_j qui le sera. S'il s'avère possible d'exprimer la probabilité de préférence $\pi_{ij} = P(\Theta_i - \Theta_j > 0)$ par $H(\theta_i - \theta_j)$ avec $H(x)$ croissante monotone de $H(-\infty) = 0$ à $H(\infty) = 1$ et $H(-x) = 1 - H(x)$, alors on peut dire que π_{ij} satisfait un modèle linéaire. On voit que $H(x)$ ne peut être que la fonction cumulative d'une variable aléatoire continue symétriquement distribuée. L'objectif est généralement d'essayer d'inférer ces valeurs réelles θ_i à partir des réalisations. Dans la littérature, on distingue deux modèles linéaires connus; celui de Thurstone et celui de Bradley-Terry. La différence majeure entre ces deux modèles est la nature de la fonction H qui est gaussienne pour le premier et logistique pour le dernier.

2.1.1 Modèle Mathématique

Pour simplifier, on suppose qu'on a deux sujets à classer selon leurs mérites θ_i et θ_j respectivement. On se propose que θ_i et θ_j sont des variables aléatoires avec des moyennes μ_i et μ_j et des variances σ_i^2 et σ_j^2 . En se référant aux réalisations $\theta_i \sim P(\theta_i | \mu_i, \sigma_i^2)$ et $\theta_j \sim P(\theta_j | \mu_j, \sigma_j^2)$, on cherche à déterminer la probabilité de préférer le sujet i au détriment du sujet j en se basant sur une observation de la différence d_{ij} qui dépende des mérites. Si on suppose qu'on connaît les valeurs réelles de θ_i et θ_j qui suivent les distributions mentionnées ci-dessus, on peut établir une variable aléatoire $d_{ij} | \theta_i, \theta_j = \theta_i - \theta_j + \epsilon_{ij}$ avec ϵ_{ij} de moyenne nulle et de variance connue σ_ϵ^2 . Soit Y_{ij} un événement aléatoire binaire qui détermine la préférence du sujet i par rapport à j . On a alors

$$Y_{ij} = q(d_{ij}) \tag{2.1}$$

où $q : \mathfrak{R} \rightarrow \{-1, 1\}$ est définie comme suit:

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Modèle de Thurstone

Pour le modèle de Thurstone, on définit le bruit ϵ_{ij} par une variable aléatoire gaussienne centrée en 0 et de variance constante γ . On peut alors déterminer la probabilité que Y_{ij} prenne une certaine valeur selon les valeurs de θ_i et θ_j .

$$\begin{aligned} P(Y_{ij} = 1 | \theta_i, \theta_j) &= P(d_{ij} \geq 0 | \theta_i, \theta_j) \\ &= \Phi\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right) \end{aligned}$$

Avec Φ est la fonction cumulative d'une variable normale centrée en 0 et de variance γ . De même, on écrit $P(Y_{ij} = -1 | \theta_i, \theta_j) = \Phi\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{\sqrt{\gamma}}\right)$. En général, on écrit

$$P(Y_{ij} = y_{ij} | \theta_i, \theta_j) = \Phi\left(y_{ij} \frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right) \quad (2.2)$$

Modèle de Bradley - Terry

Le modèle de Bradley-Terry se différencie du modèle de Thurstone par le fait que le bruit ϵ_{ij} suit une distribution logistique paramétrée par une moyenne nulle et une échelle s proportionnelle à l'écart-type $\sqrt{\gamma}$ par un facteur de $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$. Sa densité de probabilité s'écrit sous la forme $f(\epsilon, 0, s) = \frac{\exp(-\frac{\epsilon}{s})}{s(1+\exp(-\frac{\epsilon}{s}))^2}$. Ce qui résulte en $d_{ij} | \theta_i, \theta_j$ paramétrée par $(\theta_i - \theta_j, s)$. Par conséquent, la probabilité qu'un évènement y_{ij} se produise s'écrit:

$$P(Y_{ij} = y_{ij} | \theta_i, \theta_j) = \frac{1}{1 + \exp\left(-y_{ij} \frac{\theta_i - \theta_j}{s}\right)} \quad (2.3)$$

2.2 Principes de l'estimation bayésienne

2.2.1 Formalisme de l'inférence statistique

On assume qu'un certain phénomène observable est généré par des variables aléatoires latentes d'intérêt θ . On cherche alors à inférer les distributions de θ qui ont mené aux réalisations observées. Ceci peut servir à comprendre, analyser ou interpréter des phénomènes passés aussi bien qu'à prédire

des phénomènes futurs de nature similaire. Comme il s'agit, en général d'un phénomène réel que l'on souhaite comprendre ou interpréter, une première étape de modélisation probabiliste précède l'estimation des paramètres d'intérêt θ . Ces modèles approximatifs de la réalité devraient être construits de manière à incorporer à la fois les données disponibles ainsi que les incertitudes qui leur sont relatives. Formellement, on suppose qu'on observe plusieurs réalisations $\mathbb{D}_k = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ d'un phénomène. On suppose que ces observations sont générées par une loi probabiliste paramétrée par θ [19]. On écrit:

$$\begin{aligned} Y_1 &\sim f_1(Y_1|\theta_1) \\ Y_l &\sim f_l(Y_l|\theta_l, y_1, \dots, \mathbb{D}_{l-1}) \\ \mathbb{D}_k &\sim f(\mathbb{D}_k|\theta) \\ &= \prod_{i=1}^k f_i(Y_i|\theta_i, \mathbb{D}_{i-1}) \\ &= f_1(Y_1|\theta_1) \prod_{i=2}^k f_i(Y_i|\theta_i, \mathbb{D}_{i-1}) \end{aligned}$$

Si les réalisations y_i sont conditionnellement indépendantes, on obtient

$$\mathbb{D}_k \sim \prod_{i=1}^k f_i(Y_i|\theta_i)$$

En se basant sur cette formulation, on cherche généralement à déterminer les distributions sur les paramètres θ à partir des distributions des données observables. La distribution des données observables par rapport aux paramètres latents $P(\mathbb{D}_k|\theta)$ est définie comme la fonction de vraisemblance et est dénotée en inversant les arguments de la probabilité comme suit $L(\theta|\mathbb{D}_k) = P(\mathbb{D}_k|\theta)$.

On se propose d'avoir une population de m sujets à comparer deux à deux. Chaque sujet se caractérise par son mérite individuel θ_i . On se propose aussi qu'on a un ensemble d'observations indépendantes $\mathbb{D} = \{y_{ij}, 1 \leq i, j \leq m, i \neq j\}$. Alors la fonction de vraisemblance pour deux modèles renommés de la littérature définis dans la section 2.1.1 s'écrit:

$$L(\theta|\mathbb{D}) = \prod_{i,j} \prod_{i \neq j} P(Y_{ij} = y_{ij}|\theta_i, \theta_j)^{\frac{y_{ij}+1}{2}} (1 - P(Y_{ij} = y_{ij}|\theta_i, \theta_j))^{\frac{1-y_{ij}}{2}} \quad (2.4)$$

Avec $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}^T$ et $y_{ij} = 1$ s'interprète par le sujet i est préféré au sujet j et inversement pour -1 . L'expression $P(Y_{ij} = y_{ij} | \theta_i, \theta_j)$ dans (2.4) est définie dans (2.2) et (2.3) respectivement pour le modèle de Thurstone et celui de Bradley-Terry.

2.2.2 Paradigme bayésien

Étant donné un modèle paramétrique d'observation $\mathbf{y} \sim f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$, on écrit la fonction de vraisemblance paramétrée par $\boldsymbol{\theta}$ comme suit :

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) \quad (2.5)$$

La fonction de vraisemblance n'est autre que la distribution des données ou encore observations sachant les paramètres. Il s'agit clairement d'une distribution conditionnelle. Ci-après, on rappelle le théorème de Bayes pour formaliser l'inversion des conditions dans les probabilités.

Théorème 2.2.1. Théorème de Bayes

- Cas discret : Soient A et B deux variables aléatoires discrètes avec $P(B) \neq 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (2.6)$$

- Cas continu : Soient $y \sim f_y(y)$ et $x|y \sim f_{x|y}(x|y)$ alors

$$f_y(y|x) = \frac{f_{x|y}(x|y)f_y(y)}{\int_y f_{x|y}(x|y)f_y(y)} \quad (2.7)$$

Pour entamer une inférence bayésienne, on suppose qu'on dispose d'informations préalables sur notre variable d'intérêt $\boldsymbol{\theta}$ pour déterminer une distribution a priori $P(\boldsymbol{\theta})$ avant de prendre en compte les observations \mathbf{y} générées par la fonction de vraisemblance $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$. On peut alors inférer la distribution a posteriori $P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ compte tenu des observations comme suit:

$$P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})P(\boldsymbol{\theta})}{\int_{\boldsymbol{\theta}} L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})P(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}} \quad (2.8)$$

$$\propto L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})P(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.9)$$

Dans le cas général, il n'est pas facile de dériver $P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ de manière analytique et on fait appel aux approximations. Le passage de (2.8) à (2.9) se justifie par le fait que $\int_{\boldsymbol{\theta}} L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})$ est simplement une constante de normalisation pour que $P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta}$ ait une intégration de 1.

2.3 Estimation des paramètres

2.3.1 Estimation en bloque (hors ligne)

L'estimation en bloque repose sur la supposition que nos paramètres d'intérêt sont fixes et sont à l'origine de toutes les données observées. Pour un ensemble de m sujets à comparer par paire, on dénote $\mathbb{D} = \{y_{ij}^{(1)}, \dots, y_{ij}^{(n)}; y_{ij} \in \{-1, 1\}; 1 \leq i, j \leq m; i \neq j\}$ un ensemble de n observations où l'objet i est choisi quand y_{ij} prend la valeur 1. Le cas échéant, c'est j qui sera préféré. Une manière de faire l'agrégation de données est de déterminer $\mathbb{C} = \{c_{ij} = \text{card}(\{y_{ij} = 1\}); c_{ji} = \text{card}(\{y_{ji} = 1\}); 1 \leq i, j \leq m; i \neq j\}$. c_{ij} compte le nombre de fois le sujet i est préféré au sujet j . Exemple : Soit $m = 2$ joueurs et on dispose de 5 observations de la variables y_{12} comme suit $\mathbb{D}_{12} = \{1, 1, -1, 1, -1\}$ alors $\mathbb{C}_{12} = \{3, 2\}$.

On dénote nos paramètres par $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ préalablement inconnus mais dont on dispose de quelques informations a priori qu'on modélise dans la distribution multidimensionnelle $P(\boldsymbol{\theta})$. On souhaite estimer les distributions de $\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}$. En cas général, il s'avère que cette entité n'est pas facile à calculer. Donc, on procède par faire des approximations pour calculer les mesures statistiques de cette distribution.

Approximation de Laplace

La distribution a posteriori $P(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C})$ n'est pas forcément une distribution gaussienne. Cependant, il est pratique de l'approximer par une distribution gaussienne afin de faciliter les calculs qui suivent. Une manière de faire cette projection sur l'espace des distributions gaussiennes peut être réalisée par « moment matching » où on approxime $P(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}) \sim N(\boldsymbol{\theta}|E[\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}], \text{var}[\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}])$. Ceci se fait en assignant à la distribution approximée la même moyenne et variance de la distribution à approximer. Cette opération minimise la divergence Kullback-Leibler et donc est la gaussienne la plus proche de la distribution originale. Cette méthode ne sera pas exploitée dans ce travail mais [10] donne une

preuve détaillée de sa validité. Pour ce travail, comme nous sommes dans l'incapacité de calculer les moments de la distribution a posteriori de manière analytique, nous procédons par une optimisation de cette dernière par la méthode de maximum a posteriori. Ainsi, on approxime la moyenne par le mode $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de l'a posteriori et la matrice de covariance par la matrice hessienne autour de ce mode. Afin d'expliquer comment nous aboutissons à cette approximation, nous dénotons $J(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}) = \log P(\mathbb{C}|\boldsymbol{\theta})P(\boldsymbol{\theta})$. On peut alors déterminer $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ selon:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmax}} J(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}) \quad (2.10)$$

Maintenant, nous développons J en série de Taylor d'ordre 2 en $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}) &= J(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbb{C}) + \nabla_{\boldsymbol{\theta}}^T J(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C})|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &+ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C})|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \mathcal{O}(\boldsymbol{\theta}^3) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Etant donné que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est l'estimateur par maximum a posteriori de J , il annule le gradient $\nabla_{\boldsymbol{\theta}}^T J(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbb{C})$. Ainsi, on réécrit le logarithme de la distribution a posteriori J défini en (2.11) en remplaçant $H_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C})|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ pour alléger la notation.

$$J(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}) = J(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbb{C}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{H}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.12)$$

Dans notre cas, la fonction $J(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C})$ étant strictement concave, la matrice hessienne $H_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ est alors négative définie. Ainsi, $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = -\mathbf{H}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ est positive définie. L'équation (2.12) se transforme en

$$J(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}) = J(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbb{C}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.13)$$

On peut écrire alors

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}) &= \frac{P(\mathbb{C}|\boldsymbol{\theta})P(\boldsymbol{\theta})}{P(\mathbb{C})} \\ &\approx \exp J(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbb{C}) \frac{\exp -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})}{P(\mathbb{C})} \\ &= N(\boldsymbol{\theta}; \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \times |\boldsymbol{\Sigma}| \times \exp J(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbb{C})}{P(\mathbb{C})} \end{aligned}$$

Pour que $P(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C})$ soit une gaussienne normalisée, on évalue le terme de normalisation

$$P(\mathbb{C}) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}} \exp(J(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbb{C})) \quad (2.14)$$

Avec n la dimension du vecteur d'observation.

2.3.2 Estimation séquentielle (en ligne)

Contrairement à l'estimation par bloque, l'estimation séquentielle se fait de façon récursive. C'est-à-dire qu'on met à jour l'a posteriori au fur et à mesure qu'on observe de nouvelles données ce qui nous permet de prendre en compte l'ordre temporel des observations. Cette approche permet aussi de suivre la variabilité des paramètres au cours du temps ainsi qu'obtenir des mise-à-jours sans avoir à attendre qu'on accumule toutes les données. On dénote par $\mathbf{y}_k = \{y_{ij}^{(k)} ; y_{ij} \in \{-1, 1\} ; 1 \leq i, j \leq m ; i \neq j\}$, les observations cueillies durant la période de mise à jour k et par $\mathbb{D}_k = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ l'ensemble de toutes les observations jusqu'à k . On cherche alors à évaluer la distribution a posteriori de $\boldsymbol{\theta}_k$ en se référant à \mathbb{D}_k .

$$P(\boldsymbol{\theta}_k|\mathbb{D}_k) = P(\mathbf{y}_k|\boldsymbol{\theta}_k)P(\boldsymbol{\theta}_k|\boldsymbol{\theta}_{k-1}, \mathbb{D}_{k-1}) \quad (2.15)$$

L'estimation peut se faire localement telle que discutée pour l'estimation en bloque, c'est-à-dire qu'on n'utilise que les données observées durant la période k pour estimer la fonction de vraisemblance. L'a posteriori à l'instant k peut ainsi être approximé par une gaussienne par la méthode de Laplace et sera considéré comme l'apriori à la période $k+1$. Malgré les avantages que cette approche présente en matière de simplification de calcul, les approximations faites à chaque itérations peuvent altérer la fiabilité des estimations. Plusieurs autres méthodes et approximations ont été proposées dans la littérature telle que l'inférence par passage de message proposée par [11] dans l'algorithme Trueskill. Dans le cadre de ce travail, nous n'utilisons pas cette approche car cette méthode n'est valide que si le graphe ne présente pas de boucles ce qui n'est pas le cas dans notre modèle.

2.4 Discrimination du modèle

Le problème de discrimination de modèle vise à inférer un modèle approprié M_j parmi une population de modèles candidats et un vecteur de paramètres θ_{M_j} qui offre une bonne approximation de la distribution génératrice des données observées \mathbb{D} . Formellement, on cherche $\hat{M}_j = \operatorname{argmax}_{M_j} P(\mathbb{D}|M_j)$ où $P(\mathbb{D}|M_j)$ représente la probabilité d'avoir eu les données \mathbb{D} sachant qu'on ait déployé le modèle M_j . Cette quantité est aussi appelée évidence du modèle. Cette dernière est une mesure quantitative pour comparer la capacité de différents modèles à s'ajuster aux données tout en pénalisant la complexité du choix de plusieurs hyperparamètres [16] [15].

2.4.1 Cas des données statiques

Si les données ne dépendent pas du facteur de temps et que les observations sont obtenues après un processus d'expérimentations où l'ordre n'a pas d'influence sur les résultats, on évalue l'évidence du modèle ou encore $P(\mathbb{D}|M_j)$ en multipliant toutes les fonctions de vraisemblance ou encore $\int_{\theta} \prod_k P(\mathbf{y}_k|\theta, M_j)P(\theta|M_j) d\theta$.

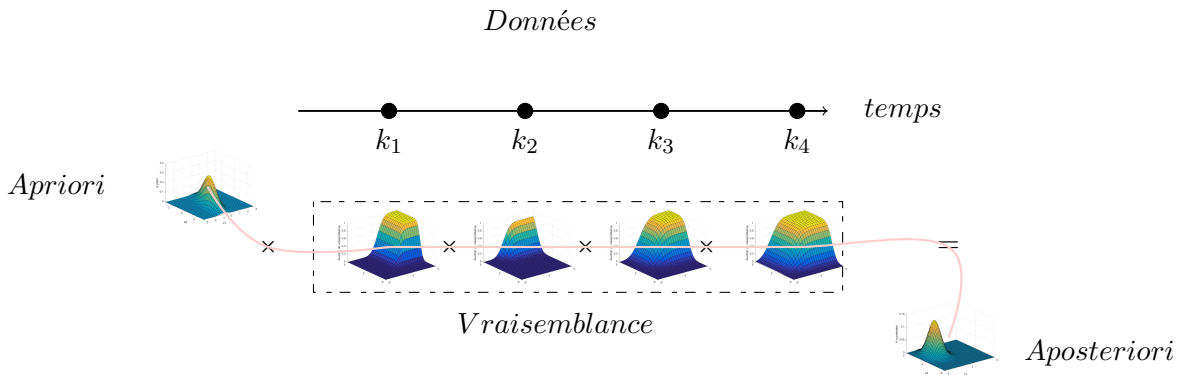


Figure 2.1 – Représentation pour le modèle statique adaptée de [16]

2.4.2 Pour les données dynamiques

Contrairement au cas statique, dans un système dynamique, on a parfois besoin non seulement de mettre à jour nos estimations à chaque fois qu'on a une nouvelle observation mais aussi de prendre en considération l'évolution des paramètres au fil du temps. Ceci requiert qu'à chaque

moment d'observation k , on doit déterminer le modèle le plus adéquat pour avoir une estimation pertinente.

