Record Number:
Author, Monographic: Boucher, S.//Ashkar, F.//Bobée, B.
Author Role:
Title, Monographic: Lois de Halphen : estimation des paramètres et détermination de la variance de X_T
Translated Title:
Reprint Status:
Edition:
Author, Subsidiary:
Author Role:
Place of Publication: Québec
Publisher Name: INRS-Eau
Date of Publication: 1989
Original Publication Date: Septembre 1989
Volume Identification:
Extent of Work: 73
Packaging Method: pages
Series Editor:
Series Editor Role:
Series Title: INRS-Eau, Rapport de recherche
Series Volume ID: 242
Location/URL:
ISBN: 2-89146-239-4
Notes: Rapport annuel 1989-1990
Abstract: 10.00$
Call Number: R000242
Keywords: rapport/ ok/ dl

LOIS DE HALPHEN: ESTIMATION DES PARAMÈTRES ET DÉTERMINATION DE LA VARIANCE DE X_T

PAR

SYLVIE BOUCHER

FAHIM ASHKAR

BERNARD BOBÉE

INRS-EAU

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

C.P. 7 500

SAINTE-FOY, QC

G1V 4C7

RAPPORT SCIENTIFIQUE NO.242

SEPTEMBRE 1989

TABLE DES MATIÈRES

5. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE LA LOI DE HALPHEN DE TYPE B

6. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE LA LOI DE HALPHEN DE TYPE B^{-1}

INTRODUCTION

Les trois types de loi de Halphen (Type A, Type B et Type B^{-1}) ont été développés par Halphen (Morlat, 1956) pour l'ajustement statistique des données hydrologiques. Dans le but d'utiliser les lois de Halphen pour l'analyse systématique des séries de débits extrêmes, au même titre que la famille des lois Gamma, Boucher *et al.* (1989a.) ont réalisé un premier rapport qui avait comme objectif de présenter les propriétés mathématiques et statistiques importantes des lois de Halphen.

Ce deuxième rapport sur les lois de Halphen a pour but de présenter les méthodes d'estimation des paramètres des trois types de loi de Halphen. Il a également comme objectif de présenter les méthodes d'estimation d'un événement X_T, le calcul de la variance de cette estimation et de son intervalle de confiance.

Après avoir fait une revue de littérature sur les lois de Halphen, on a constaté qu'aucun auteur n'a jusqu'à maintenant travaillé sur les développements théoriques reliés l'estimation des variances de $\tilde{X}_T$ pour ces lois. Ce rapport vient donc apporter un élément nouveau au niveau des développements théoriques des lois de Halphen.

L'ajustement automatique de chacune des lois de Halphen sur une série de données quelconque est maintenant rendu possible grâce au programme "AJUST-HALPHEN" (Boucher *et al.*, 1989b et 1989c). Tous les développements théoriques présentés dans le cadre de ce rapport sont directement utilisés dans les programmes réalisant les ajustements statistiques des lois de Halphen.

1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES TROIS TYPES DE LOI DE HALPHEN

Cette première partie fait un rappel de certaines propriétés mathématiques des fonctions de densité de probabilité (f.d.p.) de chacune des lois de Halphen et de quelques propriétés statistiques importantes de ces lois. Les résultats mathématiques et statistiques énoncés dans le cadre de cette section proviennent du rapport scientifique de Boucher *et al.* (1989a).

1.1 Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen de type A

La f.d.p. de la loi de Halphen de type A est donnée par:

$$f(x) = \frac{1}{2m^{\nu}K_{\nu}(2\alpha)} \cdot x^{\nu-1} \cdot \exp[-\alpha(x/m+m/x)] \tag{1.1}$$

où $x > 0$; $m > 0$; $\alpha > 0$ et ν est réel

La fonction $K_{\nu}(2\alpha)$ correspond à la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre ν et d'argument 2α. La fonction de Bessel $K_{\nu}(2\alpha)$ est définie par:

$$K_{\nu}\ (2\alpha)= \frac{1}{2m^{\nu}} \int_0^{\infty} x^{\nu-1} \cdot \ \exp[-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x})] \tag{1.2}$$

La f.d.p. de la loi de type A dépend de trois paramètres ν, m et α. Les paramètres ν et α caractérisent la forme de la f.d.p. de la loi de type A et le paramètre m est un paramètre d'échelle.

La courbe représentant la f.d.p. de la loi de Halphen de type A possède une asymétrie positive (c.f. Exemples de courbes de densité, Boucher *et al.*, 1989a).

Les moments non-centrés d'ordre r de la loi de type A sont directement reliés aux fonctions de Bessel $K_{\nu}(2\alpha)$; (Boucher *et al* , 1989a).

$$\mu'_r = \frac{m^r K_{\nu+r}(2\alpha)}{K_{\nu}(2\alpha)} \tag{1.3}$$

La formule 1.3 est valide pour des moments d'ordre entier d'ordre r positif ou négatif.

En plus de ces relations, il est important pour la loi de type A de connaître la valeur de la moyenne géométrique. Comme nous le verrons plus loin, cette valeur est utilisée pour estimer les paramètres de cette loi de Halphen.

On peut montrer (Boucher *et al.*, 1989a) que la moyenne géométrique G est donnée par l'équation:

$$G = m \cdot \exp\left[\frac{1}{K_\nu(2\alpha)} \cdot \frac{\partial K_\nu(2\alpha)}{\partial \nu}\right] \tag{1.4}$$

1.2 <u>Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen de type B</u>

La f.d.p. de la loi de Halphen de type B est donnée par :

$$f(x) = \frac{2}{m^{2\nu} ef_\nu(\alpha)} \quad x^{2\nu-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right] \tag{1.5}$$

où $x > 0$; $m > 0$; $\nu > 0$ et α est réel.

La fonction $ef_\nu(\alpha)$ est la fonction exponentielle factorielle définie par Halphen (1955):

$$ef_\nu(\alpha) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2+\alpha t} \cdot t^{2\nu-1} dt \tag{1.6}$$

La loi de Halphen de type B dépend de trois paramètres: m, ν et α. Le paramètre m est un paramètre d'échelle et les deux autres paramètres ν et α sont des paramètres de forme.

De nombreux avantages sont reliés à l'utilisation pratique de la loi de type B. En effet, selon les valeurs attribuées aux paramètres α, m et ν, il est possible d'obtenir plusieurs formes de courbes de densité pour cette loi (c.f. Boucher *et al.*, 1989a):

- Courbe en J inversée ($0 < \nu < 0,5$);
- Courbe en S inversée ($0 < \nu < 0,5$);
- Courbe de Gauss tronquée($\nu = 0,5$ et $\alpha > 0$);
- Courbe exponentielle ($\nu = 0,5$ et $\alpha < 0$);
- Moitié de courbe de Gauss ($\nu = 0,5$ et $\alpha = 0$);
- Asymétrie positive ($\nu > 0,5$).

Le paramètre qui détermine la forme de la courbe (en J inversée, en S inversée, asymétrie positive etc..) est le paramètre ν. L'autre paramètre de forme α détermine, selon la valeur prise par ν, l'existence ou non d'un mode pour la f.d.p..

Le moment non-centré d'ordre r de la loi de Halphen de type B est défini par (Boucher *et al.*, 1989a):

$$\mu_r' = \frac{m^r ef_{\nu+r/2}(\alpha)}{ef_\nu(\alpha)} \tag{1.7}$$

L'équation 1.7 est valide pour des moments d'ordre r tel que $r > -2\nu$ (où $\nu > 0$). Comme le montre l'équation 1.7, les moments μ_r' sont reliés directement aux fonctions exponentielles factorielles $ef_\nu(\alpha)$.

Comme l'a démontré Boucher *et al.* (1989a), le moment d'ordre quasi-zéro (moyenne géométrique G) est donné par:

$$G = m \exp \left(\frac{1}{2ef_\nu(\alpha)} \cdot \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu}\right) \tag{1.8}$$

Ce moment est important pour estimer les paramètres de la loi de type B.

1.3 Fonction de densité de la loi de Halphen de type B^{-1}

La loi de Halphen de type B^{-1} (ou B inverse) a été présentée par Morlat (1956). Elle vient prolonger le domaine d'application de la loi de Halphen de type A et de type B. La f.d.p. de la loi de type B inverse est:

$$f(x) = \frac{2m^{2\nu}}{ef_\nu(\alpha)} \cdot x^{-2\nu-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right] \tag{1.9}$$

où $x > 0$; $m > 0$; $\nu > 0$ et α est réel

La fonction $ef_\nu(\alpha)$ est la fonction exponentielle factorielle définie par l'équation 1.6.

Comme la loi de type B, la loi de type B^{-1} possède deux paramètres de forme α et ν ainsi qu'un paramètre d'échelle m.

La f.d.p. de la loi de type B^{-1} est la fonction inverse de la loi de type B. Donc, si une variable aléatoire Y suit une loi de type B^{-1} ($Y \sim HB^{-1}(\alpha,\nu,m)$), on peut montrer (Boucher et al.,1989a) que la variable $X = m^2/Y$ suit une loi de Halphen de type B ($X \sim HB(\alpha,\nu,m)$).
La f.d.p. de la loi de type B^{-1} est à asymétrie positive seulement (c.f. Boucher et al., 1989a).

L'équation générale des moments non-centrés d'ordre r de la loi de type B^{-1} dépend de la fonction exponentielle factorielle (Boucher et al., 1989a):

$$\mu'_r = \frac{m^r ef_{\nu-r/2}(\alpha)}{ef_\nu(\alpha)} \tag{1.10}$$

Ces moments existent seulement pour $r < 2\nu$ ($\nu > 0$).

La moyenne géométrique de la loi de Type B^{-1} est telle que (Boucher et al.-, 1989a):

$$G = m.\ \exp\left[\frac{-1}{2ef_\nu(\alpha)} \cdot \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu}\right] \tag{1.11}$$

2. ESTIMATION DES PARAMÈTRES POUR LES LOIS DE HALPHEN: PROPRIÉTÉS D'EXHAUSTIVITÉ

Si on possède une série d'observations quelconque qu'on suppose tirée d'une population statistique de forme connue, il est possible d'estimer, à partir des caractéristiques de l'échantillon, les paramètres de la population ainsi que leur variance d'estimation.

Pour une fonction de distribution quelconque, on peut généralement utiliser plusieurs méthodes d'estimation (ex.: méthode des moments, méthode du maximum de vraisemblance etc...). Ces méthodes peuvent conduire à des estimations plus ou moins bonnes des paramètres. Le critère d'acceptabilité d'un estimateur est basé principalement sur la variance de l'estimateur. Les meilleurs estimateurs seront évidemment ceux qui auront la variance minimale. De cette façon, la distribution de chaque estimateur est moins dispersée autour de la vraie valeur du paramètre.

En ce qui concerne les trois lois de Halphen, une seule méthode d'estimation de paramètres est considérée. En effet, les trois lois de Halphen possèdent des statistiques conjointemet exhaustives pour estimer les paramètres. Sur l'ensemble des lois statistiques à trois paramètres utilisées en hydrologie, les lois de Halphen sont les seules à posséder la propriété d'exhaustivité pour les trois paramètres et ce même pour des petits échantillons. C'est en réalité un des grands avantages pour l'application des lois de Halphen dans le domaine de l'hydrologie, particulièrement pour des échantillons de petite taille. Bobée (1975) a fait une synthèse des aspects théoriques des propriétés d'exhaustivité.

2.1 Estimateurs exhaustifs des lois de Halphen

Il est possible de montrer que les trois types de loi de Halphen appartiennent à la famille de lois exponentielles. En effet, une f.d.p. à k paramètres appartient à cette famille de lois si elle peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(x;\Theta_1,\ldots,\Theta_k)=a(\Theta_1,\ldots,\Theta_k)b(x)\exp\left[\sum_{i=1}^{k} c_i(\Theta_1,\ldots,\Theta_k)d_i(x)\right] \qquad (2.1)$$

où les fonctions $a(\Theta)$ et $c(\Theta)$: dépendent des paramètres; les fonctions $b(x)$ et $d(x)$: dépendent de x.

