

**Record Number:** 1500  
**Author, Monographic:** Cluis, D./Bellemare, N.  
**Author Role:**  
**Title, Monographic:** Contenu en information et étendue réduite des processus autorégressifs  
AR2  
**Translated Title:**  
**Reprint Status:**  
**Edition:**  
**Author, Subsidiary:**  
**Author Role:**  
**Place of Publication:** Québec  
**Publisher Name:** INRS-Eau  
**Date of Publication:** 1983  
**Original Publication Date:**  
**Volume Identification:**  
**Extent of Work:** 66  
**Packaging Method:** pages  
**Series Editor:**  
**Series Editor Role:**  
**Series Title:** INRS-Eau, Rapport de recherche  
**Series Volume ID:** 149  
**Location/URL:**  
**ISBN:** 2-89146-147-9  
**Notes:** Rapport annuel 1982-1983  
**Abstract:** 10.00\$  
**Call Number:** R000149  
**Keywords:** rapport/ ok/ dl

Contenu en information et étendue  
réduite des processus  
autoregressifs AR2

par

Daniel CLUIS et Normand BELLEMARE

RAPPORT SCIENTIFIQUE No 149

INRS-Eau  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC  
C.P. 7500, Sainte-Foy  
Québec G1V 4C7

INRS-Eau  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC  
C.P. 7500, Sainte-Foy  
Québec G1V 4C7

RAPPORT SCIENTIFIQUE No 149

Contenu en information et étendue  
réduite des processus  
autoregressifs AR2

par  
Daniel CLUIS et Normand BELLEMARE

## RÉSUMÉ

À partir de l'expression analytique explicite de la variance de la moyenne d'échantillons courts provenant des processus AR2, les deux statistiques suivants: le Contenu en Information de la moyenne et l'Étendue réduite ont été évalués en fonction de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ou a et b, pour des échantillons de diverses longueurs.

Les deux statistiques ont été très largement utilisés pour la rationalisation de réseau d'acquisition de données (météorologie, hydrologie et études de qualité de l'eau ou de l'air) et en relation avec le phénomène de HURST; les résultats sont discutés et comparés avec ceux provenant de séries normales et indépendantes; une analyse de sensibilité a été réalisée pour expliquer les différences possibles entre les données et le modèle le plus usuel: ce modèle Markovien du premier ordre.

## ABSTRACT

Using a closed-form analytical expression for the variance of the mean of short samples derived from AR2 processes, two related statistics, the Information Content of the mean and the Rescaled Range are evaluated as functions of  $\rho_1$  and  $\rho_2$  or of a and b for samples of various lengths.

The two statistics have been widely used for network design purposes (meteorology, hydrology and water quality studies) and in relation with the Hurst phenomenon. The results are discussed and compared with those of normal independent samples, and a sensitivity analysis is performed to explain possible discrepancies between data and the usual first order linear Markovien models.

## TABLE DES MATIÈRES

	<u>Page</u>
Résumé	i
Abstract	i
Table des matières	ii
Liste des tableaux	iii
Liste des figures	vii
1. Introduction	1
2. Propriétés des processus autoregressifs	3
2.1 Cas du processus AR1	3
2.2 Cas du processus AR2	5
3. Contenu en Information	12
3.1 Contenu intrinsèque en information	14
3.2 Cas des échantillons courts	18
3.3 Sensibilité autour du cas Markovien	30
3.4 Application à la rationalisation des réseaux et à l'étude des tendances	31
4. Gamme de variation	34
4.1 Travaux antérieurs	34
4.2 Résultats	37
5. Conclusions	53
6. Références bibliographiques	54
Appendice 1: Calcul de la variance de la moyenne	58
Appendice 2: Programmes APL utilisés dans ce rapport	61

## LISTE DES TABLEAUX

	<u>Page</u>
1. Écarts-types des processus AR2 selon $\rho_1$ et $\rho_2$ pour $\epsilon = \text{NID}(0,1)$	9
2. Écarts-types des processus AR2 selon a et b pour $\epsilon = \text{NID}(0,1)$	9
3. Contenu intrinsèque en information du processus autoregressif AR2	16
4. Contenu en information I d'une série AR2 de longueur $N = 5$	20
5. Robustesse du contenu en information d'une série de longueur $N = 5$ par rapport à la série de longueur infinie $I/I_\infty$	20
6. Contenu en information I d'une série AR2 de longueur $N = 10$	21
7. Robustesse du contenu en information d'une série de longueur $N = 10$ par rapport à la série de longueur infinie $I/I_\infty$	21
8. Contenu en information I d'une série AR2 de longueur $N = 20$	22
9. Robustesse du contenu en information d'une série de longueur $N = 20$ par rapport à la série de longueur infinie $I/I_\infty$	22

10.	Contenu en information I d'une série AR2 de longueur N = 50	23
11.	Robustesse du contenu en information d'une série de longueur N = 50 par rapport à la série de longueur infinie $I/I_{\infty}$	23
12.	Contenu en information I d'une série AR2 de longueur N = 100	24
13.	Robustesse du contenu en information d'une série de longueur N = 100 par rapport à la série de longueur infinie $I/I_{\infty}$	24
14.	Contenu en information I d'une série AR2 de longueur N = 1000	25
15.	Robustesse du contenu en information d'une série de longueur N = 1000 par rapport à la série de longueur infinie $I/I_{\infty}$	25
16.	Contenu en information d'une série AR2 de longueur N = 5	26
17.	Contenu en information d'une série AR2 de longueur N = 10	26
18.	Contenu en information d'une série AR2 de longueur N = 20	27
19.	Contenu en information d'une série AR2 de longueur N = 50	27
20.	Contenu en information d'une série AR2 de longueur N = 100	28

21. Contenu en information d'une série AR2 très longue (N = 1000)	28
22. Contenus en information calculés pour des séries de longueur N = 100 et certaines combinaisons de $\rho_1$ et $\rho_2$	29
23. Sensibilité absolue de I selon n et $\rho_1$	32
24. Contenu en information du processus AR1 selon n et $\rho_1$	32
25. Sensibilité relative de I selon n et $\rho_1$	32
26. Gamme de variation $R_n$ des processus AR2 (N = 5)	38
27. Gamme de variation réduite ( $R_{n/\sigma}$ ) des processus AR" (N = 5)	38
28. Gamme de variation $R_n$ des processus AR2 (N = 10)	39
29. Gamme de variation réduite ( $R_{n/\sigma}$ ) des processus AR2 (N = 10)	39
30. Gamme de variation $R_n$ des processus AR2 (N = 20)	40
31. Gamme de variation réduite ( $R_{n/\sigma}$ ) des processus AR2 (N = 20)	40
32. Gamme de variation $R_n$ des processus AR2 (N = 50)	41
33. Gamme de variation ( $R_{n/\sigma}$ ) des processus AR2 (N = 50)	41
34. Gamme de variation $R_n$ des processus AR2 (N = 100)	42



35.	Gamme de variation réduite ( $R_n/\sigma$ ) des processus AR2 (N = 100)	42
36.	Gamme de variation $E(R_n)$ pour N = 5	43
37.	Gamme de variation réduite $E(R_n)/\sigma$ pour N = 5	43
38.	Gamme de variation $E(R_n)$ pour N = 10	44
39.	Gamme de variation réduite $E(R_n)/\sigma$ pour N = 10	44
40.	Gamme de variation $E(R_n)$ pour N = 20	45
41.	Gamme de variation réduite $E(R_n)/\sigma$ pour N = 20	45
42.	Gamme de variation $E(R_n)$ pour N = 50	46
43.	Gamme de variation réduite $E(R_n)/\sigma$ pour N = 50	46
44.	Gamme de variation $E(R_n)$ pour N = 100	47
45.	Gamme de variation réduite $E(R_n)/\sigma$ pour N = 100	47
46.	Sensibilité absolue de $R_n$ selon n et $\rho_1$	52
47.	Gamme de variation $R_n$ du processus AR1 selon n et $\rho_1$	52
48.	Sensibilité relative de $R_n$ selon n et $\rho_1$	52

## LISTE DES FIGURES

	<u>Page</u>
1. Correspondance entre $\rho_1, \rho_2$ et $a, b$	7
2. Correspondance entre $a, b$ et $\rho_1, \rho_2$	7
3. Classification des processus AR2	11
4. Contenu en information intrinsèque du processus AR2 dans le plan $\rho_1, \rho_2$	17
5. Contenu en information intrinsèque du processus AR2 dans le plan $a, b$	19
6. Définitions du surplus $S_n^+$ , du déficit $S_n^-$ et de la gamme de variation $R_n$ pour un échantillon de longueur $n$	35
7. Gamme de variation relative $R(\rho_1, \rho_2) \div R(0,0)$ pour $N = 100$	48
8. Gamme de variation réduite relative $(R(\rho_1, \rho_2) \div \sigma(\rho_1, \rho_2)) / [R(0,0) \div \sigma(0,0)]$ pour $N = 100$	49
9. Évolution de l'étendue $E(R_n)$ en fonction de la longueur de l'échantillon pour diverses combinaisons de $\rho_1$ et $\rho_2$	51

## 1. Introduction

Dans ce rapport, nous considérons une série chronologique, c'est-à-dire une suite de données prélevées à intervalles de temps égaux et nous nous intéressons ici essentiellement à la composante stochastique, c'est-à-dire à la série obtenue en retranchant de la série brute les composantes déterministes: les tendances de la moyenne et de la variance ainsi que les composantes périodiques de la moyenne et de la variance; cette composante stochastique est réputée stationnaire, c'est-à-dire que ses caractéristiques statistique n'évoluent pas dans le temps. Le correlogramme cette série résiduelle est largement utilisé pour évaluer sa structure de persistance et choisir un modèle mathématique représentatif simple; le modèle markovien ou autoregressif d'ordre un est le plus largement utilisé; nous développerons ici certains résultats intéressants dans le cas du processus markovien d'ordre 2 qui permet souvent un meilleur ajustement aux séries observées.

Lors de l'étude d'une série temporelle (débits journaliers, paramètres de qualité échantillonnés sur une base hebdomadaire), on est souvent amené, pour effectuer l'analyse statistique de ces données, à évaluer la redondance des informations recueillies; ceci conduit, en général, au calcul des coefficients d'autocorrélations de la série et à la détermination de ceux qui sont significativement différents de zéro; cette approche peut conduire à l'identification des composantes de la série et à sa modélisation selon la méthode de BOX et JENKINS. Si on vise à rationaliser un réseau d'échantillonnage, on peut pour déterminer la fréquence optimale de l'acquisition des données, introduire le concept de contenu en information de la série; R.A. FISHER a établi que le contenu en information d'un paramètre d'une série était inversement proportionnel à sa variance. Si on utilise ce concept à la moyenne de la série, un des paramètres les plus importants, on est amené à comparer la variance de la moyenne d'un échantillon de longueur  $N$  de la série autocorrélée à la variance de la moyenne d'une série indépendante de même longueur et de même variance. Ce même concept permet de définir un nombre effectif  $N'$  d'observations contenant autant d'information (au sens de R.A. FISHER), c'est-à-dire donnant lieu à la même variance de la moyenne que  $N$  observations indépendantes. Or plusieurs auteurs comme REIHER et HUZZEN

(1967) et QUIMPO (1969) ont montré que, pour des processus autorégressifs d'ordre 1 et 2, ce contenu en information pourrait être supérieur à 1 ce qui peut paraître paradoxal au moins dans le cas où  $\rho_1$  est positif.

Comme il a été démontré que les séries de débits journaliers (BEARD, 1967; QUIMPO, 1967) et les températures journalières de l'eau (CLUIS, 1972) pouvaient être modélisées par des processus autorégressifs d'ordre 2, il est essentiel pour la détermination d'une fréquence optimale d'échantillonnage de confirmer le comportement de ce critère d'optimisation. En particulier, il est important de mettre en lumière si ce phénomène constitue un artefact relié aux biais des coefficients d'autocorrélation d'échantillons courts ou s'il s'agit d'un phénomène intrinsèque, présent dans une série infinie. Si le phénomène est réel, des précautions doivent être prises dans les résultats des ajustements automatiques des paramètres de modèles AR2 fournis par un usage sans discrimination de logiciels.

Dans cette note, nous montrerons la réalité du phénomène et nous établirons à l'intérieur du domaine de stationarité des séries supposées infinies les valeurs du contenu en information pour toute combinaison des 2 paramètres caractéristiques des processus AR2. De plus, nous démontrerons, à partir de données publiées dans la littérature, la robustesse de la représentation pour des échantillons plus courts. Une analyse de sensibilité est ensuite réalisée autour du cas markovien d'ordre 1 de façon à évaluer l'erreur que l'on commet sur ce paramètre en adoptant ce modèle plutôt que le modèle plus raffiné d'ordre 2.

Une étude du même type a aussi été effectuée sur l'étendue ou la gamme de variation (range) du processus, un paramètre important dans le dimensionnement des ouvrages de retenue; il sera mis en évidence que, même pour un coefficient d'autocorrélation  $\rho_1$  positif, on peut obtenir des gammes de variation supérieures ou inférieures à celle correspondant à une série indépendante de même longueur.

## 2. Propriétés des processus autoregressifs

### 2.1 Cas du processus AR1

Si la série de base suit un processus Markovien d'ordre 1, on a alors:  $X_t = \rho_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$  et  $\rho_j = \rho_1^j$  et  $\frac{\text{var } X}{\text{var } \varepsilon} = \frac{1}{1-\rho^2}$ . Dans ce cas BROOKS et CARRUTHERS (1958) ont développé la valeur explicite de la variance de la moyenne telle que définie par BAYLEY et HAMMERSLEY (1946):

$$\text{var } \bar{X} = \frac{\text{var } X}{n} \left[ 1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \rho_j \right] \quad [1]$$

Si la série étudiée est Markovienne, on a:  $\rho_j = \rho_1^j$ ;

Posons  $W = \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \rho_j = \sum_{j=1}^{n-1} \rho_1^j (n-j)$  et  $W' = \sum_{j=1}^{n-1} j \rho_1^j$ , on a

$$W + W' = \sum_{j=1}^{n-1} n \rho_1^j = n \sum_{j=1}^{n-1} \rho_1^j$$

si l'on considère maintenant la somme

$$S = \sum_{j=1}^{n-1} \rho_1^j = \rho_1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_1^{n-1} = \rho_1 \frac{(1-\rho_1^{n-1})}{1-\rho_1}$$

$$\frac{dS}{d\rho_1} = 1 + 2\rho_1 + \dots + (n-1) \rho_1^{n-2}$$

d'où

$$W' = \rho_1 \frac{dS}{d\rho_1}$$

Finalement:

$$W = nS - W' = nS - \rho_1 \frac{dS}{d\rho_1}$$

avec 
$$S = \rho_1 \frac{(1-\rho_1)^{n-1}}{1-\rho_1}$$

d'où 
$$\frac{dS}{d\rho_1} = \frac{1-n\rho_1^{n-1}}{1-\rho_1} + \frac{\rho_1(1-\rho_1)^{n-1}}{(1-\rho_1)^2}$$

$$W = n \rho_1 \frac{(1-\rho_1)^{n-1}}{1-\rho_1} - \rho_1 \left[ \frac{1-n\rho_1^{n-1}}{1-\rho_1} + \frac{\rho_1(1-\rho_1)^{n-1}}{(1-\rho_1)^2} \right]$$

donc 
$$W = \frac{n \rho_1}{1-\rho_1} - \rho_1 \frac{1-\rho_1^n}{(1-\rho_1)^2}$$

Si on introduit ce résultat dans l'expression, on trouve la variance de la moyenne:

$$\begin{aligned} \text{var } \bar{X} &= \frac{\text{var } X}{n} \left[ 1 + \frac{2}{n} W \right] \\ &= \frac{\text{var } X}{n} \left( 1 + 2 \frac{\rho_1 - \rho_1^n}{1-\rho_1} - \frac{2}{n} \rho_1 \left[ \frac{(1-\rho_1)(1-n\rho_1^{n-1}) + (\rho_1 - \rho_1^n)}{(1-\rho_1)^2} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\text{var } \bar{X} = \frac{\text{var } X}{n} \left[ \frac{1+\rho_1}{1-\rho_1} - \frac{2}{n} \rho_1 \frac{1-\rho_1^n}{(1-\rho_1)^2} \right]$$

ou

$$\text{var } \bar{X} = \frac{\text{var } X}{n} \left[ 1 + \frac{2\rho_1}{1-\rho_1} \left( 1 - \frac{1}{n} \frac{1-\rho_1^n}{1-\rho_1} \right) \right] \quad [2]$$

Pour une série longue, cette expression devient, quand  $n \rightarrow \infty$ :

$$\text{var } \bar{X} \rightarrow \frac{\text{var } X}{n} \left[ 1 + \frac{2\rho_1}{1-\rho_1} \right] = \frac{\text{var } X}{n} \left[ \frac{1+\rho_1}{1-\rho_1} \right] \quad [3]$$

Dans ce cas :

$$I = \frac{\frac{\text{var } X}{n}}{\text{var } \bar{X}} = \frac{1 - \rho_1}{1 + \rho_1} \quad [4]$$

On note que pour  $\rho_1 < 0$ , on obtient des valeurs de  $I$  supérieures à 1, ce qui revient à dire qu'un processus AR1 alterné contient plus d'information au sens de Fisher (1921, 1925) qu'une série indépendante de même longueur. Pour éviter ce problème, BAYLEY et HAMMERSLEY (1946) ont défini un contenu en information basé sur la variance de la variance :

$$I_2 = \frac{(n-1) + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j^2}{(n-1) + n \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j^2} \approx \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j^2 \right]^{-1}$$

Dans le cas d'un modèle markovien d'ordre 1 :

$$I_2 \approx \frac{1 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^{2n}}$$

Pour une série longue, cette quantité tend vers  $I_2 \approx 1 - \rho_1^2$

## 2.2 Cas du processus AR2

Si la série de base suit un processus Markovien d'ordre 2, on a alors :

$$X_t = a X_{t-1} + b X_{t-2} + \varepsilon_t \quad [5]$$

où  $\varepsilon_t$  est une composante aléatoire de moyenne 0.