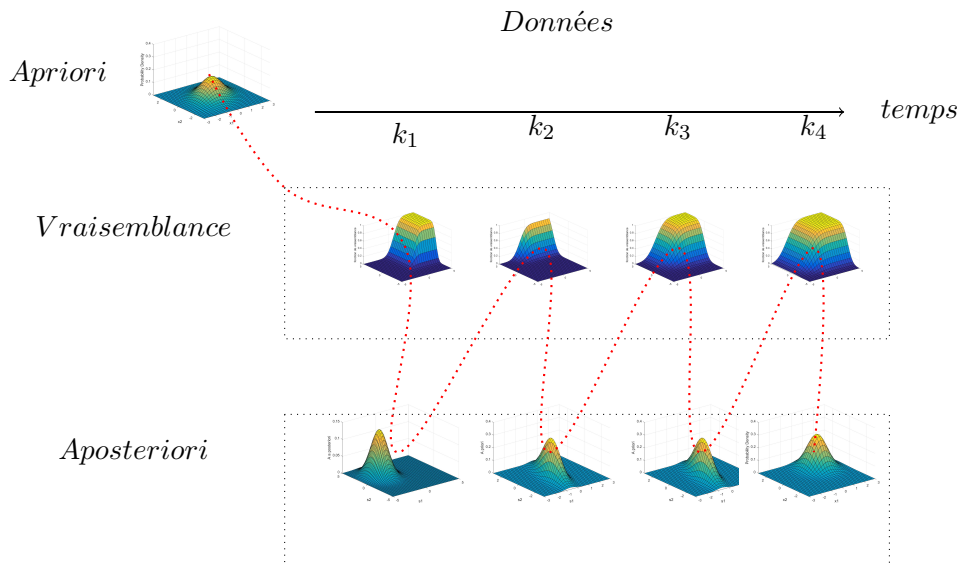


Figure 2.2 – Représentation pour le modèle dynamique adaptée de [16]

2.5 Métriques d'évaluation

L'objectif général de mener une inférence est de fournir un moyen d'aide à la décision qui reposerait sur paramètres inférés. Ceci incite à définir des critères d'évaluation pour prendre en compte les répercussions de chaque décision que l'on pourrait prendre. On peut formellement décrire ce critère en une fonction du coût qu'on encourt lorsqu'on opte pour la décision a en se basant sur nos estimations de θ . Une telle fonction permet de quantifier la perte ou la pénalité auxquelles on fait face lorsqu'on prévoit a et que l'observation réelle soit y . Cette fonction doit être minimale pour $a = y$ [19].

2.5.1 Caractéristiques des métriques d'évaluation

Il existe plusieurs métriques d'évaluations dans la littérature et il est important de ne choisir que celles qui se montrent adéquates à notre problème. Dans le cadre de prédictions probabilistes et des estimations, le critère de propreté se montre important dans l'évaluation des résultats.

Dans [8], on définit les règles de notation propres comme des fonctions qui proviennent des fonctions convexes et sont relatives à des mesures d'information, des fonctions d'entropie et des divergences de Bregmann. Elles se modélisent par des fonctions d'utilité S qui évaluent les gains qu'on obtiendrait en faisant une prédiction P qui se concrétise par l'observation $y \in \mathbb{Y}$. On note cette fonction par $S(P, y) : [0, 1] \times \mathbb{Y} \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Si on se propose qu'on connait la distribution Q qui a engendré l'observation y , alors la moyenne de $S(P, \cdot)$ calculée par rapport à Q est $S(P, Q) = E_Q[S(P, \cdot)]$. Une règle de notation qui vérifie $\forall P, Q, S(Q, Q) \geq S(P, Q)$ est dite propre. Elle est dite strictement propre que lorsque l'égalité n'est satisfaite que quand $P = Q$. On peut aussi évaluer des fonctions de coûts en ayant recours à l'opposé de la fonction d'utilité.

2.5.2 Évaluation de la qualité d'estimation

L'estimation de paramètres est en soi d'intérêt car elle nous permet de justifier un classement des objets selon leur popularité où un certain critère de préférence. D'où l'importance de bien l'évaluer. Dans le cadre de ce travail, on se contente d'utiliser l'erreur quadratique moyenne pour mesurer l'écart entre les paramètres estimés et les paramètres réels (cependant ces derniers ne sont pas toujours disponibles) et la divergence Kullback-Leibler pour mesurer différence entre les distributions de ces paramètres. Dans le cas gaussien, si les matrices de covariances sont fixes, les deux métriques sont équivalentes.

- Erreur Quadratique Moyenne : $EQR = \|\hat{\theta} - \theta\|^2$
- Divergence Kullback-Leibler (pour les gaussiennes): Soient $\theta \sim N(\mu, \Sigma)$ et $\hat{\theta} \sim \hat{N}(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$ et soit m le nombre de paramètres des gaussiennes multidimensionnelles alors

$$D_{KL}(N||\hat{N}) = \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr}(\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma) + (\hat{\mu} - \mu)^T \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\mu} - \mu) - m + \log \frac{|\hat{\Sigma}|}{|\Sigma|} \right\}$$

2.5.3 Évaluation de la capacité de prédiction

On évalue aussi les capacités de prédictions du systèmes. A partir des estimations, on calcule les probabilités de prédiction (qu'un joueur gagne contre un autre) et on les compare avec les probabilités réelles (déterminées à partir des paramètres réels), avec les réalisations observées ou encore avec leur fiabilité à maximiser notre profit de gain monétaire net si on place des paris. Si on note par P la probabilité prédite et par Q la probabilité réelle et par $L(P, Q) = (P - Q)^2$ la

fonction de perte de Brier, alors les mesures propres suivantes peuvent être employées pour des fins d'évaluation [14].

- **Score quadratique de Brier en probabilité**

$$L(P, Q) = (q_{ij} - p_{ij})^2$$

- **Divergence de Kullback- Leibler**

$$D_{KL}(P, Q) = \frac{1}{2} [p_{ij} \log\left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}}\right) + (1 - p_{ij}) \log\left(\frac{1 - p_{ij}}{1 - q_{ij}}\right)]$$

- **Score quadratique de Brier avec résultat binaire:** Soit $P = \{p_{ij}, 1 - p_{ij}\}$ où p_{ij} est la probabilité estimée que le joueur i gagne contre le joueur j et $y_{ij} \in \{1, -1\}$ l'observation relative à cette probabilité alors :

$$L(P, y_{ij}) = \begin{cases} (1 - p_{ij})^2 & \text{si } y_{ij} = 1 \\ p_{ij}^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Entropie croisée avec résultat binaire** L'entropie croisée, autrement connue sous le nom de perte logarithmique, évalue la performance d'un modèle de classification dont le résultat est une probabilité de prédiction. Elle croît lorsque la probabilité prédite diverge de l'observation. Elle se calcule:

$$E(P, y_{ij}) = \begin{cases} -\log(p_{ij}) & \text{si } y_{ij} = 1 \\ -\log(1 - p_{ij}) & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Gain monétaire net**

L'idée est que les meilleurs hyperparamètres α et β minimiseraient nos erreurs d'estimation et par conséquent nous permettraient d'établir des probabilités de prédictions plus fiables qui nous permettraient de maximiser nos gains moyens si on mise sur les équipes gagnantes. Si on suppose que les côtes sont établies de manière juste par rapport aux probabilités réelles (c'est-à-dire que $côte_{ij} = \frac{1}{p_{ij}}$), on devrait être en mesure d'établir la fiabilité de nos prédictions en étudiant le gain moyens qu'on gagnerait si l'on suit une stratégie de pari

qui se base sur ces dernières. A chaque itération, on mise sur l'équipe que nous prédisons va gagner. On fait varier les hyperparamètres du modèle et on observe leurs impacts sur les probabilités de prédictions à travers la fonction du gain. Si le joueur sur lequel on mise gagne, on recueille la cote lui étant associée sinon on perd notre pari. On choisit le sujet sur lequel on parie dans un match à deux selon cette formule:

$$\hat{s} = \operatorname{argmax}_{s_i, s_j} \frac{\tilde{p}_{ij}}{p_{ij}} \quad (2.16)$$

Où \tilde{p}_{ij} est notre estimation de la probabilité que le joueur i remporte le match contre le joueur j et s_i et s_j sont des identifiant des joueurs participants. On calcule notre gain net à l'instant du pari selon :

$$GNET_k = \mathbb{1}_{y_{s, s^{\neq s}}=1} \times cote_{\hat{s}} - 1 \quad (2.17)$$

Dans (2.17), on suppose que la totalité des paris placés est égale à 1 et on gagne la valeur de la cote chaque fois qu'on mise correctement sinon on reçoit 0 et on perd l'argent misé.

Chapitre 3

Modèle statique

Dans cette partie, on aborde le problème en supposant que les mérites des joueurs sont représentées par des entités invariables au cours du temps pendant toute la période d'observation. L'ordre des observations n'a pas d'importance et on se contente de comptabiliser le nombre de victoires remportées par chaque équipe à la fin de cette fenêtre d'observation.

3.1 Modélisation

On se propose d'avoir une population de m joueurs dont les mérites qu'on dénote par les variables aléatoires $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_m]^T$ sont modélisées par une distribution gaussienne multi-dimensionnelle; $\boldsymbol{\theta} \sim N(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\Sigma}_\theta)$. Les moyennes $\boldsymbol{\mu}_\theta = [\mu_{\theta_1}, \dots, \mu_{\theta_m}]^T$ représentent les mérites moyens pour chaque équipe i . La matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_\theta$ rassemble les informations concernant l'incertitude autour de ces moyennes. Les éléments sur la diagonale $\Sigma_{\theta,ii}$ représentent les variances marginales qui d'autant plus grande se traduisent par une incertitude significative sur les mérites. Les valeurs en dehors de la diagonale mesurent la dépendance entre les mérites marginaux. Si ces valeurs tombent à zéro, les mérites marginaux se considèrent indépendants. On se propose que l'on dispose d'un ensemble d'observations binaires $\mathbb{D} = \left\{ y_{ij}^{(1)}, \dots, y_{ij}^{(n)} ; y_{ij} \in \{-1, 1\} ; 1 \leq i, j \leq m ; i \neq j \right\}$ qui représente les résultats des confrontations entre chaque couple de joueurs dénotés par i et j . $y_{ij}^{(k)} = 1$ s'interprète par la défaite du joueur j par le joueur i durant la $k^{\text{ème}}$ rencontre. On se limite aux cas de gains et pertes et on ne modélise pas les matchs nuls. On résume les observations dans une matrice

$\mathbb{C} = \{c_{ij} = \text{card}(\{y_{ij} = 1\}); c_{ii} = 0\}$ qui compte le nombre de victoires et de défaites pour chaque rencontre. On suppose un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance γ pour les observations et donc on fait usage du modèle de Thurstone.

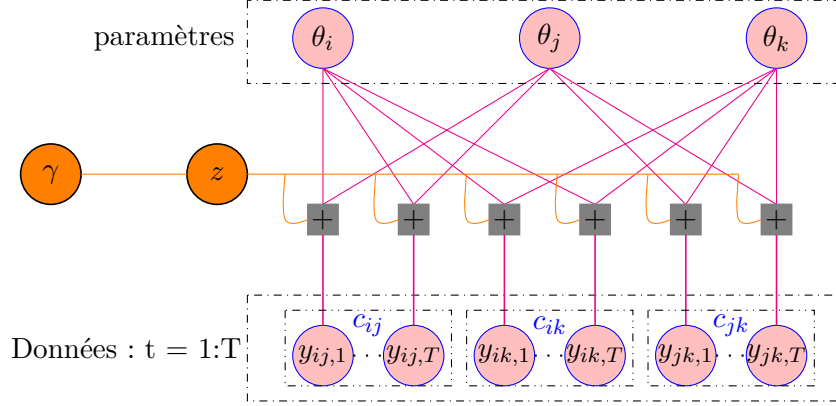


Figure 3.1 – Représentation graphique du modèle statique

La fonction de vraisemblance s'écrit alors

$$P(\mathbb{C}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i \neq j} \Phi\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right)^{c_{ij}} \Phi\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{\sqrt{\gamma}}\right)^{c_{ji}} \quad (3.1)$$

Où la fonction Φ représente la fonction cumulative d'une gaussienne centrée en 0 et de variance γ .

La distribution a posteriori s'écrit

$$P(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}) = \frac{P(\mathbb{C}|\boldsymbol{\theta})P(\boldsymbol{\theta})}{P(\mathbb{C})} \quad (3.2)$$

$$= \frac{\prod_{i,j} \Phi\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right)^{c_{ij}} N(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\Sigma}_\theta)}{P(\mathbb{C})} \quad (3.3)$$

Si on suppose que les variables aléatoires θ_i sont indépendantes identiquement distribuées alors on peut réécrire (3.3) comme suit

$$P(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}) = \frac{\prod_{i,j} \Phi\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right)^{c_{ij}} \prod_{k=1}^m N(\theta_k; \mu_{\theta_k}, \Sigma_{\theta,kk})}{P(\mathbb{C})} \quad (3.4)$$

Pour simplifier les dérivations, on applique la fonction logarithme de part et d'autre de l'équation (3.3) ou encore (3.4). L'équation (3.3) se transforme en:

$$\log P(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}) = \sum_{i,j; i \neq j} c_{ij} \log \Phi\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right) - \frac{1}{2} \log((2\pi)^m |\boldsymbol{\Sigma}_\theta|) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_\theta)^T \boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_\theta) - \log P(\mathbb{C}) \quad (3.5)$$

Si on assume que les variables $\{\theta_i ; 1 \leq i \leq m\}$ sont indépendantes, on réécrit l'équation (3.4) comme suit

$$\log P(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C}) = \sum_{i,j; i \neq j} c_{ij} \log \Phi\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right) + \sum_{k=1}^m -\log(\sqrt{2\pi |\Sigma_{\theta,kk}|}) - \frac{(\theta_k - \mu_{\theta,k})^2}{2 \Sigma_{\theta,kk}} - \log P(\mathbb{C}) \quad (3.6)$$

3.2 Estimation des paramètres et prédictions

L'expression de (3.3) représente la densité de probabilité a posteriori de $\boldsymbol{\theta}$ par rapport à la matrice d'observations \mathbb{C} . Afin d'estimer les paramètres $\boldsymbol{\theta}$, on optimise cette densité. Pour ces fins, on étudie la concavité de la fonction et on optimise le mode ou encore la moyenne puisqu'elle est uni-modale. On approxime cette distribution autour de son mode par une distribution normale ayant l'inverse de la hessienne comme matrice de covariance.

3.2.1 Concavité de $\log P(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C})$

Afin de justifier la validité des traitements que nous faisons subséquentement, nous prouvons que $\log P(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C})$ est une fonction concave.

Théorème 3.2.1. Fonctions convexes / concaves deux fois différentiables

Soit $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^n$ ouvert et convexe et soit $f : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ continue deux fois dérivable sur Ω . Alors, ce qui suit est vrai:

- f est convexe (concave) sur Ω si et seulement si $\nabla^2 f(x)$ est positive (négative) semi-définie $\forall x \in \Omega$
- Elle est dite strictement convexe (concave) si $\nabla^2 f(x)$ est positive (négative) définie $\forall x \in \Omega$

Proposition 3.2.1. Opérations qui préservent la convexité/ concavité

1. Combinaisons positives: $\forall i = 1, \dots, r$, soit $f_i : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ convexe (concave) et soit $\{\lambda_i \geq 0, i \in \{1, \dots, r\}\}$ alors $\sum_{i=1}^r \lambda_i f_i$ est convexe (concave).

2. Composition avec fonction affine: Soit $f : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}$ convexe (concave) et soit $G : \mathfrak{X}^m \rightarrow \mathfrak{X}^n$ une fonction affine alors $f \circ G$ est convexe (concave).

Preuve: Pour alléger les notations, on note $J(\boldsymbol{\theta}) = \log P(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{C})$. On se propose de démontrer la concavité de $J(\boldsymbol{\theta})$ en $\boldsymbol{\theta}$.

$$\begin{aligned} \square x \in \mathfrak{X}_+; f(x) = \Phi(x) \text{ alors} \\ \text{--- } f'(x) &= \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{\exp(-\frac{x^2}{2})}{\sqrt{2\pi}\Phi(x)} \\ \text{--- } f''(x) &= \frac{-x \exp(-\frac{x^2}{2})}{\sqrt{2\pi}\Phi(x)} - \frac{\exp(-\frac{x^2}{2})}{2\pi\Phi^2(x)} \leq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{X}_+ \\ \square x \in \mathfrak{X}_-; f(x) = \Phi(x) = 1 - \Phi(-x) \text{ alors} \\ \text{--- } f'(x) &= \frac{\Phi'(-x)}{1-\Phi(-x)} = \frac{\exp(-\frac{x^2}{2})}{\sqrt{2\pi}(1-\Phi(-x))} \\ \text{--- } f''(x) &= \frac{x \exp(-\frac{x^2}{2})}{\sqrt{2\pi}\Phi(x)} - \frac{\exp(-\frac{x^2}{2})}{2\pi(1-\Phi(-x))^2} \leq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{X}_- \end{aligned}$$

On en conclue que $\log \Phi(x)$ est concave $\forall x \in \mathfrak{X}$. On considère la fonction $g : \mathfrak{X}^m \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que $g(\boldsymbol{\theta}) = \sum_i \lambda_i \theta_i$. En particulier, toutes les λ_i sont mises à 0 sauf celles des joueurs k et l qui auxquels on s'intéresse qu'on fixe à 1 et -1 respectivement. En se basant sur la proposition 3.2.1, $\log(\Phi(g(\boldsymbol{\theta})))$ est concave et $\sum_{i \neq j} c_{ij} \log \Phi(g(\theta_i - \theta_j))$ est concave aussi. De plus, $\forall \boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{X}^m$, $[\sum_{k=1}^m -\frac{(\theta_k - \mu_{\theta,k})^2}{2\Sigma_{\theta,kk}}]'' = -\sum_{k=1}^m \frac{1}{\Sigma_{\theta,kk}} < 0$. On en conclue que $J(\boldsymbol{\theta})$ est concave. Il s'agit donc d'un problème d'optimisation sans contrainte qu'on résoudra avec la méthode du gradient ascendant.