Les f.d.p. des lois de Halphen de type A (Eq.[1.1]), de type B (Eq. [Eq. 1.5]) et de type B^{-1} (Eq.[1.9]) peuvent être écrites sous la forme (2.1):

TYPE A

$$hA(x;\alpha,m,\nu)=\frac{1}{2m^{\nu}K_{\nu}(2\alpha)}\exp\left[-\frac{\alpha x}{m}-\frac{\alpha m}{x}+(\nu-1)\ln x\right] \qquad (2.2)$$

TYPE B

$$hB(\alpha,m,\nu)= \frac{2}{m^{2\nu}ef_{\nu}(\alpha)} \exp\left[\frac{\alpha x}{m} -\left(\frac{x}{m}\right)^2 + (2\nu-1)\ln x\right] \tag{2.3}$$

TYPE B^{-1}

$$hB^{-1}(\alpha,m,\nu)= \frac{2m^{2\nu}}{ef_{\nu}(\alpha)} \cdot \exp\left[\frac{\alpha m}{x} -\left(\frac{m}{x}\right)^2 - (2\nu+1)\ln x\right] \tag{2.4}$$

Ces trois types de loi font donc partie de la famille de lois exponentielles. De par le théorème de la factorisation (Kendall et Stuart, 1979), on a que pour un échantillon $x_1, x_2,\ldots,x_n$ provenant d'une f.d.p. $f(x;\Theta_1,\ldots,\Theta_k)$, les statistiques $Y_1=u_1(x_1,\ldots,x_n;\Theta_1,\ldots,\Theta_k),\ldots, Y_n=u_n(x_1,\ldots,x_n;\Theta_1,\ldots,\Theta_k)$ sont des statistiques conjointement exhaustives si la densité jointe de x_1, $x_2,\ldots x_n$, $\prod_{j=1}^{n} f(x_j;\Theta_1,\ldots,\Theta_k)$ peut être factorisée comme suit:

$$\prod_{j=1}^{n} f(x_j;\Theta_1,\ldots,\Theta_k)=g[u_1(x_1\ldots,x_n),\ldots,u_k(x_1,\ldots,x_n);\Theta_1,\ldots,\Theta_k]\ h(x_1,\ldots,x_n) \tag{2.5}$$

Un échantillon aléatoire X provenant d'une f.d.p. de la famille de lois exponentielles possède la fonction de densité jointe suivante:

$$\prod_{j=1}^{n} f(x_j;\Theta_1,\ldots\Theta_k)=a^{n}(\Theta_1,\ldots\Theta_k)\prod_{j=1}^{n} b(x_j)\exp\left[\sum_{i=1}^{k} c_i(\Theta_1,\ldots\Theta_k)\sum_{j=1}^{n} d_i(x_j)\right] \tag{2.6}$$

De par le théorème de la factorisation (Eq.[2.5]), on a que les valeurs $\sum d_1(x_j),\ldots\sum d_k(x_j)$ sont des statistiques conjointement exhaustives. Pour les trois types de loi de Halphen les fonctions de densité jointe sont:

TYPE A

$$\prod_{j=1}^{n} hA(x;\alpha,m,\nu)=\left[\frac{1}{2m^{\nu}K_{\nu}(2\alpha)}\right]^n\exp\left[-\alpha m\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j} - \frac{\alpha}{m}\sum_{j=1}^{n} x_j+(\nu-1)\sum_{j=1}^{n}\ln x_j\right] \tag{2.7}$$

TYPE B

$$\prod_{j=1}^{n} hB(x;\alpha,m,\nu)=\left[\frac{2}{m^{2\nu} ef_{\nu}(\alpha)}\right]^{n}\exp\left[(2\nu-1)\sum_{j=1}^{n}\ln x_j+\frac{\alpha}{m}\sum_{j=1}^{n}x_j-\frac{1}{m^2}\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right] \quad (2.8)$$

TYPE B^{-1}

$$\prod_{j=1}^{n} hB^{-1}(x;\alpha,m,\nu)=\left[\frac{2m^{2\nu}}{ef_{\nu}(\alpha)}\right]^{n}\exp\left[-(2\nu+1)\sum_{j=1}^{n}\ln x_j-m^2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{x_j}\right)^2+\alpha m\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\right] \quad (2.9)$$

En comparant les équations respectives [2.7], [2.8] et [2.9] ainsi que l'équation théorique [2.6], il existe pour chaque type de loi de Halphen, trois statistiques conjointement exhaustives. Les statistiques exhaustives pour chaque type de loi sont:

TYPE DE LOI	STATISTIQUES CONJOINTEMENT EXHAUSTIVES DE HALPHEN (3 MOYENNES)		
A	Harmonique $\frac{1}{H}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$	Géométrique $\ln G=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$	Arithmétique $A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$
B	Géométrique $\ln G=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$	Arithmétique $A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$	Quadratique $L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$
B^{-1}	Quadratique inverse $K=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}$	Harmonique $\frac{1}{H}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$	Géométrique $\ln G=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x$

3. ESTIMATION $\hat{X}_T$ DE L'ÉVÉNEMENT X_T ET DE VAR $\hat{X}_T$: PROCÉDURES GÉNÉRALES

Dès que les paramètres d'une distribution statistique sont estimés à partir d'un échantillon donné, il est possible de déterminer l'estimation $\hat{X}_T$ d'un événement X_T correspondant à une période de retour T fixée. En fait, on veut connaître la valeur théorique d'un événement X suivant une distribution donnée correspondant à une probabilité au dépassement précise [P(X > x)]. Dès que la valeur de l'événement X_T est estimée par $\hat{X}_T$, il s'avère important de déterminer la variance d'estimation de cet événement pour connaître l'ordre de grandeur de la précision de l'estimation $\tilde{X}_T$.

3.1 Détermination d'un événement X_T

Chow (1964) a proposé une équation générale pour estimer un événement de période de retour T dans le cas d'une distribution quelconque. Cette équation est:

$$X_T = \mu_1{}' + K_T\,\sigma \qquad (3.1)$$

où $\mu_1{}'$: moyenne de la population;
σ : écart-type de la population;
K_T : Facteur de fréquence propre à la distribution dépendant de la période de retour T et des paramètres de la distribution; cette valeur correspond à une valeur centrée réduite.

Puisque $\mu_1{}'$ et σ sont fonction des paramètres, l'évènement X_T est aussi fonction des paramètres, c'est-à-dire: $X_T = f(\alpha, \nu, m)$.

Lorsqu'on ajuste une loi quelconque à un échantillon de taille N $(x_1, x_2, \ldots x_N)$, on détermine la valeur estimée $\tilde{X}_T$ à l'aide des moments de l'échantillon par:

$$\tilde{X}_T = m_1{}' + \tilde{K}_T(m_2)^{1/2} \qquad (3.2)$$

où m_1' : moyenne de l'échantillon est un estimateur de μ_1';
$(m_2)^{1/2}$: écart-type de l'échantillon est un estimateur de σ;
$\tilde{K}_T$: Facteur de fréquence propre à la distribution dépendant de la période de retour T et des paramètres estimés de la distribution; $\hat{K}_T$ est un estimateur de K_T.

Dans le cas des lois de Halphen, aucune étude n'a encore été réalisée en ce qui à trait à la tabulation d'un facteur de fréquence K_T. Étant donné la complexité des f.d.p. des trois lois de Halphen, il est difficile d'établir une telle relation.

Dans le cadre de notre étude et du programme AJUST-HALPHEN (Boucher et al ., 1988b et c), l'estimation $\hat{X}_T$ de l'évènement théorique X_T d'une des lois de Halphen est réalisée pour 17 périodes de retour T (donc pour 17 probabilités au dépassement P car T = 1/P). Les valeurs des 17 probabilités au dépassement P choisies varient de 0,0001 à 0,9999. Pour les lois de Halphen, les différentes valeurs estimées $\hat{X}_T$ de l'événement théorique X_T sont déterminées par interpolation quadratique. La méthode d'interpolation quadratique utilisée dans le programme AJUST-HALPHEN est décrite dans les rapports concernant les ajustements statistiques de la loi de type A (Boucher et al., 1989b) et de types B et B^{-1} (Boucher et al., 1989c) et celle-ci ne sera pas reprise en détails ici.

Voici une brève description de l'approche générale utilisée pour l'estimation $\tilde{X}_T$ d'un évènement théorique X_T suivant une loi de Halphen:

Étape 1. Après avoir déterminé les valeurs des paramètres $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\nu}$ et $\tilde{m}$ estimation des paramètres α, ν et m d'une distribution Halphen, on évalue pour plusieurs valeurs de x (100 points) la fonction de distribution $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx$.

Le calcul de la fonction de distribution F(x) d'un des types de loi de Halphen, sur une intervalle de variation donné (0,x), est réalisé par le programme "PROBTAB" développé par Boucher et al. (1989d). Un algorithme a été développé par Boucher *et al.* (1989b et c) afin de déterminer les valeurs de x pour lesquelles, la fonction F(x) sera évaluée.

De manière générale, l'algorithme détermine la valeur minimale de x_{min} telle que $P(X \leq x_{min}) < 0{,}0001$ et la valeur maximale de x_{max} telle que $P(X \leq x_{max}) > 0.9999$. Dès que ces deux valeurs sont trouvées, on découpe l'intervalle (x_{min}, x_{max}) de manière à obtenir 100 valeurs de x. On procède alors au calcul des F(x) pour chacune des valeurs de x par le programme "PROBTAB". On possède alors plusieurs couples de valeurs de (x, F(x)).

Étape 2. On détermine alors la probabilité au dépassement $P(X > x) = 1 - F(x)$ pour chacun des points x fixés.

Étape 3. Pour les diverses probabilités au dépassement $P(X > x) = 1/T$ fixées par le programme "AJUST-HALPHEN", il est alors possible, par interpolation quadratique, d'estimer les valeurs des événements $\tilde{X}_T$ de période de retour T (où $T = 1 / (1-F(x))$.

Comme on peut le constater, l'estimation de $\tilde{X}_T$ d'un événement théorique X_T suivant une loi de Halphen est réalisée de façon numérique seulement. Selon les valeurs des paramètres des lois de Halphen, la méthode décrite précédemment n'est pas assez précise (c.f. Boucher *et al.*, 1989b et c); surtout pour des valeurs faibles ou fortes de probabilités au dépassement. Il faudra peut-être envisager une approche plus théorique, déterminer des approximations polynômiales pour de périodes de retour T fixes pour l'évaluation de X_T d'une loi de Halphen (cette approche nécessiterait la tabulation de X_T en fonction de période de retour T précise) ou tout simplement, procéder à l'amélioratin de l'algorithme décrit précédemment. Dans le but d'améliorer la précision de l'estimation $\tilde{X}_T$ d'un événement X_T d'une loi de Halphen, on devrait utiliser l'algorithme suivant:

Étape 1. Selon les paramètres estimés $\tilde{\alpha}$, $\tilde{m}$ et $\tilde{\nu}$ d'une des lois de Halphen, on peut déterminer la valeur moyenne $X_1 = \tilde{\mu}'_1$ de la $F(\tilde{\mu}'_1) = P(X \leq \tilde{\mu}'_1)$.

Étape 2. On refait l'étape 2, en utilisant cette fois-ci, la valeur de $X_2 = \tilde{\mu}_1' + \tilde{\sigma}$ et on détermine : $F(\tilde{\mu}_1' + \tilde{\sigma}) = P(X \leq \tilde{\mu}_1' + \tilde{\sigma})$:

Étape 3. On trouve les valeurs des probabilités au dépassement pour nos deux valeurs de X_1 et X_2, c'est-à-dire:
1. $F(\tilde{\mu}_1') = P'(\mu_1')$
2. $F(\tilde{\mu}_1' + \sigma) = P'(\tilde{\mu}_1' + \tilde{\sigma})$

On trouve alors parmi les 17 probabilités au dépassement du programme AJUST-HALPHEN, la probabilité au dépassement qui se rapproche le plus des deux valeurs précédemment trouvés (P'). Par la suite, le but de l'algorithme consiste à cerner dans un intervalle de variation (X_1, X_2), la valeur de X correspondant à une période de retour T fixée. Dès que cette valeur est cernée, on réduit l'intervalle de variation de moitié de manière à s'approcher de plus en plus de la vraie valeur de X_T pour une loi de Halphen de paramètres fixes.

Une prochaine étude sera bientôt réalisée afin de comparer ce nouvel algorithme et le présent algorithme d'estimation $\hat{X}_T$ d'un événement théorique X_T d'une loi de Halphen.

3.2 DÉTERMINATION DE LA VARIANCE D'UN ÉVÉNEMENT $\tilde{X}_T$

Si une f.d.p. dépend de trois paramètres, l'événement de période de retour T dépend lui aussi des trois paramètres c'est-à-dire que:

$$X_T = f(\alpha,\nu,m,T) \text{ est estimé par } \tilde{X}_T = f(\tilde{\alpha},\tilde{\nu},\tilde{m},T) \tag{3.3}$$

où $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\nu}$ et $\tilde{m}$ sont des estimations des paramètres α, ν et m.

Pour T donné la variance d'un événement $\tilde{X}_T$ est telle que:

$$\mathrm{Var}(\tilde{X}_T) = \left(\frac{\partial \tilde{X}_T}{\partial \alpha}\right)^2 \mathrm{Var}\,\tilde{\alpha} + 2\left(\frac{\partial \tilde{X}_T}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \tilde{X}_T}{\partial \nu}\right) \mathrm{Cov}(\tilde{\alpha},\tilde{\nu}) + \left(\frac{\partial \tilde{X}_T}{\partial \nu}\right)^2 \mathrm{Var}(\tilde{\nu}) + 2\left(\frac{\partial \tilde{X}_T}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \tilde{X}_T}{\partial m}\right)$$

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\alpha},\tilde{m}) + \left(\frac{\partial \tilde{X}_T}{\partial m}\right)^2 \mathrm{Var}\,\tilde{m} + 2\left(\frac{\partial \tilde{X}_T}{\partial m}\right)\left(\frac{\partial \tilde{X}_T}{\partial \nu}\right) \mathrm{Cov}(\tilde{\nu},\tilde{m}) \qquad (3.4)$$

Le calcul de la variance consiste donc à évaluer:

a. Les variances et les covariances des paramètres;

b. Les dérivées partielles de $\tilde{X}_T$ par rapport aux paramètres.

a. <u>Évaluation des variances et des covariances des paramètres</u>

Les variances et les covariances des paramètres dépendent de la méthode utilisée pour l'estimation des paramètres. Dans le cas des lois de Halphen, la méthode d'estimation des paramètres consiste à égaler trois moments non-centrés d'ordre r ($r = r_1, r_2, r_3$) de l'échantillon (m'_r) aux trois moments correspondants d'ordre r non-centrés de la population (μ'_r). L'ordre des moments choisis dépende du type de loi de Halphen utilisée; par exemple, pour la loi de type A, on utilise les moments non-centrés d'ordre $r_1 = -1$, r_2 = quasi-zéro et $r_3 = 1$. Alors les variances et covariances des paramètres dépendent des variances et des covariances des moments utilisés.