Considérons l'espérance mathématique de l'équation précédente, on obtient:

$\mu = a \mu + b \mu$ , ce qui implique que  $\mu = 0$  (condition de stationarité).

Si on multiplie la même équation par  $X_{t-j}$  et que l'on considère l'espérance mathématique pour  $j = 0$ , on obtient:

$$\sigma_X^2 (1 - a \rho_1 - b \rho_2) = \sigma_\varepsilon^2$$

Comme la seule composante de  $X_t$  corrélée avec les  $\varepsilon_t$  est la dernière valeur des  $\varepsilon$ , on a, pour  $j > 1$ :

$$\rho_k = a \rho_{k-1} + b \rho_{k-2} \quad [6]$$

qui est une équation récurrente permettant de calculer tous les coefficients d'autocorrélation. Les deux premières identités s'écrivent:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1 \quad \text{et} \quad \rho_1 = a + b \rho_{-1} \\ \text{d'où } \rho_1 &= \frac{a}{1-b} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{a^2}{1-b} + b \end{aligned} \quad [7]$$

ou inversement:

$$a = \frac{\rho_1 (1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2} ; \quad b = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \quad [8]$$

Les correspondances entre  $a$ ,  $b$  et  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  sont présentées aux figures 1 et 2.

Des équations précédentes, on tire:

$$\frac{\text{var } X}{\text{var } \varepsilon} = \frac{1}{1 - a \rho_1 - b \rho_2} = \frac{1}{1 - a^2 - b^2 - 2ab\rho_1}$$



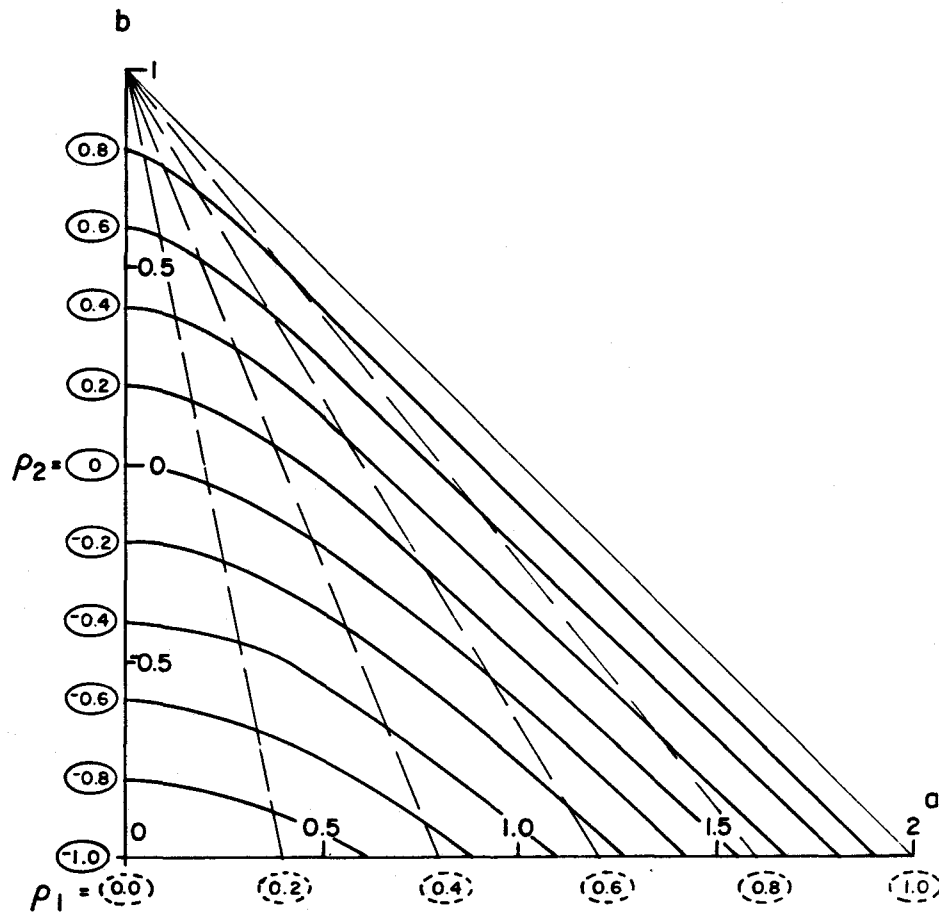


Figure 1: Correspondance entre  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et a, b.

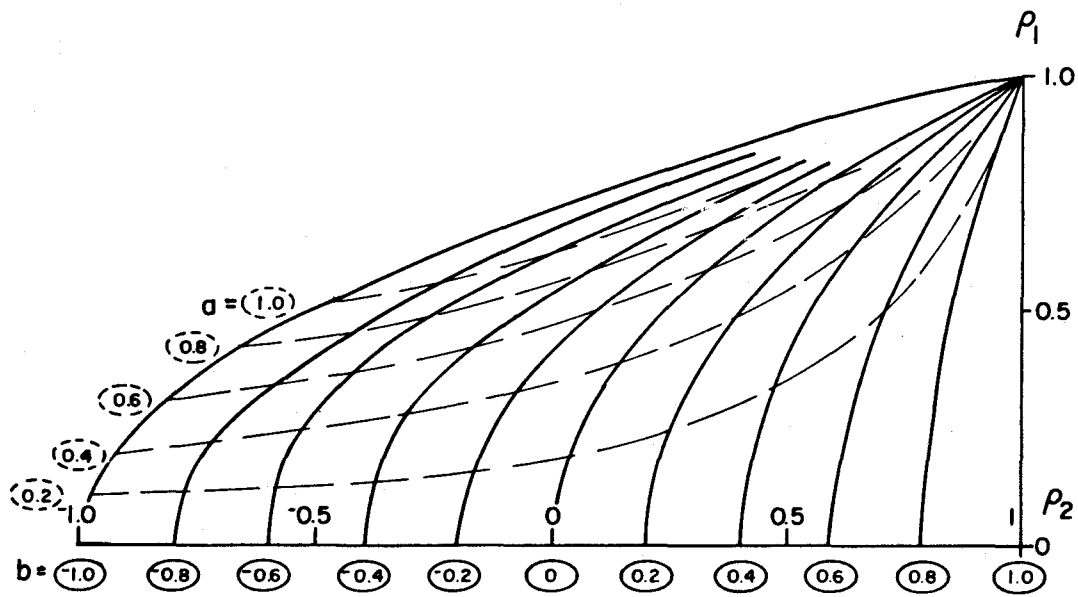


Figure 2: Correspondance entre a, b et  $\rho_1$ ,  $\rho_2$

$$\frac{\text{var } X}{\text{var } \varepsilon} = \frac{1-b}{1+b} \frac{1}{[(1-b)^2 - a^2]} = \frac{1-\rho_1^2}{1-2\rho_1^2(1-\rho_2) - \rho_2^2} = \frac{(1-\rho_1)(1+\rho_1)}{(1-\rho_2)(1+\rho_2-2\rho_1)} \quad [9]$$

Les écarts-types des processus AR2 sont présentés aux tableaux 1 et 2 dans le cas où  $\text{var } \varepsilon = 1$ .

Étudions maintenant la stationarité du processus  $X_t = a X_{t-1} + b X_{t-2} + \varepsilon_t$ ;

Si on multiplie par  $X_{t-1}$  et que l'on prend les espérances mathématiques, on obtient:

$$\sigma_X^2 = \sigma_X^2 (a \rho_1 + b \rho_2) = \sigma_\varepsilon^2$$

Si on remplace  $\rho_1$  et  $\rho_2$  en fonction de a et b, on tire

$$\sigma_X^2 = \frac{(1-b) \sigma_\varepsilon^2}{(1+b)(1-a-b)(1+a-b)}$$

on en tire les conditions de stationarité dans l'espace [a,b]:

$$a+b < 1; \quad b-a < 1 \quad \text{et} \quad -1 < b < 1$$

Si on remplace a et b en fonction de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , on tire les conditions de stationarité dans l'espace  $[\rho_1, \rho_2]$ :

$$-1 < \rho_1 < 1; \quad -1 < \rho_2 < 1 \quad \text{et} \quad \rho_1^2 < \frac{1}{2}(\rho_2+1)$$

L'équation caractéristique du processus s'écrit:

$$X^2 - aX - b = 0 \quad b \neq 0$$

Tableau 1 : Ecart-types des processus AR2 selon  $\rho_1$  et  $\rho_2$  pour  $\epsilon = \text{NID}(0,1)$

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5						0						+0.5						+0.9
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.81	2.3	2.6
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.69	1.86	2.41
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.54	1.76	2.35
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.48	1.72	2.33
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.44	1.7	2.31
-0.5	0	0	0	2.56	1.76	1.46	1.3	1.21	1.15	1.11	1.09	1.09	1.11	1.14	1.19	1.28	1.42	1.68	2.31	
	0	5.03	2.11	1.61	1.38	1.24	1.16	1.11	1.07	1.05	1.05	1.05	1.06	1.08	1.11	1.17	1.27	1.41	1.68	
	5.03	2.11	1.6	1.37	1.23	1.15	1.09	1.05	1.03	1.02	1.02	1.02	1.04	1.08	1.11	1.17	1.27	1.41	1.68	
	2.55	1.75	1.44	1.28	1.17	1.1	1.06	1.03	1.01	1.01	1.01	1.02	1.04	1.06	1.1	1.16	1.26	1.41	1.67	
	2.29	1.67	1.4	1.25	1.15	1.09	1.05	1.02	1.01	1	1.01	1.02	1.05	1.09	1.16	1.25	1.4	1.67	2.29	
0	2.55	1.75	1.44	1.28	1.17	1.1	1.06	1.03	1.01	1.01	1.01	1.02	1.05	1.09	1.15	1.25	1.4	1.67	2.29	
	5.03	2.11	1.6	1.37	1.23	1.15	1.09	1.05	1.03	1.02	1.02	1.02	1.05	1.09	1.16	1.25	1.4	1.67	2.29	
	0	5.03	2.11	1.61	1.38	1.24	1.16	1.11	1.07	1.05	1.05	1.05	1.06	1.1	1.16	1.26	1.41	1.67	2.3	
	0	0	0	2.56	1.76	1.46	1.3	1.21	1.15	1.11	1.09	1.09	1.11	1.14	1.19	1.28	1.42	1.68	2.3	
+0.5	0	0	0	0	0	2.31	1.7	1.44	1.31	1.22	1.18	1.16	1.16	1.18	1.22	1.31	1.44	1.7	2.31	
	0	0	0	0	0	0	0	2.58	1.8	1.51	1.37	1.29	1.26	1.28	1.35	1.48	1.72	2.33		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.05	2.17	1.7	1.51	1.42	1.4	1.43	1.54	1.76	2.35	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.81	2.3	2.6	

Tableau 2 : Ecart-types des processus AR2 selon a et b pour  $\epsilon = \text{NID}(0,1)$

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
	2.94	0	0	0	0	0	0
-1	2.16	2.09	0	0	0	0	0
	1.84	1.55	1.72	0	0	0	0
	1.67	1.33	1.29	1.51	0	0	0
	1.58	1.22	1.13	1.15	0	0	0
0	1.53	1.17	1.05	1.03	1.39	0	0
	1.51	1.15	1.03	1	1.03	1.33	0
	1.53	1.17	1.05	1.03	1.1	1.15	1.51
	1.58	1.22	1.13	1.15	1.1	1.33	0
+1	1.67	1.33	1.29	1.51	1.39	0	0
	1.84	1.55	1.72	0	0	0	0
	2.16	2.09	0	0	0	0	0
	2.94	0	0	0	0	0	0
+1.75	0	0	0	0	0	0	0

On obtient alors deux classes de processus selon que les racines  $p$  et  $q$  de cette équation sont réelles ou complexes conjuguées.

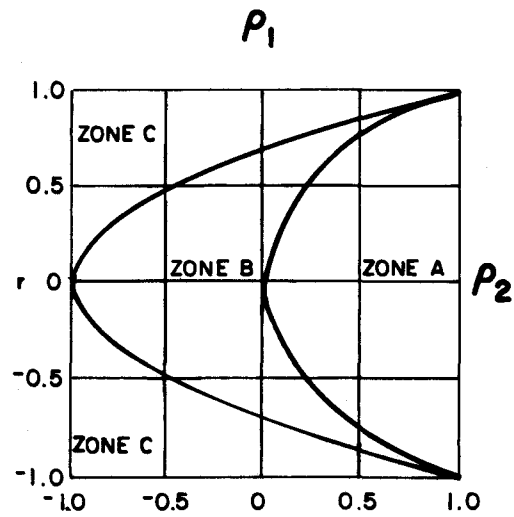
Dans l'espace  $[a;b]$ , la limite entre ces classes est donnée par  $a^2 + 4b = 0$ .

Dans l'espace  $[\rho_1;\rho_2]$ , la limite entre ces classes est donnée par :

$$\rho_1 = \mp \frac{(3+6\rho_2-\rho_2^2) - (1-\rho_2)}{8} \frac{(1-\rho_2)(9-\rho_2)}{8}$$

pour  $\rho_2 = 0$        $\rho_1 = 0$       et pour  $\rho_2 = +1$  ,  $\rho_1 = \mp 1$

Ces classes sont représentées à la Figure 3.



zone A :  $p$  et  $q$  réels  
 zone B :  $p$  et  $q$  complexes conjugués  
 zone C : série non-stationnaire

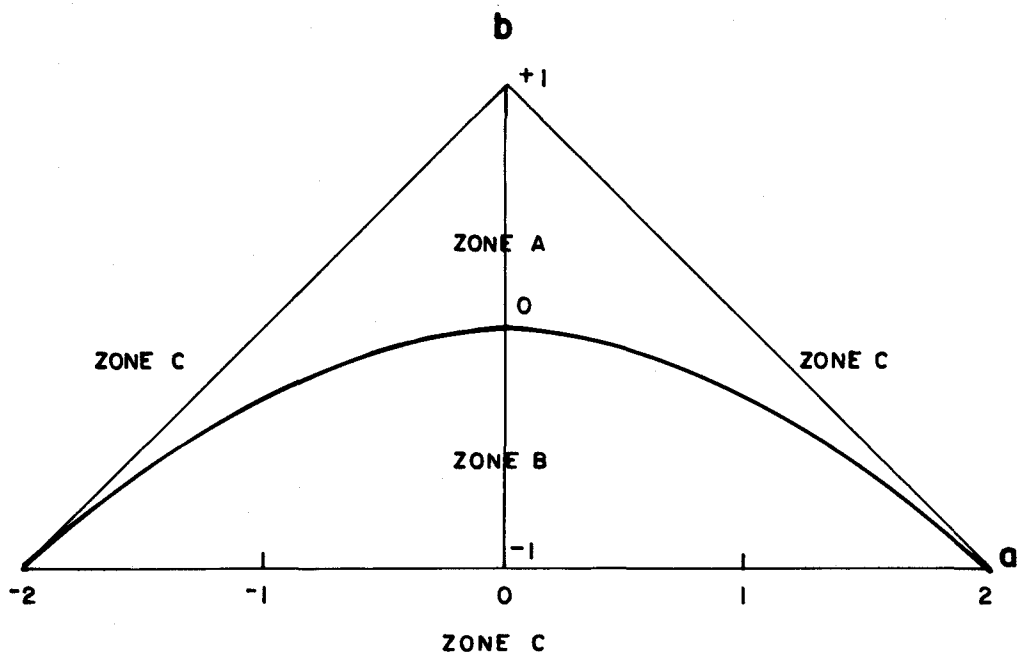


FIGURE 3: Classification des processus AR2

### 3. Contenu en Information

Le contenu en information  $I$  se déduit directement de l'expression de la variance de la moyenne calculée à l'appendice 1.

- Dans le cas où les racines de l'équation caractéristique  $p$  et  $q$  sont réelles, on peut évaluer le contenu en information quand  $n \rightarrow \infty$ :

$$I = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \frac{2\phi}{n}\right)} = \left[1 + \frac{2\phi}{n}\right]^{-1}$$

quand  $n \rightarrow \infty$  ;  $I \rightarrow \left[1 + 2 \left(\frac{1+b}{1-a-b} - \frac{1}{1-b}\right)\right]^{-1}$

$$I = \left[1 - 2 \frac{b^2 - a - b}{(1-b)(1-a-b)}\right]^{-1} = \frac{(1-b)(1-a-b)}{(1+b)(1+a-b)}$$

si on remplace  $a$  et  $b$  en fonction de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , on tire:

$$I = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{(1+\rho_1)(1-2\rho_1^2 + \rho_2)} \quad [11]$$

- Dans le cas où  $p$  et  $q$  sont des racines complexes conjuguées, on peut évaluer les valeurs asymptotiques des termes  $A$  et  $B$  en ne considérant que les termes en  $n$ :

pour  $A$ :

$$1 - 2C \cos \theta + C^2 = 1 - a - b \quad \text{et}$$

$$nC \sin \theta \cotg \psi = \frac{1-C^2}{1+C^2} \cdot nC \cos \theta = n \frac{a}{2} \frac{1+b}{1-b}$$

$$A \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \frac{a}{2} \frac{1+b}{1-a} \frac{1}{1-a-b}$$

pour B :

$$nC \cos \theta - nC^2 - 2nC^2 \cos^2 \theta - nC^4 + 3nC^3 \cos \theta = \frac{n}{2} (a + 2b) (1-a-b)$$

$$\text{d'où} \quad B \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2} \frac{a + 2b}{1-a-b}$$

$$\text{et } \phi = A + B = \frac{n(a + b - b^2)}{(1-b)(1-a-b)}$$

Ce qui permet de calculer la valeur intrinsèque du contenu en information du processus AR2.

$$I = \left[ 1 + \frac{2\phi}{n} \right]^{-1} = \frac{(1-b)(1-a-b)}{(1+b)(1+a-b)} \quad [12]$$

Si on remplace a, et b en fonction de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , on tire:

$$I = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{(1+\rho_1)(1-2\rho_1^2+\rho_2)} \quad [13]$$

### Remarque

YULE (1945) a considéré la variance de la moyenne d'une série autocorrelée comportant n observations successives, et où n prend des valeurs croissantes.