3.2.2 Estimation des paramètres

Pour estimer les statistiques, on procède par une optimisation de l'algorithme du gradient ascendant ce qui requiert le calcul des dérivées premières. Les dérivations de second ordre parviennent dans le calcul de la matrice de covariance a posteriori.

$$\nabla J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_m} \end{bmatrix}; \quad \nabla \nabla J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial^2 \theta_1} & \dots & \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_m \partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial^2 \theta_m} \end{bmatrix}$$

Où

$$\cdot \frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = \sum_{k \neq i} c_{ik} \frac{\Phi'(\frac{\theta_i - \theta_k}{\sqrt{\gamma}})}{\Phi(\frac{\theta_i - \theta_k}{\sqrt{\gamma}})} - \sum_{l \neq i} c_{li} \frac{\Phi'(\frac{\theta_l - \theta_i}{\sqrt{\gamma}})}{\Phi(\frac{\theta_l - \theta_i}{\sqrt{\gamma}})} - \frac{\theta_i - \mu_{\theta,i}}{\Sigma_{\theta,ii}}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= -c_{ij} \left[\frac{\Phi''\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\Phi\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right)} - \left(\frac{\Phi'\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\Phi\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right)}\right)^2 \right] - c_{ji} \left[\frac{\Phi''\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\Phi\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{\sqrt{\gamma}}\right)} - \left(\frac{\Phi'\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\Phi\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{\sqrt{\gamma}}\right)}\right)^2 \right] \\ \cdot \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial^2 \theta_i} &= \sum_{j \neq i} c_{ij} \left[\frac{\Phi''\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\Phi\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right)} - \left(\frac{\Phi'\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\Phi\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right)}\right)^2 \right] + \sum_{k \neq i} c_{ki} \left[\frac{\Phi''\left(\frac{\theta_k - \theta_i}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\Phi\left(\frac{\theta_k - \theta_i}{\sqrt{\gamma}}\right)} - \left(\frac{\Phi'\left(\frac{\theta_k - \theta_i}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\Phi\left(\frac{\theta_k - \theta_i}{\sqrt{\gamma}}\right)}\right)^2 \right] - \frac{1}{\Sigma_{\theta, ii}} \end{aligned}$$

Où les expressions de la fonction Φ et de ses dérivées sont reportées sur le tableau 3.1 pour les deux modèles de Thurnstone et de Bradley- Terry

Tableau 3.1 – Distributions et fonctions cumulatives des variables gaussiennes et logistiques

Fonction	$\Phi(x)$	$\Phi'(x)$	$\Phi''(x)$
<i>Bradley - Terry</i>	$\frac{1}{1+\exp(-x)}$	$\frac{\exp(-x)}{(1+\exp(-x))^2}$	$\frac{\exp(-x)(\exp(-x)-1)}{(1+\exp(-x))^3}$
<i>Thurnstone</i>	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	$-x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

On utilise l'algorithme de la descente de gradient pour minimiser l'opposé de la fonction J

Algorithm 1 Algorithme de la descente du gradient [12]

(E1) (Initialisation) Choisir un vecteur initial $\boldsymbol{\theta}^0 \in \mathfrak{X}^m$; Initialiser $k \leftarrow 0$

repeat

(E2) Déterminer \mathbf{d}^k tel que $\nabla J(\boldsymbol{\theta}^k)^T \mathbf{d}^k < 0$

(E3) Déterminer $t_k > 0$ satisfaisant $J(\boldsymbol{\theta}^k + t_k \mathbf{d}^k) < J(\boldsymbol{\theta}^k)$

(E4) $\boldsymbol{\theta}^{k+1} \leftarrow \boldsymbol{\theta}^k + t_k \mathbf{d}^k$; $k \leftarrow k + 1$

until Condition d'arrêt

3.2.3 Prédiction

Une fois qu'on ait déterminé la distribution a posteriori de $\boldsymbol{\theta}$ sachant toutes les données \mathbb{C} . On peut calculer la probabilité p_{ij} qu'une équipe i gagne contre son adversaire j selon (2.2) et (2.3) respectivement pour le modèle de Thurnstone et celui de Bradley-Terry. Cependant dans le cas général, on ne dispose pas des valeurs de θ_i et de θ_j , on procède donc par calculer l'espérance de (2.2) et (2.3) par rapport à la distribution a posteriori de $\boldsymbol{\theta}_{ij}$, où $\boldsymbol{\theta}_{ij}$ est le sous vecteur de $\boldsymbol{\theta}$ qui contient les deux variables θ_i et θ_j et Σ_{ij} est la sous matrice de covariance qui lui correspond.

- Modèle de Thurnstone

$$\begin{aligned}
P(y_{ij} = 1|\mathbb{C}) &= \int_{\theta_i, \theta_j} \Phi\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{\sqrt{\gamma}}\right) N([\theta_i, \theta_j]^T; [\mu_i, \mu_j]^T, \Sigma_{ij}) d\theta_i d\theta_j \\
&= \int_{\theta' = \theta_i - \theta_j} \Phi\left(\frac{\theta'}{\sqrt{\gamma}}\right) N(\theta'; \mu_i - \mu_j, \Sigma_{ii} + \Sigma_{jj} - 2\rho_{ij}\sqrt{\Sigma_{ii} \times \Sigma_{jj}}) d\theta' \\
&= \int_{z = -\infty}^0 N(z; \mu_{\theta'}, \gamma + \Sigma_{\theta'}) dz \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_i - \mu_j}{\sqrt{\Sigma_{ii} + \Sigma_{jj} - 2\rho_{ij}\sqrt{\Sigma_{ii} \times \Sigma_{jj}} + \gamma}}\right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

- Modèle de Bradley-Terry

$$\begin{aligned}
P(y_{ij} = 1|\mathbb{C}) &= \int_{\theta_i, \theta_j} \frac{1}{1 + \exp(-(\theta_i - \theta_j))} N([\theta_i, \theta_j]^T; [\mu_i, \mu_j]^T, \Sigma_{ij}) d\theta_i d\theta_j \\
&= \int_{\theta' = \theta_i - \theta_j} \frac{1}{1 + \exp(-\theta')} N(\theta'; \mu_i - \mu_j, \Sigma_{ii} + \Sigma_{jj} - 2\rho_{ij}\sqrt{\Sigma_{ii} \times \Sigma_{jj}}) d\theta'
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Le cas décrit par l'indépendance entre les deux variables est dérivé en mettant le facteur de corrélation ρ_{ij} à 0.

Chapitre 4

Modèle dynamique

Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier le système dynamique de suivi des mérites de joueurs selon les résultats de leurs confrontations dans le passé. Un système ainsi dynamique pourrait être modélisé par deux équations : une équation d'état et une équation d'observation. La première retrace l'évolution temporelle de l'état du système par la passe du temps. Tandis que la dernière, réajuste les estimations selon les observations.

4.1 Modélisation

Maintenant, on cherche à inférer les distributions a posteriori à partir des nouvelles observations qu'on recueille à chaque instant d'observation k . Pour décrire ce système dynamique à temps discret, on s'amène à établir deux modèles; un modèle d'état du système, qui décrit l'évolution temporelle de l'état de celui-ci et un modèle d'observations qui modélise la relation des mesures observables avec l'état du système.

Le but de cette analyse est d'estimer une densité de probabilité a posteriori de l'état du système qui tient compte des observations et des bruits auxquels le système est assujetti. Chaque nouvelle observation met à jour cette distribution a posteriori. De ce fait, le recours à un filtre récursif pour faire le suivi de l'état du système devient d'intérêt. L'analyse se fait en deux étapes : prédiction et mise-à-jour. La phase de prédiction permet de projeter la densité de l'état d'un pas dans le futur en y incluant les perturbations qui pourraient toucher le système en aplatissant la distribution a

posteriori. L'opération de mise à jour réajuste l'a posteriori en y incluant les nouvelles observations [17].

Soient $\boldsymbol{\theta}_k$ notre vecteur d'état du système qui représente les états des mérites de joueurs à l'instant k . Soient \mathbf{y}_k la quantité qui représente les résultats de matchs. On se propose de modéliser aussi deux quantités de bruits \mathbf{w}_k et \mathbf{v}_k qui représentent respectivement le bruit d'état et le bruit d'observations. On peut alors écrire le modèle du système dynamique ainsi :

$$\boldsymbol{\theta}_k = f(\boldsymbol{\theta}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \quad (4.1)$$

Avec $f : \mathfrak{X}^m \rightarrow \mathfrak{X}^m$ une fonction qui n'est pas forcément linéaire; m est la dimension de $\boldsymbol{\theta}_k$, et \mathbf{w}_k une séquence de bruits identiquement distribués et indépendants de $\boldsymbol{\theta}$. L'équation d'observation se résume en:

$$\mathbf{y}_k = h(\boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{v}_k) \quad (4.2)$$

Avec $h : \mathfrak{X}^m \rightarrow \mathfrak{X}^n$ la fonction qui relie les $\boldsymbol{\theta}_k$ avec les observations. \mathbf{w}_k est une séquence de bruits indépendants identiquement distribués.

Soit $\mathbb{D}_k = \{y_1, \dots, y_k\}$ l'ensemble des observations produites de l'instant 1 à l'instant k .

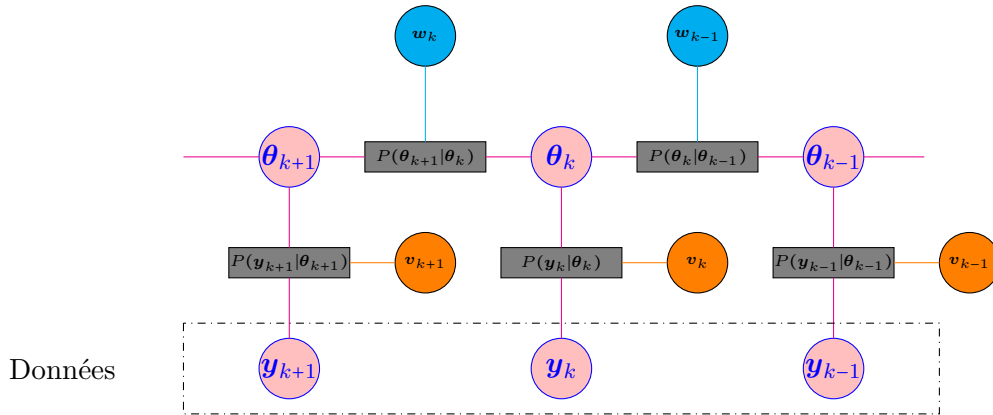


Figure 4.1 – Représentation graphique du modèle dynamique

On cherche à déterminer

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbb{D}_k) &= P(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbb{D}_{k-1}, \mathbf{y}_k) \\
&= \frac{P(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\theta}_k)}{P(\mathbf{y}_k | \mathbb{D}_{k-1})} \int_{\boldsymbol{\theta}_{k-1}} P(\boldsymbol{\theta}_k | \boldsymbol{\theta}_{k-1}) P(\boldsymbol{\theta}_{k-1} | \mathbb{D}_{k-1}) d\boldsymbol{\theta}_{k-1} \\
&\propto P(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\theta}_k) \int_{\boldsymbol{\theta}_{k-1}} P(\boldsymbol{\theta}_k | \boldsymbol{\theta}_{k-1}) P(\boldsymbol{\theta}_{k-1} | \mathbb{D}_{k-1}) d\boldsymbol{\theta}_{k-1}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

De manière générale, on ne peut arriver à une distribution analytique donc on ait recours à des approximations pour résoudre ce problème. On va discuter d'abord le cas linéaire où l'on modélise \mathbf{y}_k comme la différence de score résultant du match. On se propose que ce score n'est autre qu'une réalisation bruitée de la différence des mérites. On dérive la solution optimale de manière analytique. On a recours à cette première partie assez simple pour développer une idée sur le comportement du modèle. Dans la partie suivante, on modélise le cas non linéaire de perte/gain où les observations prennent une forme binaire dont les valeurs sont égales à 1 ou -1.

4.2 Modèle linéaire

4.2.1 Description

Le modèle linéaire est un modèle assez simple car il offre la possibilité de dériver les statistiques des quantités d'intérêt de manière analytique. Soit $\boldsymbol{\theta}_k$ notre quantité d'intérêt qui modélise les mérites à l'instant k . On définit l'équation d'état relative à son évolution temporelle par rapport aux états précédents.

$$\boldsymbol{\theta}_k = \alpha \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \mathbf{w}_k \tag{4.4}$$

où \mathbf{w}_k est un bruit blanc gaussien considéré indépendant de l'état. On désigne par \mathbf{Q}_k la matrice de covariance du bruit \mathbf{w}_k ; $\mathbf{Q}_k = E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \beta_k \times \mathbf{I}$. L'équation d'observation se réécrit encore de façon linéaire. Si on assume que les $\boldsymbol{\theta}_k$ représentent les mérites des joueurs au début du match k , alors on peut modéliser \mathbf{y}_k comme une fonction de la différences de scores qu'on représente par la différence bruitée des mérites.

$$\mathbf{y}_k = H \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{v}_k \tag{4.5}$$

$H \in \mathfrak{R}^{\frac{m(m-1)}{2} \times m}$ représente notre matrice de design et ne contient que des valeurs de 1 et -1. Si par exemple on s'intéresse au match i entre joueur j et joueur l , on a $H(i, j) = 1$ et $H(i, l) = -1$.

\mathbf{v}_k est un bruit blanc gaussien considéré indépendant de l'état. On désigne par \mathbf{R}_k sa matrice de covariance; $\mathbf{R}_k = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \gamma_k \times \mathbf{I}$.

4.2.2 Estimation des statistiques

Dans ce cas particulier, les statistiques de la densité a posteriori s'écrivent comme des mises à jour du filtre de Kalman.

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbb{D}_{1:k}) &= \frac{P(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\theta}_k) \times P(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbb{D}_{k-1})}{P(\mathbf{y}_k | \mathbb{D}_{k-1})} \\
&\propto P(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\theta}_k) \times \int_{\boldsymbol{\theta}_{k-1}} P(\boldsymbol{\theta}_k | \boldsymbol{\theta}_{k-1}) P(\boldsymbol{\theta}_{k-1} | \mathbb{D}_{k-1}) d\boldsymbol{\theta}_{k-1} \\
&= N(\mathbf{y}_k | \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{R}_k) \times N(\boldsymbol{\theta}_k | \alpha \boldsymbol{\mu}_{k-1}, \alpha^2 \boldsymbol{\Sigma}_{k-1} + \mathbf{Q}_k) \\
&= N(\mathbf{y}_k | \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{R}_k) \times N(\boldsymbol{\theta}_k | \hat{\boldsymbol{\mu}}'_k, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}'_k) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2}((\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}_k) + (\boldsymbol{\theta}_k - \hat{\boldsymbol{\mu}}'_k)^T \boldsymbol{\Sigma}'^{-1} (\boldsymbol{\theta}_k - \hat{\boldsymbol{\mu}}'_k))\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_k^T (\mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H} + \boldsymbol{\Sigma}'^{-1}) - 2\boldsymbol{\theta}_k^T (\mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k + \boldsymbol{\Sigma}'^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}'_k) + \mathbf{y}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k + \hat{\boldsymbol{\mu}}'^T \boldsymbol{\Sigma}'^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}'_k)\right) \\
&\propto N(\boldsymbol{\theta}_k | \hat{\boldsymbol{\mu}}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)
\end{aligned}$$

On réécrit les expressions de la matrice de covariance et de la moyenne respectivement

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H} + \boldsymbol{\Sigma}'^{-1})^{-1} \quad (4.6)$$

$$= \boldsymbol{\Sigma}'_k - \boldsymbol{\Sigma}'_k \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}'_k \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}'_k \quad (4.7)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \boldsymbol{\Sigma}'_k \quad (4.8)$$

Avec $\mathbf{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}'_k \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}'_k \mathbf{H}^T)^{-1}$. Le passage de (4.6) à (4.7) est fait selon la lemme d'inversion de Woodbury [9].

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \boldsymbol{\Sigma}'_k (\mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k + \boldsymbol{\Sigma}'^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}'_k) \quad (4.9)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \boldsymbol{\Sigma}'_k \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \hat{\boldsymbol{\mu}}'_k \quad (4.10)$$

A partir de l'expression de \mathbf{K}_k , on sait que $\Sigma'_k \mathbf{H}^T = \mathbf{K}_k (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \Sigma'_k \mathbf{H}^T)$. On réécrit alors $(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \Sigma'_k \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k$ comme suit

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \Sigma'_k \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k = \mathbf{K}_k (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \Sigma'_k \mathbf{H}^T) \mathbf{R}_k^{-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \Sigma'_k \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (4.11)$$

$$= \mathbf{K}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{H} \Sigma'_k \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \Sigma'_k \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (4.12)$$

$$= \mathbf{K}_k \quad (4.13)$$

En résumé ,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}'_k = \alpha \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k-1} \quad (4.14)$$

$$\Sigma'_k = \alpha^2 \Sigma_{k-1} + \mathbf{Q}_k \quad (4.15)$$

$$\mathbf{K}_k = \Sigma'_k \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \Sigma'_k \mathbf{H}^T)^{-1} \quad (4.16)$$

$$\Sigma_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \Sigma'_k \quad (4.17)$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_k = \hat{\boldsymbol{\mu}}'_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\boldsymbol{\mu}}'_k) \quad (4.18)$$

Ce qui correspond aux équations du filtre de Kalman. Dans [13], on propose un tutoriel qui démontre que ces mêmes équations de projection et de mise à jour servent à obtenir des estimations qui minimisent l'erreur quadratique moyenne. On peut donc résoudre le problème par un algorithme itératif qui implémente les équations de projection et de correction du filtre de Kalman linéaire.