Si on utilise la notation $M_1 = m'_{r_1}$, $M_2 = m'_{r_2}$ et $M_3 = m'_{r_3}$ les variances et les covariances des moments non-centrés de l'échantillon (M_r) sont reliées aux variances et aux covariances des paramètres par:

$$\mathrm{Cov}\,(M_r,M_q) = \sum_j \left(\frac{\partial M_r}{\partial \Theta_j}\right)\left(\frac{\partial M_q}{\partial \Theta_j}\right) \mathrm{var}\,(\Theta_j) + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}}\sum \left(\frac{\partial M_r}{\partial \Theta_j}\right)\left(\frac{\partial M_q}{\partial \Theta_i}\right) \mathrm{Cov}(\Theta_j,\Theta_i) \quad (3.5)$$

où $r, q = 1,2$ et 3

$\Theta_j = m, \alpha$ et ν

$j=1,2,3$

En posant r=q dans l'équation (3.5), on peut trouver la valeur de la variance du moment M_r. Si on écrit l'équation (3.5) sous forme matricielle, on obtient le système suivant:

$$\begin{bmatrix} Var\ (M_1) \\ Var\ (M_2) \\ Var\ (M_3) \\ Cov\ (M_1,\ M_2) \\ Cov\ (M_1,\ M_3) \\ Cov\ (M_2,\ M_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & \cdots & V_{16} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ V_{61} & \cdots & V_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Var\ \Theta_1 \\ Var\ \Theta_2 \\ Var\ \Theta_3 \\ Cov\ (\Theta_1,\Theta_2) \\ Cov\ (\Theta_1,\Theta_3) \\ Cov\ (\Theta_2,\Theta_3) \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

ou

$$(V_m) \qquad = \qquad (V) \qquad . \qquad (V_p)$$

V_m est la matrice donnant les variances et covariances des moments non-centrés. V_p est la matrice donnant les variances et les covariances des paramètres.

La matrice V est communément appelée la matrice de dispersion, elle est définie de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 & 2A_{11}A_{12} & 2A_{11}A_{13} & 2A_{12}A_{13} \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 & A_{23}^2 & 2A_{21}A_{22} & 2A_{21}A_{23} & 2A_{22}A_{23} \\ A_{31}^2 & A_{32}^2 & A_{33}^2 & 2A_{31}A_{32} & 2A_{31}A_{33} & 2A_{32}A_{33} \\ A_{11}A_{21} & A_{12}A_{22} & A_{13}A_{23} & (A_{11}A_{22}+A_{12}A_{21}) & (A_{11}A_{23}+A_{13}A_{21}) & (A_{12}A_{23}+A_{13}A_{22}) \\ A_{11}A_{31} & A_{12}A_{32} & A_{13}A_{33} & (A_{11}A_{32}+A_{12}A_{31}) & (A_{11}A_{33}+A_{13}A_{31}) & (A_{12}A_{33}+A_{13}A_{32}) \\ A_{21}A_{31} & A_{22}A_{32} & A_{23}A_{33} & (A_{21}A_{32}+A_{22}A_{31}) & (A_{21}A_{33}+A_{23}A_{31}) & (A_{22}A_{33}+A_{23}A_{32}) \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

avec les termes $A_{rj} = \partial M_r/\partial \Theta_j$ $\qquad$ r,j =1,2 et 3

Les termes A_{rj} peuvent être facilement calculés à l'aide des relations donnant les moments μ'_r non-centrés en fonction des paramètres des lois de type A.

(Eq. 1.3) de type B (Eq. 1.7) et de type B^{-1}(Eq. 1.8).

La matrice des variances et covariances des moments (V_m) peut être calculée pour tout moment non-centré d'ordre r et q, à partir des expressions générales définies par Kendall et Stuart (1963):

$$\text{Var } m'_r = (\mu'_{2r} - \mu'^2_r) / N \qquad (3.8)$$

$$\text{Cov } (m'_r, m'_q) = (\mu'_{q+r} - \mu'_r \mu'_q) /N \qquad (3.9)$$

Les moments μ'_{-r} sont évalués en fonction des paramètres estimés $\tilde{\alpha}$, $\tilde{m}$ et $\tilde{\nu}$.

Lorsque les matrices V_m et V sont connus, il est alors possible d'évaluer la matrice de variance et de covariance des paramètres V_p par la relation:

$$V_p = V^{-1} . V_m \qquad (3.10)$$

Pour le calcul de la variance d'un événement $\tilde{X}_T$ (cf. Eq. 3.4), il suffit alors d'évaluer les dérivées partielles de $\tilde{X}_T$ par rapport à chacun des paramètres estimés.

b. Évaluation des dérivées partielles $\partial \tilde{X}_T / \partial \theta_j$

Comme on l'a mentionné à la section (3.1), l'estimation $\tilde{X}_T$ de l'événement X_T pour chacun des types de loi de Halphen est déterminée de façon numérique.

Par le fait même, les dérivées partielles de $\tilde{X}_T$ par rapport aux paramètres m, α et ν seront également évaluées numériquement.

Par définition, le terme $\partial\tilde{X}_T / \partial\Theta_j$ représente la variabilité d'un événement $\tilde{X}_T$ par rapport à un paramètre choisi Θ_j. On obtient une approximation de la valeur de la dérivée $\partial\tilde{X}_T/\partial\Theta_j$ en utilisant la définition de la dérivée.

Par exemple, pour évaluer la dérivée partielle $\partial\tilde{X}_T/\partial m$, on utilise la définition de la dérivée:

$$\partial\tilde{X}_T/\partial m = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{X}_T(\tilde{\alpha},\tilde{\nu},\tilde{m}+h) - \tilde{X}_T(\tilde{\alpha},\tilde{\nu},\tilde{m}-h)}{2h} \tag{3.11}$$

La valeur de h a été fixée à 1,0 * 10E-5. Dans l'équation 3.11, les valeurs de $\tilde{X}_T$ pour des paramètres $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\nu}$ et $\tilde{m}+h$, sont estimées selon la procédure décrite à la section (3.1). On utilise la même procédure pour estimer les valeurs de $\tilde{X}_T(\tilde{\alpha}, \tilde{\nu}, \tilde{m}-h)$.

Par la suite, il est alors possible d'obtenir une approximation de la valeur de la dérivée partielle $\delta\tilde{X}_T / \delta m$ pour toute valeur de période de retour T fixée.

On utilise la même procédure pour l'évaluation des deux autres dérivées partielles $\partial\tilde{X}_T / \partial m$ et $\partial\tilde{X}_T/\partial\nu$.

3.3 DÉTERMINATION DE L'INTERVALLE DE CONFIANCE D'UN ÉVÉNEMENT X_T

Pour une distribution statistique spécifique ajustée à un échantillon, on obtient l'estimation $\tilde{X}_T$ de l'événement X_T avec Var $\tilde{X}_T$. Il est alors possible d'évaluer l'intervalle de confiance de X_T en faisant l'hypothèse que $\hat{X}_T$ suit approximativement une loi Normale de moyenne $E(\hat{X}_T)=X_T$ et de variance Var $\hat{X}_T$; l'intervalle de confiance est alors:

$$\tilde{X}_T - U_{\alpha/2}(\mathrm{Var}\ \tilde{X}_T)^{1/2} \leq X_T \leq \tilde{X}_T + U_{\alpha/2}\ (\mathrm{Var}(\tilde{X}_T))^{1/2}) \tag{3.12}$$

où $U_{\alpha/2}$ correspond à la variable Normale standard réduite de probabilité au dépassement $\alpha/2$

En considérant plusieurs périodes de retour donc plusieurs probabilités au dépassement P (car T = 1/P), il est alors possible de tracer point par point l'intervalle de confiance de la distribution théorique choisie. Dans le programme AJUST-HALPHEN (Boucher et al., 1988b et c.), 17 probabilités au dépassement sont considérées.

4. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE LA LOI DE HALPHEN DE TYPE A

4.1 Méthode d'estimation des paramètres de la loi de type A

La f.d.p. de loi de Halphen de type A, donnée à l'équation 1.1, possède trois statistiques conjointement exhaustives pour les paramètres α, ν et m (c.f. Section 2.1 et Dvorak et al., 1988).

Pour la loi de Halphen de type A, les trois statistiques exhaustives sont Σx_i, $\Sigma 1/x_i$ et $\Sigma \ln x_i$. Ces statistiques conjointement exhaustives sont des estimateurs ayant la propriété de posséder la variance minimale pour déterminer des fonctions des paramètres de la loi. Pour la loi de Halphen de type A, les statistiques $(\Sigma x_i)/N$, $(\Sigma 1/x_i)/N$ et $(\Sigma \ln x_i)/N$ sont les estimateurs qui ont la variance minimale d'estimation pour les moments respectifs suivants: moyenne arithmétique, moyenne harmonique et moyenne géométrique.

La méthode optimale d'estimation des paramètres de la loi de type A consiste à égaler les moments d'ordre 1 (moyenne arithmétique), d'ordre -1 (moyenne harmonique) et d'ordre quasi-zéro (logarithme de la moyenne géométrique) de l'échantillon à ceux de la population. Cette méthode est optimale pour des petits échantillons.

Pour estimer les trois paramètres (α,m et ν) de la loi de Halphen de type A, il est nécessaire de résoudre le système Q(x) d'équations non-linéaires suivant:

$$Q(x) = \left[\begin{array}{c} A = (\Sigma\ x_i)/N \ = \ m \dfrac{K_{\nu+1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} \\[2ex] 1/H = (\Sigma\ 1/x_i)/N = \dfrac{1}{m} \left(\dfrac{K_{\nu-1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)}\right) \\[2ex] \ln G = (\Sigma\ \ln x_i)/N = \ \ln m + \left(\dfrac{1}{K_\nu(2\alpha)}\right) \left(\dfrac{\partial K_\nu(2\alpha)}{\partial \nu}\right) \end{array} \right] \qquad (4.1)$$

On peut démontrer (c.f. Appendice A) que ce système d'équations est équivalent au système obtenu en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

Le système (4.1) d'équations non-linéaires est assez difficile à résoudre. En effet, la présence de la fonction de Bessel $K_\nu(2\alpha)$ ne permet pas d'isoler un des deux paramètres de forme α et ν. Pour résoudre ce système Q(x), on doit faire appel à une méthode itérative de résolution numérique appelée "méthode de Quasi-Newton" (Burden *et al.,* 1978). La description de l'algorithme de la méthode Quasi-Newton est présentée à l'appendice B.

En fait, il aurait été possible d'utiliser la méthode itérative de Newton-Raphson au lieu de la méthode de Quasi-Newton. Cependant, la méthode de Newton-Raphson demande à chaque itération, le calcul de la matrice Jacobienne. Dans le cas des lois de Halphen, les fonctions utilisées dans la matrice Jacobienne tant pour la loi de type A, de type B et type B^{-1}, sont assez complexes (fonction de Bessel et fonction exponentielle factorielles) et requiert beaucoup de temps calcul. On a donc intérêt à utiliser la méthode de Quasi-Newton qui ne demande qu'un seul calcul de la matrice Jacobienne à la première itération. Par la suite, cette méthode n'utilise qu'une approximation de celle-ci. La méthode de Quasi-Newton est plus rapide pour estimer les paramètres des lois de Halphen que la méthode de Newton- Raphson; elle est généralement aussi précise que la méthode Newton-Raphson.

En pratique, on évalue, à partir d'une série de valeurs observées, les paramètres α, m et ν de la loi de type A de la façon suivante (Programme AJUST-HALPHEN, Boucher *et al.* 1988b):

1. Détermination des moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de l'échantillon

2. Élimination du paramètre d'échelle m en utilisant les rapports suivants:

$$m_1' / m_{-1}' \text{ ou } A / H; \qquad (4.2)$$
$$m_0' / m_1' \text{ ou } G / A$$

Le système Q(x) (4.1) se réduit ainsi à deux équations à deux inconnus (α et ν);

3. Utilisation de modèles polynômiaux pour initialiser les valeurs des paramètres $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\nu}$. À partir de valeurs théoriques de paramètres α et ν (en posant m = 1), on a déterminé les valeurs théoriques des coefficients d'asymétrie (C_s) et de variation (C_v). A partir de ces valeurs, on a déterminé des modèles polynômiaux de degré 5 de la forme suivante (cf. Boucher *et al.*, 1988b):

$$\tilde{\alpha} = P_n(C_v, C_s)$$
$$\tilde{\nu} = P_n'(C_v, C_s)$$ où P_n et P_n' sont des polynômes de degré n = 5.