Cette variance s'écrit:

$$\text{var } \bar{X} = \frac{\text{var } X}{n} \left[ 1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \rho_j \right] = \frac{\sigma^2}{n} [1 + \lambda_n]$$

avec

$$\lambda_n = \overline{\rho_n} (n-1)$$

et 
$$\bar{\rho}_n = (n-1) \rho_1 + (n-2) \rho_2 + \dots + 2\rho_{n-2} + \rho_n$$

il appelle  $\bar{\rho}_n$  la corrélation moyenne et  $\lambda_n$  le coefficient de liaison (linkage coefficient)

Il existe donc une relation très simple entre le coefficient de liaison  $\lambda_n$

et notre fonction  $\phi$ :

$$\lambda_n = \frac{2 \phi}{n} .$$

KENDALL (1945) a commenté l'article de YULE pour un processus AR2 et a mis en évidence le phénomène curieux que nous développons ici et qui se produit quand  $\lambda_n$  est négatif:

"The result that  $\lambda$  may be negative is curious. It implies that for certain types of series the precision of the mean of  $n$  consecutive terms (as measured by its sampling variance) is less than that of an equal number of terms chosen from the series at random. Thus there may arise situations where it is better to choose a "clutch" of values than a random set even when the correlation between neighbouring values expressed by  $\rho_1$  is positive, so far as concerns the estimation of the mean".

### 3.1 Contenu intrinsèque en information

Nous avons vu que, pour tous les types de processus AR2, on a, quand  $n \rightarrow \infty$ :

$$I = \frac{1-b}{1+b} \frac{1-a-b}{1+a-b} = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{(1+\rho_1)(1-2\rho_1^2+\rho_2)} \quad [14]$$



On note que la limite de stationarité  $\rho_2 = 2\rho_1^2 - 1$  correspond à un contenu en information I infini. Nous nous intéressons aux cas où I est  $> 1$  pour préciser cette zone, nous étudions l'équation  $I = 1$ , dans ce cas:

$$(1-\rho_1)(1-\rho_2) = (1+\rho_1)(1-2\rho_1^2 + \rho_2)$$

$$\rho_2 = \rho_1(\rho_1^2 + \rho_1 - 1) \quad ; \quad \rho_2' = (\rho_1 + 1)(3\rho_1 - 1)$$

Ce qui permet d'établir la relation entre  $\rho_2$  et  $\rho_1$  pour  $I = 1$ :

$\rho_1$	-1		0	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{5-1}}{2}$	+ 1	
$\rho_2'$	0	-	-1	-	0	+	4
$\rho_2$	1		0	$-\frac{5}{27}$	0		1

La fonction  $I(\rho_1, \rho_2)$  a été calculée pour  $\rho_1, \rho_2$  variant de -1 à +1 par intervalles de 0.1 et les résultats sont présentés au tableau 3; de la même façon, les courbes d'iso-contenu en information  $I = 0.2, 0.5, 1, 2$  et 5 ont été tracées à la figure 4. On y note que des contenus en information supérieures à 1 sont obtenus dans 3 des 4 classes de processus AR2; en particulier, on note que cela se produit dans une petite zone où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont positifs et compris dans la région définie par:

$$\rho_2 > 2\rho_1^2 - 1 \quad \text{et} \quad \rho_2 < \rho_1(\rho_1^2 + \rho_1 - 1)$$

Dans le plan (a,b), la fonction I s'écrit:

$$I = \frac{1-b}{1+b} \frac{1-a-b}{1+a-b}$$

Tableau 3: Contenu intrinsèque en information du processus autoregressif AR2.

$\rho_1$ \ $\rho_2$	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
-0.9	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	71.2	21.1	6.79
-0.8	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	315	45	20.5	11.2	6.43	3.46	1.45
-0.7	*	*	*	*	*	*	*	*	*	283	42.5	20.6	12.4	8.1	5.45	3.66	2.36	1.38	0.62
-0.6	*	*	*	*	*	*	*	60	2.44	14.3	9.47	6.67	4.83	3.53	2.56	1.82	1.22	0.74	0.34
-0.5	*	*	*	*	*	42	19.5	12	8.25	6	4.5	3.43	2.63	2	1.5	1.09	0.75	0.46	0.21
-0.4	*	*	*	46.7	19.4	11.7	7.98	5.83	4.43	3.43	2.69	2.12	1.67	1.3	0.99	0.73	0.51	0.32	0.14
-0.3	*	167	26.3	13.5	8.71	6.19	4.64	3.59	2.84	2.26	1.82	1.46	1.16	0.91	0.70	0.52	0.37	0.23	0.11
-0.2	142	22.5	11.6	7.50	5.36	4.04	3.15	2.50	2.01	1.63	1.32	1.07	0.86	0.68	0.53	0.40	0.28	0.17	0.08
-0.1	29	12.2	7.42	5.15	3.82	2.95	2.34	1.88	1.53	1.25	1.02	0.83	0.67	0.53	0.41	0.31	0.22	0.14	0.07
0	19	9	5.67	4	3	2.33	1.86	1.5	1.22	1	0.82	0.67	0.54	0.43	0.33	0.25	0.18	0.11	0.05
0.1	19.4	8.18	4.97	3.44	2.56	1.97	1.56	1.26	1.02	0.84	0.68	0.56	0.45	0.36	0.28	0.21	0.18	0.32	0.04
0.2	63.3	10	5.15	3.33	2.38	1.79	1.40	1.11	0.89	0.73	0.59	0.48	0.38	0.30	0.24	0.18	0.12	0.08	0.04
0.3	*	48.5	7.63	3.92	2.52	1.79	1.39	1.02	0.82	0.66	0.53	0.42	0.34	0.27	0.20	0.15	0.11	0.07	0.03
0.4	*	*	*	8.57	3.37	2.14	1.47	1.07	0.81	0.63	0.50	0.39	0.31	0.24	0.18	0.13	0.09	0.06	0.03
0.5	*	*	*	*	*	4.67	2.17	4.33	0.92	0.67	0.50	0.38	0.29	0.22	0.17	0.12	0.08	0.05	0.02
0.6	*	*	*	*	*	*	*	3.75	1.53	0.89	0.59	0.42	0.30	0.22	0.16	0.11	0.08	0.05	0.02
0.7	*	*	*	*	*	*	*	*	*	8.82	1.32	0.64	0.39	0.26	0.17	0.11	0.07	0.04	0.02
0.8	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	3.90	0.56	0.25	0.14	0.08	0.04	0.02
0.9	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	0.20	0.06	0.02

\* valeurs de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  à l'extérieur du domaine de stationarité

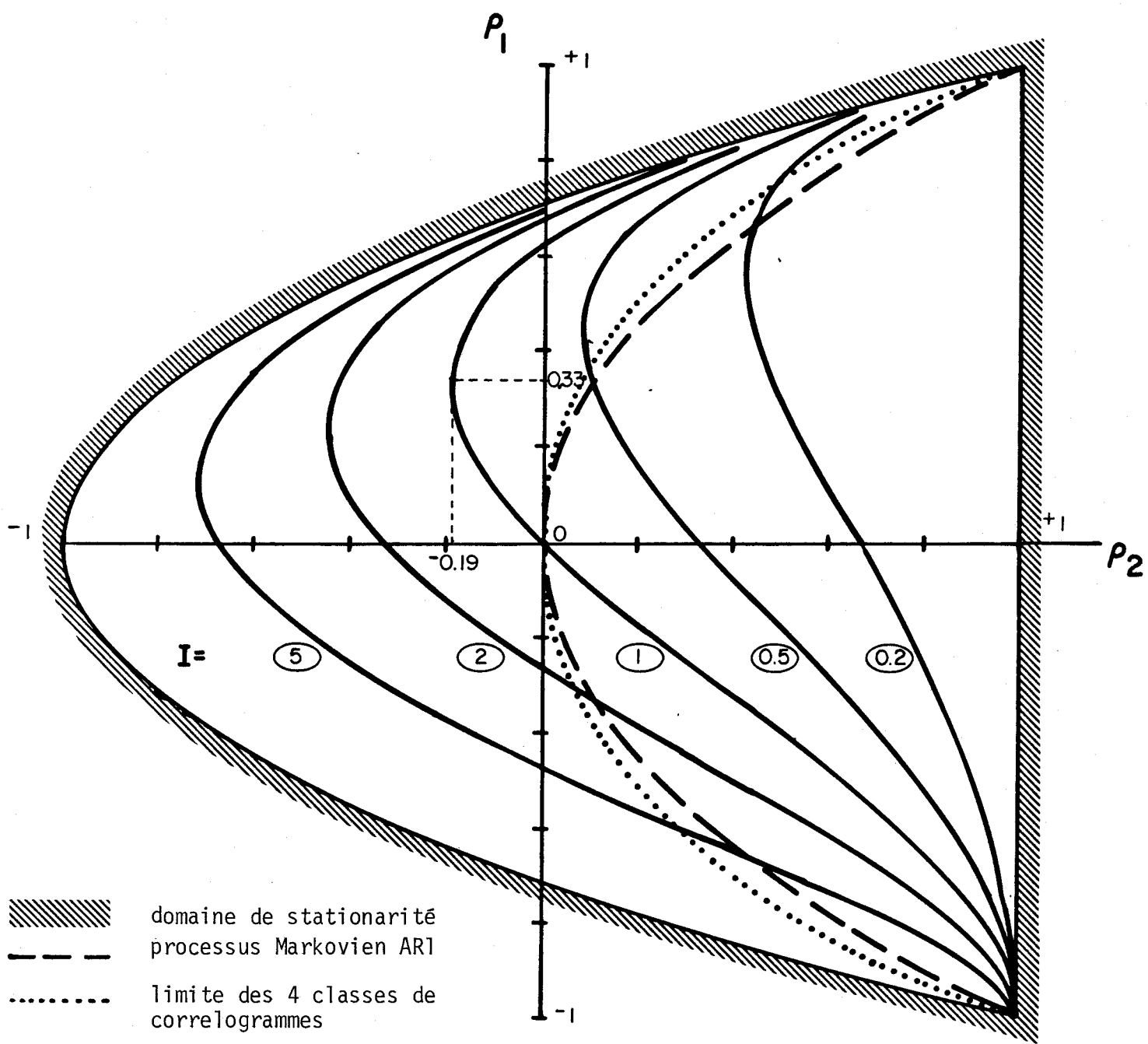


FIGURE 4: Contenu en information intrinsèque du processus AR2 dans le plan  $\rho_1, \rho_2$ .

Le même balayage du plan  $(a,b)$  a été effectué et les résultats apparaissent à la figure 5. On y note encore que  $I$  peut être supérieur à 1 dans 3 des 4 classes du processus AR2 et que la seule zone exclue en totalité est celle où  $a$  et  $b$  sont positifs tous les deux.

### 3.2 Cas d'échantillons plus courts

Dans le cas d'échantillons de longueur limitée, le contenu en information a été calculé en utilisant les équations complètes développées au paragraphe précédent; ces calculs ont été exécutés à la fois pour des combinaisons de valeurs de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ainsi que de  $a$  et  $b$ , pour  $n = 5, 20, 50, 100$  et  $1000$ ; les résultats sont présentés aux tableaux 4, 6, 8, 10, 12 et 14 dans le premier cas et aux tableaux 16, 17, 18, 19, 20 et 21 dans le second. On note qu'il existe une zone où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont tous deux positifs et où  $I$  est plus grand que 1: par exemple  $n=10$ ;  $\rho_1=0.8$ ;  $\rho_2=0.3$  ou  $n=50$ ;  $\rho_1=0.7$ ;  $\rho_2=0.1$ ; si on regarde plus en détail ce phénomène, on s'aperçoit qu'il est causé par la proximité de ces points à la limite de stationarité, ce qui affecte la stabilité en augmentant beaucoup la variance des processus générés à partir des résidus  $\varepsilon_n = \text{NID}(0,1)$  (voir tableau 1).

Aux tableaux 5, 7, 9, 11, 13 et 15, nous présentons le rapport entre les contenus en information obtenus pour différentes valeurs de  $n$  et les contenus intrinsèques en information de la population ( $n$  infini; tableau 3). Ces rapports mettent en évidence la robustesse de l'expression asymptotique dans les régions du plan  $\rho_1$  et  $\rho_2$  éloignées de la limite de stationarité.

Nous présentons au tableau 22 les résultats de calculs exacts publiés par REIHER et HUZZEN (1967) et QUIMPU (1969) pour  $n = 100$ ; nos calculs confirment la réalité du paradoxe ( $I > 1$ ) mis en évidence par ces auteurs pour certaines combinaisons de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

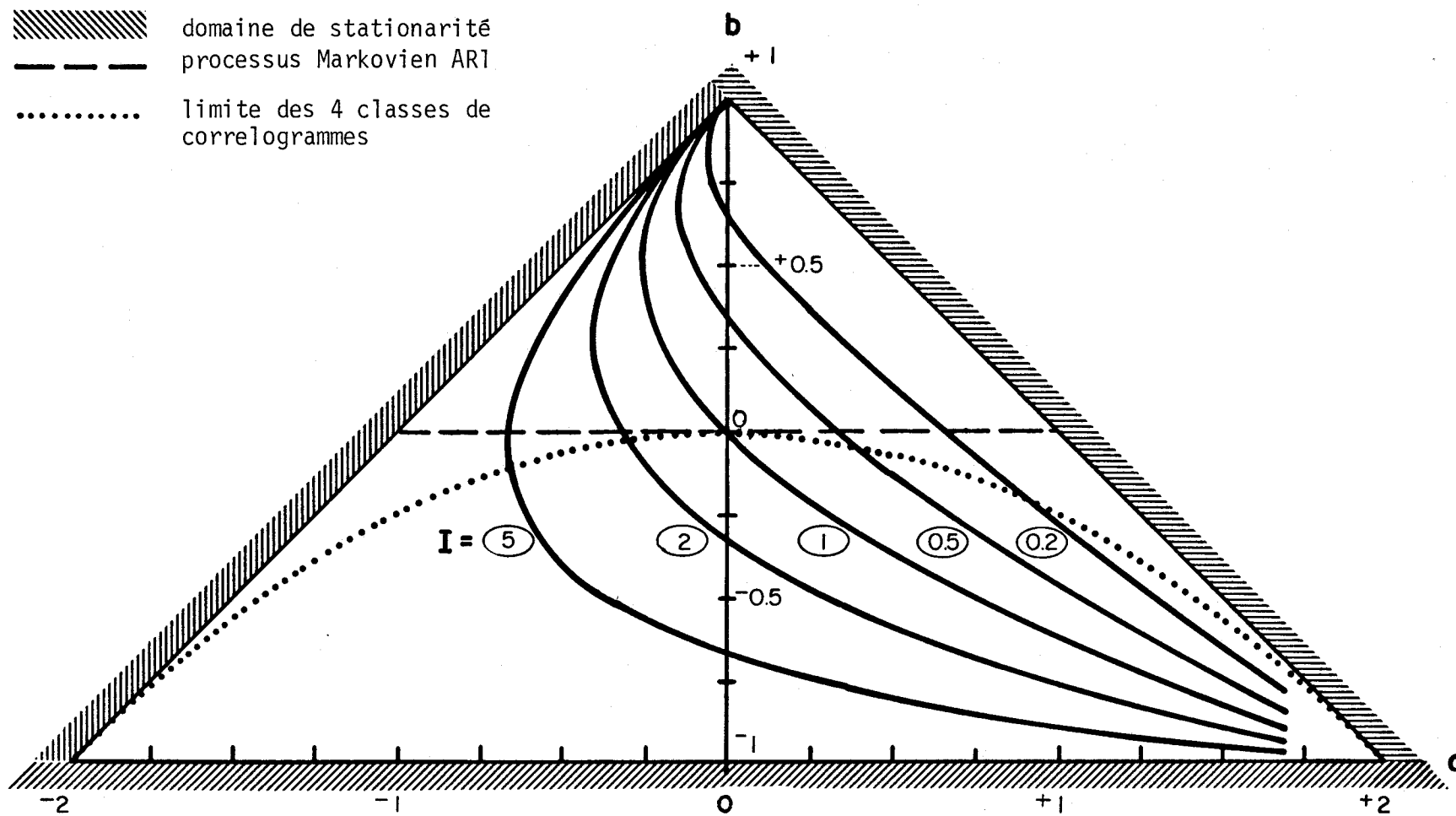


FIGURE 5: Contenu en information intrinsèque du processus AR2 dans le plan a, b.