Algorithm 2 [$\boldsymbol{\mu}_{k+1}; \Sigma_{k+1}$] = FiltreKalman($\mathbf{y}_{k+1}, \boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k, \mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k$)

Projection dans le temps $k + 1$ à partir de l'équation d'état

$$\boldsymbol{\mu}'_{k+1} \leftarrow \alpha \times \boldsymbol{\mu}_k$$

$$\Sigma'_{k+1} \leftarrow \alpha^2 \times \Sigma_k + \mathbf{Q}_k$$

Correction à partir des mesures

$$\mathbf{K}_{k+1} \leftarrow \Sigma'_{k+1} \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{H} \Sigma'_{k+1} \mathbf{H}^T)^{-1}$$

$$\Sigma_{k+1} \leftarrow (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}) \Sigma'_{k+1}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{k+1} \leftarrow \boldsymbol{\mu}'_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H} \boldsymbol{\mu}'_{k+1})$$

4.2.3 Discrimination du modèle

On se propose d'examiner η modèles distincts $M \in \{M_j, j = 1, \dots, \eta\}$ dans le but de déterminer le modèle le plus adéquat aux données observées. Chaque modèle est paramétré par 3 quantités; $M_j = (\beta_j, \alpha_j, \gamma_j)$ où β_j , α_j et γ_j représentant respectivement la variance de bruit d'état, le facteur

d'atténuation de l'état et la variance du bruit d'observation du modèle j . Ces hyperparamètres ne sont pas connus au préalable en général et par conséquent, on cherche à établir un moyen de les estimer de façon à ce que les hyperparamètres optimaux maximisent l'évidence ou encore la probabilité des données observées $P(\mathbb{D}_k = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\})$. On suppose que tous les matchs et tous les joueurs sont assujettis aux mêmes conditions. Ceci implique que pendant toute la durée d'observation allant de 1 à k , les données proviennent d'un même modèle $M_j = (\beta_j, \alpha_j, \gamma_j)$. L'idée est de voir si l'on peut récupérer ces paramètres à partir des observations comme si on n'en disposait pas au préalable. Comme on suppose que ces paramètres de bruit et d'atténuation sont fixes au cours du temps, on procède par deux approches pour les estimer à partir des données; pour la première, on effectue nos estimations en tout temps en ayant recours à plusieurs modèles et on évalue les qualités de performances de chacun pour toute la durée d'observation (traitement en bloque) et pour la deuxième, on procède par estimer le meilleur modèle à chaque instant en appliquant un algorithme d'optimisation stochastique (traitement itératif).

Traitement en bloque

Notre quantité d'intérêt est l'évidence $P(\mathbb{D}_k = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\})$ qui quantifie la probabilité qu'on eut obtenu nos données observées.

$$P(\mathbb{D}_k | M_j) = P(\mathbf{y}_k | \mathbb{D}_{k-1}, M_j) \times P(\mathbf{y}_{k-1} | \mathbb{D}_{k-1}, M_j) \times \dots \times P(\mathbb{D}_1 | M_j) \times P(M_j) \quad (4.19)$$

Si on suppose que tous les modèles sont équiprobables, (4.19) devient

$$P(\mathbb{D}_k | M_j) \propto P(\mathbf{y}_k | \mathbb{D}_{k-1}, M_j) \times P(\mathbf{y}_{k-1} | \mathbb{D}_{k-1}, M_j) \times \dots \times P(\mathbb{D}_1 | M_j) \quad (4.20)$$

L'expression locale de l'évidence qui se traduit par la probabilité d'avoir les observations \mathbf{y}_k pourvu d'avoir déjà observé les données \mathbb{D}_{k-1} s'écrit sous la forme qui suit:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{y}_k | \mathbb{D}_{k-1}, M_j) &= \int_{\boldsymbol{\theta}_k} P(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\theta}_k, M_j) \times P(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbb{D}_{k-1}, M_j) d\boldsymbol{\theta}_k \\ &= \int_{\boldsymbol{\theta}_k} N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}_k, \gamma_j \mathbf{I}) \times N(\boldsymbol{\theta}_k; \alpha_j \boldsymbol{\mu}_{k-1}, \alpha_j^2 \boldsymbol{\Sigma}_{k-1} + \beta_j \mathbf{I}) d\boldsymbol{\theta}_k \\ &= \int_{\boldsymbol{\theta}'_k = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}_k} N(\mathbf{y}_k; \boldsymbol{\theta}'_k, \gamma_j \mathbf{I}) \times N(\boldsymbol{\theta}'_k; \alpha_j \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{k-1}, \mathbf{H}(\alpha_j^2 \boldsymbol{\Sigma}_{k-1} + \beta_j \mathbf{I})\mathbf{H}^T) d\boldsymbol{\theta}'_k \\ &= N(\mathbf{y}_k; \alpha_j \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_k, \gamma_j \mathbf{I} + \mathbf{H}(\alpha_j^2 \boldsymbol{\Sigma}_{k-1} + \beta_j \mathbf{I})\mathbf{H}^T) \end{aligned} \quad (4.21)$$

En combinant (4.19) et (4.21), on spécifie l'expression de l'évidence dans le cas d'un modèle linéaire comme le produit des distributions gaussiennes qui suit.

$$P(\mathbb{D}_k|M_j) = \prod_{i=1}^k N(\mathbf{y}_i; \alpha_j \mathbf{H} \boldsymbol{\mu}_{i-1}, \mathbf{H}(\alpha_j^2 \boldsymbol{\Sigma}_{i-1} + \beta_j \mathbf{I}) \mathbf{H}^T + \gamma_j \mathbf{I}) \quad (4.22)$$

Pour simplifier, on calcule le logarithme de (4.22).

$$\begin{aligned} \log P(\mathbb{D}_k|M_j) &= -k \frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \log(\mathbf{H}(\alpha_j^2 \boldsymbol{\Sigma}_{i-1} + \beta_j \mathbf{I}) \mathbf{H}^T + \gamma_j \mathbf{I}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{y}_i - \alpha_j \mathbf{H} \boldsymbol{\mu}_{i-1})^T (\mathbf{H}(\alpha_j^2 \boldsymbol{\Sigma}_{i-1} + \beta_j \mathbf{I}) \mathbf{H}^T + \gamma_j \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{y}_i - \alpha_j \mathbf{H} \boldsymbol{\mu}_{i-1}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

On suppose que le même modèle $M_j = (\beta_j, \alpha_j, \gamma_j)$ persiste tout au long des observations et on cherche à récupérer les hyper-paramètres avec lesquelles les données ont été obtenues uniquement à partir des observations. On détermine l'évidence pour chaque combinaison de ces derniers. Le filtrage de Kalman étant déployé, les estimations minimisent l'erreur quadratique moyenne (se référer à [13] pour les dérivations). Ainsi, on fait de même pour cette métrique. Avec assez d'observations, nous devrions être en mesure de récupérer ces hyperparamètres comme l'argument qui maximise l'évidence et minimise la fonction d'erreur quadratique à la fois. On génère synthétiquement les états du système selon (4.4) et les observations selon (4.5) pour $m = 8$ joueurs et on applique le filtrage de Kalman pour inférer les moyennes et les matrices de covariance a posteriori. Les caractéristiques du modèle et détails de la simulation sont reportés sur le tableau (4.1). Les courbes issues de la simulation sont représentées sur (4.2).

Tableau 4.1 – Tableau descriptif des caractéristiques de réalisations synthétiques pour le cas linéaire

Caractéristique de l'expérience			Paramètres du modèle		
$m = 8$	$k = 1000$	Nombre d'essai = 200	$\beta = 1$	$\alpha = 0.7$	$\gamma = 1$

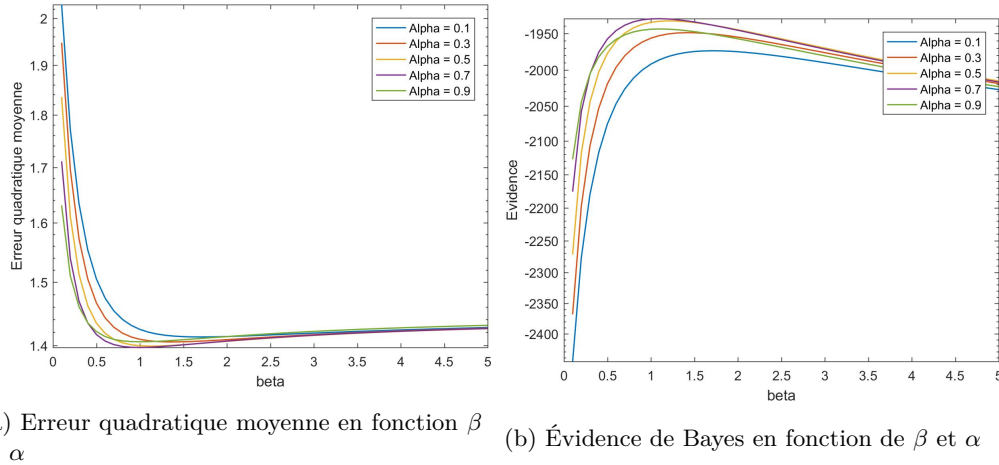


Figure 4.2 – Évidence de Bayes et Erreur quadratique moyenne en fonction de β et α

Selon les résultats obtenu en 4.2, on s'aperçoit que pour un échantillon assez grand, les hyper-paramètres ($\alpha = 0.7$ et $\beta = 1$) maximisent (minimisent) l'évidence de Bayes (l'erreur quadratique moyenne) respectivement pour le modèle linéaire.

Traitement itératif

Il est souvent plus intéressant de faire la discrimination du modèle au fur et à mesure qu'on reçoit des données parce qu'on se servira de ces hyper-paramètres pour avoir les meilleures estimations à chaque période de classement. Ce qui nous permet d'avoir non seulement des prédictions fiables mais aussi des estimations a priori plus informatives pour les estimations qui suivent. Ainsi, dans cette partie, on cherche à optimiser les hyper-paramètres du modèle à chaque étape de mise à jour. On utilise la fonction de l'évidence de Bayes et on se propose de déterminer les paramètres qui la minimisent. On suppose que γ_j est constante et connue sur toute la fenêtre d'observation. Alors, pour le temps k , les hyperparamètres optimaux sont déterminés selon

$$(\hat{\alpha}_{j,k}, \hat{\beta}_{j,k}) = \underset{(\alpha_{j,k}, \beta_{j,k})}{\operatorname{argmax}} f(\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}, \gamma_{j,k} = 1) \quad (4.24)$$

Avec

$$\begin{aligned}
f(\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}) &= P(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}, [\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}, \gamma_{j,k} = 1]) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \times \frac{1}{|\mathbf{H}(\alpha_{j,k}^2 \times \Sigma_{k-1} + \beta_{j,k} \times \mathbf{I})\mathbf{H}^T + \mathbf{I}|} \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \alpha_{j,k}\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{k-1})^T (\mathbf{H}(\alpha_{j,k}^2 \times \Sigma_{k-1} + \beta_{j,k} \times \mathbf{I})\mathbf{H}^T + \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{y}_k - \alpha_{j,k}\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{k-1})\right)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

L'équation (4.25) est l'expression de l'évidence de Bayes préalablement définie. Pour l'optimiser, on calcule son gradient comme suit

$$\nabla f(\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\alpha_{j,k}, \beta_{j,k})}{\partial \alpha_{j,k}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\alpha_{j,k}, \beta_{j,k})}{\partial \beta_{j,k}} \end{bmatrix}$$

On peut déterminer $\alpha_{j,k}$ et $\beta_{j,k}$ en appliquant un algorithme d'optimisation stochastique brièvement décrit en algorithme 3. Dans ce cas linéaire, on est capable d'écrire le gradient de f de manière analytique comme suit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta_{j,k}} \log f(\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}) &= -\text{Tr}[(\mathbf{H}(\alpha_{j,k}^2 \times \Sigma_{k-1} + \beta_{j,k}\mathbf{I})\mathbf{H}^T + \mathbf{I})^{-1} \times \mathbf{H}\mathbf{H}^T] \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \alpha_{j,k}\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{k-1})^T \times (\mathbf{H}(\alpha_{j,k}^2 \times \Sigma_{k-1} + \beta_{j,k}\mathbf{I})\mathbf{H}^T + \mathbf{I})^{-1} \times (\mathbf{H}\mathbf{H}^T) \\
&\quad \times (\mathbf{H}(\alpha_{j,k}^2 \times \Sigma_{k-1} + \beta_{j,k}\mathbf{I})\mathbf{H}^T + \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{y}_k - \alpha_{j,k}\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{k-1})
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha_{j,k}} \log f(\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}) &= -\text{Tr}[(\mathbf{H}(\alpha_{j,k}^2 \Sigma_{k-1} + \beta_{j,k}\mathbf{I})\mathbf{H}^T + \mathbf{I})^{-1} \times 2\alpha_{j,k}\mathbf{H}\Sigma_{k-1}\mathbf{H}^T] \\
&\quad + \frac{1}{2} \times [(\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{k-1})^T \mathbf{H}(\alpha_{j,k}^2 \Sigma_{k-1} + \beta_{j,k}\mathbf{I})\mathbf{H}^T + \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{y}_k - \alpha_{j,k}\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{k-1}) \\
&\quad + (\mathbf{y}_k - \alpha_{j,k}\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{k-1})^T (\mathbf{H}(\alpha_{j,k}^2 \Sigma_{k-1} + \beta_{j,k}\mathbf{I})\mathbf{H}^T + \mathbf{I})^{-1} \times 2\alpha_{j,k}\mathbf{H}\Sigma_{k-1}\mathbf{H}^T (\mathbf{y}_k - \alpha_{j,k}\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{k-1}) \\
&\quad + (\mathbf{y}_k - \alpha_{j,k}\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{k-1})^T \mathbf{H}(\alpha_{j,k}^2 \Sigma_{k-1} + \beta_{j,k}\mathbf{I})\mathbf{H}^T + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{k-1}]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Algorithm 3 $[\beta; \alpha] = \text{Hyper-paramètres}(@(\beta, \alpha)f_{1\dots K})$

$$[\beta, \alpha] = \operatorname{argmax}_{\beta, \alpha} f(\beta, \alpha)$$

For $k = 1 : K$

$$[\beta_k, \alpha_k] = [\beta_k, \alpha_k]' + \eta \nabla f(\beta_k, \alpha_k)$$

End

4.2.4 Résultats

Pour 4 joueurs, on génère les états θ_k et les observations y_k qui en découlent suivant le modèle décrit en (4.4) et (4.5) en fixant les paramètres du modèle à $\alpha = 0.7$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$. On effectue le suivi des mérites θ_k en utilisant l'algorithme 2 du filtrage de Kalman une fois avec les paramètres du modèle fixés à leurs valeurs originales et une seconde fois avec les paramètres supposés inconnus et optimisés à chaque itération selon l'algorithme du gradient stochastique 3. Les résultats sont produits sur la figure 4.3 où θ (notée θ_{vraie} sur la figure 4.3) dénote les paramètres qui sont à l'origine du phénomène observé, $\hat{\theta}$ (notée θ_{estimee} sur la figure 4.3) les paramètres estimés à partir des observations en supposant qu'on connaît les hyperparamètres du modèle et $\hat{\theta}$ avec adaptation (notée $\theta_{\text{estimee}} \text{ avec adapt.}$ sur la figure 4.3) représente le cas où on optimise itérativement les hyperparamètres du modèle.

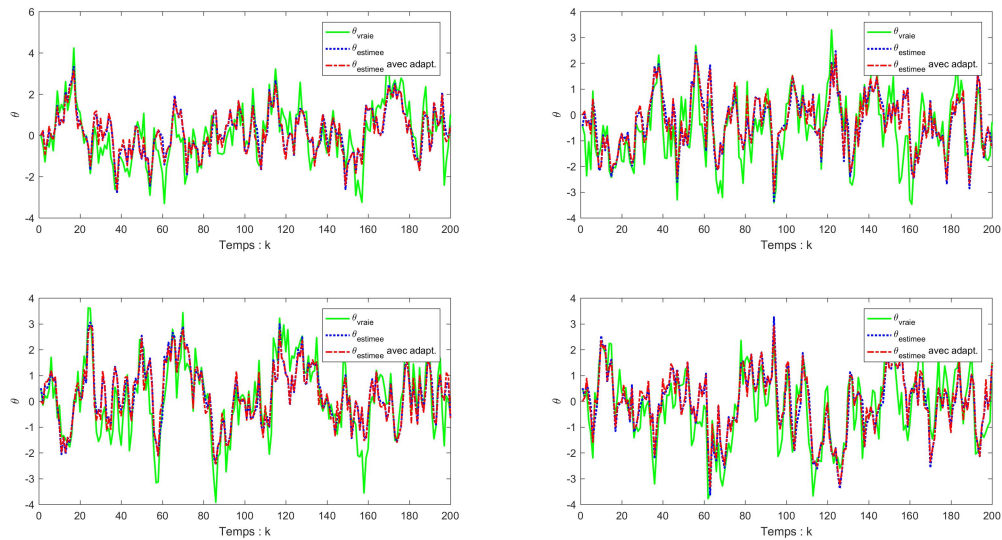


Figure 4.3 – Suivi temporel de l'évolution de l'état θ_k pour le cas linéaire

Le suivi temporel illustré sur la figure 4.3 montre qu'on arrive à bien suivre les états du système linéaire même si on ne dispose pas des hyperparamètres du modèle et qu'on les optimise au fur et à mesure qu'on observe de nouveaux résultats. Ces estimations sont pertinentes pour des fins de classements, cependant pour le reste des traitements qui se basent sur le calcul des probabilités de prédictions, on ne s'intéresse qu'à la différence de ces estimations. Donc, pour les 6 variables d'observations qui couplent chaque 2 joueurs, on recalcule $\mathbf{y}_k = \mathbf{H} \times \boldsymbol{\theta}_k$ en fonction des paramètres estimés et on les compare avec les observations réelles et on montre le résultat de suivi des observations sur 4.4.

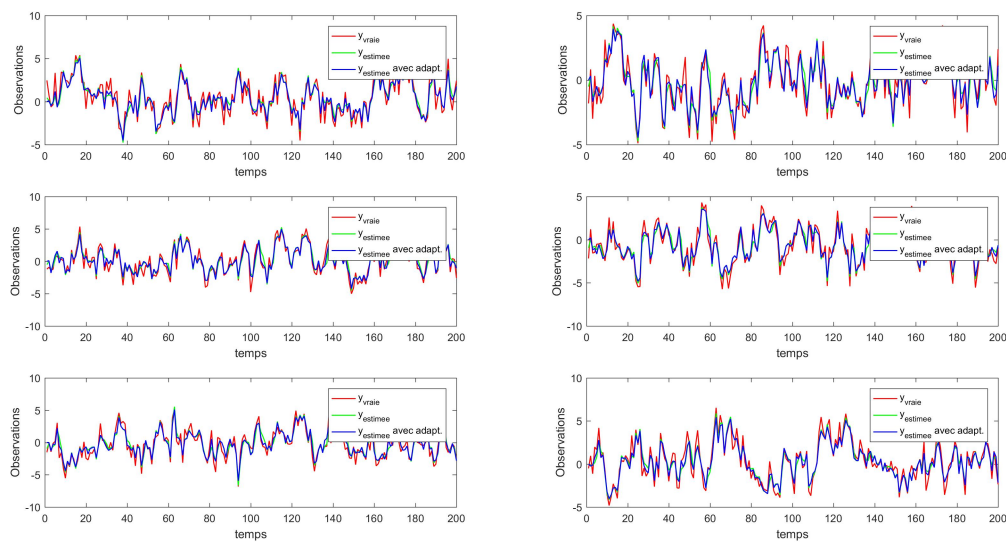


Figure 4.4 – Suivi temporel des observations \mathbf{y}_k pour le cas linéaire

Pour le modèle linéaire, on peut bel et bien réussir l'estimation des paramètres à partir des observations en réajustant de manière stochastique les hyper-paramètres du modèle à chaque observation pourvu que ces derniers sont invariants au fil du temps. Le filtrage de Kalman est une approche fiable pour faire le suivi des mérites qui évoluent au cours du temps.