   Ces modèles donnent une première estimation des paramètres $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\nu}$ mais ils ne sont pas assez précis pour estimer les vraies valeurs des paramètres α et ν. On doit alors faire appel à la méthode itérative de résolution de système d'équations non-linéaires.

<u>Remarque</u>: Initialement, on a voulu concevoir des modèles polynômiaux reliant les paramètres α et ν aux rapports A / H et G / A, cependant les valeurs des rapports sont tellement correlées que les modèles polynômiaux (même du 5 ième degré) sont imprécis.

4. Utilisation de la méthode itérative de Quasi-Newton (c.f. Appendice B) pour estimer les deux paramètres de forme $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\nu}$.

Note: Le système d'équations non-linéaires à résoudre et la matrice Jacobienne utilisée dans la méthode Quasi-Newton pour la loi de type A sont indiqués à l'Appendice B.1

5. Estimation du paramètre d'échelle m en considérant la première équation du système 4.1 qui consiste à égaler la moyenne arithmétique de la population (pour $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\nu}$ estimés) à celle de l'échantillon:

$$\Sigma x_i/N = \tilde{m} \left(\frac{K_{\tilde{\nu}+1}(2\tilde{\alpha})}{K_{\tilde{\nu}}(2\tilde{\alpha})}\right) \tag{4.3}$$

Une fois les paramètres α, ν et m estimés par $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\nu}$, et $\tilde{m}$ il est alors possible de réaliser un ajustement de la loi de type A à la série de données observées.

4.2 ESTIMATION $\tilde{X}_T$ DE L'ÉVÉNEMENT X_T

Comme on l'a vu à la section 3.1, dès que les paramètres α, ν et m sont estimés, il est alors possible d'estimer les valeurs de $\hat{X}_T$. Cette estimation $\tilde{X}_T$ de l'événement théorique X_T de période de retour T pour la loi de type A est alors réalisée selon la procédure décrite à la section 3.1.

Pour plus de précision sur la procédure d'estimation $\tilde{X}_T$ d'un événement X_T provenant d'un ajustement de la loi de Halphen de type A, on doit se référer au rapport de Boucher et al. (1988b).

4.3 DÉTERMINATION DE VAR $\tilde{X}_T$ ET DE L'INTERVALLE DE CONFIANCE ASSOCIÉ À X_T

Le calcul de la variance de l'estimation $\tilde{X}_T$ d'événement X_T provenant de l'ajustement d'une loi de Halphen de type A se fait selon l'équation (3.4).

On doit alors évaluer les dérivées partielles de $\tilde{X}_T$ par rapport aux paramètres α, ν et m estimées par les valeurs $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\nu}$ et $\tilde{m}$ ainsi que les variances et covariances des paramètres (c.f. Eq. 3.6) de la loi de type A. On sait que l'évaluation des paramètres pour la loi de type A consiste à égaler les moments de l'échantillon (m'_r) d'ordre 1, $\underline{0}$ et -1 à ceux de la population (μ'_r). Il est alors possible d'évaluer les variances et covariances des paramètres à l'aide de la matrice de dispersion V (cf. Eq. 3.7). Comme on l'a vu précédemment pour le calcul de la matrice de dispersion V (section 3.2), il est nécessaire de calculer les termes A_{rj} pour r et j =1, 2 et 3 (cf. Eq 3.7).

Les termes A_{rj} sont définis en 3.2 par:

$$A_{r,j} = (\partial M_r/\partial \Theta_j) \qquad r,j=1,2,3$$

Avec dans le cas de la loi de type A:

$$M_1 = \mu_{-1}' \quad ; \quad M_2 = \mu_{\underline{0}}' \quad ; \quad M_3 = \mu_1'$$
$$\Theta_1 = m \quad ; \quad \Theta_2 = \nu \quad ; \quad \Theta_3 = \alpha$$

Pour la loi de type A, les moments non-centrés d'ordre -1 et 1 sont obtenus par la relation 1.3 et le moment d'ordre quasi-zéro est obtenu par la relation 1.4. Les termes de la matrice de dispersion peuvent être obtenus à l'aide des trois équations:

$$M_1 = \mu_{-1}' = \frac{1}{m}\left(\frac{K_{\nu-1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)}\right)$$

$$M_2 = \mu_{\underline{0}}' = \ln m + \left(\frac{1}{K_\nu(2\alpha)}\right)\left(\frac{\partial K_\nu(2\alpha)}{\delta_\nu}\right)$$

$$M_3 = \mu_1' = m\left(\frac{K_{\nu+1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)}\right)$$

En dérivant chacune des trois équations par rapport à chacun des trois paramètres, on obtient les termes A_{rj} (r et j=1,2,3), c'est-à-dire:

$$A_{11} = \partial\mu'_{-1}/\partial m = -\frac{\mu'_{-1}}{m}$$

$$A_{12} = \partial\mu'_{-1}/\partial\nu = \mu'_{-1}[(\frac{1}{K_{\nu-1}(2\alpha)})(\frac{\partial K_{\nu-1}(2\alpha)}{\partial\nu}) - (\frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)})(\frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial\nu})]$$

$$A_{13} = \partial\mu_{-1}'/\partial\alpha = \mu_{-1}'[(\frac{1}{K_{\nu-1}(2\alpha)})(\frac{\partial K_{\nu-1}(2\alpha)}{\partial\alpha}) - (\frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)})(\frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial\alpha})]$$

$$A_{21} = \delta\mu_{\underline{0}}/\partial m = 1/m$$

$$A_{22} = \delta\mu'_{\underline{0}}/\partial\nu = \frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)}[(\frac{\partial K_{\nu}^{2}(2\alpha)}{\partial\nu^{2}}) - (\frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)})(\frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial\nu})^{2}]$$

$$A_{23} = \frac{\partial\mu_{\underline{0}}'}{\partial\alpha} = \frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)}\ [\frac{\partial^{2}K_{\nu}(2\alpha)}{\partial\nu\partial\alpha} - \frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)}\ \frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial\alpha}\ \frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial_{\nu}} \tag{4.4}$$

$$A_{31} = \partial\mu_{1}'/\partial m = \frac{K_{\nu+1}(2\alpha)}{K_{\nu}(2\alpha)}$$

$$A_{32} = \partial\mu_{1}'/\partial\nu = \mu_{1}'[(\frac{1}{K_{\nu+1}(2\alpha)})(\frac{\partial K_{\nu+1}(2\alpha)}{\partial\nu}) - (\frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)})(\frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial\nu})]$$

$$A_{33} = \partial\mu_{1}'/\partial\alpha = \mu_{1}'[(\frac{1}{K_{\nu+1}(2\alpha)})(\frac{\partial K_{\nu+1}(2\alpha)}{\partial\alpha}) - (\frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)})(\frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial\alpha})]$$

Quand les termes A_{rj} sont déterminés, il est possible d'évaluer la matrice de dispersion V (cf. Eq. 3.7). À cette étape, il ne reste qu'à évaluer la matrice V_m des variances et covariances des moments utilisés pour l'estimation des paramètres.

Les équations 3.8 et 3.9 (Kendall et Stuart (1963), permettent de déterminer les variances et covariances des moments d'ordre -1 et d'ordre 1:

$$\mathrm{Var}(m_{-1}') = (\mu_{-2}' - \mu_{-1}'^{2}) / N \tag{4.5}$$

$$\mathrm{Var}(m_{1}') = (\mu_{2}' - \mu_{1}'^{2}) / N \tag{4.6}$$

$$\mathrm{Cov}(m_{-1}',m_{1}') = (1 - \mu_{-1}'\ \mu_{1}') / N \tag{4.7}$$

Étant donné que le moment d'ordre quasi-zéro ($\mu_{\underline{0}}'$) ne s'obtient pas par la formule générale 1.3, on ne peut pas utiliser directement les formules de Kendall et Stuart pour évaluer les termes suivants: $Var(m'_0)$, $Cov(m'_0,m'_{-1})$ et $Cov(m'_0,m'_1)$. Il est donc nécessaire d'utiliser la formule générale de la variance et covariance pour déterminer ces trois termes. L'appendice E démontre que les termes $Var(\underline{m}'_0)$, $Cov(\underline{m}'_0,m'_1)$ et $Cov(\underline{m}'_0,m'_1)$ sont donnés par:

$$Var(\underline{m}'_0) = \left(\frac{1}{NK_\nu(2\alpha)}\right)\left[\left(\frac{\partial K^2_\nu(2\alpha)}{\partial \nu^2}\right) - \left(\frac{1}{K_\nu(2\alpha)}\right)\left(\frac{\partial K_\nu(2\alpha)}{\partial \nu}\right)^2\right] \tag{4.8}$$

$$Cov(\underline{m}'_0,m'_{-1}) = \left(\frac{\mu'_{-1}}{N}\right)\left[\left(\frac{1}{K_{\nu-1}(2\alpha)}\right)\left(\frac{\partial K_{\nu-1}(2\alpha)}{\partial \nu}\right) - \left(\frac{1}{K_\nu(2\alpha)}\right)\left(\frac{\partial K_\nu(2\alpha)}{\partial \nu}\right)\right] \tag{4.9}$$

$$Cov(\underline{m}'_0,m'_1) = \left(\frac{\mu'_1}{N}\right)\left[\left(\frac{1}{K_{\nu+1}(2\alpha)}\right)\left(\frac{\partial K_{\nu+1}(2\alpha)}{\partial \nu}\right) - \left(\frac{1}{K_\nu(2\alpha)}\right)\left(\frac{\partial K_\nu(2\alpha)}{\partial \nu}\right)\right] \tag{4.10}$$

Lorsque chacun des termes de la matrice V_m est connu, il est possible de déterminer la matrice des variances et covariances des paramètres à l'aide de l'équation 3.10.

Après l'évaluation des variances et covariances des paramètres, on doit déterminer les dérivées partielles $\partial \tilde{X}_T/\partial \Theta_j$ pour utiliser la relation (3.4) donnant Var $\tilde{X}_T$.

La valeur d'un événement $\tilde{X}_T$ pour la loi de Halphen de type A est déterminée par méthode numérique. Les dérivées partielles de $\tilde{X}_T$ par rapport aux paramètres m, α et ν sont également évaluées numériquement.

Dans le programme AJUST-HALPHEN (Boucher et al., 1989b), chaque dérivée partielle $(\partial \tilde{X}_T/\partial \Theta_j)$ de l'estimation $\tilde{X}_T$ par rapport à chacun des paramètres de la loi de type A est calculée à partir de la définition de la dérivée donnée par l'équation 3.11.

En considérant plusieurs probabilités au dépassement P et ayant calculé

Var $\tilde{X}_T$ pour chaque événement estimé $\tilde{X}_T$ par la loi de type A, il est possible de tracer point par point l'intervalle de confiance de la loi de Halphen de type A, pour un niveau fixé de α, en utilisant l'équation (3.12).

5. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE LA LOI DE HALPHEN DE TYPE B

5.1 Méthode d'estimation des paramètres de la loi de type B

La f.d.p. de la loi de Halphen de type B fait partie de la famille de loi exponentielle;

Elle possèede trois statistiques conjointement exhaustives (c.f. sectin 2.1 et Dvorak et al., 1988)

Les trois statistiques conjointement exhaustives pour la loi de type B sont Σx_i, Σx_i^2 et $\Sigma \ln x_i$. Pour concernant l'estimation des paramètres de la loi de type B, il est nécessaire de résoudre le système d'équations R(x) qui revient à égaler les moyennes arithmétique, quadratique et géométrique de l'échantillon à ceux de la population:

$$R(x) = \begin{bmatrix} A = \Sigma x_i \,/\, N = \dfrac{m \; ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{ef_\nu(\alpha)} \\[2ex] Q = \Sigma x_i^2 \,/\, N = \dfrac{m^2 \; ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef_\nu(\alpha)} \\[2ex] \ln G = \Sigma \ln x_i \,/\, N = \ln m + \left(\dfrac{1}{2ef_\nu(\alpha)}\right)\left(\dfrac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu}\right) \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

Cette méthode est équivalente à la méthode du maximum de vraisemblance (cf. Appendice C)

Dans le cadre du programme AJUST-HALPHEN (Boucher et al., 1989c), la résolution du système R(x) d'équations non-linéaires est effectuée de manière similaire à la loi de Halphen de type A:

1. Évaluation des moyennes arithmétique, quadratique et géométrique de l'échantillon

2. Élimination du paramètre d'échelle m, en utilisant les rapports suivants:

$$(\mu_2')/\mu_1'^2 \text{ ou } Q\ /\ A^2;$$
$$(\mu_0/\mu_1') \text{ ou } G\ /\ A.$$

   Le système 5.1 peut donc se réduire à deux équations à deux inconnus (α et ν) .