Tableau 4 : Contenu en information I d'une série AR2 de longueur N = 5 :

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5							0	+0.5							+0.9			
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.8	4.9	3.45
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20.49	10.49	7.2	55.48	10.71	6.44	6.83	3.98	2.83	1.97	
0	0	0	0	0	0	4.83	4.72	7.55	8.42	3.45	4.8	7.2	5.44	6.27	2.87	2.88	2.13	1.7	1.35	
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Tableau 5 : Robustesse du contenu en information d'une série de longueur N = 5 par rapport à la série de longueur infinie I/I<sub>∞</sub> :

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5							0	+0.5							+0.9		
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.11	0.23	0.51
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.07	0.25	0.35	0.18	0.24	0	0	0.41	0.84	0.78
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 6 : Contenu en information I d'une série AR2 de longueur N = 10 :

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5						0						+0.5						+0.9
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14.18	12.15	6.8	
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15.03	12.32	9.53	57.95	14.18	9.45	7.25	5.3	3.55	2.05	
0	17.05	8.29	4.73	10.99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Tableau 7 : Robustesse du contenu en information d'une série de longueur N = 10 par rapport à la série de longueur infinie I/I<sub>∞</sub> :

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5						0						+0.5						+0.9
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.58	1.02	
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.05	0.29	0.46	0.18	0.32	0.47	0.64	0.82	1.03	1.41	
0	0.12	0.42	0.48	0.28	0.57	0.77	0.82	0.86	0.94	0.94	0.98	1.02	1.07	1.13	1.2	1.29	1.45	1.81	2.37	
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Tableau 8 : Contenu en information I d'une série AR2 de longueur N = 20 :

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9				-0.5				0				+0.5				+0.9		
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24.82	14.24	6.61
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	10.11	18.23	12.88	9.17	6.65	4.82	3.45	2.37	1.51	0.82	
0	14.24	10.73	7.72	5.74	4.42	3.5	2.83	2.32	1.91	1.58	1.31	1.09	0.89	0.73	0.58	0.46	0.35	0.26	0.18
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.09	0.07

Tableau 9 : Robustesse du contenu en information d'une série de longueur N = 20 par rapport à la série de longueur infinie I/I<sub>∞</sub>:

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9				-0.5				0				+0.5				+0.9		
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.35	0.67	0.97
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0.07	0.43	0.63	0.74	0.82	0.88	0.94	1	1.00	1.00	1.00
0	0.1	0.48	0.67	0.87	0.82	0.88	0.92	0.95	0.97	1	1.03	1.05	1.07	1.1	1.12	1.14	1.14	1.24	1.62
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Tableau 10: Contenu en information I d'une série AR2 de longueur N = 50 :

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5	0	+0.5	+0.9
-0.9	0	0	0	0	0
-0.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
+0.5	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0

Tableau 11: Robustesse du contenu en information d'une série de longueur N = 50 par rapport à la série de longueur infinie I/I<sub>∞</sub> :

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5	0	+0.5	+0.9
-0.9	0	0	0	0	0
-0.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
+0.5	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0

Tableau 12: Contenu en information I d'une série AR2 de longueur N = 100:

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5	0	+0.5	+0.9
-0.9	0	0	0	0	0
-0.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
+0.5	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0

Tableau 13: Robustesse du contenu en information d'une série de longueur N = 100 par rapport à la série de longueur infinie I/I<sub>∞</sub>:

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5	0	+0.5	+0.9
-0.9	0	0	0	0	0
-0.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
+0.5	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0

Tableau 14: Contenu en information I d'une série AR2 de longueur N = 1000:

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5	0	+0.5	+0.9
-0.9	0	0	0	0	0
-0.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
+0.5	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0

Tableau 15: Robustesse du contenu en information d'une série de longueur N = 1000 par rapport à la série de longueur infinie I/I<sub>∞</sub>:

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5	0	+0.5	+0.9
-0.9	0	0	0	0	0
-0.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
+0.5	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0

Tableau 16 : Contenu en information d'une série AR2 de longueur N = 5

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	12.73	0	0	0	0	0	0
	10.77	7.68	0	0	0	0	0
0	5.96	6	5.41	0	0	0	0
	4	4.05	3.85	3.79	0	0	0
+1	3.26	3	2.63	2.35	2.4	0	0
	3.04	2.42	1.89	1.51	1.28	1.26	0
+1.75	3.08	2	1.38	1	0.75	0.59	0.47
	3.04	1.59	0.99	0.67	0.47	0.33	0
	2.55	1.15	0.68	0.45	0.3	0	0
	1.69	0.77	0.46	0.3	0	0	0
	0.98	0.49	0.3	0	0	0	0
	0.55	0.31	0	0	0	0	0
	0.32	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 17 : Contenu en information d'une série AR2 de longueur N = 10

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	16.49	0	0	0	0	0	0
	12.84	11.78	0	0	0	0	0
0	8.53	8	8.36	0	0	0	0
	8.17	5.65	4.83	5.29	0	0	0
+1	7.21	4.25	3.15	2.65	2.82	0	0
	5.05	3.15	2.16	1.58	1.24	1.16	0
+1.75	3.79	2.35	1.51	1	0.67	0.45	0.3
	3.31	1.77	1.04	0.63	0.38	0.21	0
	2.78	1.28	0.7	0.38	0.2	0	0
	1.9	0.88	0.44	0.21	0	0	0
	1.26	0.56	0.23	0	0	0	0
	0.9	0.28	0	0	0	0	0
	0.41	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 18 : Contenu en information d'une série AR2 de longueur  $N \approx 20$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	25.71	0	0	0	0	0	0
	18.41	17.44	0	0	0	0	0
0	14.52	10.41	10.71	0	0	0	0
	10.69	6.98	5.6	5.98	0	0	0
+1	8.63	4.95	3.48	2.81	2.89	0	0
	6.56	3.6	2.32	1.62	1.22	1.07	0
+1.75	5.29	2.65	1.58	1	0.63	0.38	0.21
	3.99	1.93	1.08	0.62	0.33	0.15	0
	3.12	1.38	0.71	0.36	0.16	0	0
	2.25	0.94	0.43	0.17	0	0	0
	1.6	0.58	0.21	0	0	0	0
	0.98	0.28	0	0	0	0	0
	0.47	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 19 : Contenu en information d'une série AR2 de longueur  $N = 50$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	46.01	0	0	0	0	0	0
	28.23	24.33	0	0	0	0	0
0	19.37	12.76	12.93	0	0	0	0
	14.08	8.07	6.2	6.55	0	0	0
+1	10.56	5.53	3.71	2.92	2.95	0	0
	8.04	3.94	2.42	1.65	1.21	1.03	0
+1.75	6.16	2.85	1.63	1	0.61	0.35	0.17
	4.69	2.05	1.1	0.61	0.31	0.13	0
	3.52	1.45	0.71	0.34	0.13	0	0
	2.56	0.97	0.42	0.15	0	0	0
	1.76	0.59	0.19	0	0	0	0
	1.09	0.27	0	0	0	0	0
	0.51	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 20 : Contenu en information d'une série AR2 de longueur  $N = 100$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
	61.11	0	0	0	0	0	0
	33.76	28.01	0	0	0	0	0
-1	22.08	13.79	13.89	0	0	0	0
	15.6	8.51	6.42	6.77	0	0	0
	11.49	5.76	3.8	2.96	2.98	0	0
	8.64	4.07	2.46	1.66	1.2	1.01	0
0	6.55	2.92	1.65	1	0.61	0.34	0.15
	4.95	2.1	1.1	0.6	0.31	0.12	0
	3.7	1.47	0.71	0.34	0.13	0	0
+1	2.68	0.99	0.42	0.15	0	0	0
	1.83	0.6	0.19	0	0	0	0
	1.13	0.27	0	0	0	0	0
	0.52	0	0	0	0	0	0
+1.75	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 21 : Contenu en information d'une série AR2 très longue ( $N = 1000$ )

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
	91	0	0	0	0	0	0
	42	33	0	0	0	0	0
-1	25.67	15	15	0	0	0	0
	17.5	9	6.66	7	0	0	0
	12.6	6	3.88	3	3	0	0
0	9.33	4.2	2.5	1.66	1.2	1	0
	7	3	1.66	1	0.6	0.33	0.14
	5.25	2.14	1.11	0.6	0.3	0.11	0
	3.88	1.5	0.71	0.33	0.12	0	0
+1	2.8	1	0.41	0.14	0	0	0
	1.90	0.6	0.18	0	0	0	0
	1.16	0.27	0	0	0	0	0
	0.53	0	0	0	0	0	0
+1.75	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 22: Contenus en information calculés pour des séries de longueur  $n = 100$  et certaines combinaisons de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

$\rho_1$	$\rho_2$	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
0		16.0	8.3	5.4	3.9	2.9	2.3	1.8	1.5	1.2											
0.1		16.0	7.5	4.7	3.3	2.5	1.9	1.6	1.3	1.0	0.84										
0.2		36.9	8.9	4.9	3.2	2.4	1.8	1.4	1.1	0.89	0.73										
0.3			31.2	6.9	3.7	2.4	1.8	1.3	1.0	0.82	0.66										
0.4					7.5	3.4	2.1	1.4	1.1	0.81	0.63	0.50									
0.5							4.3	2.1	1.3	0.91	0.66	0.50									
0.6									3.4	1.5	0.88	0.59	0.42	0.31	0.23	0.16	0.12				
0.7											6.7	1.3	0.63	0.39	0.26	0.17	0.12	0.08			
0.8														3.3	0.55	0.25	0.14	0.08	0.05		
0.9																			0.20	0.06	0.03

### 3.3 Sensibilité autour du cas Markovien (AR1)

Dans le cas de séries historiques, on utilise souvent le modèle Markovien d'ordre 1 pour modéliser la persistance du phénomène; ceci est dû principalement à des considérations physiques sur le phénomène et au fait que le calcul de nombreux paramètres statistiques a été développé dans ce cas simple; dans quelques cas, l'utilisation d'un modèle autoregressif d'ordre plus élevé s'impose, comme par exemple dans le cas des débits annuels de la rivière Göta en Suède (YEVJEVICH, 1972, p. 54); quand on adopte le modèle Markovien d'ordre 1, il se peut que  $\rho_2$  soit différent de  $\rho_1^2$  et qu'un modèle d'ordre 2 conduise à un meilleur ajustement; dans ce paragraphe nous allons examiner la sensibilité du contenu en information autour du cas Markovien, c'est-à-dire dans le cas où ce modèle introduit une erreur sur  $\rho_2$ , erreur commise par un mauvais ajustement de  $\rho_1$  ou une incertitude d'échantillonnage causée par une série de données trop courte.

Quand la modèle adopté est Markovien, on a  $\rho_2 = \rho_1^2$  ou  $b = 0$ ; supposons maintenant que ce modèle ne soit pas bien adapté, c'est-à-dire que  $\rho_2$  n'est pas exactement égal à  $\rho_1^2$  ( $\rho_2 = \rho_1^2 + \Delta\rho_2$ ), nous allons évaluer la sensibilité du contenu en information à un tel mauvais ajustement.

Pour une série de longueur donnée,  $I$  est une fonction de deux variables  $\rho_1$  et  $\rho_2$  qui se développe en séries de Taylor:

$$I(\rho_1; \rho_2 = \rho_1^2 + \Delta\rho_2) = I(\rho_1; \rho_2 = \rho_1^2) + \Delta\rho_2 \left[ \frac{\partial I}{\partial \rho_2} \right]_{\rho_1; \rho_2} + \dots \quad [15]$$

La quantité  $\left[ \frac{\partial I}{\partial \rho_2} \right]_{\rho_1; \rho_2}$  a été évaluée par différence finie:

$$\left[ \frac{\partial I}{\partial \rho_2} \right]_{\rho_1; \rho_2} \approx \frac{I[\rho_1; \rho_1^2 + 0.005] - I[\rho_1; \rho_1^2 - 0.005]}{0.01}$$



L'équation [15] peut donc s'écrire:

$$\Delta I = \Delta \rho_2 \cdot \frac{\partial I}{\partial \rho_2} \quad [16]$$

Les valeurs de  $\frac{\Delta I}{\Delta \rho_2}$  sont présentées au tableau 23 pour  $n = 5, 10, 20, 50$  et  $100$  et des valeurs de  $\rho_1$  variant de  $-0.9$  à  $+0.9$ ; on y note que cette sensibilité absolue décroît d'abord quand  $\rho_1$  varie de  $-0.9$  à  $0$ , puis croît quand  $\rho_1$  croît de  $0$  à  $+0.9$ .

Il est aussi intéressant d'évaluer la sensibilité relative de  $I$ :

$$\frac{\Delta I}{I} = \Delta \rho_2 \cdot \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \rho_2} \quad [17]$$

Les valeurs de  $I$  dans le cas Markovien sont données au tableau 24 et la sensibilité relative  $\frac{\Delta I}{I \Delta \rho_2}$  est donnée au tableau 25; il s'agit d'une fonction toujours décroissante quand  $\rho_1$  croît de  $-0.9$  à  $+0.9$ ; on note aussi que l'erreur relative sur  $I$  peut être très importante. Dans le cas où  $\rho_1 = 0.7$ ,  $\rho_2 = 0.49$  et  $n = 100$ ,  $I = 0.181$ , mais si  $\rho_2 = 0.59$   $\Delta \rho_2 = 0.10$  alors  $\frac{\Delta I}{I} = -0.46$  soit une surestimation de près de 50%.

### 3.4 Application à la rationalisation des réseaux et à l'étude de tendances

La grande sensibilité du contenu en information à des déviations du cas Markovien a des conséquences majeures en ce qui concerne la rationalisation des réseaux de mesures et de l'étude des tendances; elle remet certainement en cause la détermination théorique de la fréquence optimale d'échantillonnage des données des sciences de l'eau, telle qu'établie en hydrologie (MATALAS et LANGBEIN, 1962), en météorologie (BROOKS et CARRUTHERS, 1953), en qualité de l'air (HIRTZEL, QUON et COROTIS, 1982) et en qualité de l'eau (LETTENMAIER, 1978, LOFTIS et WARD, 1980).

Tableau 23 : Sensibilité absolue de I selon n et  $\rho_1$ :

$\rho_1 \backslash n$	5	10	20	50	100
-0.9	1.27	84.9	85.2	102	119
	1.19	15.4	15.8	18.8	20.3
	0.505	3.83	3.7	3.99	4.1
	-0.187	-0.308	-0.0774	-0.313	-0.403
-0.5	-0.692	-1.03	-1.46	-1.77	-1.88
	-1.01	-1.56	-1.97	-2.24	-2.34
	-1.18	-1.75	-2.1	-2.33	-2.41
	-1.25	-1.77	-2.06	-2.25	-2.31
	-1.25	-1.7	-1.95	-2.1	-2.15
	-1.2	-1.6	-1.8	-1.92	-1.96
	-1.12	-1.48	-1.64	-1.74	-1.77
	-1.03	-1.35	-1.48	-1.56	-1.59
	-0.923	-1.21	-1.33	-1.39	-1.41
	-0.816	-1.08	-1.19	-1.24	-1.25
0.5	-0.712	-0.949	-1.05	-1.09	-1.1
	-0.615	-0.818	-0.913	-0.951	-0.961
	-0.526	-0.688	-0.784	-0.823	-0.831
	-0.448	-0.56	-0.649	-0.702	-0.711
0.9	-0.379	-0.439	-0.499	-0.572	-0.596

Tableau 24 : Contenu en information du processus AR1 selon n et  $\rho_1$ :

$\rho_1 \backslash n$	5	10	20	50	100
-0.9	4.73	11.7	13.4	16	17.4
	4.13	6.44	7.38	8.27	8.62
	3.45	4.47	4.98	5.37	5.52
	2.85	3.37	3.66	3.86	3.93
-0.5	2.35	2.65	2.81	2.92	2.96
	1.96	2.13	2.23	2.29	2.31
	1.64	1.74	1.8	1.83	1.84
	1.38	1.44	1.47	1.49	1.49
	1.17	1.2	1.21	1.22	1.22
0	1	1	1	1	1
	0.853	0.835	0.827	0.822	0.82
	0.727	0.696	0.681	0.672	0.669
	0.62	0.576	0.557	0.546	0.542
	0.528	0.474	0.45	0.437	0.433
0.5	0.449	0.385	0.357	0.342	0.338
	0.382	0.307	0.276	0.26	0.255
	0.325	0.241	0.205	0.187	0.181
	0.276	0.184	0.142	0.122	0.116
0.9	0.235	0.137	0.0901	0.0649	0.058

Tableau 25 : Sensibilité relative de I selon n et  $\rho_1$ :

$\rho_1 \backslash n$	5	10	20	50	100
-0.9	0.269	7.23	6.35	6.38	6.86
	0.288	2.4	2.14	2.28	2.36
	-0.146	0.857	-0.742	-0.742	-0.744
	-0.0656	-0.0915	-0.0212	-0.0812	-0.103
-0.5	-0.294	-0.388	-0.521	-0.606	-0.636
	-0.515	-0.732	-0.883	-0.98	-1.01
	-0.718	-1	-1.17	-1.27	-1.3
	-0.9	-1.23	-1.4	-1.51	-1.55
	-1.06	-1.42	-1.61	-1.72	-1.76
	-1.2	-1.6	-1.8	-1.92	-1.96
	-1.32	-1.77	-1.99	-2.12	-2.16
	-1.41	-1.93	-2.18	-2.32	-2.37
	-1.49	-2.1	-2.39	-2.55	-2.61
	-1.55	-2.28	-2.63	-2.83	-2.89
	-1.58	-2.47	-2.93	-3.18	-3.26
0.5	-1.61	-2.66	-3.31	-3.66	-3.77
	-1.62	-2.86	-3.83	-4.41	-4.58
	-1.62	-3.04	-4.56	-5.76	-6.12
0.9	-1.61	-3.19	-5.54	-8.82	-10.2

Cela a aussi une influence sur la précision de la méthode de détection de tendances développées par LETTENMAIER (1976) et LETTENMAIER et BURGES (1977) qui utilise le nombre équivalent d'observations  $n' = n I$  dans le test de MANN-WHITNEY.

#### 4. Gammes de variation

On considère une série stationnaire  $X_n$ , de moyenne  $\bar{X}$ , la quantité  $S_n = \sum_{1}^n (X_n - \bar{X})$  représente l'évolution du total accumulé  $\sum_{1}^n X_n$  soumis à une sortie unitaire constante  $\bar{X}$ ; si on suppose la variable  $X_n$  centrée ( $\bar{X} = 0$ ), la quantité  $S_n = \sum_{1}^n X_n$  représente les fluctuations de volume accumulé dans un réservoir par rapport à l'apport moyen dans le temps; la quantité  $S_n$  fluctue dans le temps et définit des valeurs positives (surplus) et négatives (déficit); pour un échantillon de longueur  $n$ , le maximum de  $S_n$ , soit  $S_n^+$  définit le surplus maximal et le minimum de  $S_n$ , soit  $S_n^-$  définit le déficit maximal; on appelle gamme de variation maximale ou Étendue (maximum range), la quantité  $R_n = S_n^+ - S_n^- = S_n^+ + |S_n^-|$ ; ces variables sont visualisées à la Figure 6.