4.3 Modèle non linéaire

4.3.1 Description

Pour le modèle non linéaire, on se passe de la différence du score et ne recueille que les données reflétant les pertes et gains des matchs. Ainsi, comme auparavant, $y_{k,ij} = 1$ indique que pour le match joué pendant la durée k entre les joueur i et j , le joueur j s'est incliné devant i . On se propose que l'état du système évolue de façon linéaire en fonction du temps comme l'indique (4.4). L'équation d'observation s'écrit comme une fonction constante par partie en fonction des mérites.

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{v}_k) \quad (4.28)$$

Avec $h = (h_1, \dots, h_l, \dots, h_s, \dots, h_{\frac{m(m-1)}{2}}; \forall s \ h_s = q) : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^{\frac{m(m-1)}{2}}$ où q est définie en (2.1) On suppose que l'équation d'état reste inchangée de celle définie en (4.4) et que la non-linéarité ne se présente que dans le fait que les observations deviennent des variables binaires.

4.3.2 Estimation des statistiques de la densité jointe a posteriori

Contrairement au modèle linéaire, il n'existe pas de solutions analytiques pour assurer le suivi des distributions a posteriori des mérites pour le modèle non linéaire. Cependant, il existe différentes approches pour résoudre le problème à savoir les filtres de particules et les filtres de Kalman étendus qui peuvent être considérés comme des généralisations du filtre de Kalman utilisées pour le cas non linéaire. [3] et [20] mettent à disposition des tutoriels explicatifs illustrés par des pseudo-codes afin d'expliquer ces approches. Cependant, on va écarter le filtre de Kalman étendu de cette étude parce que cela requiert que le bruit gaussien soit additif dans l'équation d'observation ou encore que $\mathbf{y}_k = h(\boldsymbol{\theta}_k) + \mathbf{v}_k$ avec h une transformation non linéaire de l'état. Dans le cadre de ce travail, on adhère à une approche différente qui consiste à approximer la distribution a posteriori définie ci-dessous par une distribution gaussienne à chaque mise à jour à la suite des observations. L'expression de l'a posteriori est dérivée ci- dessous. Le problème devient difficile parce que la fonction de vraisemblance

n'est plus une gaussienne ce qui entraîne une déformation de l'a posteriori.

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\theta}_{k+1}|\mathbb{D}_{k+1}) &= \int_{\boldsymbol{\theta}_k} P(\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\theta}_k|\mathbb{D}_k, \mathbf{y}_{k+1}) d\boldsymbol{\theta}_k \\
&= \frac{1}{P(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbb{D}_k)} \int_{\boldsymbol{\theta}_k} P(\mathbf{y}_{k+1}|\boldsymbol{\theta}_{k+1})P(\boldsymbol{\theta}_{k+1}|\boldsymbol{\theta}_k)P(\boldsymbol{\theta}_k|\mathbb{D}_k) d\boldsymbol{\theta}_k \\
&\propto P(\mathbf{y}_{k+1}|\boldsymbol{\theta}_{k+1}) \int_{\boldsymbol{\theta}_k} P(\boldsymbol{\theta}_{k+1}|\boldsymbol{\theta}_k)P(\boldsymbol{\theta}_k|\mathbb{D}_k) d\boldsymbol{\theta}_k
\end{aligned} \tag{4.29}$$

L'équation (4.29) n'a pas d'expression analytique explicite donc on se décide de résoudre le problème par approximation de l'a posteriori par la méthode de Laplace. A chaque mise à jour, on approxime $P(\boldsymbol{\theta}_k|\mathbb{D}_k) = N(\boldsymbol{\theta}_k; \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)$. Comme il s'agit d'un recueil itératif des observations et que la mise à jour des mérites fait appel aux mises à jour antérieures, on résout le problème récursivement. A chaque instant k , on met à jour la distribution en fonction de l'observation par une optimisation de maximum a posteriori. Ceci nous permet de localiser le mode et la matrice hessienne autour de ce dernier. Comme il s'agit d'une distribution uni-modale, on suppose que ce mode, qu'on dénote par $\boldsymbol{\mu}_k$, est aux alentours de la vraie moyenne et on approxime la distribution par une gaussienne centrée autour du mode et qui a l'opposée de l'inverse de la matrice hessienne comme matrice de covariance qu'on dénote par $\boldsymbol{\Sigma}_k$. Alors, l'équation (4.29) se simplifie en :

$$P(\boldsymbol{\theta}_{k+1}|\mathbb{D}_{k+1}) \propto P(\mathbf{y}_{k+1}|\boldsymbol{\theta}_{k+1}) \int_{\boldsymbol{\theta}_k} N(\boldsymbol{\theta}_{k+1}|\boldsymbol{\theta}_k, \gamma\mathbf{I})N(\boldsymbol{\theta}_k; \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) d\boldsymbol{\theta}_k \tag{4.30}$$

$$= P(\mathbf{y}_{k+1}|\boldsymbol{\theta}_{k+1}) \int_{\boldsymbol{\theta}_k} N(\boldsymbol{\theta}_{k+1}; \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k + \gamma\mathbf{I})N(\boldsymbol{\theta}_k|\boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\Sigma}') \tag{4.31}$$

$$= P(\mathbf{y}_{k+1}|\boldsymbol{\theta}_{k+1})N(\boldsymbol{\theta}_{k+1}; \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k + \gamma\mathbf{I}) \tag{4.32}$$

Algorithm 4 [$\hat{\boldsymbol{\mu}}_k; \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k$] = `MiseAJour`($\mathbf{y}_k, \boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\mu}_{k-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}, \alpha, \beta$)

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{prior}} = \alpha \times \boldsymbol{\mu}_{k-1}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{prior}} = \alpha^2 \times \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{-1} + \beta \times \mathbf{I}$$

$$[\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}] \leftarrow \text{Estimer}(\mathbf{y}_k, \boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\mu}_{\text{prior}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\text{prior}}^{-1})$$

Algorithm 5 [$\hat{\boldsymbol{\mu}}_k; \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k$] = Estimer($\mathbf{y}_k, \boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}$)

Déterminer $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k \leftarrow \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta}_k} L(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{y}_k) \times P(\boldsymbol{\theta}_k) = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta}_k} P(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\theta}_k) \times P(\boldsymbol{\theta}_k)$

Soit $J(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{y}_k) = -\log(L(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{y}_k) \times P(\boldsymbol{\theta}_k))$

Approximer

$$J(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{y}_k) \simeq J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k | \mathbf{y}_k) + \nabla J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k | \mathbf{y}_k)^T (\boldsymbol{\theta}_k - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}_k - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)^T \mathbf{H}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k} (\boldsymbol{\theta}_k - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$$

$$L(\boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{y}_k) \times P(\boldsymbol{\theta}_k) \simeq N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k, -\mathbf{H}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}^{-1})$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k = -\mathbf{H}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}^{-1}$$

4.3.3 Discrimination du modèle

Tout comme pour le cas linéaire, on essaye de déterminer l'influence des hyper-paramètres qui caractérisent notre modèle en faisant appel à diverses métriques en examinant toutes les observations en premier lieu puis en appliquant un traitement itératif qui réajuste ces paramètres à la réception de nouvelles observations.

Traitement en bloque

On évalue l'effet de différents hyperparamètres du modèle non seulement sur les estimations des statistiques (moyenne et matrice de covariance) des mérites des joueurs mais aussi sur la qualité des probabilités de prédiction. On calcule les probabilités de prédiction selon (3.7) où le paramètre γ représente la variance du bruit d'observation \mathbf{v}_k et $\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \alpha^2 \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ij} + \beta \mathbf{I}$ ($\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ij}$ étant la sous matrice de covariance estimée pour les joueurs i et j). Ainsi, on utilise l'évidence de Bayes comme métrique pour déterminer à quel point les paramètres estimés auraient généré les résultats observables. Comme on approxime l'a posteriori à chaque mise à jour par la méthode de Laplace, cette quantité est définie comme le facteur de normalisation de l'a posteriori. Les détails de son dérivation se trouvent en (2.14). Pour évaluer la qualité des probabilités de prédiction, on calcule les scores de Brier en comparant les résultats observés à nos prédictions et aussi en comparant les probabilités à l'origine des observations avec les nôtres. Pour les métriques de Brier et de l'entropie croisée, nous menons une analyse rétrospective c'est à dire que les probabilités sont basées sur les estimations après qu'on

ait observé les résultats et qu'on ait fait l'inférence. On fait aussi l'analyse à l'aide d'une métrique subjective telle que le gain net du pari par match en se basant sur les probabilités de prédiction. Dans le tableau 4.2, on explique les hyper-paramètres qu'on a utilisés pour générer les données synthétiques.

Tableau 4.2 – Tableau descriptif des caractéristiques de réalisations synthétiques pour le modèle binaire

Caractéristique de l'expérience			Paramètres du modèle		
$m = 6$	$k = 600$	Nombre d'essai = 10	$\beta = 0.9$	$\alpha = 0.7$	$\gamma = 1$

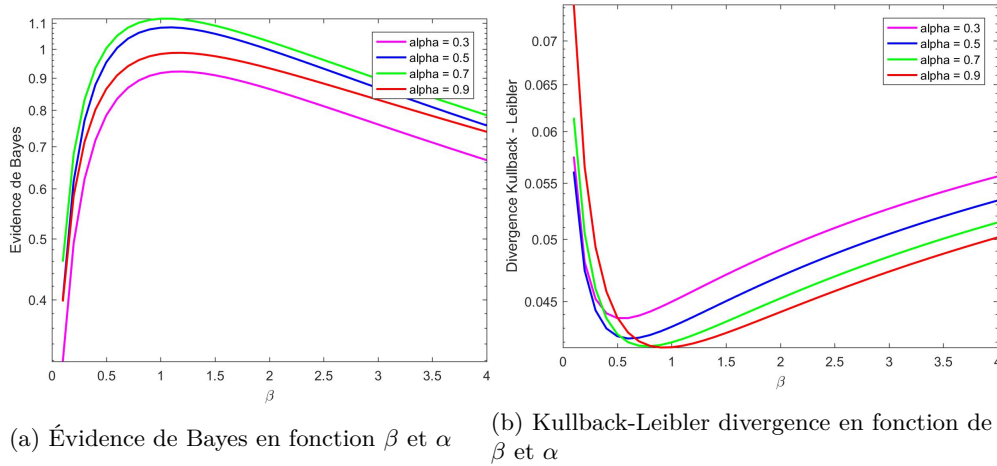


Figure 4.5 – Evidance de Bayes et divergence de Kullback - Leibler en fonction de β et α

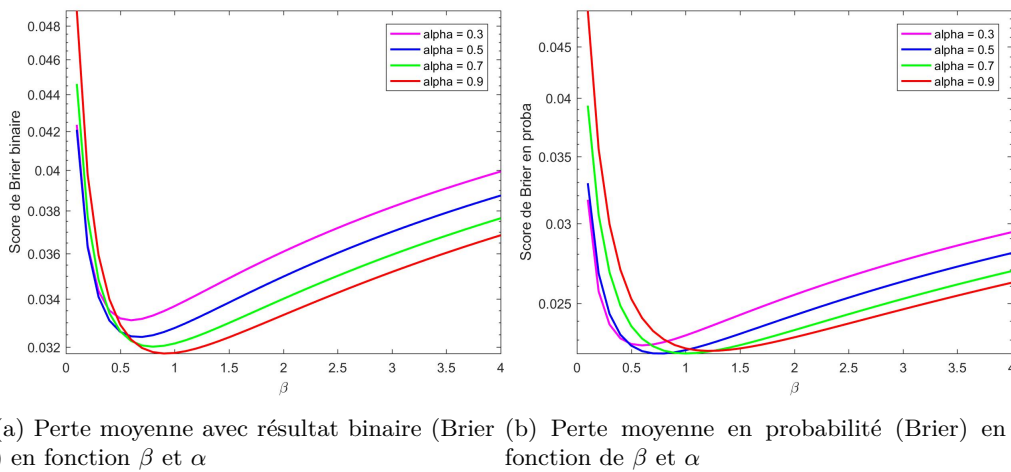


Figure 4.6 – Pertes moyennes en fonction de β et α

Les courbes illustrées sur les figures 4.5a , 4.5b, 4.6a, et 4.6b démontrent que les approximations que nous utilisons à chaque mise à jour affectent la fiabilité du système en matière d'estimations et de prédictions et on n'arrive à récupérer les hyperparamètres du modèle que d'une manière approximative. Ainsi on observe que les métriques basées sur les probabilités de prédictions et celles basées sur les estimations ne donnent pas les mêmes résultats. Même si les différence ne sont pas grandes, il devient plus difficile de choisir la métrique selon laquelle sélectionner un modèle particulier.

Sur la figure 4.7, on observe le comportement de la fonction du gain net par match de la maison de pari en fonction des hyper-paramètres. Comme les données sont générés de manière synthétique à partir des probabilités basées sur l'évolution temporelle des mérites, alors quelque soit notre stratégie de pari nous obtiendrions un gain net nul en moyenne. Donc pour ce cadre, on fait l'expérience différemment. On fixe les côtes en se basant sur les probabilités estimées et on place les paris selon (2.16). On obtient:

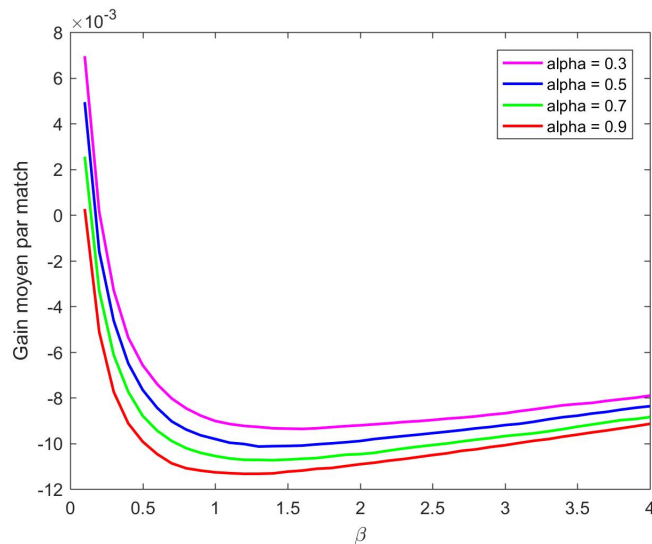


Figure 4.7 – Gain moyen par match en fonction de β et α

On voit bien qu'on arrive à minimiser le gain de la maison du pari (puisque ici on a généré les côtes à partir des probabilités estimées) mais la métrique ne réussit pas à capturer l'hyperparamètre $\alpha = 0.7$ qui a généré les probabilités réelles comme un paramètre optimal du modèle.

Traitement itératif

Contrairement au cas linéaire, il n'existe pas de forme analytique à l'expression de l'évidence de Bayes qu'on chercherait à optimiser par rapport aux hyperparamètres α et β car elle s'écrit en fonction des paramètres issus de l'optimisation par maximum a posteriori. Il est toutefois possible d'approximer numériquement les gradients et d'optimiser la fonction en utilisant la méthode du gradient stochastique décrite en 3. Sur la figure 4.8, on dessine les courbes de suivi des estimations basées sur les optimisations stochastiques du modèle en approximant les gradients.

4.3.4 Résultats

Pour les données dynamiques utilisées dans le cas du modèle non linéaire décrites dans la sous section précédente, on fait le suivi de la moyenne au cours du temps en supposant que l'on connaît au préalable les paramètres du modèle (notée $\theta_{estimee}$) ainsi qu'en les optimisant à chaque itération de manière stochastique (notée $\theta_{estimee}$ avec adapt.) tout comme dans le cas linéaire.

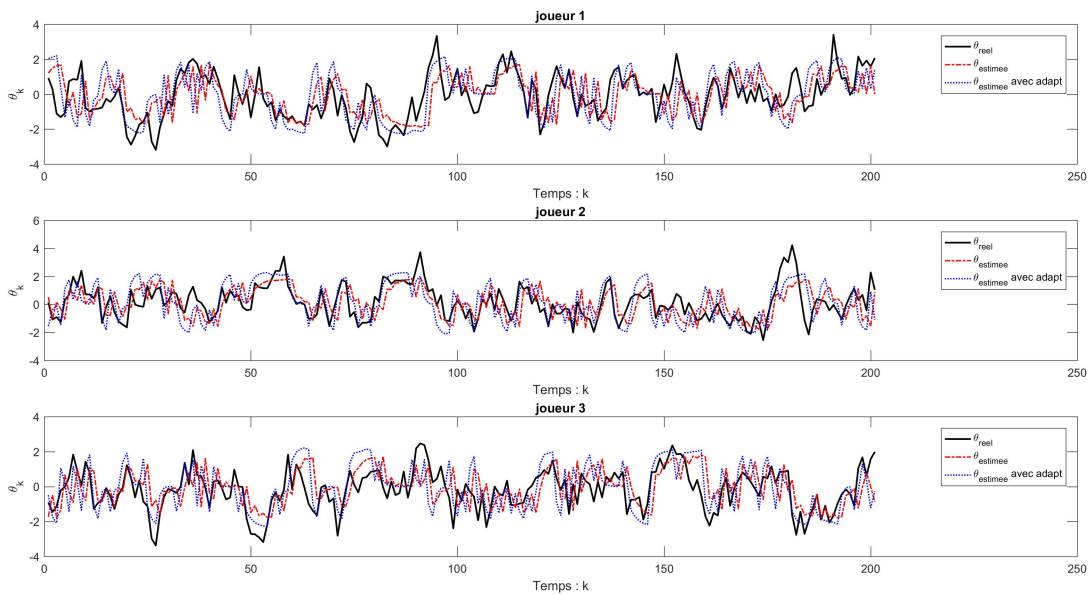


Figure 4.8 – Suivi temporel de l'état du système θ_k pour le cas binaire

Avec les données synthétiques décrites ci-dessus, on arrive à assurer le suivi des paramètres des mérites en se basant sur les observations en utilisant un filtre récursif d'autant pour le modèle

linéaire que pour le modèle avec les résultats binaires en optimisant les hyper-paramètres du modèle de manière stochastique.