3. Utilisation de modèles polynômiaux pour initialiser les paramètres α et ν. Comme pour la loi de Halphen de type A, les valeurs des coefficients d'asymétrie (C_s) et de variation (C_v) de la population ainsi que les rapports Q/A^2 et G/A ont été calculés pour plusieurs valeurs théoriques de paramètres α et ν. À partir de ces valeurs, des modèles polynômiaux ont été établis; ces modèles sont de la forme suivante:

$$\alpha = P_n(C_s,\ C_v,\ (Q/A^2)\ ,\ (G/A)\ )$$
$$\nu = P_n'(C_s,\ C_v,\ (Q/A^2)\ ,\ (G/A)\ )$$

   où P_n et P_n' sont des polynômes de degré n = 5.

   À partir de ces estimateurs obtenus de $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\nu}$, il est alors possible de résoudre le système d'équation R(x) pour les paramètres α et ν par une méthode itérative.

   Remarque: Les premiers modèles polynômiaux réalisés dépendaient seulement des valeurs de C_s et C_v, cependant des essais avec les modèles ci-haut mentionnés, ont démontré que ces derniers étaient plus performants.

4. Utilisation de la méthode itérative Quasi-Newton)c.f. Appendice B.2) pour

estimer les paramètres α et ν.

5. Estimation du paramètre d'échelle m en utilisant l'égalité des moyennes de la population (utilisant les paramètres estimés $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\nu}$) et de l'échantillon:

$$(\Sigma x_i/N) = \tilde{m}\ \left(\frac{ef_{\tilde{\nu}+\frac{1}{2}}(\tilde{\alpha})}{ef_{\tilde{\nu}}(\tilde{\alpha})}\right)$$

6. Détermination de la fonction de distribution F(x) de la loi de Halphen de type B en utilisant les paramètres estimés $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\nu}$ et $\tilde{m}$.

5.2 Estimation $\tilde{X}_T$ de l'événement X_T

Les estimateurs conjointement exhaustifs de la loi de Halphen de type B sont la moyenne arithmétique, la moyenne quadratique et le logarithme de la moyenne géométrique. L'estimation $\tilde{X}_T$ de l'événement X_T pour la loi de type B est alors évaluée selon l'approche générale décrite à la section 3.1 (c.f. Programme AJUST-HALPHEN, Boucher et al., 1988c) :

5.3 DÉTERMINATION DE VAR $\tilde{X}_T$ ET DE L'INTERVALLE DE CONFIANCE ASSOCIÉ À X_T

La valeur d'un évènement X_T provenant de l'ajustement de la loi de Halphen de type B dépend des trois paramètres α, m et ν. La variance de $\tilde{X}_T$ provenant de l'ajustement d'une loi de type B est obtenue par la relation générale 3.4.

Tout comme pour la loi de type A, pour connaître la valeur de la variance de l'estimation $\tilde{X}_T$ d'un événement théorique X_T, on doit déterminer les variances et covariances des paramètres et les valeurs des dérivées partielles $(\partial\tilde{X}_T/\partial\Theta_j)$ où Θ_1 = m; $\Theta_2 = \alpha$ et $\Theta_3 = \nu$).

Les variances et covariances des paramètres de la loi de type B dépendent des variances et covariances des moments qui ont servis à estimer les paramètres de la loi. Dans le cas de la loi de type B, les moments utilisés sont les moyennes arithmétique, quadratique et géométrique.

On évalue les variances et covariances des paramètres à l'aide de la matrice de dispersion V (cf. Eq. 3.7). Les termes A_{rj} pour r et j =1, 2 et 3 de la matrice de dispersion V sont définis pour la loi de type B par (note: les moments de l'échantillon m_r' sont égaux à ceux de la population μ_r').

1. On pose:

$$M_1 = \mu_2' \quad ; \quad M_2 = \mu_1' \quad ; \quad M_3 = \mu_0'$$
$$\Theta_1 = m \quad ; \quad \Theta_2 = \alpha \quad ; \quad \Theta_3 = \nu$$

où

$$M_1 = \mu_2' = \frac{m^2 \, ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef_\nu(\alpha)}$$

$$M_2 = \mu_1' = \frac{m \, ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{ef_\nu(\alpha)}$$

$$M_3 = \mu_0' = \ln m + \left(\frac{1}{2ef_\nu(\alpha)}\right)\left(\frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu}\right)$$

2. On dérive chacune de ces trois équations par rapport à chacun des trois paramètres, on obtient les termes A_{rj} (r et j=1,2,3) c'est-à-dire:

   (Dans les équations qui suivent la valeur $ef_\nu(\alpha)$ est notée ef_ν.)

$$A_{11} = \frac{2\mu_2'}{m}$$

$$A_{12} = \mu_2'\left[\left(\frac{1}{ef_{\nu+1}}\right)\left(\frac{\partial ef_{\nu+1}}{\partial \alpha}\right) - \left(\frac{1}{ef_\nu}\right)\left(\frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \alpha}\right)\right]$$

$$A_{13} = \mu_2'[(\frac{1}{ef_{\nu+1}})(\frac{\partial ef_{\nu+1}}{\partial \nu}) - (\frac{1}{ef_\nu})(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu})]$$

$$A_{21} = \frac{\mu_1'}{m}$$

$$A_{22} = \mu_1'[(\frac{1}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}})(\frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}}{\partial \alpha}) - (\frac{1}{ef_\nu})(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \alpha})] \qquad (5.2)$$

$$A_{23} = \mu_1'[(\frac{1}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}})(\frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}}{\partial \nu}) - (\frac{1}{ef_\nu})(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu})]$$

$$A_{31} = \frac{1}{m}$$

$$A_{32} = (\frac{1}{2ef_\nu})[(\frac{\partial^2 ef_\nu}{\partial\alpha\partial\nu}) - (\frac{1}{ef_\nu})(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \alpha})(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu})]$$

$$A_{33} = (\frac{1}{2ef_\nu})\ [(\frac{\partial^2 ef_\nu}{\partial \nu^2}) - (\frac{1}{ef_\nu})(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu})^2]$$

À partir des termes A_{rj}, il est possible de déterminer la matrice de dispersion V (cf. Eq. 3.7).

Ensuite, on doit évaluer la matrice des variances et des covariances des moments utilisés pour l'estimation des paramètres (matrice V_m).

On applique les formules de Kendall et Stuart (1963) pour évaluer les variances et covariances suivantes: Var μ_1', Var μ_2' et Cov(μ_1',μ_2'):

$$Var(m_2') = (\mu_4' - \mu_2'^2)/\ N \qquad (5.3)$$

$$Var(m_1') = (\mu_2' - \mu_1'^2)/\ N \qquad (5.4)$$

$$Cov(m_2',m_1') = (m^3\ \frac{ef_{\nu+3/2}}{ef_\nu} - \mu_1'\mu_2')/N \qquad (5.5)$$

Il est évident que pour le calcul de ces variances, on utilise les paramètres estimés $\tilde{\alpha}$, $\tilde{v}$ et $\tilde{m}$ pour évaluer les valeurs des moyennes μ'_2, μ'_1 et μ'_0 de la population.

Le moment d'ordre quasi-zéro est différent de la formule générale 1.7 . On ne peut pas utiliser directement les formules de Kendall et Stuart pour évaluer les termes suivants: $\mathrm{Var}(m'_0)$, $\mathrm{Cov}(m'_0, m'_2)$ et $\mathrm{Cov}(m'_0, m'_1)$. Il est donc nécessaire d'utiliser la formule générale de la variance et de la covariance. L'appendice F démontre que les termes $\mathrm{Var}(\underline{m}'_0)$, $\mathrm{cov}(\underline{m}'_0, m'_1)$ et $\mathrm{Cov}(\underline{m}'_0, m'_2)$ sont donnés par:

$$\mathrm{Var}(\underline{m}'_0) = \left(\frac{1}{4N ef_\nu}\right)\left[\frac{\partial^2 ef_\nu}{\partial \nu^2} - \left(\frac{1}{ef_\nu}\right)\left(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu}\right)^2\right] \tag{5.6}$$

$$\mathrm{Cov}(\underline{m}'_0, m'_2) = \left(\frac{\mu'_2}{2N}\right)\left[\left(\frac{1}{ef_{\nu+1}}\right)\left(\frac{\partial ef_{\nu+1}}{\partial \nu}\right) - \left(\frac{1}{ef_\nu}\right)\left(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu}\right)\right] \tag{5.7}$$

$$\mathrm{Cov}(\underline{m}'_0, m'_1) = \left(\frac{\mu'_1}{2N}\right)\left[\left(\frac{1}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}}{\partial \nu}\right) - \left(\frac{1}{ef_\nu}\right)\left(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu}\right)\right] \tag{5.8}$$

On peut maintenant déterminer la matrice des variances et covariances des paramètres à l'aide de l'équation 3.10.

Dans le programme AJUST-HALPHEN (Boucher et al., 1988c), l'ensemble des dérivées partielles des fonctions exponentielles factorielles de différents ordres en fonction des paramètres de la loi de type B ($\partial ef_{\tilde{\nu}}(\tilde{\alpha})/\partial \theta_i$), sont calculées à partir de la définition de la dérivée (cf. Eq. 3.11). Les dérivées des valeurs de l'estimation de $\tilde{X}_T$ par rapport aux paramètres ($\partial \tilde{X}_T/\partial \tilde{\theta}_i$) sont également évaluées selon la définition de la dérivée (cf. Eq. 3.11).

À partir de ces résultats, il est donc possible de calculer la variance de l'estimation $\tilde{X}_T$ d'un événement X_T en utilisant l'équation 3.4.

Ayant calculé les valeurs estimées de $\tilde{X}_T$ et les Var $\tilde{X}_T$ correspondantes pour une loi de Halphen de type B, il est maintenant possible de déterminer, en utilisant la relation (3.12), l'intervalle de confiance de l'évènement X_T.

6. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE LA LOI DE HALPHEN DE TYPE B^{-1}

6.1 Méthode d'estimation des paramètres de la loi de type B^{-1}

Tout comme les lois de Halphen de type A et de type B, la loi de type B^{-1} appartient à la famille des lois exponentielles. La f.d.p. de la loi de Halphen de type B^{-1} possède alors trois statistiques conjointement exhaustives (Dvorak et al., 1988 et c.f. Section 2.1).

Dvorak et al. (1988) ont démontré que les trois statistiques conjointement exhaustives sont $\Sigma \ln x_i$, $\Sigma 1/x_i^2$ et $\Sigma 1/x_i$. Les moyennes géométrique G, harmonique H et quadratique inverse K de l'échantillon sont donc des estimateurs conjointement exhaustifs pour les mêmes moyennes respectives de la population.

Il est possible d'estimer les paramètres de la loi de Halphen de type B^{-1} par deux approches:

1. Soit en transformant la série des valeurs observées x_i par $1/x_i$ et en utilisant la même procédure d'ajustement que pour la loi de Halphen de type B (cf. section 5.1). Car on sait en théorie qu'il existe la correspondance suivante entre ces deux lois (Boucher et al., 1989a ou Appendice G):

   - Si $Y \sim HB^{-1}(\alpha,m,\nu)$ alors $X = m^2/Y \sim HB(\alpha,m,\nu)$ ou bien
     $X = 1/Y \sim HB(\alpha,1/m,\nu)$ (6.1)

   avec $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) \left|\frac{dx}{dy}\right|^2$ (Bobée et Ashkar, 1990)

   OU

2. En effectuant la même procédure d'estimation des paramètres que pour les lois de type B et de type A, cependant le système S(x) d'équations non-linéaires à résoudre est le suivant:

$$S(x) = \left[\begin{array}{l} \Sigma \ln x_i \,/\, N = \ln m - \left(\frac{1}{2ef_\nu(\alpha)}\right)\left(\frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu}\right) \\ \\ (\Sigma\, 1/x_i^2)\,/\,N = \left(\frac{1}{m^2}\right)\left(\frac{ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef_\nu(\alpha)}\right) \\ \\ (\Sigma\, 1/x_i)\,/\,N = \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{ef_\nu(\alpha)}\right) \end{array}\right] \tag{6.2}$$

Tout comme la loi de type A et de type B, on peut montrer que cette dernière approche est équivalente à la méthode du maximum de vraisemblance (cf. Appendice D).

Il est évidemment plus facile d'utiliser la première procédure d'estimation des paramètres étant donné qu'il existe déjà des modèles polynomiaux pour l'initialisation des paramètres pour le loi de Type B (Section 5.1). L'estimation des paramètres de la loi de type B^{-1} dans le programme AJUST-HALPHEN se fait alors en inversant les valeurs originales de la série observée et en appliquant la méthode d'ajustement de la loi de type B et la relation (6.1) (cf. Appendice G).
Dès que les paramètres de la loi de type B^{-1} sont estimés, on peut alors estimer les valeurs des estimations $\tilde{X}_T$ et de Var $\tilde{X}_T$.

6.2 Estimation $\tilde{X}_T$ de l'événement X_T

Les estimateurs conjointement exhaustifs de la loi de type B^{-1} sont la moyenne harmonique, la moyenne quadratique inverse et le logarithme de la moyenne géométrique.

Ces derniers permettent d'estimer les paramètres α, m et ν de la loi de type B^{-1}. L'événement X_T de la loi de type B^{-1} peut être estimé selon l'approche générale exposée à la section 3.1.