L'étude de la gamme de variation est importante en hydrologie, car ce paramètre conditionne le dimensionnement d'ouvrage de retenue soumis à des apports aléatoires, à une sortie constante et ne devront donner lieu ni à assèchement, ni à débordement.

Dans ce qui suit la série sera supposée stationnaire (sans tendance, ni cyclicité) et centrée ( $\bar{X} = 0$ ); de plus on référera à la gamme de variation  $R_n$  au lieu de la gamme de variation maximale.

##### 4.1 Travaux antérieurs

HURST (1951) a étudié les volumes stockés dans les grands lacs du bassin du Nil; il a estimé l'étendue moyenne ajustée  $R^*$  des déviations cumulées des débits par des considérations d'analyse combinatoire et en utilisant le développement binomial pour la fonction de densité de probabilité gaussienne; il en a déduit la valeur asymptotique de l'espérance de cette étendue ajustée:  $E(R_N^*) = \sigma \frac{N \pi}{2}$ . Après l'analyse d'autres séries longues de valeurs annuelles de phénomènes géophysiques, il s'aperçut que ce paramètre

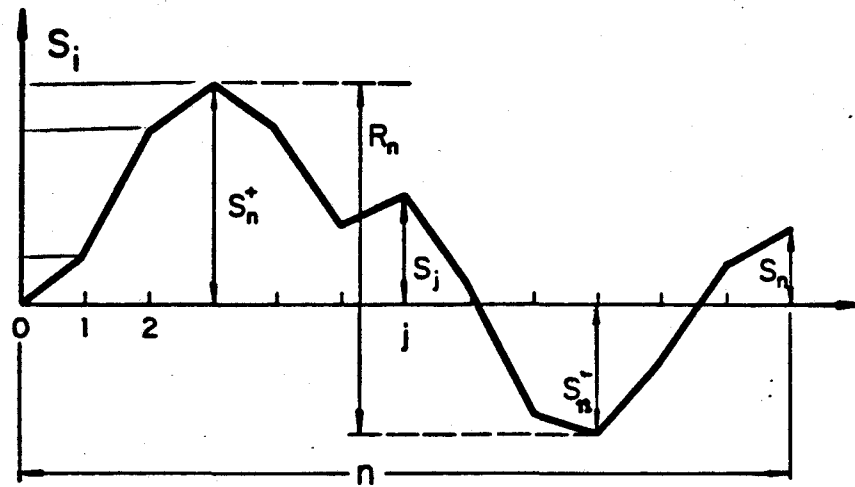


Figure 6 . Définitions du surplus  $S_n^+$ , du déficit  $S_n^-$  et de la gamme de variation  $R_n$  pour un échantillon de longueur  $n$ .

$E(R_N^*)$  ne croissait pas selon la puissance 0.5 de N, mais selon une puissance plus élevée de l'ordre de 0.72; ces résultats ont conduit de nombreux hydrologues à proposer des modèles stochastiques capables de reproduire cette déviation d'une progression de  $R_N^*$  selon la racine carrée de la durée, propriété appelée généralement le phénomène de HURST.

FELLER (1951) a fait l'hypothèse d'une variable aléatoire normale et indépendante; il en a déduit l'étendue moyenne asymptotique:

$$E(R_N) = 2 \frac{2N}{\pi} = 1.596 N^{\frac{1}{2}}.$$

ANIS et LLOYD (1953) ont étudié la valeur exacte de l'espérance mathématique des surplus  $S^+$  et des déficits  $S^-$  d'une variate normale et indépendante de moyenne zéro et de variance unité; ils ont obtenu:

$$E(R_N) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{N-1} i^{-\frac{1}{2}} \quad [18]$$

Dans cette expression, on a:  $\text{var } S_i = \sum_{j=1}^i \text{var } X_j = i$  si  $\text{var } X_j = 1$ . Si la variance du processus vaut  $\sigma^2$  au lieu de 1, l'équation [18] doit être multipliée par la déviation standard  $\sigma$  et l'on obtient:

$$E(R_N) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^N (\text{var } S_i)^{\frac{1}{2}}/i \quad [19]$$

SATABUTRA (1967) utilisa la méthode de génération de données pour étudier les caractéristiques du modèle linéaire markovien, YEVJEVICH (1967) effectua le même genre de simulations avec d'autres types de modèles de dépendance linéaire incluant les processus AR1, AR2 et MA1. Ils ont mis en évidence que l'équation [19] représentait très bien leurs résultats dans tous les cas; sans démonstration définitive, YEVJEVICH (1967) suggéra que cette équation était valable pour tous les modèles simples de dépendance linéaire.

Comme on a  $\text{var } S_i = i^2 \text{ var } \bar{X}_i$ , cette équation peut s'écrire:

$$E(R_N) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^N (\text{var } \bar{X}_i)^{\frac{1}{2}} \quad [20]$$

Cette équation met en évidence la relation étroite entre l'étendue d'un processus linéaire et la variance de sa moyenne.

L'étendue réduite  $E(R_N)/\sigma$  est obtenue à partir de l'expression de la variance de la moyenne:

$$E(R_N)/\sigma = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{N-1} i^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2\phi}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \quad [21]$$

#### 4.2 Résultats

Les résultats concernant l'étendue et l'étendue réduite sont présentés en fonction des paramètres  $\rho_1$  et  $\rho_2$  pour des échantillons de longueur variables ( $N = 5, 10, 20, 50$  et  $100$ ) aux tableaux 26 à 35; des résultats similaires, mais en fonction des paramètres  $a$  et  $b$ , sont présentés aux tableaux 36 à 45.

Pour des échantillons de longueur donnée, les étendues réduites augmentent de façon monotone quand les paramètres du processus  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  ou  $a$ ,  $b$  augmentent.

Si l'on considère les rapports de l'étendue et de l'étendue réduite des processus AR2 aux mêmes paramètres obtenus pour un processus normal et indépendant, on note une grande sensibilité de ces statistiques à des changements des deux paramètres définissant les processus AR2.

Les figures 7 et 8, en particulier, mettent en évidence la grande augmentation de ces étendues dans les cas usuels où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont positifs.

Tableau 26 Gamme de variation  $R_n$  des processus AR2 (N = 5)

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5				0				+0.5				+0.9								
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.15	3.51	4.17			
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.42	3.45	2.89	2.77	2.89	3.32	4.43			
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.67	3.45	2.79	2.55	2.48	2.52	2.67	2.96	4.88		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.16	3	2.6	2.42	2.35	2.35	2.42	2.55	2.77	3.12	3.76	5.25
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.39	2.31	2.28	2.3	2.37	2.48	2.65	2.9	3.3	3.99	5.59	
	0	0	0	0	4.4	3.14	2.68	2.46	2.58	2.39	2.28	2.27	2.29	2.35	2.44	2.58	2.77	3.05	3.48	4.21	5.9	
	0	8.71	3.8	2.99	2.64	2.45	2.35	2.3	2.3	2.29	2.31	2.35	2.43	2.54	2.69	2.9	3.19	3.65	4.42	6.19		
	8.94	3.91	3.08	2.72	2.52	2.41	2.36	2.33	2.34	2.38	2.47	2.44	2.52	2.64	2.81	3.03	3.34	3.81	4.62	6.47		
	4.79	3.42	2.93	2.68	2.54	2.46	2.42	2.41	2.43	2.47	2.54	2.63	2.76	2.93	3.16	3.48	3.97	4.81	6.74			
	4.49	3.42	2.98	2.75	2.62	2.55	2.52	2.51	2.53	2.58	2.65	2.74	2.88	3.03	3.29	3.62	4.13	5	6.99			
	5.14	3.71	3.2	2.93	2.78	2.7	2.66	2.65	2.66	2.71	2.77	2.87	3	3.18	3.42	3.77	4.29	5.18	7.24			
	10.2	4.57	3.65	3.25	3.04	2.91	2.85	2.82	2.82	2.86	2.92	3.01	3.14	3.32	3.57	3.92	4.45	5.36	7.48			
	0	10.8	4.88	3.9	3.48	3.25	3.12	3.06	3.03	3.05	3.1	3.18	3.3	3.48	3.72	4.07	4.61	5.55	7.71			
	0	0	0	6.24	4.52	3.9	3.6	3.43	3.34	3.31	3.33	3.39	3.5	3.66	3.89	4.24	4.79	5.73	7.95			
	0	0	0	0	0	6.2	4.74	4.17	3.89	3.74	3.68	3.69	3.76	3.89	4.11	4.45	4.98	5.94	8.19			
	0	0	0	0	0	0	0	7.47	5.4	4.69	4.35	4.2	4.17	4.24	4.41	4.71	5.22	6.17	8.44			
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15.6	6.96	5.61	5.1	4.91	4.92	5.12	5.57	6.47	8.74			
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17.1	7.79	6.45	6.1	6.25	6.97	9.14			
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10.5	8.77	10.1			

Tableau 27 Gamme de variation réduite ( $R_n / \sigma$ ) des processus AR2 (N = 5)

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5				0				+0.5				+0.9							
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.48	1.53	1.6
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.46	1.54	1.6	1.65	1.71	1.78	1.86	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.52	1.59	1.64	1.69	1.74	1.8	1.86	1.93	2	2.07	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.72	1.77	1.82	1.87	1.93	1.99	2.05	2.12	2.18	2.25	
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.61	1.67	1.72	1.78	1.83	1.89	1.94	2.01	2.07	2.14	
	0	0	0	0	1.68	1.73	1.78	1.83	1.88	1.94	1.99	2.04	2.1	2.15	2.21	2.26	2.32	2.38	2.44	2.5	2.56
	0	1.73	1.8	1.86	1.92	1.97	2.02	2.08	2.13	2.19	2.24	2.3	2.36	2.41	2.47	2.52	2.58	2.64	2.69	2.75	
	1.78	1.85	1.92	1.98	2.04	2.1	2.16	2.21	2.27	2.33	2.38	2.44	2.49	2.55	2.6	2.66	2.71	2.76	2.82	2.88	
	1.88	1.96	2.03	2.1	2.16	2.22	2.28	2.34	2.4	2.46	2.51	2.57	2.62	2.68	2.73	2.78	2.83	2.89	2.94	3.0	
	1.98	2.05	2.13	2.2	2.27	2.34	2.4	2.46	2.52	2.58	2.63	2.69	2.74	2.8	2.85	2.9	2.95	3	3.05	3.1	
	2.01	2.12	2.22	2.3	2.37	2.44	2.51	2.57	2.63	2.69	2.75	2.8	2.86	2.91	2.96	3.02	3.07	3.12	3.17	3.22	
	2.02	2.17	2.28	2.38	2.46	2.54	2.61	2.67	2.74	2.8	2.86	2.91	2.96	3.02	3.07	3.12	3.17	3.22	3.27	3.32	
	0	2.14	2.31	2.43	2.53	2.61	2.69	2.76	2.83	2.89	2.95	3.01	3.07	3.12	3.17	3.22	3.27	3.32	3.37	3.42	
	0	0	0	2.43	2.56	2.67	2.76	2.84	2.91	2.98	3.04	3.1	3.16	3.21	3.26	3.31	3.36	3.41	3.46	3.51	
	0	0	0	0	0	2.68	2.79	2.89	2.98	3.05	3.12	3.19	3.25	3.3	3.36	3.4	3.45	3.5	3.54	3.59	
	0	0	0	0	0	0	0	2.89	3.01	3.1	3.18	3.26	3.32	3.38	3.44	3.49	3.54	3.58	3.63	3.68	
	0	0	0	0	0	0	0	0	3.09	3.1	3.2	3.3	3.38	3.45	3.52	3.57	3.62	3.67	3.71	3.76	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.38	3.48	3.57	3.64	3.7	3.75	3.79	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.74	3.82	3.87	



Tableau 28 Gamme de variation  $R_n$  des processus AR2 (N = 10)

$\rho_2 \backslash \rho_1$	-0.9	-0.5							0	+0.5							+0.9			
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.31	4.57	5.72
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9.69	4.44	6.85
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.44	3.26	3.22
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.22	3.22	3.22
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.22	3.22	3.22

Tableau 29 Gamme de variation réduite ( $R_n / \sigma$ ) des processus AR2 (N = 10)

$\rho_2 \backslash \rho_1$	-0.9	-0.5							0	+0.5							+0.9			
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.85	1.99	2.2
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.92	2.04	2.25
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.04	2.15	2.25
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.15	2.25	2.37
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.25	2.37	2.51

Tableau 30 Gamme de variation  $R_n$  des processus AR2 (N = 20)

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5				0				+0.5				+0.9				
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.59	5.92	7.92
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.59	5.92	7.92
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.59	5.92	7.92
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.59	5.92	7.92
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.59	5.92	7.92

Tableau 31 Gamme de variation réduite ( $R_n / \sigma$ ) des processus AR2 (N = 20)

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5				0				+0.5				+0.9				
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.34	2.58	3.04
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.34	2.58	3.04
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.34	2.58	3.04
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.34	2.58	3.04
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.34	2.58	3.04

Tableau 32: Gamme de variation  $R_n$  des processus AR2 (N = 50)

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5	0	+0.5	+0.9
-0.9	0	0	0	0	0
-0.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
+0.5	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0

Tableau 33: Gamme de variation réduite ( $R_n / \sigma$ ) des processus AR2 (N = 50)

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5	0	+0.5	+0.9
-0.9	0	0	0	0	0
-0.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
+0.5	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0

Tableau 34 : Gamme de variation  $R_n$  des processus AR2 (N = 100)

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5							0	+0.5							+0.9			
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10.5	10.8	16.9
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16.9	9.2	8.78	9.58	10.3	12.1	15.2	15.7	27.6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17.3	9.19	8.39	8.51	9.13	10.3	12.1	15.2	21.3	37.8	
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	10.5	8.63	8.3	8.47	8.94	9.71	10.8	12.5	15	19	26.7	47.4
+0.9	0	0	0	0	0	10.1	8.72	8.43	8.53	8.88	9.44	10.2	11.3	12.8	14.8	17.9	22.8	32	56.3	
	0	0	0	11.2	9.21	8.73	8.71	8.94	9.34	9.92	10.7	11.7	13	14.7	17.2	20.7	26.4	37.1	64.7	
	0	0	0	9.35	9.07	9.12	9.38	9.79	10.4	11.1	12	13.2	14.7	16.7	19.5	23.6	30	42	72.7	
	20.5	11.1	9.86	9.56	9.6	9.85	10.2	10.8	11.5	12.3	13.4	14.7	16.4	18.7	21.8	26.3	33.5	46.8	80.3	
	13	10.8	10.2	10.2	10.4	10.7	11.2	11.8	12.6	13.6	14.7	16.2	18.2	20.7	24.1	29.1	37	51.4	87.5	
	13	11.4	11	11	11.2	11.6	12.2	12.9	13.8	14.8	16.1	17.8	19.9	22.6	26.4	31.8	40.3	55.9	94.5	
	14.8	12.5	12	12	12.2	12.7	13.3	14	15	16.1	17.6	19.3	21.6	24.6	28.6	34.5	43.7	60.3	101	
	25.5	14.6	13.4	13.2	13.4	13.8	14.4	15.2	16.2	17.5	19	20.9	23.4	26.6	30.9	37.2	47	64.7	108	
	0	27.4	16.1	14.9	14.8	15.1	15.7	16.5	17.6	18.9	20.5	22.6	25.2	28.6	33.2	39.8	50.2	68.9	114	
	0	0	0	19.6	17.2	16.9	17.3	18.1	19.1	20.4	22.1	24.3	27	30.6	35.5	42.6	53.5	73.1	120	
	0	0	0	0	0	21.4	20	20.1	21	22.2	24	26.2	29	32.8	38	45.4	56.9	77.4	126	
	0	0	0	0	0	0	0	26.4	24.4	24.9	26.3	28.5	31.4	35.3	40.7	48.4	60.4	81.8	132	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	45.2	31.9	32.3	34.7	38.5	44	52	64.5	86.7	139	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58.7	46	49.7	57.3	70	92.9	147	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	86.9	106	160		

Tableau 35 : Gamme de variation réduite ( $R_n / \sigma$ ) des processus AR2 (N = 100)

$\rho_1 \backslash \rho_2$	-0.9	-0.5							0	+0.5							+0.9		
-0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.74	4.7	6.49
-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.42	4.23	4.93	5.64	6.42	7.32	8.43	9.89
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.42	4.23	4.93	5.64	6.42	7.32	8.43	9.89	12.1	16.1
+0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	4.37	5.14	5.84	6.54	7.25	8.01	8.84	9.77	10.8	12.1	13.7	15.8	18.8	24.3
	0	0	0	0	0	4.39	5.22	5.98	6.68	7.4	8.14	8.92	9.77	10.7	12.9	14.4	16.2	18.6	22
	0	0	0	0	0	5.81	6.58	7.33	8.08	8.85	9.66	10.5	11.4	12.5	13.6	15	16.6	18.6	21.2
	4.08	5.24	6.15	6.98	7.78	8.57	9.38	10.2	11.1	12	13.1	14.2	15.5	17	18.8	21	23.9	28	35
	5.1	6.17	7.1	7.98	8.84	9.69	10.6	11.5	12.4	13.5	14.6	15.9	17.3	18.9	20.8	23.2	26.4	30.8	38.1
	5.88	6.83	7.84	8.8	9.73	10.7	11.6	12.6	13.7	14.8	16.1	17.4	19	20.7	22.8	25.4	28.8	33.6	41.2
	5.81	7.15	8.3	9.38	10.4	11.5	12.5	13.6	14.8	16.1	17.4	18.9	20.6	22.5	24.8	27.5	31.2	36.2	44.1
	5.06	6.93	8.35	9.62	10.8	12	13.2	14.4	15.7	17.1	18.6	20.2	22	24.1	26.6	29.8	33.4	38.7	46.9
	0	5.44	7.63	9.28	10.7	12.2	13.5	14.9	16.4	17.9	19.6	21.4	23.4	25.6	28.3	31.5	35.6	41.1	49.5
	0	0	0	7.64	9.76	11.6	13.3	14.9	16.6	18.4	20.2	22.2	24.4	26.9	29.8	33.2	37.6	43.4	51.5
	0	0	0	0	0	9.27	11.8	14	16.1	18.2	20.3	22.6	25.1	27.8	31	34.7	39.4	45.6	54.5
	0	0	0	0	0	0	0	10.2	13.6	16.5	19.2	22	25	28.2	31.7	35.9	41	47.5	56.8
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8.95	14.7	19	23	27.1	31.4	36.2	41.9	49.2	59
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11.6	20.6	27.4	34.2	41.4	49.9
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	30.9	46.3	61.3