Chapitre 5

Analyse des résultats de matchs de Hockey

En se basant sur la méthode décrite dans le chapitre précédent, on analyse les résultats de matchs de la ligue nationale du Hockey de la saison 2017-2018. Suite au suivi des mérites des équipes en fin de saison, on établit un classement selon cet ordre et on estime les prédictions des résultats.

5.1 Description des données

La ligue nationale du hockey est une ligue professionnelle du hockey sur glace se composant actuellement de 31 équipes dont 24 proviennent des États-Unis et 7 du Canada. Durant la saison régulière, chaque équipe joue 84 matchs : 41 matchs à domicile et 41 ailleurs [NHL.com]. Les données utilisées dans cette analyse couvrent la saison régulière des matchs de la Ligue Nationale du Hockey (LNH) de la saison 2017-2018 et ont été collectées sur le site [1]. Ces données contiennent les équipes, l'organisation des matchs, les scores finaux, les localités des matchs (domicile ou ailleurs) ainsi que les côtes de paris pour chaque match. Ces dernières ont été collectées sur [2]. On n'en tient compte que de celles d'ouverture et de la fermeture. Ci-dessous, on explique la structure des données:

- **Date** : Ce champs indique la date du match.
- **Team** : Le nom de l'équipe.
- **Rot** : La rotation ou encore le numéro de l'équipe pour les mises.

- 1^{st} : Nombre de buts marqués pendant la première période.
- 2^{nd} : Nombre de buts marqués pendant la seconde période.
- 3^{rd} : Nombre de buts marqués pendant la troisième période.
- **Final** : Le nombre total de buts marqués durant le match, y inclus ceux marqués durant les prolongations ou les pénalités.
- **Money line open** : ML_o Si négatif indique le montant qu'on devrait miser pour recevoir 100 \$ si l'équipe gagne. Le cas échéant, il indique combien on gagne si on mise 100 \$ et que l'équipe gagne. C'est le montant d'ouverture du pari.
- **Money line close** : ML_c La même explication que pour le champs précédent sauf que c'est le montant de fermeture.

Afin d'effectuer notre analyse, on calcule d'autres quantités à partir de ces données. On attribue la notation $quantite_{i \triangleright j}$ pour dénoter la valeur de la quantité pour le cas où l'équipe i gagne contre l'équipe j (i.e : $côte_{i \triangleright j}$ est la probabilité implicite que i défait j lors de leur rencontre). On calcule les côtes de paris décimaux à partir des «money lines »proposés:

$$côte_{i \triangleright j} = \mathbb{1}_{ML_{i \triangleright j} < 0} \times \left(\frac{-100}{ML_{i \triangleright j}} + 1 \right) + \mathbb{1}_{ML_{i \triangleright j} > 0} \times \left(\frac{ML_{i \triangleright j}}{100} + 1 \right) \quad (5.1)$$

5.2 Modélisation

On suppose que les mérites θ_k des équipes à chaque période de mise à jour k dans ces matchs sont modélisées par des variables aléatoires gaussiennes de moyennes μ_k et de matrice de covariance Σ_k . On modélise l'évolution de ces mérites en cours du temps par l'atténuation des estimations précédents et l'addition d'une incertitude dans la matrice de covariance selon (4.4). Tous les mérites sont réajustés selon (4.4) à chaque période qu'elles aient joué ou pas (On note qu'en une journée, uniquement quelques équipes se confrontent et il existe des équipes qui ne participent pas). β et α sont inconnues au préalable et on procède par les inférer à partir des observations. Cependant, notre modèle repose sur la supposition que ces deux quantités sont constantes tout au long de la saison. Les observations y_{ij} sont binaires et prennent les valeurs de 1 et -1 pour indiquer respectivement la victoire de i par rapport à j où inversement. L'ensemble \mathbb{D}_k comportant toutes les observations du temps 1 à k est défini comme suit $\mathbb{D}_k = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ où $\mathbf{y}_l = \{y_{ij,l}; i, j \in \mathbb{J}_l\}$ avec \mathbb{J}_l est l'ensemble des équipes ayant participé à des matchs durant la période l ; On définit une période d'observation l par une journée du calendrier où au moins un match prend lieu. Pour cette analyse, on étudie les

deux modèles; celui de Thurnstone et de Bradley-Terry. Les probabilités de prédiction de $y_{ij,k}$ pour la saison en question se calcule selon (3.7) et (3.8) pour les deux modèles respectivement.

5.3 Discrimination du modèle

Pour avoir de meilleurs résultats, il faut utiliser le modèle le plus adéquat compte tenu des observations. Pour ce faire, nous examinons toutes les observations de la saison de façon à étudier le comportement de certaines métriques de performances face aux différents modèles paramétriques utilisés premièrement avec le modèle de Thurnstone puis en utilisant celui de Bradley-Terry. Ainsi pour les deux modèles de comparaison par paires discutés, nous inférons des paramètres θ_k de manière récursive en utilisant le filtrage que nous proposons dans le chapitre précédent. Comme nous ne disposons pas des probabilités à l'origine des phénomènes observables (les résultats de matchs), nous nous limitons à utiliser des métriques qui se basent sur les observations. La métrique erreur de prédiction illustrée ci dessous est une mesure d'erreur où nous comparons les résultats prédits par rapports aux résultats de matchs observés. Par exemple, si pour le $k^{\text{ème}}$ match entre i et j , nous prédisons $\hat{p}_{ij,k} = 0.6 > 0.5$ ($\hat{p}_{ij,k}$ est calculée selon (3.7) et (3.8) respectivement pour le modèle de Thurnstone et de Bradley-Terry), alors nous prédisons que $\hat{y}_{ij,k} = 1$. Si le résultat observé $y_{ij,k} \neq \hat{y}_{ij,k}$, alors l'erreur prend 1 sinon l'erreur reçoit la valeur 0 car les deux résultats se correspondent.

5.3.1 Résultat avec le modèle de Thurnstone

Dans cette première partie, on considère que le bruit d'observation est gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma_\epsilon = 1$. Nous inférons les moyennes et covariances des mérites comme proposé dans le chapitre précédent. On choisit un a priori gaussien de moyenne μ_0 nulle et une matrice de covariance $\Sigma_0 = 8 \times I$ (où I est la matrice identité de taille (31×31)). Nous calculons les probabilités de prédiction selon (3.7). Comme nous ne disposons pas d'assez d'informations sur la variabilité des mérites des équipes de la ligue du hockey, nous observons les métriques à chaque mois du calendrier à partir d'octobre jusqu'au mois d'avril. La saison régulière 2017-2018 s'est déroulée entre le 04 Octobre et le 08 Avril. Le nombre de matchs par mois est variable. Ci-dessous, on reporte les résultats obtenus

pour les métriques suivantes (évidence de Bayes, score de Brier, erreur de prédiction et gain net par match) pour chaque mois.

Evidence de Bayes

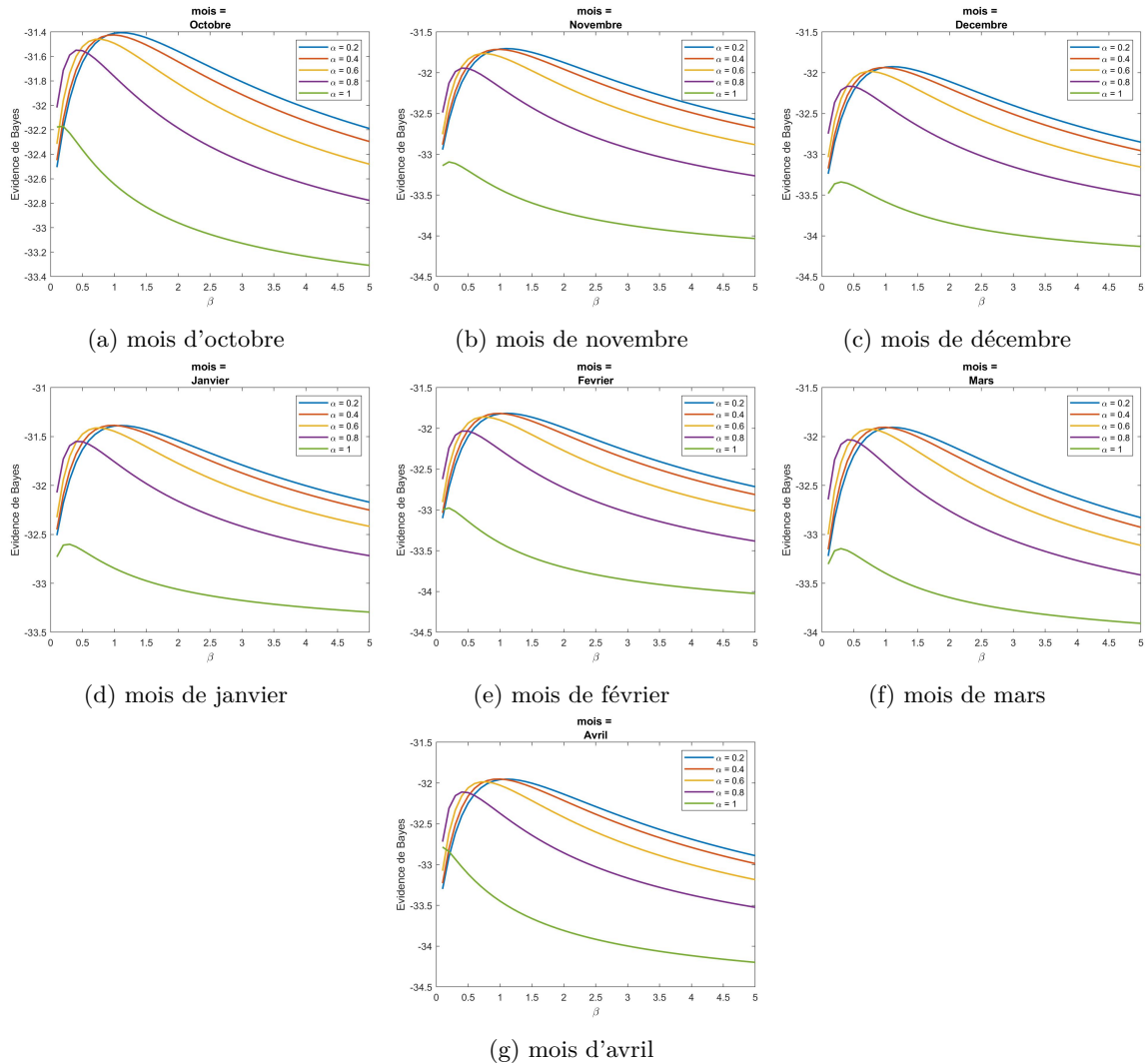


Figure 5.1 – Evidence de Bayes en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Thurnstone

Sur la figure 5.1, on constate que la fonction de l'évidence de Bayes ne se maximise pas forcément pour les mêmes hyperparamètres α et β tous les mois. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'il est possible que les mérites n'évoluent pas de la même manière durant toute la saison de durée approximative de sept mois. Le deuxième constat que nous faisons s'agit du fait que les facteurs d'atténuation qui optimisent l'évidence sont faibles ($\alpha = 0.2, \alpha = 0.2, \alpha = 0.4, \alpha = 0.4, \alpha = 0.4, \alpha = 0.4$,

et $\alpha = 0.4$ respectivement pour Octobre, Novembre, Décembre, Janvier, Février, Mars, et Avril). Ce qui veut dire que les mérites θ_k évoluent rapidement.

Score binaire de Brier

Nous calculons les probabilités de prédiction et déterminons les scores de Brier en les comparant avec les données observées. De la même manière, on produit les résultats sur la figure 5.2 qui suit.

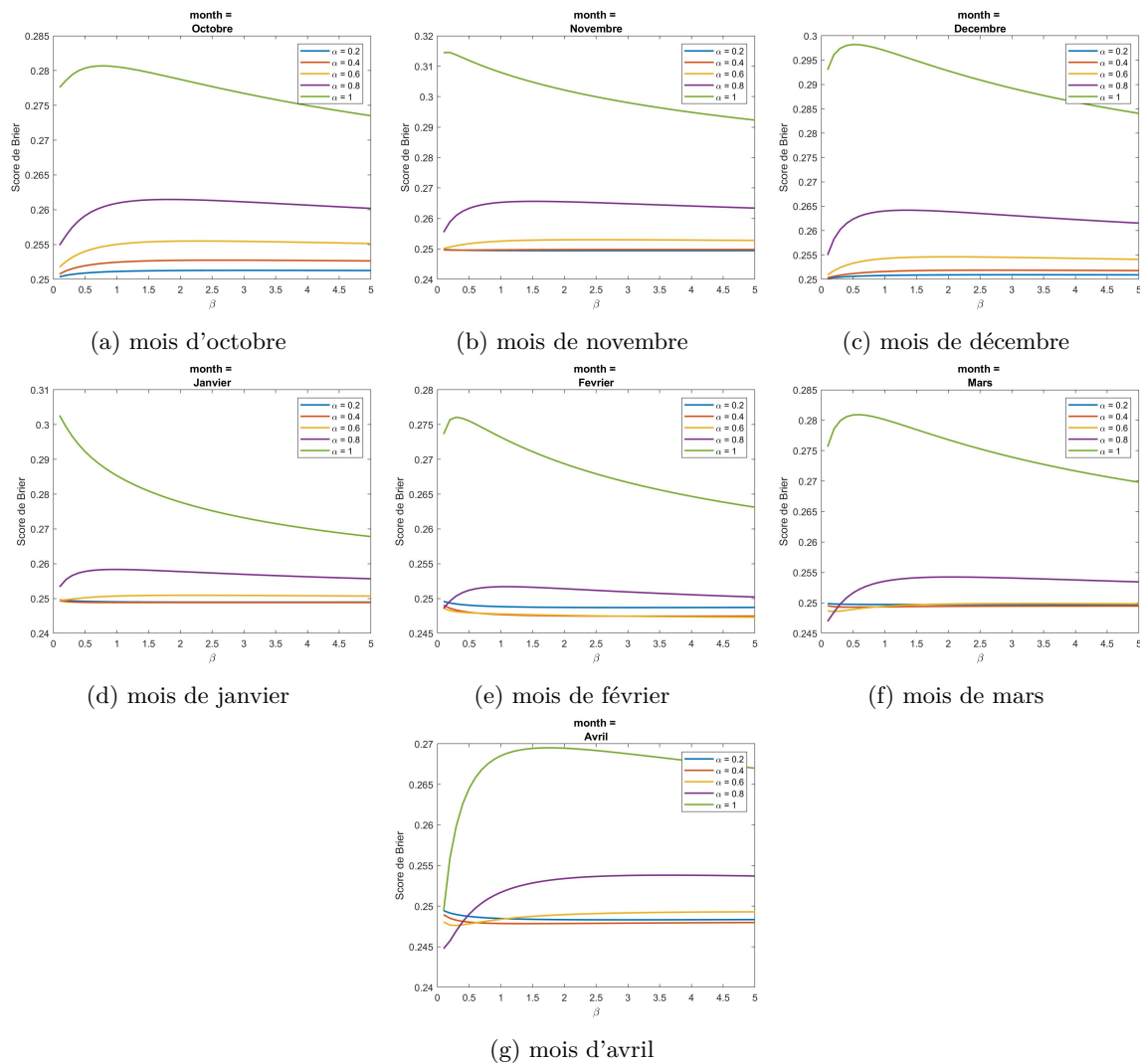


Figure 5.2 – Score de Brier en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Thurnstone

En examinant les courbes en 5.2, on observe que les scores de Brier se minimisent avec des hyperparamètres α assez petits (entre 0.2 et 0.6). Pour ces valeur de α , la variance du bruit d'état

semble ne pas avoir beaucoup d'influence. Nous remarquons aussi que les scores minimums qu'on atteint sont aux alentours de 0.25 et donc, en examinant les probabilités estimées, nous constatons que ceci est bel et bien dû au fait que ces dernières varient autour de 0.5 (entre 0.4 et 0.6).

Erreur de prédiction

En se basant sur les probabilités de prédictions estimées, nous prédisons les résultats de matchs et nous les comparons aux résultats actuels. Cette métrique s'intéresse uniquement à la position de $\hat{p}_{i,j,k}$ par rapport à 0.5. Ainsi, une prédiction de 0.51 a la même signification qu'une prédiction de 0.9.