6.3 Détermination de Var $\tilde{X}_T$ et de l'intervalle de confiance associé à $\tilde{X}_T$

L'événement X_T provenant de l'ajustement de la loi de Halphen de type B^{-1} dépend des trois paramètres α, m et ν; la variance de l'estimation $\tilde{X}_T$ d'un événement X_T provenant de l'ajustement d'une loi de type B^{-1} est évaluée selon l'équation générale 3.4.

Pour le calcul de Var $\tilde{X}_T$, on doit déterminer les variances et les covariances des paramètres ainsi que les valeurs des dérivées partielles $(\partial \tilde{X}_T/\partial \Theta_j)$; $(\Theta_1=m;\ \Theta_2=\alpha$ et $\Theta_3=\nu)$.

a. Évaluation des variances et covariances des paramètres α, ν et m

Les variances et covariances des paramètres de la loi de type B^{-1} dépendent des variances et covariances des moments qui ont servi à estimer les paramètres α, ν et m. Pour le cas particulier de la loi de type B^{-1}, les moments utilisés sont: la moyenne harmonique, la moyenne quadratique inverse et la moyenne géométrique.

Les variances et covariances des paramètres sont évaluées à partir de la matrice de dispersion V (cf. Eq. 3.7). Les termes A_{rj} (pour r et j =1, 2 et 3) de la matrice de dispersion sont définis pour la loi de type B^{-1} de la façon suivante:

1. On pose:

$$M_1 = \mu'_{-2} \quad ; \quad M_2 = \mu'_{-1} \quad ; \quad M_3 = \mu'_0$$
$$\Theta_1 = m \quad ; \quad \Theta_2 = \alpha \quad ; \quad \Theta_3 = \bar{\nu}$$

Dans les équations qui suivent les paramètres α, m et ν sont estimés par les paramètres $\tilde{\alpha}$, $\tilde{m}$ et $\tilde{\nu}$.

où

$$\mu'_{-1} = \frac{1}{m} \frac{ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)}$$

$$\underline{\mu'_0} = \ln m - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ef_{\nu}(\alpha)}\right)\left(\frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu}\right)$$

$$\mu'_{-2} = \left(\frac{1}{m^2}\right)\left(\frac{ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)}\right)$$

2. On dérive chacune des trois équations précédentes par rapport à chacun des trois paramètres et on obtient ainsi les termes A_{rj} (r et j = 1, 2, 3) c'est-à-dire (dans les équations qui suivent la valeur $ef_{\nu}(\alpha)$ est notée ef_{ν}):

$$A_{11} = -\left(\frac{2\mu'_{-2}}{m}\right)$$

$$A_{12} = (\mu'_{-2})\left(\frac{1}{ef_{\nu+1}} \frac{\partial ef_{\nu+1}}{\partial \alpha} - \frac{1}{ef_{\nu}} \frac{\partial ef_{\nu}}{\partial \alpha}\right)$$

$$A_{13} = (\mu'_{-2})\left(\frac{1}{ef_{\nu+1}} \frac{\partial ef_{\nu+1}}{\partial \nu} - \frac{1}{ef_{\nu}} \frac{\partial ef_{\nu}}{\partial \nu}\right)$$

$$A_{21} = -\frac{\mu'_{-1}}{m}$$

$$A_{22} = \mu'_{-1}\left(\frac{1}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} - \frac{1}{ef_{\nu}} \frac{\partial ef_{\nu}}{\partial \alpha}\right) \tag{6.5}$$

$$A_{23} = \mu'_{-1}\left(\frac{1}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}}{\partial \nu} - \frac{1}{ef_{\nu}} \frac{\partial ef_{\nu}}{\partial \nu}\right)$$

$$A_{31} = \frac{1}{m}$$

$$A_{32} = -\frac{1}{2ef_{\nu}}\left[\frac{\partial^2 ef_{\nu}}{\partial \alpha\, \partial \nu} - \frac{1}{ef_{\nu}}\left(\frac{\partial ef_{\nu}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial ef_{\nu}}{\partial \nu}\right)\right]$$

$$A_{33} = - \frac{1}{2ef_{\nu}} \left[\frac{\partial^2 ef_{\nu}}{\partial \nu^2} - \frac{1}{ef_{\nu}} \left(\frac{\partial ef_{\nu}}{\partial \nu}\right)^2\right]$$

À partir des termes A_{rj}, on peut déterminer la matrice de dispersion V (cf. Eq. 3.7).

On peut également évaluer la matrice des variances et des covariances des moments utilisés pour l'estimation des paramètres (matrice V_m). Les variances et covariances suivantes: Var m'_1, Var m'_2 et Cov (m'_1, m'_2) sont définies par:

$$Var(m'_1) = (\mu'_2 - (\mu'_1)^2) / N$$

$$Var(m'_2) = (\mu'_4 - (\mu'_2)^2) / N$$

$$Cov(m'_2, m'_1) = (\mu'_3 - \mu'_2 \mu'_1) / N$$

Dans le calcul de ces variances, on utilise les paramètres estimés $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\nu}$ et $\tilde{m}$ pour évaluer les valeurs des moments μ'_3, μ'_2 et μ'_1 de la population.

Le moment d'ordre quasi-zéro est différent de la formule générale 1.7 et on ne peut pas utiliser les formules de Kendall et Stuart pour évaluer les termes suivants: $Var(\underline{m}'_0)$, $Cov(\underline{m}'_0, m'_1)$ et $Cov(\underline{m}'_0, m'_2)$. Il est donc nécessaire d'utiliser la formule générale de la variance et covariance. L'appendice H démontre que ces termes sont équivalents à:

$$Var(\underline{m}'_0) = \frac{1}{4Nef_{\nu}} \left[\frac{\partial^2 ef_{\nu}}{\partial \nu^2} - \left(\frac{1}{ef_{\nu}}\right)\left(\frac{\partial ef_{\nu}}{\partial \nu}\right)^2\right] \tag{6.4}$$

$$Cov(\underline{m}'_0, m'_1) = \left(\frac{-\mu'_1}{2N}\right) \left[\left(\frac{1}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}}{\partial \nu}\right) - \left(\frac{1}{ef_{\nu}}\right)\left(\frac{\partial ef_{\nu}}{\partial \nu}\right)\right] \tag{6.5}$$

$$Cov(\underline{m}'_0, m'_2) = \left(\frac{-\mu'_2}{2N}\right) \left[\left(\frac{1}{ef_{\nu+1}}\right)\left(\frac{\partial ef_{\nu+1}}{\partial \nu}\right) - \left(\frac{1}{ef_{\nu}}\right)\left(\frac{\partial ef_{\nu}}{\partial \nu}\right)\right] \tag{6.6}$$

Il est important de souligner que l'équation de la variance Var $(\underline{m}'_0)$ pour la loi de type B^{-1} est la même que pour la loi de Halphen de type B. Tandis que les équations des covariances $Cov(m'_0, m'_{-1})$ et $Cov(m'_0, m'_{-2})$ sont pratiquement les mêmes que les covariances $Cov(m'_0, m'_1)$ et $Cov(m'_0, m'_2)$ de la loi de type B si on inverse les signes des équations (6.7) et (6.8).

Ayant déterminé les matrices V_m et V^{-1}, il est maintenant possible de déterminer la matrice des variances et covariances des paramètres à l'aide de l'équation 3.10.

Les dérivées partielles des fonctions exponentielles factorielles de différents ordres en fonction des paramètres $(\partial ef_{\tilde{\nu}} / \partial \Theta_j)$ de la loi de type B^{-1} ainsi que les dérivées $\partial \tilde{X}_T / \partial \tilde{\Theta}_j$ peuvent être calculées à partir de la définition de la dérivée (cf. Eq 3.11).

L'intervalle de confiance de l'évènement X_T provenant de l'ajustement de la loi de type B^{-1} est obtenu en utilisant la relation 3.12.

7. DISCUSSIONS ET RECOMMANDATIONS

Ce deuxième rapport sur les lois de Halphen a permis de faire la synthèse des aspects théoriques et pratiques qui ont été développés et qui concernent les thèmes suivants:

- méthode d'estimation des paramètres;
- estimation $\hat{X}_T$ d'un événement théorique X_T;
- calcul de la variance de l'estimation $\tilde{X}_T$ d'un événement X_T.

Comme on l'a mentionné, les trois types de lois de Halphen possèdent des statistiques conjointement exhaustives. Donc, il existe une méthode d'estimation des paramètres pour chacun de ces trois types de loi qui est optimale et ce, même pour des échantillons de faible taille. La propriété d'exhaustivité est, sans aucun doute, un avantage majeur pour l'utilisation pratique des lois de Halphen en hydrologie.

Un des aspects théoriques nouveaux ayant été développé, dans le cadre de ce rapport, concerne le développement des équations théoriques permettant le calcul de la variance de l'estimation $\tilde{X}_T$ d'un événement X_T pour chacun des

des trois types des lois de Halphen. La détermination de ces équations vont permettre la détermination des intervalles de confiance pour tout ajustement réalisé avec un des trois types de lois de Halphen.

Concernant les méthodes d'estimation des paramètres et la détermination des événements X_T de chaque type de loi de Halphen, il a fallu élaborer et développer certains algorithmes. En effet, les méthodes d'estimation des paramètres des lois de Halphen sont trop complexes et ne peuvent se résoudre directement. On doit alors utiliser une méthode itérative qui résoud un système d'équations non-linéaires propre aux lois de Halphen de type A et de type B. Pour l'estimation des paramètres de la loi de Halphen de type B^{-1}, on a utilisé la relation unissant les f.d.p. des lois de type B et de type B^{-1} (c.f. section 6.1) et par la suite la méthode d'estimation des paramètres de la loi de type B.

Dans le cadre des travaux futurs, il est recommandé de développer des modèles d'initialisation des paramètres α et ν (comme pour la loi de type A et celle de type B, c.f. sections respectives 4.1 et 5.1) pour la loi de type B^{-1}. Ceci permettrait de réaliser directement l'estimation des paramètres de la loi de type B^{-1} sans passer par la loi de type B.

Dans le cas de l'algorithme actuel développé pour l'estimation $\hat{X}_T$ d'un événement théorique X_T provenant d'une loi de Halphen, on a constaté lors de l'utilisation des programmes AJUST-HALPHEN (Boucher et al., 1989b et c) certaines imprécisions. En effet, pour certaines valeurs de paramètres, les valeurs estimées de X_T par l'interpolation quadratique ne sont pas assez précises. Ces problèmes surviennent surtout pour des valeurs faibles ou élevées de probabilité au dépassement. Afin d'améliorer la précision de l'estimation $\hat{X}_T$ des trois types de loi de Halphen, on recommande le développement d'un programme informatique qui réaliserait le nouvel algorithme décrit à la section 3.1 servant à l'estimation des événements X_T. De cette manière, il serait possible d'effectuer une analyse comparative des résultats d'ajustements provenant des deux algorithmes d'évaluation de X_T. Le nouvel algorithme suggéré à la section 3.1 devrait améliorer la précision de l'estimation de $\hat{X}_T$ ainsi que la précision des variances des estimations $\tilde{X}_T$ qui tient compte de ces estimations (calcul des dérivées partielles $\partial X_T/\partial \Theta_i$).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Bobée, B. 1975. Étude des propriétés mathématiques et statistiques des lois Pearson type III et Log-Pearson type III. Rapport scientifique N°. 55, INRS-Eau, 173 p.

Bobée, B. et F. Ashkar. 198.

Boucher, S., Bobée, B. et F. Ashkar. 1989a. Lois de Halphen: Propriétés mathématiques et statistiques. Rapport scientifique N°. 241, INRS-Eau, 88 p.

Boucher, S., Bobée, B., Ashkar, F. et M. Lavoie. 1989b. Loi de Halphen de type A: PROGRAMMES DE CALCUL. Rapport scientifique N°. 256, INRS-Eau.

Boucher, S., Bobée, B., Ashkar, F. et M. Lavoie. 1989c. Loi de Halphen de type B et B^{-1}: PROGRAMMES DE CALCUL. Rapport scientifique N°. 257, INRS-Eau.

Boucher, S., Lavoie, M. et B. Bobée. 1989d. Détermination des fonctions de distribution des lois de Halphen, Rapport interne N° 112, INRS-Eau.

Burden, R.L., Faires, D.J. et A.C. Reynolds. 1978. Numerical Analysis. Second Edition. Prindle, Weber and Schmidt publishers, 598p.

Chow, V.T. 1964. Handbook of Applied Hydrology, McGraw-Hill.

Dvorak, V., Bobée, B. et F. Ashkar. 1988. Halphen distributions and related systems of frequency functions, Rapport scientifique N°. 236, INRS-Eau, 78 p.

Fisher, R.A. 1921. On the mathematical Foundations of theoritical statistics, Phil. Trans. Roy. Soc., Series A, Vol. 222, pp. 309-368.

Halphen, E. 1955. Les fonctions factorielles. Publication de l'Institut Statistique de l'université de Paris, Volume IV, fascicule 1.

Kendall, M.G. and A. Stuart. 1963. The Advanced Theory of Statistics. Distribution Theory, volume 1.

Morlat, G. 1956. Les lois de probabilité de Halphen. Revue Statistique Appliquée, 4(3): 21-46 études et recherche hydrauliques.