Tableau 36: Gammes de variation  $E(R_n)$  pour  $n = 5$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	4.37	0	0	0	0	0	0
	3.42	3.23	0	0	0	0	0
0	3.09	2.61	2.79	0	0	0	0
	2.97	2.43	2.35	2.62	0	0	0
+1	2.96	2.4	2.27	2.33	2.66	0	0
	3.02	2.47	2.33	2.37	2.55	2.99	0
+1.75	3.16	2.62	2.51	2.58	2.81	3.29	4.5
	3.41	2.89	2.82	2.98	3.41	4.56	0
	3.81	3.29	3.32	3.72	4.9	0	0
	4.43	3.94	4.2	5.42	0	0	0
	5.39	5.05	6.2	0	0	0	0
	7.01	7.54	0	0	0	0	0
	10.6	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 37: Gammes de variation réduite  $E(R_n)/\sigma$  pour  $n = 5$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	1.49	0	0	0	0	0	0
	1.58	1.55	0	0	0	0	0
0	1.68	1.68	1.62	0	0	0	0
	1.77	1.82	1.82	1.73	0	0	0
+1	1.88	1.96	2.01	2.02	1.92	0	0
	1.98	2.11	2.21	2.29	2.33	2.24	0
+1.75	2.09	2.27	2.43	2.58	2.72	2.85	2.98
	2.23	2.47	2.68	2.89	3.11	3.42	0
	2.42	2.69	2.95	3.22	3.54	0	0
	2.65	2.96	3.25	3.58	0	0	0
	2.93	3.26	3.6	0	0	0	0
	3.24	3.61	0	0	0	0	0
	3.6	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 38: Gammes de variation  $E(R_n)$  pour  $n = 10$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
	5.58	0	0	0	0	0	0
	4.4	4.18	0	0	0	0	0
-1	4	3.45	3.7	0	0	0	0
	3.86	3.27	3.22	3.6	0	0	0
	3.89	3.29	3.2	3.36	3.85	0	0
	4.05	3.45	3.38	3.55	3.94	4.72	0
0	4.31	3.73	3.73	4.01	4.57	5.64	8.14
	4.7	4.18	4.3	4.81	5.87	8.4	0
	5.3	4.87	5.25	6.31	9	0	0
	6.22	6	6.97	9.86	0	0	0
+1	7.69	8.06	11.1	0	0	0	0
	10.4	13.1	0	0	0	0	0
	17.5	0	0	0	0	0	0
+1.75	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 39: Gammes de variation réduite  $E(R_n)/\sigma$  pour  $n = 10$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
	1.9	0	0	0	0	0	0
	2.04	2	0	0	0	0	0
-1	2.17	2.23	2.15	0	0	0	0
	2.31	2.45	2.49	2.38	0	0	0
	2.47	2.69	2.84	2.91	2.78	0	0
0	2.65	2.95	3.21	3.44	3.6	3.54	0
	2.85	3.23	3.61	4.01	4.42	4.88	5.38
	3.08	3.57	4.08	4.66	5.36	6.3	0
	3.36	3.98	4.66	5.46	6.5	0	0
+1	3.72	4.5	5.4	6.52	0	0	0
	4.17	5.2	6.44	0	0	0	0
	4.83	6.28	0	0	0	0	0
	5.98	0	0	0	0	0	0
+1.75	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 40 : Gammes de variation  $E(R_n)$  pour  $n = 20$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	6.9	0	0	0	0	0	0
	5.52	5.29	0	0	0	0	0
0	5.07	4.49	4.83	0	0	0	0
	4.98	4.34	4.38	4.9	0	0	0
+1	5.07	4.45	4.47	4.79	5.54	0	0
	5.32	4.75	4.82	5.22	5.97	7.33	0
+1.75	5.72	5.22	5.43	6.06	7.21	9.36	14.5
	6.33	5.94	6.4	7.5	9.68	15	0
	7.21	7.05	8	10.2	15.9	0	0
	8.57	8.86	11	17.1	0	0	0
	10.8	12.3	18.7	0	0	0	0
	15	21.2	0	0	0	0	0
	26.4	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 41 : Gammes de variation réduite  $E(R_n)/\sigma$  pour  $n = 20$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	2.35	0	0	0	0	0	0
	2.56	2.53	0	0	0	0	0
0	2.75	2.9	2.81	0	0	0	0
	2.98	3.26	3.39	3.24	0	0	0
+1	3.21	3.63	3.97	4.15	4	0	0
	3.48	4.06	4.57	5.05	5.45	5.5	0
	3.78	4.52	5.26	6.06	6.98	8.11	9.56
	4.14	5.07	6.07	7.26	8.84	11.2	0
	4.57	5.76	7.1	8.86	11.4	0	0
	5.12	6.65	8.54	11.2	0	0	0
	5.85	7.93	10.8	0	0	0	0
	6.96	10.1	0	0	0	0	0
	9.01	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 42 : Gammes de variation  $E(R_n)$  pour  $n = 50$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	8.9	0	0	0	0	0	0
	7.33	7.16	0	0	0	0	0
0	6.91	6.35	6.88	0	0	0	0
	6.91	6.33	6.55	7.38	0	0	0
+1	7.16	6.64	6.9	7.59	8.87	0	0
	7.62	7.22	7.63	8.54	10.1	12.7	0
+1.75	8.31	8.08	8.78	10.2	12.6	17.2	29.1
	9.31	9.34	10.6	12.9	17.6	29.9	0
	10.8	11.3	13.5	18.3	31.1	0	0
	13	14.4	19.2	32.6	0	0	0
	16.6	20.6	34.6	0	0	0	0
	23.7	37.6	0	0	0	0	0
	43.6	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 43 : Gammes de variation réduite  $E(R_n)/\sigma$  pour  $n = 50$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	3.03	0	0	0	0	0	0
	3.39	3.43	0	0	0	0	0
0	3.75	4.1	4	0	0	0	0
	4.13	4.75	5.07	4.88	0	0	0
+1	4.54	5.42	6.12	6.57	6.4	0	0
	4.99	6.17	7.24	8.27	9.18	9.53	0
+1.75	5.5	7	8.5	10.1	12.2	14.9	19.2
	6.09	7.98	10.0	12.5	16.1	22.4	0
	6.82	9.2	11.9	15.8	22.4	0	0
	7.75	10.8	14.8	21.5	0	0	0
	9.02	13.3	20.1	0	0	0	0
	10.9	17.9	0	0	0	0	0
	14.8	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0



Tableau 44 : Gammes de variation  $E(R_n)$  pour  $n = 100$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	10.8	0	0	0	0	0	0
	9.13	9.05	0	0	0	0	0
	8.79	8.32	9.06	0	0	0	0
	8.92	8.48	8.94	10.1	0	0	0
0	9.36	9.04	9.61	10.7	12.2	0	0
	10.1	9.94	10.8	12.3	14.7	18.8	0
	11.1	11.2	12.5	14.8	18.8	26.4	46.8
	12.5	13.1	15.2	19.1	26.8	47.7	0
+1	14.6	16	19.7	27.5	49.1	0	0
	17.8	20.7	28.5	50.8	0	0	0
	23	30	53	0	0	0	0
	33.2	56.2	0	0	0	0	0
+1.75	62.6	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 45 : Gammes de variation réduite  $E(R_n)/\sigma$  pour  $n = 100$ 

a \ b	-0.75	-0.50	-0.25	0	+0.25	+0.50	+0.75
-1.75	0	0	0	0	0	0	0
-1	3.67	0	0	0	0	0	0
	4.23	4.33	0	0	0	0	0
	4.77	5.37	5.26	0	0	0	0
	5.33	6.36	6.92	6.68	0	0	0
0	5.93	7.38	8.53	9.29	9.11	0	0
	6.6	8.49	10.2	11.8	13.4	14.1	0
	7.34	9.73	12.1	14.8	18.1	22.8	30.9
	8.22	11.2	14.4	18.5	24.4	35.8	0
+1	9.27	13.0	17.5	23.8	35.4	0	0
	10.6	15.5	22.0	33.6	0	0	0
	12.4	19.3	30.7	0	0	0	0
	15.3	26.8	0	0	0	0	0
+1.75	21.3	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

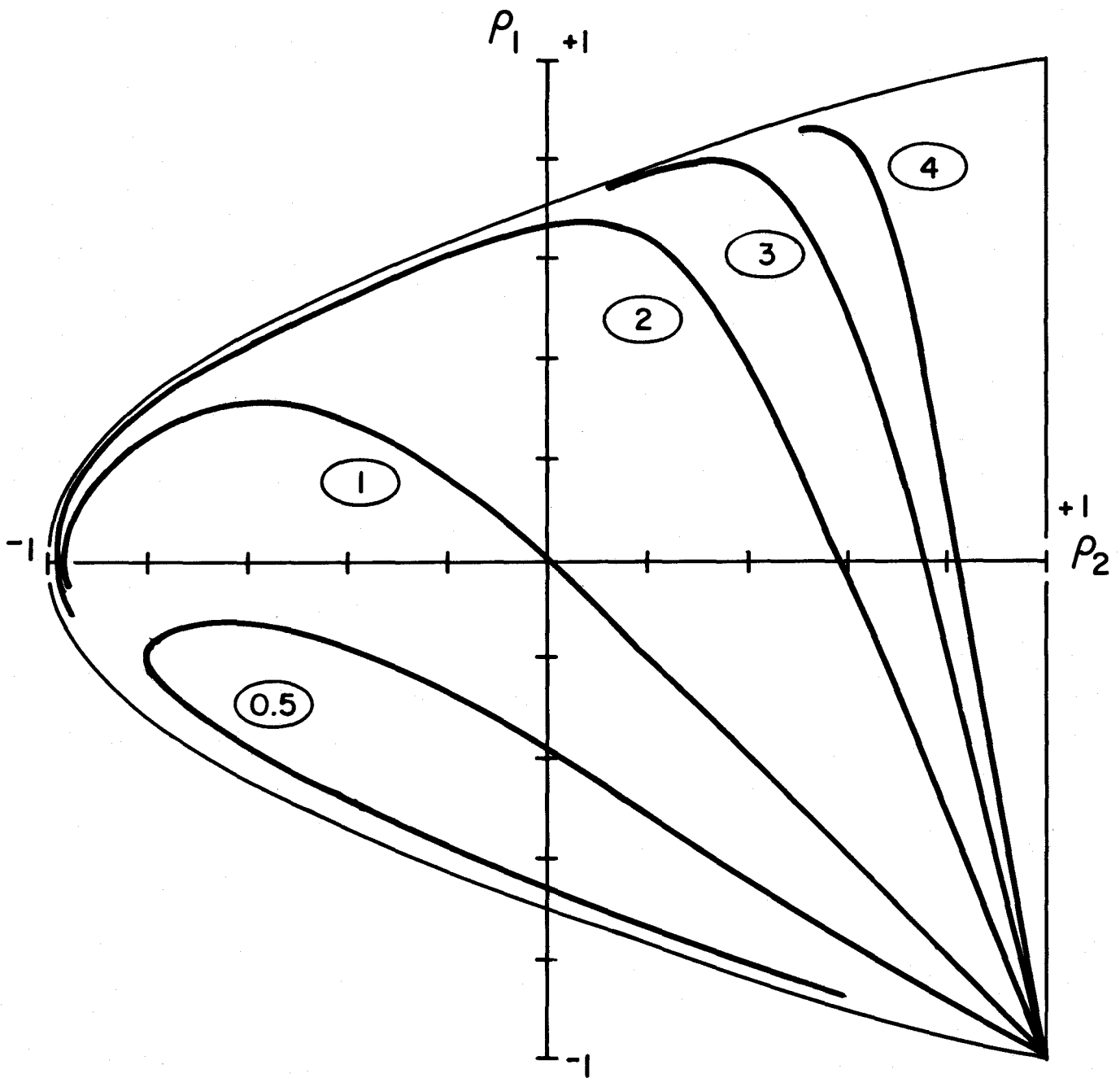


Figure 7: Gammes de variation relative  $R(\rho_1, \rho_2) \div R(0,0)$  pour  $N = 100$

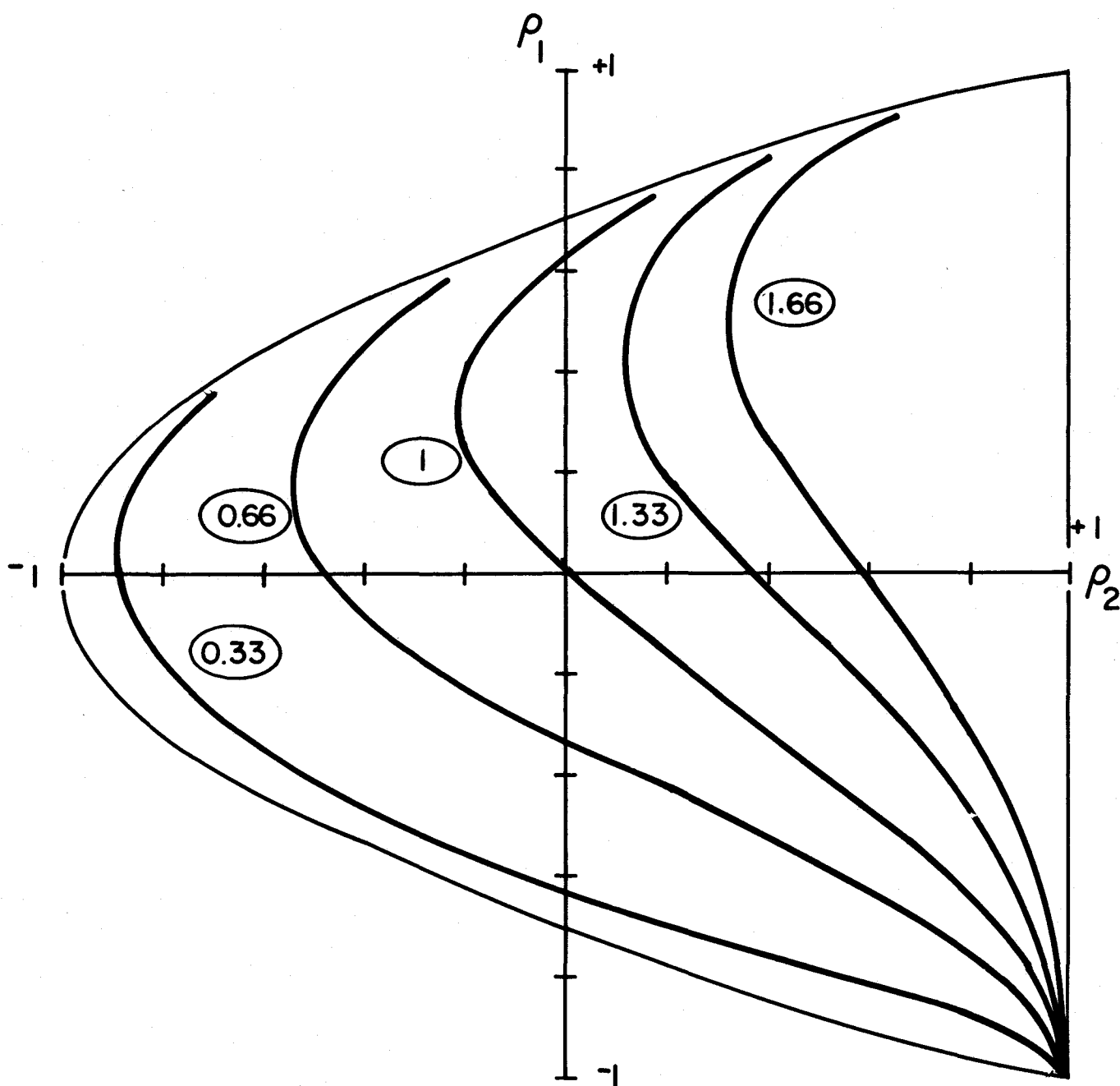


Figure 8: Gammes de variation réduites relatives  
 $[R(\rho_1, \rho_2) \div \sigma(\rho_1, \rho_2)] / [R(0, 0) \div \sigma(0, 0)]$  pour  $N = 100$

Si l'on retourne maintenant au phénomène de HURST, la mise en graphique de l'étendue, en fonction de la longueur de l'échantillon, pour un processus AR2 de paramètres  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  ou  $a$ ,  $b$ , met en évidence une décroissance de la pente de 1 à environ 0.5 quand  $N$  varie de 10 à 100 (Figure 9). O'CONNELL (1974) a avancé 4 hypothèses (effets d'asymétrie, de non-stationarité, de persistance et de régime transitoire) comme des explications possibles du phénomène de HURST, nos calculs avec les processus AR2 montrent que des effets transitoires, avec des pentes supérieures à 0,5 pour des échantillons de longueur inférieure à 100, sont effectivement présents; ce résultat n'élimine pas la possibilité que d'autres effets puissent aussi contribuer.

D'une façon semblable à celle développée pour le Contenu en Information, nous avons effectué pour l'étendue une étude numérique de sensibilité à des déviations du modèle Markovien:

$$\text{sensibilité absolue: } \Delta [E(R_N)] = \Delta \rho_2 \frac{\partial E(R_N)}{\partial \rho_2} \quad [22]$$

$$\text{sensibilité relative: } \frac{\Delta [E(R_N)]}{E(R_N)} = \Delta \rho_2 \cdot \frac{1}{E(R_N)} \cdot \frac{\partial E(R_N)}{\partial \rho_2} \quad [23]$$

La gamme de variation (étendue) des processus AR1 est présentée au tableau 47 pour différentes valeurs de  $\rho$  et  $N$  et les sensibilités absolues et relatives à des déviations apparaissent aux tableaux 46 et 48.