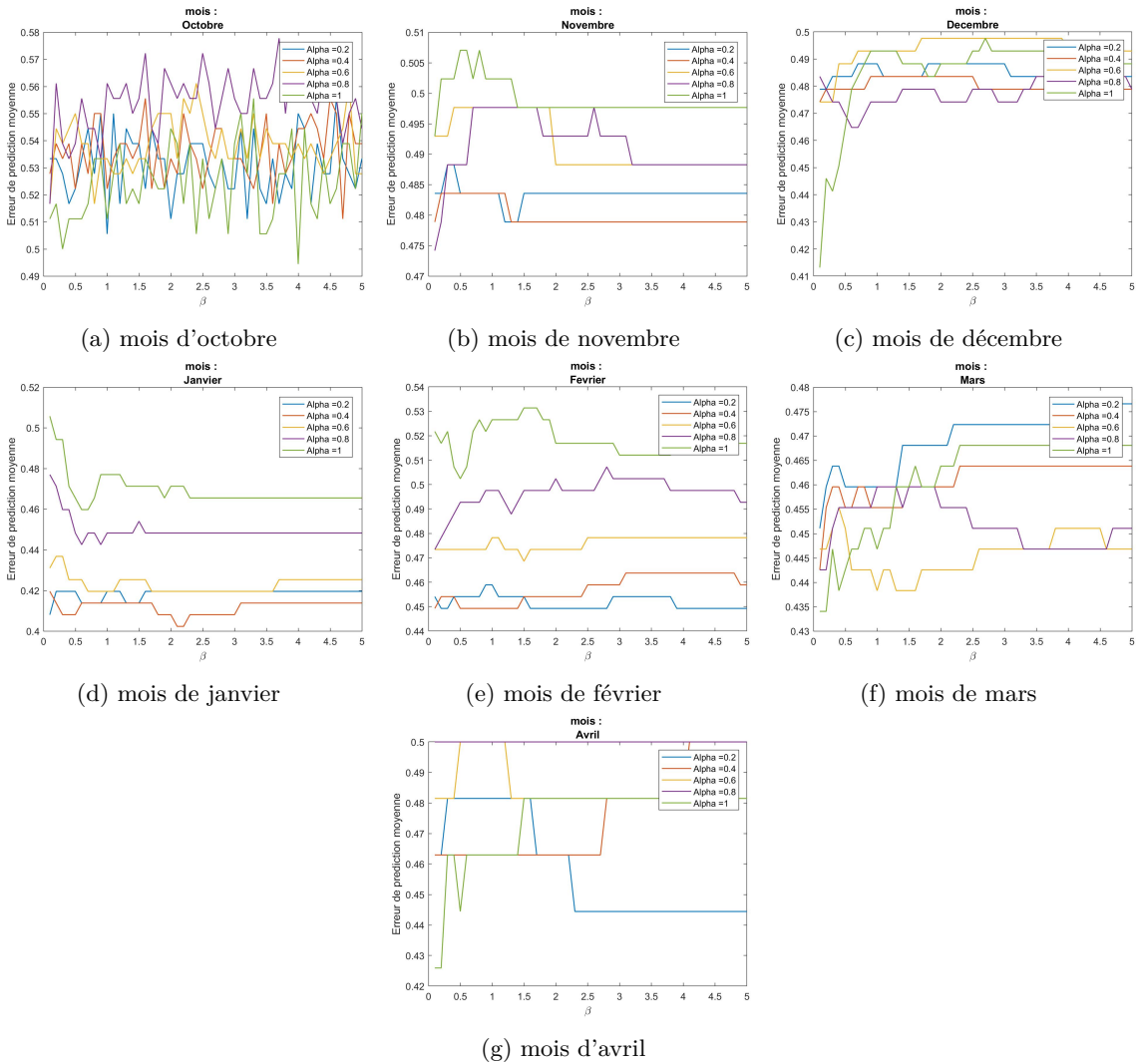


Figure 5.3 – Erreur de prédiction en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Thurnstone

Sur 5.3, nous observons qu'avec cette métrique aussi, il existe une variabilité du modèle d'évolution de mérites des équipes d'un mois à l'autre. Les erreurs sont minimales pour les facteurs d'atténuation faibles (0.2 - 0.6) pour tous les mois sauf celui de décembre, où pour un bruit d'état assez petit, l'erreur minimale est obtenue pour $\alpha = 1$. Et, au mieux, nous obtenons un taux de fiabilité de prédiction proche de 59 % pour $\alpha = 0.4$ au mois de Janvier.

Gain net par match

Sur les figures de 5.4, on détermine notre gain moyen par match en plaçant des paris. On a utilisé les ML_c de fermeture pour le calcul des côtes selon (5.1). Dans cette expérience, on subdivise un montant de 1 unité sur tous les matchs participants qu'on estime vont maximiser nos gains (c'est-à-dire dont le produit de la côte par rapport à la probabilité de prédiction est plus grand que si on mise sur l'autre équipe) à chaque fenêtre de mise à jour. Si l'équipe gagne, on collecte la côte sinon on perd le montant qu'on a placé. On moyenne les résultats par mois calendaire.

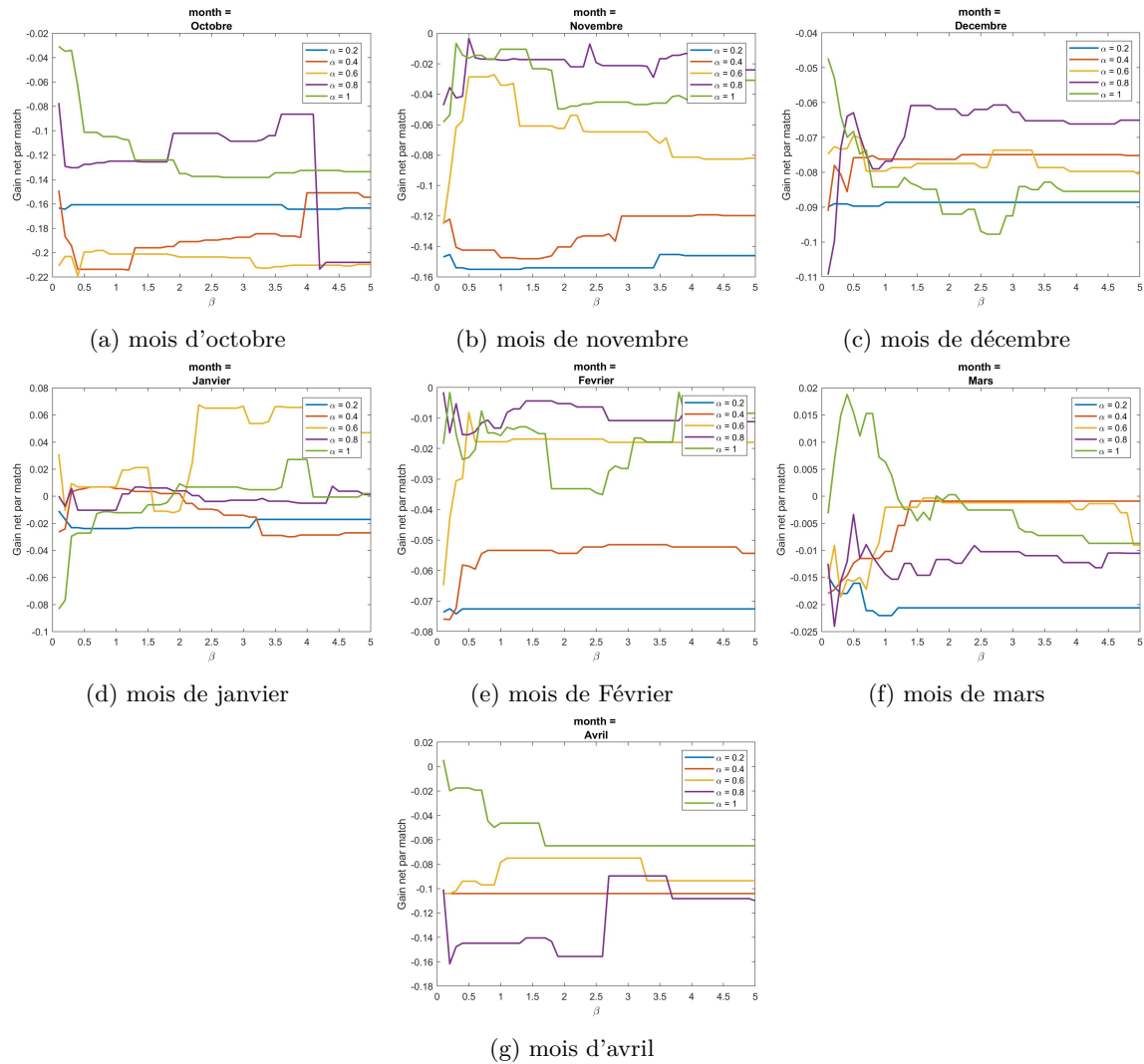


Figure 5.4 – Gain net par match en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Thurnstone

En se référant à la courbe 5.4, nous constatons que, pour ces mois-ci, les hyperparamètres qui maximisent le gain net ne sont pas forcément ceux qui minimisent l'erreur de prédiction. Ceci peut être dû aux valeurs attribuées aux côtes proposées par [2]. Nous ne disposons pas d'assez d'information sur comment ces «money lines» ont été fixés. Nous constatons que pour le mois de janvier, nous arrivons à obtenir un gain net positif pour les modèles paramétrés par $\alpha = 0.4 - 1$. Pour ces paramètres, nous obtenons un taux d'erreur de prédiction entre 40 et 45 %.

5.3.2 Résultat avec le modèle de Bradley-Terry

Dans cette deuxième partie, nous considérons que le bruit d'observations suit une distribution logistique de moyenne nulle et d'une échelle $s_\epsilon = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$. Nous utilisons les mêmes a priori gaussiens que la sous-section précédente. Nous calculons les probabilités de prédiction selon (3.8). Nous produisons nos résultats pour chaque mois aussi pour les mêmes métriques.

Evidence de Bayes

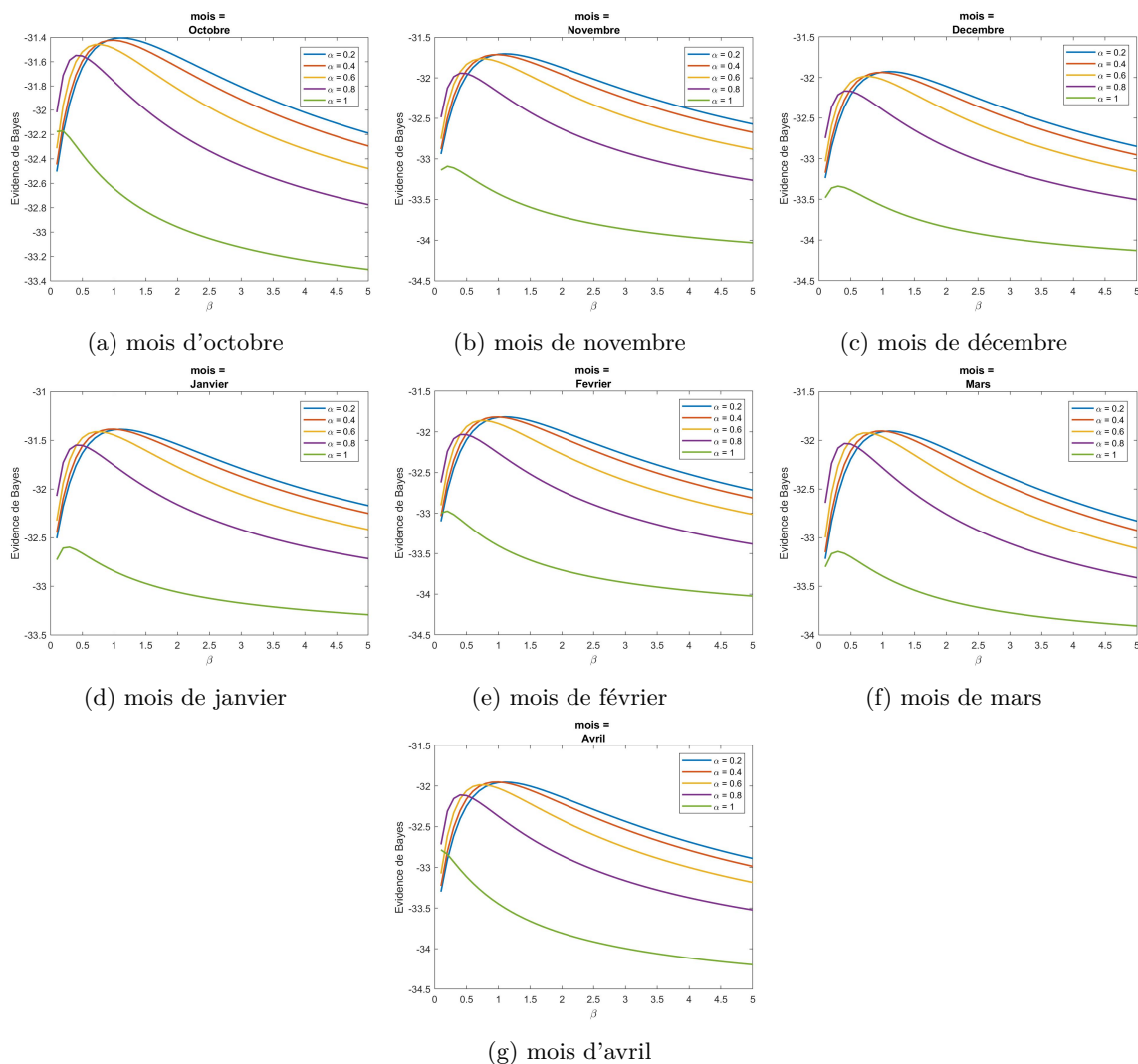


Figure 5.5 – Evidence de Bayes en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Bradley-Terry

Selon, la figure 5.5, nous constatons que le comportement est similaire à celui de Thurnstone ayant les courbes de l'évidence de Bayes se maximisant avec les α faibles et qui varient d'un mois à l'autre.

Score binaire de Brier

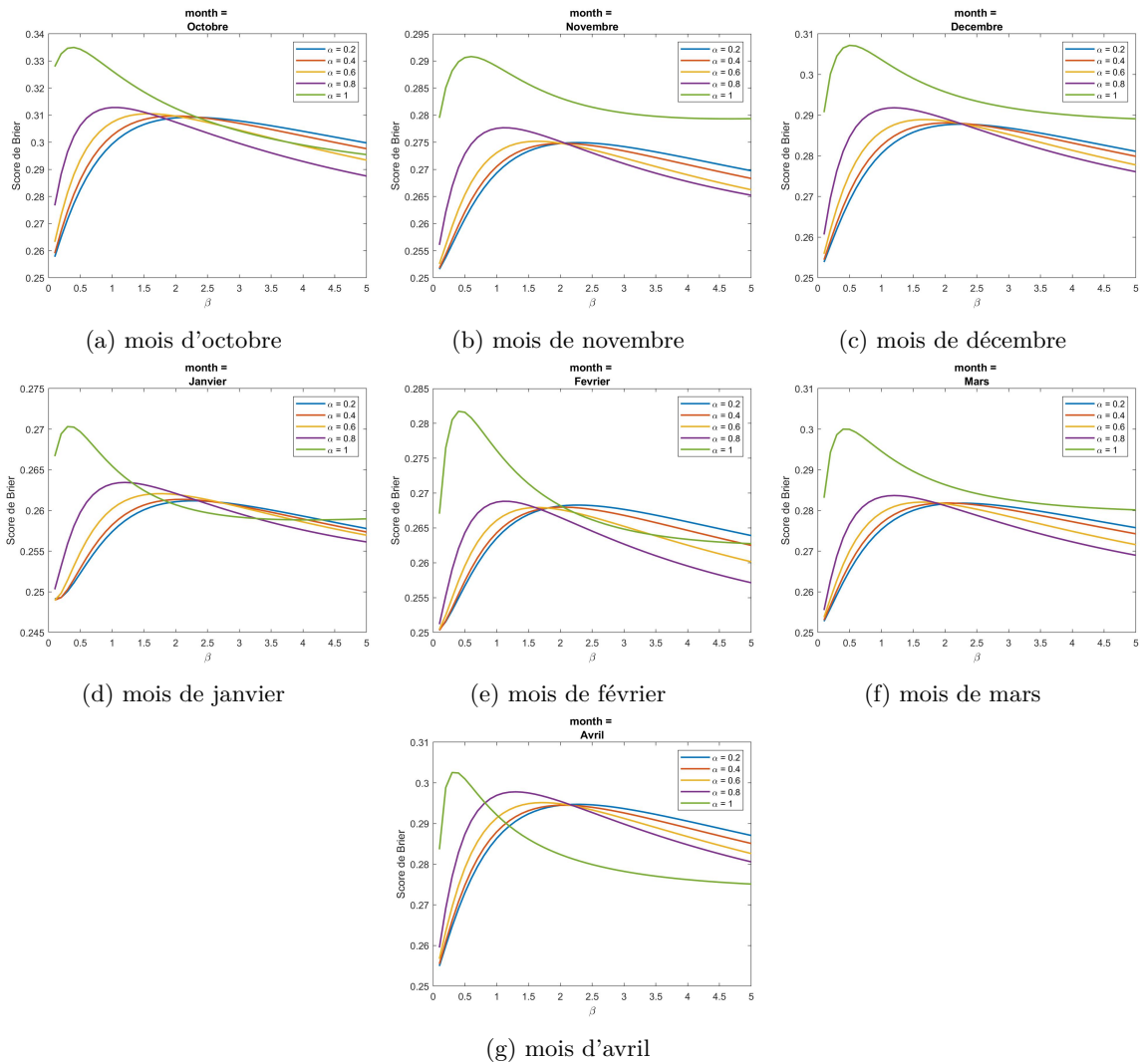


Figure 5.6 – Score de Brier en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Bradley-Terry

Les scores de Brier par mois représentés sur la figure 5.6 sont bien plus grands que 0.25. En regardant les probabilités de prédiction, nous remarquons que, majoritairement, elles ne stagnent pas aux alentours de 0.5 mais nous n'arrivons pas à bien prédire les résultats futurs. Nous constatons aussi que ces scores atteignent leurs minima pour le β le plus petit ou encore $\beta = 0.1$ et particuliè-

rement pour α assez faible (0.2 - 0.4). Ceci nous amène à se demander non seulement si le modèle logistique décrit bien la vraisemblance des données de la NHL pour la saison 2017- 2018 mais aussi s'il existe une dépendance et une variabilité particulière pour décrire l'évolution des mérites au cours de la même saison pour cet échantillon de données.