APPENDICE A

Appendice A

Méthode du maximum de vraisemblance pour la loi de Type A

La logarithme de la fonction de vraisemblance de loi de Halphen de Type A est donné par:

$$\ln L(x|\alpha,m,\nu)=(-N\ln 2 - n\ln m^{\nu}K_{\nu}(2\alpha))- (\alpha m)\sum_i \frac{1}{x_i} - \alpha/m \sum_i x_i+(\nu-1) \sum_i \ln x_i) \tag{A.1}$$

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à estimer les paramètres (α, m et ν) de la loi de Type A en maximisant la fonction ln L. On doit dériver la fonction de vraisemblance par rapport à chacun des paramètres et annuler les dérivées partielles.

Les dérivées partielles ln L par rapport à chacun des paramètres de la loi de Type A sont:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \nu} = \{-N\ln m- \frac{N}{K_{\nu}(2\alpha)} \frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial \nu} + \sum_i \ln x_i\} = 0 \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = \{- \frac{N\nu}{m} -\alpha \sum_i 1/x_i + \frac{\alpha}{m^2} \sum_i x_i\} = 0 \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \{- \frac{2N}{K_{\nu}(2\alpha)} \bullet \frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial \alpha} - m \sum_i 1/x_i - \frac{1}{m} \sum x_i\} = 0 \tag{A.4}$$

On peut démontrer que le système d'équation (A.2, A.3 et A.4) est équivalent au système d'équations (4.1), si on remplace les valeurs des moyennes de l'échantillon (m_1, m_2 et m_g) par leurs valeurs respectives de la population (μ'_1, μ'_{-1} et μ'). (Propriété asymptotique de la méthode).

En effet, en considérant l'équation A.2 on retrouve l'expression de logarithme de la moyenne géométrique: (c.f. la troisième équation du systhème 4.1)

$$\sum_i \frac{\ln x_i}{N} = \ln m + \frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)} \frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial \nu} = \ln G \tag{A.5}$$

On remplace dans les équations respectives (A.3) et (4.4), les valeurs des moyennes arithmétique $(\frac{\sum x_i}{N})$ et harmonique $(\frac{\sum 1/x_i}{N})$ par leurs valeurs asymptotiques respectives μ_1' et μ_{-1}' (c.f Eq. 1.3). On aura dans le cas de l'équation (A.3):

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = n\alpha \{-\frac{\nu}{m\alpha} - \frac{\sum 1/x_i}{N} + \frac{K_{\nu+1}(2\alpha)}{mK_\nu(2\alpha)}\} = 0 \qquad (A.6)$$

En utilisant la relation suivante les fonctions de Bessel $K_\nu(2\alpha)$ (c.f. Annexe A de Boucher *et al.*, 1989a):

$$\frac{1}{m}\frac{K_{\nu-1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} = \frac{1}{m}\frac{K_{\nu+1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} - \frac{\nu}{\alpha m}\frac{K_\nu(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} \qquad (A.7)$$

On aura que $\frac{\partial \ln L}{\partial m}$ est en réalité équivalent à l'équation:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = \{-\frac{\sum 1/x_i}{N} + \frac{1}{m}\frac{K_{\nu-1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)}\} = 0 \qquad (A.8)$$

On retrouve ainsi la seconde équation du système 4.3.

Dans le cas de l'équation (A.4), si on remplace $\sum \frac{1/x_i}{N}$ par sa valeur asymptotique $\mu_{-1}' = \frac{1}{m}\frac{K_{\nu-1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)}$; on a alors:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = -\frac{N}{m}\{\frac{-2\,m}{K_\nu(2\alpha)} \bullet \frac{\partial K_\nu(2\alpha)}{\partial \alpha} - m\frac{K_{\nu-1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} - \frac{\sum x_i}{N}\} \qquad (A.9)$$

En utilisant la relation de récurrence des fonctions de Bessel est donnée par: (c.f. Annexe A de Boucher *et al.*, 1989a):

$$\frac{m}{K_\nu(2\alpha)}\frac{\partial K_\nu(2\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{-mK_{\nu-1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} - \frac{\nu m}{2\alpha}\frac{K_\nu(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} \qquad (A.10)$$

L'équation A.9 devient alors

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \left\{\frac{2mK_{\nu-1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} + \frac{\nu m}{\alpha}\,\frac{K_\nu(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} - \frac{mK_{\nu-1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} - \sum \frac{x_i}{N}\right\} \tag{A.11}$$

Or, on sait que (c.f. Eq. A.7):

$$\frac{mK_{\nu-1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} + \frac{\nu m}{\alpha}\,\frac{K_\nu(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} = m\,\frac{K_{\nu+1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)}$$

Donc, l'équation A.11 devient:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \left\{m\,\frac{K_{\nu+1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} - \sum \frac{x_i}{N}\right\} \tag{A.12}$$

On retrouve ainsi la première équation du système 4.1.

Cette démonstration indique que le système d'équations obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance (Eq. A.5, A.8 et A.12) est équivalent au système 4.1 de la loi de type A.

APPENDICE B

Appendice B

Description de la méthode itérative "Quasi-Newton" : Applications aux lois de Halphen de type A et B (c.f.: Burden et al., 1978) (*)

La méthode de Newton-Raphson est une méthode d'analyse numérique qui sert à obtenir la solution approximative d'un système d'équations non-linéaires $f(x)$ $(f_i(x)) = 0$ en initialisant le vecteur $x = (x_1, x_2 \ldots x_n)$.

L'utilisation de la méthode de Newton-Raphson implique le calcul à chaque itération, de la matrice Jacobienne $J(x)$:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (B.1)$$

Si le système d'équation $F(x) = 0$ est assez complexe, le calcul de la matrice Jacobienne peut être long et difficile à effectuer. Dans ce cas, il est avantageux d'utiliser la méthode Quasi-Newton pour résoudre le système d'équations non-linéaires. Cette méthode calcule la matrice Jacobienne une seule fois et l'approxime par une nouvelle matrice à chaque nouvelle itération (cf Burden et al., 1978). L'agorithme de la méthode Quasi-Newton est le suivant: (Approche Broyden).

Algorithme de la méthode de Broyden. (Méthode Quasi-Newton)
(Burden et al., 1978)

• Entrées : - Nombre "n" d'équations et d'inconnus

- Approximation initiale du $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$
- Précision requise (TOL)
- Nombre maximal d'itérations N

- Sorties : - Solution approximative $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ ou Message indiquant que le nombre d'itérations est dépassé

ETAPE 1	Pose	$A_0 = J(x)$	où $J(x)_{i,j} = \dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ pour $1 \leq i,\ j \leq n$;
	et	$t = F(x)$	(où $t = F(x^0)$)
ETAPE 2	Pose	$A = A_0^{-1}$	
ETAPE 3	Pose	$k = 1$;	
		$S = -At$	(où $s = s_1$);
		$x = x + s$	(où $x = x^{(1)}$)
ETAPE 4	Tant que la condition ($k \leq N$) est respectée , les étapes de 5 à 13 sont réalisées.		
ETAPE 5	Pose	$W = t$ (en sauvant t)	
		$t = F(x)$ $(t = F(x^{(k)})$	
		$y = t - w$ $(y = y_k)$	
ETAPE 6	Pose	$Z = -Ay$	(note: $Z = -A_{k-1}^{-1} Y_k$)
TAPE 7	Pose	$P = -S^t Z$	(note: $P = S_k^t\ A_{k-1}^{-1} Y_k$)
ETAPE 8	Pose	$C = pI + (s + z)s^t$	
ETAPE 9	Pose	$A = (1/p)\ CA$	(où $A = A_k^{-1}$)

$\boxed{\text{ETAPE 10}}$ Pose $s = -At$ (note = $S = -A_k^{-1} F(x^{(k)})$)

$\boxed{\text{ETAPE 11}}$ Pose $x = x + s$ (note: $x = x^{(k+1)}$)

$\boxed{\text{ETAPE 12}}$ si $\|s\| < TOL$ alors SORTIE:(x) → $\boxed{\text{FIN}}$

$\boxed{\text{ETAPE 13}}$ Pose $k = k + 1$

$\boxed{\text{ETAPE 14}}$ Sinon "le nombre d'iterations est dépassé" → STOP et la méthode "Quasi-Newton" ne converge pas.

B.1 <u>Loi de type A</u>:

<u>METHODE "QUASI-NEWTON": SYSTEME À RESOUDRE ET MATRICE JACOBIENNE</u>

SYSTEME D'EQUATIONS NON-LINEAIRES À RESOUDRE

$$A = \frac{m'_1}{m'_{-1}} = \frac{K_{\nu+1}(Z)\,K_{\nu-1}(Z)}{K_\nu^2(Z)}$$

$$B = \frac{m'_0}{m_1} = \frac{K_\nu(Z)}{K_{\nu+1}(Z)} \exp\left[\frac{\partial K_\nu(Z)}{\partial \nu} / K_\nu(Z)\right]$$

où $z = 2\alpha$

<u>La Matrice Jacobienne</u> : $J(x) = \begin{bmatrix} \partial A/\partial \nu & \partial A/\partial \alpha \\ \partial B/\partial \nu & \partial B/\partial \alpha \end{bmatrix}$

1. $$\frac{\partial A}{\partial \nu} = \frac{K_{\nu-1}(Z)\partial K_{\nu+1}(Z)}{K_\nu^{2}(Z)\ \partial \nu} + \frac{K_{\nu+1}(Z)}{K^2_\nu(Z)} \frac{\partial K_{\nu-1}(Z)}{\partial \nu} - 2\frac{K_{\nu+1}(Z)K_{\nu-1}(Z)}{K_\nu^{3}(Z)} \frac{\partial K_\nu(Z)}{\partial \nu}$$

2. $$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{K_{\nu-1}(Z)}{K_\nu^{2}(Z)} \frac{\partial K_{\nu+1}(Z)}{\partial Z} + \frac{K_{\nu+1}(Z)}{K_\nu(Z)} \frac{\partial K_{\nu-1}(Z)}{\partial Z} -2\frac{K_{\nu+1}(Z)K_{\nu-1}(Z)}{K_\nu^{3}(Z)} \frac{\partial K_\nu(Z)}{\partial Z}$$

3. $$\frac{\partial B}{\partial \nu} = \frac{e^{a^*}}{K_{\nu+1}(Z)} \left\{ \frac{\partial^2 K_\nu(Z)}{\partial^2 \nu} - \frac{1}{K_\nu(Z)} \left(\frac{\partial K_\nu(Z)}{\partial \nu} \right)^2 - \frac{K_\nu}{K_{\nu+1}} \left(\frac{\partial K_{\nu+1}(Z)}{\partial \nu} \right) + \frac{\partial K_\nu(Z)}{\partial \nu} \right\}$$

4. $$\frac{\partial B}{\partial \alpha} = \frac{e^{a^*}}{K_{\nu+1}(Z)} \left\{ \frac{\partial^2 K_\nu(Z)}{\partial Z \partial \nu} - \frac{1}{K_\nu(Z)} \frac{\partial^2 K_\nu(Z)}{\partial Z \partial \nu} - \frac{K_\nu(Z)}{K_{\nu+1}(Z)} \frac{\partial K_{\nu+1}(Z)}{\partial Z} + \frac{\partial K_\nu(Z)}{\partial Z} \right.$$

$$\text{où } e^{a^*} = \frac{\partial K_\nu(Z)}{\partial \nu} \bullet \frac{1}{K_\nu(Z)}$$

B.2 Loi de type B:

METHODE "QUASI-NEWTON": SYSTEME À RESOUDRE ET MATRICE JACOBIENNE

SYSTEME D'EQUATIONS NON-LINEAIRES A RESOUDRE
$C = \dfrac{m_2'}{m_1'^2} = \dfrac{ef_\nu(\alpha)\ ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef^2_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}$
$D = \dfrac{m_0'}{m_1'} = \dfrac{ef_\nu(\alpha)\ \exp\left(\frac{1}{2ef_\nu(\alpha)}\right) \bullet \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu}}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}$

La Matrice Jacobienne : $J(x) = \begin{bmatrix} \partial C/\partial \nu & \partial C/\partial \alpha \\ \partial D/\partial \nu & \partial D/\partial \alpha \end{bmatrix}$

1. $$\frac{\partial C}{\partial \nu} = \frac{1}{ef^2_{\nu+1}(\alpha)} \left[ef_\nu \frac{\partial ef_{\nu+1}}{\partial \nu} + ef_{\nu+1} \frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu} - \frac{2ef_\nu\ ef_{\nu+1}}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}}{\partial \nu} \right)\right]$$

2. $$\frac{\partial C}{\partial \nu} = \frac{1}{ef^2_{\nu+1}(\alpha)} \left[ef_{\nu+1} \frac{\partial ef_\nu}{\partial \alpha} + ef_\nu \frac{\partial ef_{\nu+1}}{\partial \alpha} - \frac{2ef_\nu\ ef_{\nu+1}}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} \right)\right]$$

3. $$\frac{\partial D}{\partial \nu} = \frac{e^{a^*}}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 ef_\nu(\alpha)}{\partial^2 \nu} - \frac{1}{2ef_\nu} \left(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu}\right)^2 - \frac{ef_\nu}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}}{\partial \nu} + \frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu} \right]$$