Revenons à l'exemple développé pour le Contenu en Information: l'erreur relative résultant de l'adoption d'un modèle AR1 plutôt qu'un modèle AR2 peut être très grande: prenons  $\rho_1 = 0.7$ ,  $\rho_2 = 0.49$  et  $N = 100$  alors  $E(R_N) = 43.3$ ; mais si  $\rho_2 = 0.59$ , alors  $\Delta \rho_2 = 0.10$  et  $\frac{\Delta E(R_N)}{E(R_N)} = 0.28$ , soit une sous-estimation de près de 30%.

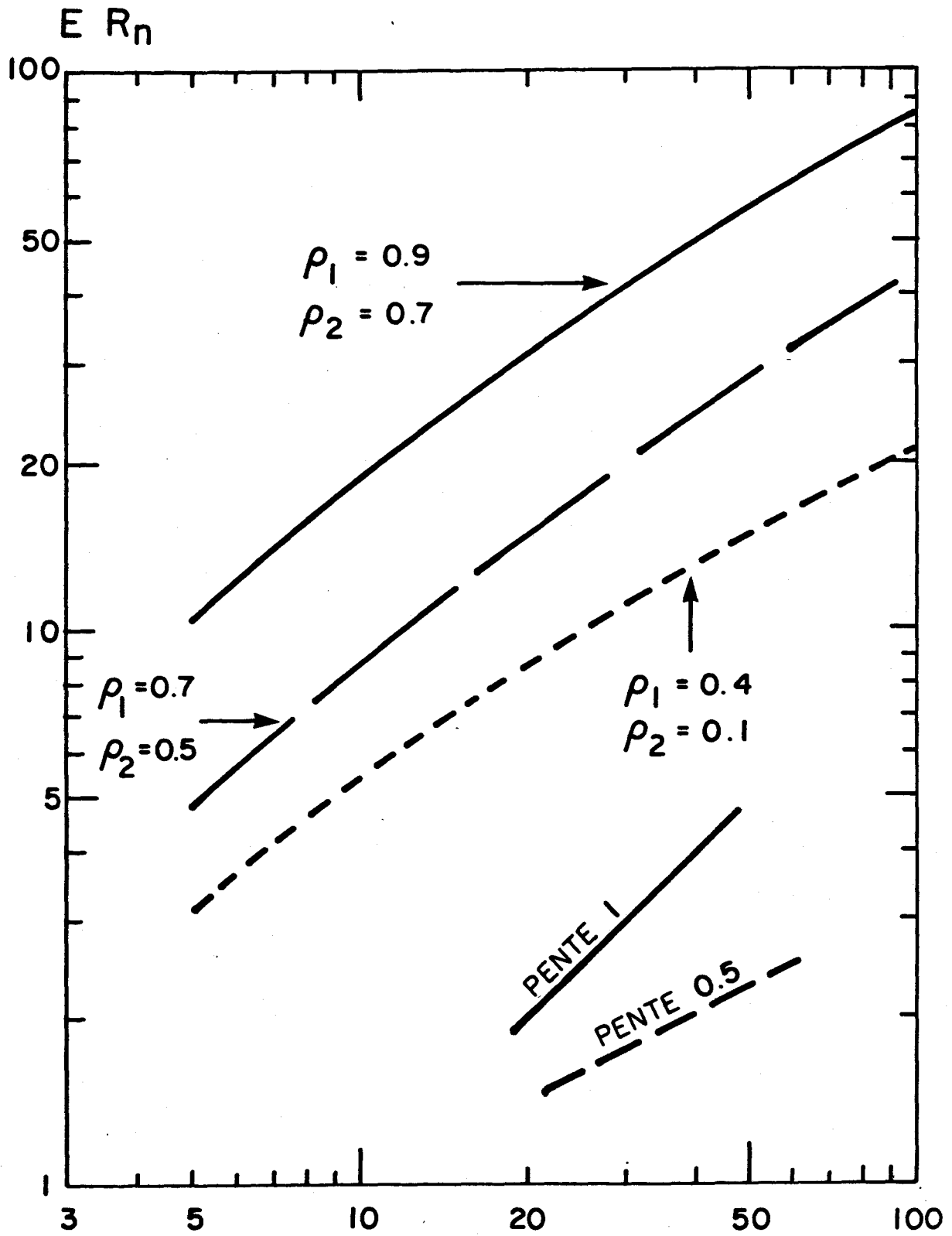


FIGURE 9: Evolution de l'étendue  $E(R_n)$  en fonction de la longueur  $N$  de l'échantillon pour diverses combinaisons de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

Tableau 46 : Sensibilité absolue de  $R_n$  selon  $n$  et  $\rho_1$ :

$\rho_1 \backslash n$	5	10	20	50	100
-0.9	11.9	14.0	16.8	20.1	22.6
	3.61	4.41	5.47	7.13	8.77
	1.68	2.23	3.01	4.50	6.15
-0.5	0.95	1.44	2.20	3.77	5.57
	0.62	1.13	1.94	3.68	5.70
	0.47	1.02	1.94	3.91	6.22
0	0.41	1.04	2.09	4.38	7.06
	0.41	1.15	2.38	5.06	8.20
	0.46	1.34	2.80	5.99	9.73
0.5	0.56	1.62	3.39	7.25	11.7
	0.71	2.01	4.19	8.95	14.5
	0.94	2.55	5.31	11.3	18.3
0.9	1.27	3.33	6.89	14.7	23.9
	1.77	4.47	9.26	19.8	32.3
	2.56	6.25	12.9	28.1	46.0
0.9	3.93	9.26	19.3	42.6	70.5
	6.63	15.0	31.7	71.9	120
	13.3	29.0	61.5	146	253
0.9	41.0	85.8	180	460	855

Tableau 47 : Gamme de variation  $R_n$  du processus AR1 selon  $n$  et  $\rho_1$ :

$\rho_1 \backslash n$	5	10	20	50	100
-0.9	3.51	4.59	5.98	8.45	11.0
	2.78	3.77	5.08	7.51	10.1
	2.51	3.48	4.80	7.32	10.1
-0.5	2.38	3.38	4.74	7.38	10.3
	2.33	3.36	4.79	7.59	10.7
	2.32	3.40	4.91	7.9	11.2
0	2.34	3.49	5.10	8.30	11.9
	2.39	3.62	5.35	8.80	12.7
	2.47	3.79	5.67	9.42	13.6
0.5	2.57	4.00	6.06	10.1	14.8
	2.71	4.27	6.54	11.1	16.2
	2.87	4.61	7.14	12.2	18.0
0.9	3.09	5.04	7.90	13.7	20.3
	3.36	5.58	8.89	15.6	23.3
	3.71	6.31	10.2	18.2	27.5
0.9	4.20	7.31	12.1	22.0	33.5
	4.91	8.79	14.9	28.0	43.3
	6.10	11.2	19.9	39.0	61.5
0.9	8.77	16.8	31.3	66.1	109

Tableau 48 : Sensibilité relative de  $R_n$  selon  $n$  et  $\rho_1$ :

$\rho_1 \backslash n$	5	10	20	50	100
-0.9	3.39	3.06	2.80	2.38	2.05
	1.29	1.17	1.07	0.948	0.861
	0.671	0.640	0.628	0.615	0.608
-0.5	0.401	0.428	0.465	0.510	0.538
	0.269	0.336	0.405	0.485	0.531
	0.203	0.301	0.394	0.495	0.553
0	0.176	0.299	0.410	0.527	0.593
	0.173	0.318	0.445	0.575	0.646
	0.189	0.354	0.495	0.636	0.712
0.5	0.219	0.404	0.560	0.712	0.794
	0.265	0.470	0.641	0.807	0.894
	0.327	0.554	0.743	0.924	1.01
0.9	0.412	0.661	0.872	1.07	1.17
	0.526	0.801	1.04	1.26	1.38
	0.690	0.991	1.26	1.53	1.67
0.9	0.936	1.26	1.59	1.92	2.1
	1.35	1.71	2.11	2.56	2.79
	2.18	2.57	3.08	3.75	4.12
0.9	4.68	5.10	5.76	6.95	7.81

## 5. Conclusions

L'expression analytique de la variance de la moyenne des processus AR2 a été obtenue et les résultats apparaissent comme très sensibles à des petites variations des deux coefficients ( $\rho_1$ ,  $\rho_2$  ou  $a$ ,  $b$ ) qui définissent le processus; ceci est la conséquence de la propagation de ces déviations à l'ensemble du corrélogramme. En conséquence, les deux paramètres d'utilisation courante étudiés ici, le Contenu en Information et l'Étendue réduite présente cette même sensibilité et ceci est particulièrement vrai dans le cas de déviations par rapport au modèle Markovien d'ordre 1, lequel est largement utilisé en hydrologie. Si l'on désire utiliser ces deux paramètres pour la rationalisation de réseaux ou la planification d'ouvrages, on doit prendre des précautions dans l'estimation de la structure des populations-mères déduites d'échantillons historiques courts, car des coefficients d'autocorrélation d'ordre élevé, même non-significativement différents de zéro compte tenu de la longueur réduite des échantillons peuvent avoir une influence importante; en particulier l'ajustement automatique et aveugle des modèles structuraux, réalisés par les logiciels d'ordinateur doit être absolument évité.

Références bibliographiques

ADAMS, E.P. (1922).

Smithsonian mathematical Formulae. Washington.

ANIS, A.A. and LLOYD, E.H. (1953).

On the range of partial sums of a finite number of independent random variable. *Biometrika*, v. 40, p. 35-42.

BAYLEY, G.V. et J.M. HAMMERSLEY (1946).

The effective number of independent observations in an autocorrelated time series. *J. Roy. Stat. Soc.*, 8-18, p. 184-197.

BEARD, L.R. (1967).

Simulation of daily streamflow. *Proc. Intern. Hydrol. Symp. Fort Collins, Colo. Vol. 1: 624-632.*

BROOKS, C.E.P. et N. CARRUTHERS (1953).

Handbook of statistical methods in meteorology, M.O. 538. Meteorological office, London, 412 p.

CLUIS, D. (1972).

Relationship between stream water temperature and ambient air temperature. *Nordic Hydrology*, 3(2): 67-71.

FELLER, W. (1951).

The asymptotic distribution of the range of sums of independent variable. *Ann. Math. Statistics*, v. 22, p. 427-432.

FISHER, R.A. (1921).

The mathematical foundations of theoretical statistics. *Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A, Vol. 222: 309-368.*

FISHER, R.A. (1925).

Theory of statistical estimation. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 22, 1925: 700-725.



- HIRTZEL, C.S., J.E. QUON et R.B. COROTIS (1982).  
Mean of autocorrelated air quality measurements. J. Env. Eng. EE3: 488-501.
- HURST, H.E. (1951).  
Long term storage capacities of reservoirs. Am. Soc. Civil Engineers, Trans., v. 116, p. 776-808.
- JOLLEY, L.B.W. (1961).  
Summation of series. Dover Publ. inc. N.Y.
- KENDALL, M.G. (1945).  
Note on Mr. Yule's paper. J. Roy. Statis. Soc., 108: 225-230.
- KENDALL, M.G. (1951).  
The advanced Theory of statistics, Vol. II. Charles Griffin and Co. Londres.
- LETTENMAIER, D.P. (1967).  
Detection of trends in water quality data from record with dependent observations. Wat. Resour. Res., Vol. 12, no 5, p. 1037-1046.
- LETTENMAIER, D.P. (1976).  
Detection of trends in water quality data from record with dependent observations. Wat. Resour. Res., Vol. 12, no 5: 1037-1046.
- LETTENMAIER, D.P. et S.J. BURGESS (1977).  
Design of trend monitoring networks. J. Env. Eng. EE5: 785-802.
- LETTENMAIER, D.P. (1978).  
Design considerations for ambient stream quality monitoring. Wat. Res. Bull. Vol. 14, no 4: 884-902.
- LOFTIS, J.C. and WARD, R.C. (1980).  
Sampling frequency selection for regulatory water quality monitoring. Wat. Res. Bull. Vol. 16, no. 3: 501-507.

MATALAS, N.C. et W.B. LANGBEIN (1962).

Information content of the mean. J. Geoph. Res., Vol. 67, No 9, p. 3441-3448.

O'CONNELL, P.E. (1974).

ARIMA models in synthetic hydrology, Mathematical models for surface water hydrology. Cirani, T.A., Maione, V. and Wallis, J.R. ed. p. 51-68. John Wiley and Sons.

QUIMPO, R.G. (1967).

Stochastic model of daily river flow sequences. Hydrol. Paper No 18, Colo. State Univ. Fort Collins, Colo.

QUIMPO, R.G. (1969).

Reduction of serially correlated hydrologic data. Bull. IASH Vol. 14, No 4: 111-118.

QUIMPO, R.G. and J. YANG (1970).

Sampling considerations in stream discharge and temperature measurements. Water Resour. Res., Vol. 6, no. 6: 1771-1774.

REIHER, B.S. et C.S. HUZZEN (1967).

Some comments on the effective sample size of second order Markov processes. Bull. IASH Vol. 12, No 4: 63-74.

SUTABUTRA, P. (1967).

Reservoir storage capacity required when water inflow has a periodic and a stochastic component. Ph. D. Dissertation, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

YEVJEVICH, V. (1967).

Mean range of linearly dependent normal variables with application to storage problem. Water Resources Research V. 3, No 3, p. 663-671.

YEVJEVICH, V. (1972).

Stochastic processes in hydrology. Water Resources Publ. Fort Colling  
(Colorado).

YULE, G.U. (1945).

A method of studying time series based on their internal correlations.  
J. Roy Statis. Soc., 108: 208-225.

Appendice 1

Calcul de la variance de la moyenne des processus AR2.

Le processus AR2 s'écrit:

$$X_t = a X_{t-1} + b X_{t-2} + \varepsilon_t \quad [A-1]$$

avec  $\varepsilon_t = \text{NID}(0,1)$ .

Dans ce cas, sa variance s'écrit (équation [9]):

$$\text{var } X = \frac{1-b}{1+b} \frac{1}{[(1-b)^2 - a^2]} = \frac{(1-\rho_1)(1+\rho_1)}{(1-\rho_2)(1+\rho_2 - 2\rho_1^2)} \quad [A-2]$$

Pour établir la variance de la moyenne:

$$\text{var } \bar{X} = \frac{\text{var } X}{n} \left[ 1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \rho_j \right] \quad [A-3]$$

on utilise l'équation caractéristique de [A-1]:

$$X^2 - aX - b = 0 \quad b \neq 0 \quad [A-4]$$

À partir de cette équation caractéristique, on peut poser:

$$a = p + q$$

$$b = - p q$$

Deux cas peuvent se présenter:

1) cas où  $p$  et  $q$  sont réels et ont des valeurs absolues inférieure à 1: ( $|a| < 2; |b| < 1$ ): le coefficient d'autocorrélation  $\rho_k$  peut alors s'écrire (QUIMPO, 1969):

$$\rho_k = \frac{p(1-q^2)}{(p-q)(1+pq)} p^{|k|} + \frac{q(1-p^2)}{(q-p)(1+pq)} q^{|k|} \quad [A-5]$$

$$= c_1 p^{|k|} + c_2 q^{|k|}$$

si on pose  $k = |i-j|$ , on peut calculer

$$\Phi = \sum_{i < j} \rho_{|i-j|} = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m (c_1 p^{|k|} + c_2 q^{|k|})$$

On peut sommer cette expression arithmético-géométrique:

$$\Phi = \left[ \frac{1+b}{1-a-b} - \frac{1}{1-b} \right] n + \frac{1}{(1-b)(1-a-b)^2} \left\{ -2b(1-b) - a(1+b^2) + \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{p-q} \right\} [A-6]$$

où:

$$\Psi_1 = p^{n+2} (1-q^2) (1-q)^2$$

$$\Psi_2 = q^{n+2} (1-p^2) (1-p)^2$$

2) cas où  $p$  et  $q$  sont des complexes conjugués et où  $|pq| < 1$  ( $|b| < 1$ ):

Dans ce cas, KENDALL (1951) a montré que les coefficients d'autocorrélation  $\rho_k$  pouvaient s'écrire:

$$\rho_k = \frac{C^k \sin(k\theta + \Psi)}{\sin \Psi} \quad [A-7]$$

avec  $C = \sqrt{-b}$ ,  $\cos \theta = \frac{a}{2\sqrt{-b}}$  et  $\operatorname{tg} \Psi = \frac{1+C^2}{1-C^2} \operatorname{tg} \theta$

si on développe  $\sin(k\theta + \Psi)$  on obtient:

$$\rho_k = C^k \cotg \psi \cdot \sin k\theta + C^k \cos k\theta$$

Pour calculer  $\phi = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \rho_k$ , il faut sommer  $\rho_k$  selon  $\sin k\theta$  et  $\cos k\theta$ .