Erreur de prédiction

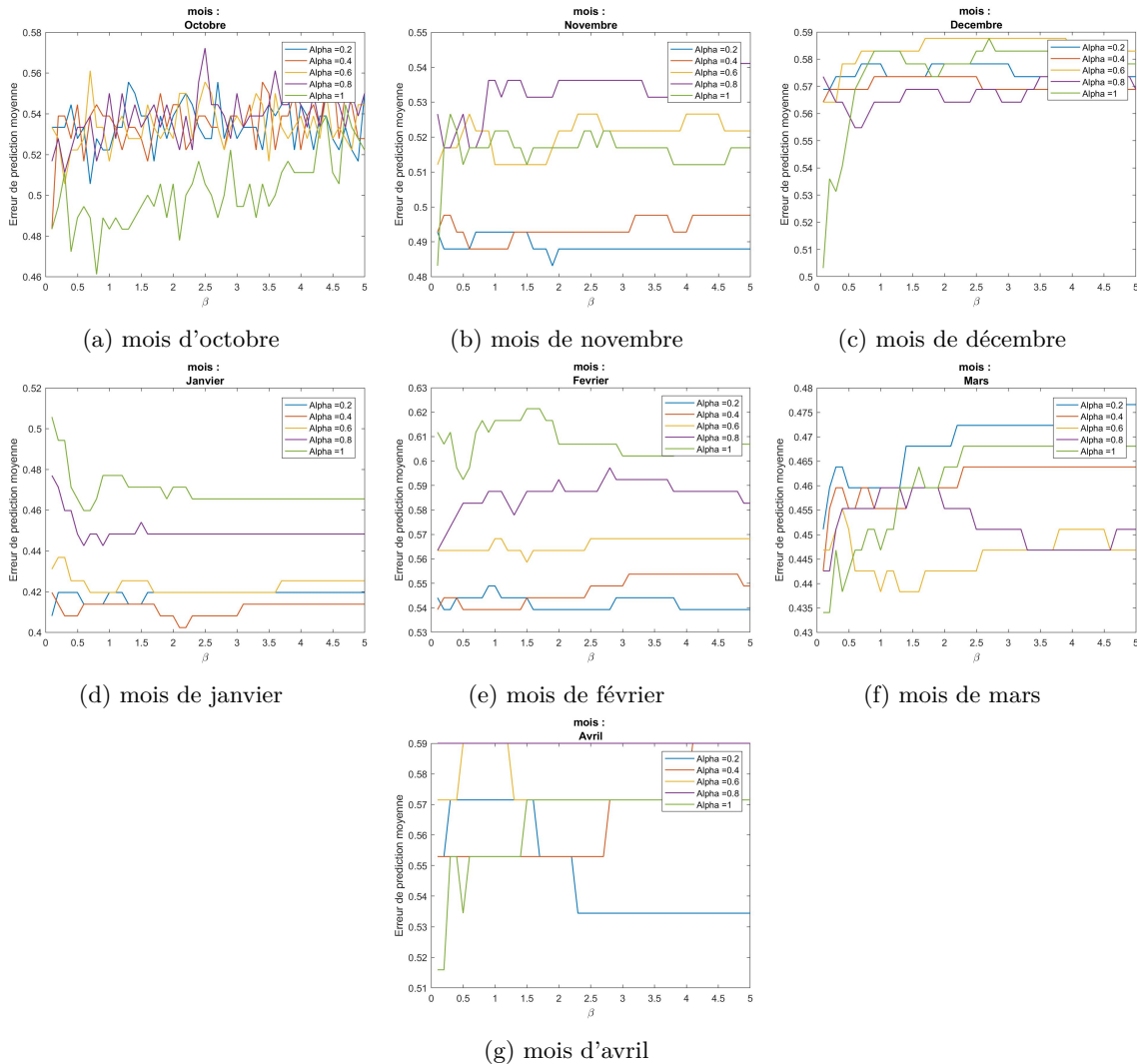


Figure 5.7 – Erreur de prédiction en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Bradley-Terry

Pour ce qui est erreur de prédiction sur la figure 5.7, nous obtenons au mieux 59 % pour fiabilité pour les prédictions sur tous les matchs de la saison. Nous remarquons que les allures des courbes de l'erreur de prédiction sont très similaires avec ceux du modèle de Thurnstone plus on avance dans

la saison. Ceci pourrait s'expliquer que les probabilités se situent similairement de part et d'autre de 0.5.

Gain net par match

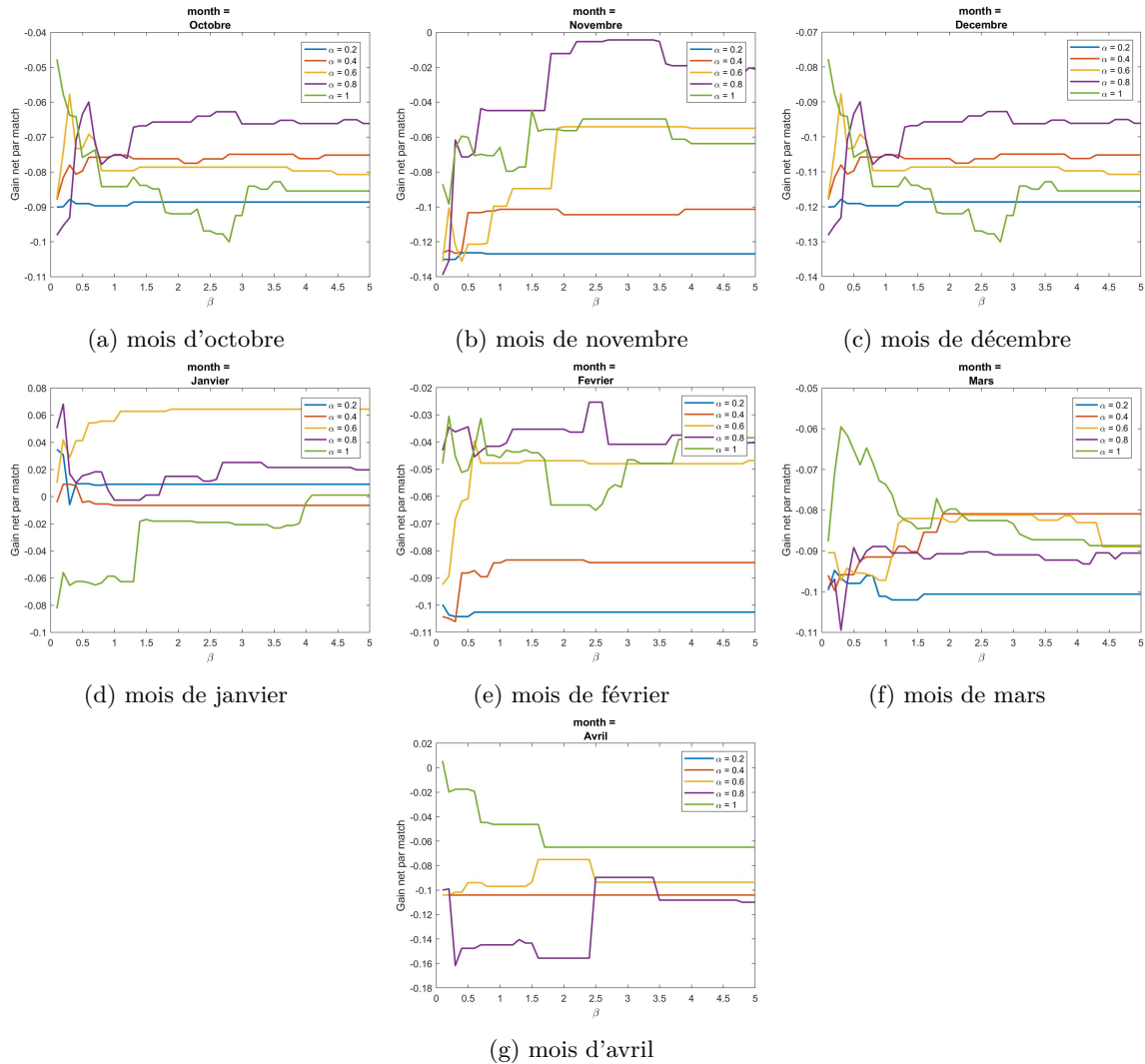


Figure 5.8 – Gain net par match en fonction de β et α pour la saison régulière 2017 -2018 pour le modèle de Bradley-Terry

Nous constatons le même comportement pour les fonctions du gain de ce modèle et celui de Thurnstone. Pour le mois de Janvier, on atteint un gain positif de 6% aussi pour $\alpha = 0.6$ et pour $\beta \geq 1$.

5.4 Résultats

Pour les hyperparamètres optimaux $\hat{\alpha} = 0.4$, $\hat{\beta} = 1$ et $\hat{\alpha} = 0.2$, $\hat{\beta} = 1.1$ obtenus par la minimisation du score de Brier respectivement pour les deux cas, pour le mois de janvier, on estime les paramètres θ et on fait le classement des équipes par division selon leurs mérites. Sur les tableaux 5.1 et 5.1, nous reportons notre classement par division. Devant chaque équipe, nous indiquons les valeurs des mérites obtenus à la fin du mois de janvier pour chaque modèle. Le champs 'gains' indique le classement des équipes selon le nombre de victoires obtenues durant le mois de janvier. Nous écartons les victoires obtenues avant cette date car nous utilisons des facteurs d'atténuations faibles qui diminue l'effet des matchs antécédents sur les inférences actuelles.

Tableau 5.1 – Classement des équipes de la conférence Est pour la saison 2017 - 2018

Division métropolitaine			Division atlantique		
Thurnstone	Bradley -Terry	gains	Thurnstone	Bradley - Terry	gains
Hurricanes (0.70234)	Hurricanes (0.38096)	Penguins (5)	Maple Leafs (0.8469)	Maple Leafs (0.43065)	Bruins (8)
Devils (0.63439)	Devils (0.36823)	Flyers (8)	Panthers (0.68756)	Panthers (0.378)	Maple Leafs (6)
Capitals (0.26446)	Capitals (0.07334)	Capitals (6)	Bruins (0.65109)	Bruins (0.36282)	Lightening (6)
Penguins (0.11949)	Penguins (0.016285)	Hurricanes (5)	Sénateurs (0.62035)	Sénateurs (0.35894)	Red Wings (5)
Blue Jackets (-0.089099)	Blue Jackets (-0.012729)	Blue Jackets (5)	Lightening (0.55096)	Lightening (0.35639)	Sabres (4)
Islanders (-0.2823)	Islanders (-0.08082)	Islanders (5)	Red Wings (0.19328)	Red Wings (0.068459)	Canadiens (4)
Rangers (-0.55746)	Rangers (-0.35584)	Rangers (5)	Sabres (-0.6882)	Sabres (-0.37826)	Panthers (3)
Flyers (-0.81453)	Flyers (-0.42914)	Devils (3)	Canadiens (-0.70424)	Canadiens (-0.38099)	Sénateurs (3)

Tableau 5.2 – Classement des équipes de la conférence Ouest pour la saison 2017 - 2018

Division centrale			Division pacifique		
Thurnstone	Bradley-Terry	gains	Thurnstone	Bradley - Terry	gains
Predators (0.64057)	Predators (0.36243)	Avalanche (8)	Canucks (0.74619)	Canucks (0.3826)	Ducks (7)
Avalanche (0.56738)	Avalanche (0.35578)	Wild (7)	Golden knights (0.72504)	Golden knights (0.38164)	Golden Knights (7)
Stars (0.55524)	Stars (0.35529)	Jets (7)	Sharks (-0.35814)	Sharks (-0.087669)	Sharks (6)
Wild (0.091098)	Wild (0.012758)	Blues (7)	Ducks (-0.58882)	Ducks (-0.3578)	Flames (6)
Blackhawks (-0.54005)	Blackhawks (-0.35358)	Blackhawks (6)	Kings (-0.60682)	Kings (-0.35959)	Oilers (5)
Jets (-0.57036)	Jets (-0.35718)	Predators (6)	Oilers (-0.6835)	Oilers (-0.37067)	Canucks (4)
Blues (-0.59413)	Blues (-0.35808)	Stars (6)	Coyotes (-0.72967)	Coyotes (-0.37531)	Kings (4)
-	-	-	Flames (-0.78905)	Flames (-0.38692)	Coyotes (3)

Pour les deux modèles paramétrés par les arguments qui maximisent l'évidence de Bayes, pour le mois de janvier, on obtient les mêmes classements. On constate bien pour les deux cas, que les valeurs des mérites sont assez proches. Ceci est dû au fait qu'on emploie des facteurs d'atténuation

de valeurs faibles. Cependant, ces classements ne correspondent pas aux classements qu'on obtient en ordonnant les équipes selon le nombre de matchs qu'elles ont gagné au mois de Janvier. Nous expliquons cela par le fait que le calcul de mérites que nous proposons dépend de l'ordre des matchs et des mérites de l'équipe adverse et aussi de tous les résultats allant du premier jour jusqu'au dernier jour de match de Janvier.

Au cours de ce chapitre, nous avons analysé la nature des données provenant de la ligue nationale du hockey professionnel pour la saison 2017-2018 en utilisant un modèle d'état linéaire gaussien et deux modèles d'observation (de Thurnstone et de Bradley-Terry) et nous avons constaté que les mérites n'évoluent pas de la même manière durant toute la saison et qu'il est possible que notre modèle linéaire simple ne soit pas capable de bien décrire ce comportement.

Conclusion

Ce mémoire avait pour but de proposer un algorithme de suivi de mérites au cours du temps en fonction de l'historique des matchs dans le domaine sportif pour des fins de classement, de prédiction et de pari. On se demandait s'il existerait un modèle mathématique pour assurer un suivi fiable de ces quantités pour les matchs de la ligue National du Hockey.

Nous rappelons les objectifs que nous nous sommes fixés au début du projet :

- Développer et caractériser un modèle probabiliste dynamique capable de capturer les changements et les incertitudes auxquelles les mérites sont assujettis.
- Développer une méthode qui sera fonctionnelle avec des données minimales et/ou clairsemées.
- Trouver et bien exploiter des approximations pertinentes pour faciliter le suivi sans altérer significativement les estimations.
- Choisir et utiliser des métriques d'évaluations adéquats à la tâche en incluant la métrique de maximisation de gain de paris.

Pour ce travail,

- nous avons commencé par définir un modèle dynamique Markovien modélisant cette évolution et proposer une approximation de l'a posteriori se basant sur la méthode de Laplace. Nous avons fait l'inférence bayésienne par la méthode de maximum a posteriori et nous avons étudié les résultats obtenus à l'issue de cette inférence sur des données synthétiques et celles de la NHL couvrant la saison régulière 2017-2018 en se référant aux modèles de Thurnstone et de Bradley-Terry.
- Bien que dans la littérature, il y a tendance à proposer un modèle et un algorithme d'estimation et à se satisfaire de proposer un classement final à partir des valeurs de mérites inférés, nous avons choisi d'utiliser plusieurs scores propres pour évaluer l'adaptabilité de notre modèle par rapport aux données en question. Nous avons aussi évalué le gain net par

match pour les données synthétiques et celles provenant de la saison 2017 - 2018 du hockey professionnel.

Par rapport à l'approche que nous avons proposée, nous avons obtenu les résultats suivants:

- Nous avons réussi à récupérer les hyperparamètres du modèle à partir des observations pour les données synthétiques pour les modèles linéaire et non linéaire en faisant appel à différentes métriques.
- Nous avons analysé les résultats de matchs de la ligue nationale du hockey pour la saison 2017-2018 en utilisant deux modèles différents; celui de Thurnstone et de Bradley-Terry. Bien que nous n'étions pas capable de déterminer un modèle particulièrement meilleur que les autres à décrire les données, nous avons fait divers constats:
 - Avec les modèles étudiés, nous avons constaté que les mérites n'évoluent pas d'une manière fixe durant toute la saison.
 - Pour des configurations particulières, nous avons pu atteindre un taux de fiabilité de prédiction de 59 % et un gain positif de 6 % pour le mois de janvier.

Nous pensons que ces résultats obtenus sont dûs à:

- Le modèle d'évolution de l'état est un modèle linéaire gaussien qui ne décrit pas bien la dynamique de l'évolution des mérites.
- La récursivité utilisée à chaque itération de mise à jour induit que l'approximation de l'a posteriori se fait à chaque étape et altère les résultats d'autant plus.
- L'approximation de Laplace utilisée peut ne pas être l'approximation la plus adéquate de l'a posteriori pour les données issues des matchs de hockey.
- Le choix pour faire des mises à jour à chaque jour où des matchs prennent lieu est justifiable mais pas forcément le meilleur.

Dans le cadre d'un travail futur sur ce même projet, il est essentiel de réajuster le modèle proposé pour plus d'adéquation avec les données de la NHL soit en rajoutant des hyperparamètres pour le décrire (i.e : facteur d'avantage de jouer chez soi), en améliorant l'approximation utilisée pour l'a posteriori ou encore en étudiant de plus près un choix convenable de la fenêtre d'observation (peut-être qu'une fenêtre de 1 journée ne fournit pas autant d'information que nécessaire).

Références

- [1] (2018). <https://www.sportsbookreviewsonline.com/index.htm>.
- [2] (2018). *Las Vegas Odds, Sports Scores, Betting Lines at ScoresAndOdds.com for Canada Football, WNBA Basketball, MLB Baseball*. <http://scoresandodds.com/>.
- [3] Arulampalam MS, Maskell S, Gordon N & Clapp T (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(2):174–188. DOI:10.1109/78.978374.
- [4] Constantinou AC (2019). Dolores: a model that predicts football match outcomes from all over the world. *Machine Learning*, 108(1):49–75.
- [5] David HA (1969). *The Method of Paired Comparisons*. Charles Griffin & CO. LTD, University of North Carolina, 2 edition.
- [6] Elo AE (1978). *The Rating of Chessplayers, Past and Present*. Arco Pub., New York.
- [7] Glickman ME (1999). *Parameter Estimation in Large Dynamic Paired Comparison Experiments*. <http://math.bu.edu/people/mg/papers/glicko.pdf>.
- [8] Gneiting T & Raftery AE (2007). Strictly proper scoring rules, prediction, and estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 102(477):359–378. DOI:10.1198/016214506000001437.
- [9] Hager WW (1989). Updating the inverse of a matrix. *SIAM Rev.*, 31(2):221–239.
- [10] Herbrich R (2005). On gaussian expectation propagation.
- [11] Herbrich R, Minka T & Graepel T (2006). TrueskillTM: A Bayesian skill rating system. *Advances in Neural Information Processing Systems 19, Proceedings of the Twentieth Annual Conference on Neural Information Processing Systems*, Vancouver, British Columbia, Canada, December 4-7, pages 569–576.
- [12] Ioannou P (2006). *Adaptive Control Tutorial (Advances in Design and Control)*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA.
- [13] Lacey T (1998). Tutorial: The kalman filter. *Computer Vision*.
- [14] Lai TL, Gross ST, Shen DB *et al.* (2011). Evaluating probability forecasts. *The Annals of Statistics*, 39(5):2356–2382.
- [15] Makalic E, Schmidt DF & Seghouane AK (2014). A tutorial on model selection. *Academic Press Library in Signal Processing*, Elsevier, volume 1, pages 1415–1452.

- [16] Mark C, Metzner C, Lautscham LA, Strissel PL, Strick R & Fabry B (2018). Bayesian model selection for complex dynamic systems. *Nature Communications*.
- [17] Maskell S, Arulampalam M, Gordon N & Clapp T (2001). A tutorial on particle filters for on-line nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEE International Seminar Target Tracking: Algorithms and Applications*. DOI:10.1049/ic:20010246.
- [NHL.com] NHL.com. *Official Site of the National Hockey League*. <https://www.nhl.com/>.
- [19] Robert CP (2006). *Le choix bayésien, Principes et pratiques*. Springer, Paris, 2 edition.
- [20] Terejanu GA *et al.* (2008). Extended kalman filter tutorial. Department of Computer Science and Engineering, University of Buffalo.