On utilise les identités suivantes (ADAMS, 1922; JOLLEY, 1961):

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k \cos k\theta \equiv \frac{(1-a \cos \theta) (1-a^n \cos n\theta) + a^{n+1} \sin \theta \sin n\theta}{1-2a \cos \theta + a^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a^k \sin k\theta \equiv \frac{a \sin \theta (1-a^n \cos n\theta) - (1-a \cos \theta) a^n \sin n\theta}{1-2a \cos \theta + a^2}$$

La sommation des  $\rho_k$  donne (REIHER et HUZZEN, 1967):

$$\phi = A + B \text{ avec}$$

$$A = \frac{\cotg \psi}{1-2C \cos \theta + C^2} (nC \sin \theta - [2C^{n+2} \sin(n\theta) - C^{n+1} \sin(n+1)\theta -$$

$$C^{n+3} \sin(n-1)\theta + C(1-C^2) \sin \theta] (1-2C \cos \theta + C^2)^{-1})$$

$$B = (1 - 2C \cos \theta + C^2)^{-2} [C^{n+3} \cos(n-1)\theta - 2C^{n+2} \cos n\theta$$

$$+ C^{n+1} \cos(n+1)\theta - C^3 \cos \theta + nC \cos \theta - nC^2 - 2nC^2 \cos^2 \theta$$

$$- nC^4 + 3nC^3 \cos \theta - C \cos \theta + 2C^2]$$

Dans les deux cas, la variance de la moyenne peut s'écrire:

$$\text{var } \bar{X} = \frac{\sigma^2}{n} \left( 1 + \frac{2\phi}{n} \right)$$

APPENDICE 2

Programmes APL utilisés dans ce rapport:

- ACCEPT : définit les conditions de stationnarité selon  $\rho_1$  et  $\rho_2$
- CALCUL 1: transforme a et b en  $\rho_1$  et  $\rho_2$
- CALCUL 2: transforme  $\rho_1$  et  $\rho_2$  en a et b
- CALCUL 3: calcule la variance selon  $\rho_1$  et  $\rho_2$
- CONTENU INFORMATION, REEL, COMPLEX  
: calcule le contenu en information selon  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et n en fonction des racines réelles ou complexes de l'équation caractéristique
- RANGE, RANGE REEL, RANGE COMPLEX  
: calcule la gamme de variation selon  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et n en fonction des racines réelles ou complexes de l'équation caractéristique

```

      VACCEPT[[]]V
    ▽ A+V1 ACCEPT V2
[1]  *
[2]  * FONCTION DYADIQUE A RESULTAT EXPLICITE :
[3]  *   A + V1 ACCEPT V2
[4]  * CETTE FONCTION TIRE LES CONDITIONS DE STATIONARITE
[5]  * DANS L'ESPACE [ ρ1 , ρ2 ] SELON LES LOIS SUIVANTES :
[6]  *   1≤ρ1≤1   1≤ρ2≤1   (ρ1*2)< 0.5(ρ2+1)
[7]  * V1 : REPRESENTE ρ1
[8]  * V2 REPRESENTE ρ2
[9]  * n° ρ1 ET ρ2 SCALAIRE
[10] *
[11] * -CASVRAI1 SI(((V1≥1)^(V1≤1))^((V2≥1)^(V2≤1)))
[12] CASFAUX1:A+0
[13] →FT1
[14] CASVRAI1:
[15] * -CASVRAI2 SI(V1*2)<(0.5*(V2+1))
[16] CASFAUX2:A+0
[17] →FT2
[18] CASVRAI2:A+1
[19] FT2:
[20] FT1:
    ▽

```

```

      VCALCUL1[[]]V
    ▽ X+C1 CALCUL1 C2;K;L
[1]  X+(C1*(1-C2))
[2]  L+(1-(C1*2))
[3]  * -CASVRAI1 SI K=0
[4]  CASFAUX1:X+K+L
[5]  →FT1
[6]  CASVRAI1:X+0
[7]  FT1:
    ▽

```

```

      VCALCUL2[[]]V
    ▽ Y+D1 CALCUL2 D2;HO;P
[1]  HO+(D2-(D1*2))
[2]  P+(1-(D1*2))
[3]  * -CASVRAI1 SI HO=0
[4]  CASFAUX1:Y+HO+P
[5]  →FT1
[6]  CASVRAI1:Y+0
[7]  FT1:
    ▽

```

```

      VCALCUL3[[]]V
    ▽ V+E1 CALCUL3 E2
[1]  * -CASVRAI1 SI 0=((1-E1)*(1-E2))
[2]  CASFAUX1:V+((1-E1)*(1-E2))+((1+E1)*((1-(2*(E1*2)))+E2))
[3]  →FT1
[4]  CASVRAI1:V+1E19
[5]  FT1:
    ▽

```



## VREEL[ ]V

V REPONSE+XA REEL YB;P;Q;CSTEA;CSTEB;OMEGA1;OMEGA2;T1;T2;T3;T4;EPCYLLON;CALI1

```
[1] *
[2] * FONCTION DYADIQUE A RESULTAT EXPLICITE
[3] * REPONSE + XA REEL YB
[4] * FONCTION UTILISEE POUR CALCULER LES
[5] * RACINES DE L'EQUATION QUADRATIQUE
[6] * ( X*2 ) - AX - B = 0
[7] * LORSQUE P ET Q SONT RDES RACINES REELLES.
[8] * XA ET YB SONT DES SCALAIRES.
[9] *
[10] P+(XA+(((XA*2)+(4*YB))*0.5))+2
[11] Q+(XA-(((XA*2)+(4*YB))*0.5))+2
[12] CSTEA+XA
[13] CSTEB+YB
[14] OMEGA1+(1-(Q*2))*((1-Q)*2)*(P*(EXPO+2))
[15] OMEGA2+(1-(P*2))*((1-P)*2)*(Q*(EXPO+2))
[16] T1+(((1+CSTEB)+((1-CSTEA)-CSTEB))-((1-CSTEB)))*EXPO
[17] T2+((1-CSTEB)*((1-CSTEA)-CSTEB)*2)
[18] T3+(((2)*CSTEB)*(1-CSTEB)-(CSTEA*(1+(8TB*2))))
[19] +CASVRAI1 SI ((P-Q)=0)
[20] CASFAUX1:T4+(OMEGA1-OMEGA2)+(P-Q)
[21] +FT1
[22] CASVRAI1:T4+0
[23] FT1:
[24] EPCYLLON+T1+(T2*(T3+T4))
[25] CALI1++(1+((2*EPCYLLON)+EXPO))
[26] REPONSE+CALI1
```

## VCOMPLEX[ ]V

V REPONSE+WA COMPLEX WB;COS;TETA;TG;C;P1;P2;P3;P4;P5;P6;A;B;Q1;Q2;Q3;Q4;Q5;Q6;8TG1;TOTAL;Q8;Q9;Q10;Q11;Q12

```
[1] *
[2] * FONCTION DYADIQUE AVEC RESULTAT EXPLICITE
[3] * REPONSE + WA COMPLEX WB
[4] * FONCTION UTILISEE POUR CALCULER LES
[5] * RACINES DE L'EQUATION QUADRATIQUE :
[6] * ( X*2 ) - AX - B = 0
[7] * LORSQUE P ET Q SONT DES RACINES COMPLEXES CONJUGUEES.
[8] *
[9] * COS+(WA+(2*((-WB)*0.5)))
[10] * TETA+20COS
[11] * C+((-WB)*0.5)
[12] * +CASVRAI1 SI C=1
[13] * CASFAUX1:
[14] * +FT1
[15] * CASVRAI1:C+1.00000000001
[16] * FT1:
[17] * TG+(((1+(C*2))+((1-(C*2))))*(30TETA))
[18] * P1+(1+TG)+((1-(2*C*COS))+(C*2))
[19] * P2+EXPO*C*(10TETA)
[20] * P3+(2*(C*(EXPO+2))*((10*(EXPO*TETA)))-((C*(EXPO+1))*((10*(EXPO+1)*TETA))))
[21] * P4+(C*(EXPO+3))*((10*(EXPO-1)*TETA))
[22] * P5+C*(1-(C*2))*((10TETA))
[23] * P6+((1-(2*C*COS))+(C*2))
[24] * A+P1*(P2-((P3-P4)+P5)*P6)
[25] * Q1+(((1-(2*C*COS))+(C*2))*((-2)))
[26] * Q2+((C*(EXPO+3))*((20*(EXPO-1)*TETA)))
[27] * Q3+(2*(C*(EXPO+2))*((20*(EXPO*TETA)))
[28] * Q4+((C*(EXPO+1))*((20*(EXPO+1)*TETA)))
[29] * Q5+(C*3)*COS
[30] * Q6+(EXPO*C*COS)
[31] * Q7+EXPO*(C*2)
[32] * Q8+(2*EXPO*(C*2))*COS+2
[33] * Q9+(EXPO*(C*4))
[34] * Q10+(3*(EXPO*(C*3))*COS
[35] * Q11+(C*COS)
[36] * Q12+2*(C*2)
[37] * B+Q1+(((((((Q2-Q3)+Q4)-Q5)+Q6)-Q7)-Q8)-Q9)+Q10-Q11+Q12)
[38] * TOTAL+A+B
[39] * REPONSE++(1+((2*TOTAL)+EXPO))
```

```

VCONTENUINFORMATION[[]]V
V CONTENUINFORMATION;VECT;RO1;RO2;TABLEAU;TAB2;VARA;VARB;CALI;J;I;REP1;DETRINANT;A;TAB3;DELA
[1] * FONCTION NYLADIQUE ( SANS ARGUMENT )
[2] * FONCTION QUI CALCULE LE CONTENU EN INFORMATION
[3] *  $\rho_1$  ET  $\rho_2$  VARIANT DANS L'INTERVALLE OUVERT
[4] * ] 1 , 1[ PAR STEP DE (.1)
[5] * CETTE FONCTION OPERE EN MODE CONVERSATIONNEL
[6] * ELLE FAIT LE RAPPORT DE IN SUR LE I THEORIQUE
[7] *
[8] * 'QUEL EST LA VALEUR DE N ?'
[9] EXPO+[]
[10] VECT+[] 1 1
[11] RO1+RO2+RHO VECT
[12] TAB2+TABLEAU+(( $\rho$ RO1), $\rho$ RO2) $\rho$ 0
[13] I+1
[14] DBOU1:→FBOU1 SI I> $\rho$ RO1
[15] J+1
[16] DBOU2:→FBOU2 SI J> $\rho$ RO2
[17] A+RO1[I] ACCEPT RO2[J]
[18] →CASVRAI1 SI A=1
[19] CASFAUX1:
[20] TABLEAU[I;J]+0
[21] TAB2[I;J]+0
[22] →FT1
[23] CASVRAI1:
[24] VARA+RO1[I] CALCUL1 RO2[J]
[25] VARB+RO1[I] CALCUL2 RO2[J]
[26] CALI+RO1[I] CALCUL3 RO2[J]
[27] DETERMINANT+(VARA*2)+(4*VARB)
[28] →CASVRAI2 SI DETERMINANT<0
[29] CASFAUX2:
[30] REP1+VARA REEL VARB
[31] REP1+ARRONDI REP1
[32] TABLEAU[I;J]+REP1
[33] TAB2[I;J]+ARRONDI(REP1+CALI*100)
[34] →FT2
[35] CASVRAI2:
[36] REP1+VARA COMPLEX VARB
[37] REP1+ARRONDI REP1
[38] TABLEAU[I;J]+REP1
[39] TAB2[I;J]+ARRONDI(REP1+CALI*100)
[40] FT2:
[41] FT1:
[42] J+J+1
[43] →DBOU2
[44] FBOU2:
[45] I+I+1
[46] →DBOU1
[47] FBOU1:'AJUSTEZ VOTRE PAPIER'
[48] RESULTATDEROBUSTE+TABLEAU+TABLEAU+100
[49] RESULTATDEROBUSTEIAI+TAB2+TAB2+100
[50] DELAI+[]DL 15
[51] ' '
[52] ' '
[53] ' RESULTAT DE TOUT LES I POUR N= ', $\vee$ EXPO
[54] ' POUR  $\rho_1 \in [-0.9 , 0.9]$  ET  $\rho_2 \in [-0.9 , 0]$ '
[55] ' '
[56] []+ 0 ^9 +TABLEAU
[57] ' '
[58] ' SUITE DES RESULTATS POUR  $\rho_1 \in [-0.9 , 0.9]$  ET  $\rho_2 \in [.1 , .9]$ '
[59] ' '
[60] []+ 0 10 +TABLEAU
[61] 'RESULTAT DE I1/I POUR N=',( $\vee$ EXPO),' ET POUR I CALCULER AVEC LA FORMULE COMPACT'
[62] ' POUR  $\rho_1 \in [-0.9 , 0.9]$  ET  $\rho_2 \in [-0.9 , 0]$ '
[63] ' '
[64] []+ 0 ^9 +TAB2
[65] ' SUITE DES I1/I POUR  $\rho_1 \in [-0.9 , 0.9]$  ET  $\rho_2 \in [.1 , .9]$ '
[66] ' '
[67] []+ 0 10 +TAB2
[68] ' '
[69] '*****FIN POUR N= ',( $\vee$ EXPO),' *****'
[70] G
[71] +
V

```

```

VRANGE[[]]V
V REP+RO1 RANGE RO2;ECART;X;Y;CST;DETERM;I;M;VECT;J
[1] 'QUELLE EST LA LONGUEUR DE LA SERIE'
[2] NPRSOM+[]
[3] ECART+((1-(RO1*2))*((1-((2*(RO1*2))*(1-RO2)))-(RO2*2)))*0.5
[4] CST+(2+(O1))*0.5
[5] X+RO1 CALCUL1 RO2
[6] Y+RO1 CALCUL2 RO2
[7] DETERM+(X*2)+(4*Y)
[8] +CASVRAI2 SI DETERM<0
[9] CASFAUX2:
[10] REP1+X RANGEREEL Y
[11] +FT2
[12] CASVRAI2:
[13] REP1+X RANGECOMPLEX Y
[14] FT2:
[15] I+1
[16] TOTAL+10
[17] DBOU:-FBOU SI I>NPRSOM
[18] TOTAL+TOTAL,(I*(^0.5))
[19] I+I+1
[20] +DBOU
[21] FBOU:
[22] 'POUR QUELLES VALEURS DE N VOULEZ-VOUS SOMMEZ ?'
[23] SOM+,[ ]
[24] M+1
[25] VECT+10
[26] DBOU2:-FBOU2 SI M>0SOM
[27] J+1
[28] TOT+0
[29] DBOUC3:-FBOUC3 SI J>SOM[M]
[30] TOT+TOT+(REP1[J]*TOTAL[J])
[31] J+J+1
[32] +DBOUC3
[33] FBOUC3:
[34] M+M+1
[35] VECT+VECT,TOT
[36] TOT+0
[37] +DBOU2
[38] FBOU2:
[39] VECT-CST*ECART*VECT
[40] REP+VECT
V

```

```

VRANGEREEL[ ]V
V REPONSE+XA RANGEREEL YB;P;Q;CSTEA;CSTEB;OMEGA1;OMEGA2;T1;T2;T3;T4;EPCYLLON;CALI1;COMPT
[1] P+(XA+(((XA*2)+(1Y))*0.5))+2
[2] Q-(XA-(((XA*2)+(4*YB))*0.5))+2
[3] CSTEA+XA
[4] CSTEB+YB
[5] CALI1+10
[6] COMPT+1
[7] DBOU:→FBOU SI COMPT>NPR SOM
[8] EXPO+COMPT
[9] OMEGA1+(1-(Q*2))*((1-Q)*2)*(P*(EXPO+2))
[10] OMEGA2+(1-(P*2))*((1-P)*2)*(Q*(EXPO+2))
[11] T1+(((1+CSTEB)+(1-CSTEA)-CSTEB))-1+(1-CSTEB))*EXPO
[12] T2+(((1-CSTEB)*((1-CSTEA)-CSTEB)*2))
[13] T3+(((1-CSTEB)*((1-CSTEA)-CSTEB))-1+(1-CSTEB))*2
[14] +CASVRAI1 SI((P-Q)=0)
[15] CASFAUX1:T4+(OMEGA1-OMEGA2)*(P-Q)
[16] →FT1
[17] CASVRAI1:T4+0
[18] FT1:
[19] EPCYLLON=T1+(T2*(T3+T4))
[20] CALI1-CALI1,(1+((2*EPCYLLON)+EXPO))*0.5
[21] COMPT+COMPT+1
[22] →DBOU
[23] FBOU:
[24] REPONSE+CALI1
V

```

```

VRANGECOMPLEX[ ]V
V REPONSE+WA RANGECOMPLEX WB;COS;TETA;TG;C;P1;P2;P3;P4;P5;P6;A;B;Q1;Q2;Q3;Q4;Q5;Q6;Q7;TG1;TOTAL;Q8;Q9;Q10;Q11;Q12;
REP;Z
[1] COS+(WA+(2*((-WB)*0.5)))
[2] TETA+20COS
[3] C+((-WB)*0.5)
[4] +CASVRAI1 SI C=1
[5] CASFAUX1:
[6] →FT1
[7] CASVRAI1:C+1.000000000001
[8] FT1:
[9] REP+10
[10] Z+1
[11] DBOU:→FBOU SI Z>NPR SOM
[12] EXPO+Z
[13] TG+((1+(C*2))+1-(C*2))*30TETA
[14] P1+(1+TG)+((1-(2*C*COS))+C*2)
[15] P2+EXPO*C*(10TETA)
[16] P3+(2*(C*(EXPO+2))*10(EXPO*TETA))-((C*(EXPO+1))*10((EXPO+1)*TETA))
[17] P4+(C*(EXPO+3))*10((EXPO-1)*TETA)
[18] P5+C*(1-(C*2))*10TETA
[19] P6+((1-(2*C*COS))+C*2)
[20] A+P1*(P2-((P3-P4)+P5)*P6)
[21] Q1+(((1-(2*C*COS))+C*2))*2
[22] Q2+(C*(EXPO+3))*20((EXPO-1)*TETA)
[23] Q3+(2*(C*(EXPO+2))*20(EXPO*TETA))
[24] Q4+(C*(EXPO+1))*20((EXPO+1)*TETA)
[25] Q5+(C*3)*COS
[26] Q6+(EXPO*C*COS)
[27] Q7+EXPO*(C*2)
[28] Q8+(2*EXPO*(C*2))*COS*2
[29] Q9+(EXPO*(C*4))
[30] Q10+(3*(EXPO*(C*3))*COS
[31] Q11+(C*COS)
[32] Q12+2*(C*2)
[33] B=Q1+(((((((Q2-Q3)+Q4)-Q5)+Q6)-Q7)-Q8)-Q9)+Q10)-Q11)+Q12)
[34] TOTAL+A+B
[35] REP+REP,(1+((2*TOTAL)+EXPO))*0.5
[36] Z+Z+1
[37] →DBOU
[38] FBOU:
[39] REPONSE+REP
V

```