4. $$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = \frac{e^{a^*}}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu}\right)\right) - \frac{1}{2ef_\nu} \left(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu}\right) - \frac{ef_\nu}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}} + \frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu} \right]$$

où $e^{a^*} = \frac{1}{2ef_\nu} \circ \frac{\partial ef_\nu}{\partial \nu}$

APPENDICE C

Appendice C

Méthode du Maximum de vraisemblance pour la loi de type B

On veut démontrer que le système d'équations 5.3 servant à estimer les paramètres de la loi de type B est le même si on utilisait la méthode de maximum de vraisemblance.
Le logarithme népérien de la fonction de vraisemblance de la loi de Halphen de type B est;

$$\ln L(x|\alpha,m,\nu) = [N\ln 2 - N\ln m^{2\nu} ef_{\nu}(\alpha) + (2\nu-1) \sum_i \ln x_i + \frac{\alpha}{m} \sum_i x_i - \sum_i \frac{x_i^2}{m^2}] \quad (C.1)$$

On dérive cette expression par rapport à chacun des paramètres α, m et ν, on obtient alors :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \nu} = \{-2n\ln m - \frac{N}{ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu} + 2 \sum_i \ln x_i\} = 0 \quad (C.2)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = \{- \frac{2\nu N}{m} - \frac{\alpha}{m^2} \sum_i x_i + 2 \sum \frac{x_i 2}{m^3} \} = 0 \quad (C.3)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \{- \frac{N}{ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{1}{m} \sum x_i\} = 0 \quad (C.4)$$

La première dérivée partielle (Eq. C.2) est équivalente à l'expression :

$$\sum \frac{\ln x_i}{N} = \ln m + \frac{1}{\partial ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu} \quad (C.5)$$

Cette dernière équation représente le logarithme de la moyenne géométrique (μ'_0). Ce qui correspond à la troisième équation du système 5.3. Dans la deuxième dérivée partielle $\frac{\partial \ln L}{\partial m}$ (Eq.C.3), on suppose que la moyenne arithmétique de l'échantillon $\frac{\sum xi}{N}$ tend vers sa valeur asymptotique c'est-à-dire vers la moyenne arithmétique de la population $\mu'_1 = (m \frac{ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)})$.

De plus, il existe une équation de recurrence pour les fonctions factorielles qui est la suivante (c.f. Halphen, 1955):

$$ef_{\nu+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{2}\, ef_{\nu+\frac{1}{2}}\,(\alpha) + \nu ef_{\nu}(\alpha) \tag{C.6}$$

En utilisant la valeur asymptotique de la moyenne de l'échantillon et l'équation (C.6), on peut démontrer que l'équation (C.3) devient:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = \{\sum \frac{x_i^{\,2}}{N} - \frac{m^2 ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} = 0 \tag{C.7}$$

D'après ce dernier résultat, on a que la moyenne quadratique de l'échantillon qui est équivalente à l'expression de la moyenne quadratique de la population 1² (c'est-à-dire $\{\sum \frac{x_i^{\,2}}{N} = - \frac{m^2 ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)})$. Cette équation est la deuxième du système 5.3.

Dans le cas de la troisième dérivée partielle $\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}$, on s'aperçoit qu'elle est équivalente à l'expression:

$$\sum \frac{x_i}{N} = \frac{m}{ef_{\nu}(\alpha)}\, \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \alpha} \tag{C.8}$$

Par définition, on a que la dérivée d'une fonction exponentielle factorielle $\frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \alpha}$ par rapport à l'argument α est (c.f. Halphen, 1955):

$$\frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \alpha} = ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha) \tag{C.9}$$

En remplaçant la valeur de la dérivée $\frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \alpha}$ dans l'équation (C.8), on obtient l'expression de la moyenne de la population d'une loi de type B (la première équation du système 5.3):

$$\sum \frac{x_i}{n} = \frac{m\, ef_{\nu+\frac{1}{2}}\,(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} \tag{C.10}$$

Donc, le système d'équations obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance (c.f. Eq. C.5, C.7 et C.10) est équivalent au système d'équations (5.3).

APPENDICE D

Appendice D

Méthode du maximum de vraisemblance pour la loi de type B^{-1}

On veut démontrer que l'utilisation du système (6.3) revient à utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour l'estimation des paramètres de la loi de type B^{-1}.

Le logarithme de la fonction de vraisemblance de la loi de Halphen de type B^{-1} est:

$$\ln L(x|\alpha,\nu,m) = \exp \{N\ln 2 + N\ln m^{2\nu} - N\ln ef_\nu(\alpha) - (2\nu+1) \sum_i \ln x_i - m^2 \sum_i x_i^{-2} + \alpha m \sum_i 1/x_i\} \tag{D.1}$$

On sait que la méthode du maximum de vraisemblance consiste à poser les dérivées partielles de la fonction de vraisemblance par rapport à chacun des trois paramètres de la loi égale à zéro:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \nu} = \{ 2N \ln m - \frac{N}{ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu} - 2 \sum_i \ln x_i\} = 0 \tag{D.2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \{ \frac{-N}{ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu} + m \sum_i \frac{1}{x_i} \} = 0 \tag{D.3}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = \{ \frac{2N\nu}{m} - 2m \sum_i \frac{1}{x_i^2} + \alpha \sum_i \frac{1}{x_i} \} = 0 \tag{D.4}$$

L'équation (D.2) correspond à l'évaluation du logarithme de la moyenne géométrique (première équation du système 6.3):

$$\sum_i \frac{\ln x_i}{N} = \ln m - \frac{1}{2ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu} = \ln G \tag{D.5}$$

Si on reprend l'équation (D.3) et on substitue l'expression de la dérivée $\frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu}$ par $ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)$, on aura l'expression de la moyenne harmonique pour la loi de type B^{-1} (troisième équation du système 6.3):

$$\frac{\sum_i 1/x_i}{N} = \frac{1}{m}\,\frac{ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{ef_\nu(\alpha)} = \mu'_{-1} \tag{D.6}$$

Pour la dernière dérivée partielle $\frac{\partial \ln L}{\partial m}$ (c.f. Eq.D.4), on remplace la valeur de la moyenne harmonique m'_1 par sa valeur asymptotique (μ'_{-1}). On obtient la relation:

$$\frac{\alpha}{2m}\,\frac{ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{ef_\nu(\alpha)} - \frac{\nu}{m} = m\,\frac{\sum_i 1/x_i^{\,2}}{n} \tag{D.7}$$

En sachant l'équation de récurrence suivante pour les fonctions exponentielles factorielles $ef_\nu(\alpha)$:

$$ef_{\nu+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{2}\,ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha) + \nu ef_\nu(\alpha) \tag{D.8}$$

On peut ré-arranger les termes de l'équation D.7, pour enfin obtenir (deuxième équation du système 6.3):

$$\sum_i \frac{1/x_i^2}{N} = \frac{1}{m^2}\,\frac{ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef_\nu(\alpha)} \tag{D.9}$$

Comme on peut le constater, les équations (D.5), (D.6) et (D.9) correspondent bien au système d'équations (6.3) de la loi de Halphen de type B^{-1}.

APPENDICE E

Appendice E

Loi de type A: **<u>Évaluation de la variance du logarithme de la moyenne géométrique et des covariances: Cov (m_0', m_{-1}') et Cov (m_0', m_1').</u>**

Le logarithme de la moyenne géométrique de la population est donnée par :

$$\mu_0' = \ln m + \frac{1}{K_\nu(2\alpha)} \frac{\partial K_\nu(2\alpha)}{\partial \nu} \tag{E.1}$$

En utilisant la définition générale de la variance et la covariance, il est alors possible de déterminer les valeurs suivantes: Var (m_0'), Cov(m_0', m_1') et Cov(m_0', m_{-1}')

E.1 Évaluation de la variance de m_0'

Soit une variable aléatoire Y, on a que $m_1'(Y) = \frac{1}{N}\sum Y$ où $\mathrm{Var}(m_1'(Y)) = \frac{1}{N}$ Var Y.

Si on pose $Y = \ln X$ alors $m_1'(Y) = \frac{1}{N} \sum \ln X = m_0'(X)$ où $\mathrm{Var}\,(m_0'(X)) = \frac{1}{N} \mathrm{Var}(\ln X)$

Par définition, la variance Var (ln X) est:

$$\mathrm{Var}\,(\ln X) = E\,(\ln^2 X) - [E\,(\ln X)]^2 \tag{E.2}$$

On sait que $E(\ln X) = \mu_0'$, il ne reste qu'à évaluer la valeur de $E(\ln^2 X)$. En réalité, on veut évaluer l'expression:

$$E(\ln^2 X) = \int_0^\infty \frac{1}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} \bullet x^{\nu-1}.\exp\,(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}))\ln^2 x dx \tag{E.3}$$

Pour la loi de Halphen de type A, on a que $2m^\nu K_\nu(2\alpha) = \int_0^\infty x^{\nu-1} \exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}))dx$

Si on dérive cette dernière équation par rapport à ν, on obtient alors:

$$2m^{\nu}\ln m K_{\nu}(2\alpha) + 2m^{\nu}\frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial \nu} = \int_{0}^{\infty} x^{\nu-1}\exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}))\ln x \, dx \tag{E.4}$$

On peut dériver une deuxième fois l'équation (E.4) et on obtient alors:

$$2m^{\nu}K_{\nu}\left\{\ln^2 m + \frac{2\ln m}{K_{\nu}(2\alpha)}\frac{\partial K_{\nu}}{\partial \nu} + \frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)}\frac{\partial^2 K_{\nu}}{\partial \nu^2}\right\}=\int_{0}^{\infty} x^{\nu-1}\exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}))\ln^2 x \, dx \tag{E.5}$$

D'après l'équation (E.5) et la définition de $E(\ln^2 X)$(c.f.Eq.E.3), on a que:

$$E\,(\ln^2 X) = \ln^2 m + \frac{2\ln m}{K_{\nu}(2\alpha)}\frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial \nu} + \frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)}\frac{\partial^2 K_{\nu}(2\alpha)}{\partial \nu^2} \tag{E.6}$$

Ayant la valeur de $E(\ln^2 X)$, on peut donc évaluer la valeur de Var (ln X) en utilisant l'équation (E.2):

$$Var(m_0^{'}) = \frac{1}{N}\,Var(\ln X) = \frac{1}{NK_{\nu}(2\alpha)}\left(\frac{\partial^2 K_{\nu}(2\alpha)}{\partial \nu^2} - \frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)}\left(\frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial \nu}\right)^2\right) \tag{E.7}$$

E.2 Évaluation des covariances: Cov $(m_0^{'},m_1^{'})$ et Cov $(m_0^{'},m_{-1}^{'})$

Par définition, la covariance s'exprime comme suit

$$Cov(M_1,M_2) = [E(M_1M_2) - E(M_1)E(M_2)]/N \tag{E.8}$$

où M_1,M_2 sont des moments d'ordre quelconque.

Dans le cas de la loi de type A, on connaît la valeur de l'espérance de chaque moment ($m_0^{'}$, $m_1^{'}$ et $m_{-1}^{'}$), il ne reste qu'à déterminer les valeurs $E(m_0^{'},m_1^{'})$.

E.2.1 Évaluation de Cov $(m_0^{'},m_1^{'})$:

Pour le calcul de Cov $(m_0^{'},m_1^{'})$, on sait que $E(m_0^{'}) = m_0^{'}$ et $E(m_1^{'}) = m_1^{'}$, il ne reste qu'à évaluer $E(m_0^{'},m_1^{'})$.

Par définition, on a que

$$E\,(m_0^{'},m_1^{'}) = \frac{1}{2m^{\nu}K_{\nu}(2\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\nu-1} \exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x})) \times \ln x \, dx \qquad (E.9)$$

Si on pose $\nu = \nu+1$, on sait que $2m^{\nu+1}K_{\nu+1}(2\alpha) = \int_0^{\infty} x^{(\nu+1)} \exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}))\, dx$

En dérivant cette dernière expression par rapport à ν, on obtient:

$$2m^{\nu+1}K_{\nu+1}(2\alpha)(\ln m + \frac{1}{K_{\nu+1}(2\alpha)} \frac{\partial K_{\nu+1}(2\alpha)}{\partial \nu}) = \int_0^{\infty} x^{(\nu+1)-1} \exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x})) \ln x dx \qquad (E.10)$$

En combinant l'équation (E.10) et l'équation (E.9), on obtient:

$$\begin{aligned} E(m_0^{'},m_1^{'}) &= \frac{mK_{\nu+1}(2\alpha)}{K_{\nu}(2\alpha)} (\ln m + \frac{1}{K_{\nu+1}(2\alpha)} \frac{\partial K_{\nu+1}(2\alpha)}{\partial \nu}) \\ &= \mu_1^{'} \; (\ln m + \frac{1}{K_{\nu+1}(2\alpha)} \frac{\partial K_{\nu+1}(2\alpha)}{\partial \nu}) \end{aligned} \qquad (E.11)$$

On peut obtenir la covariance $Cov(m_0^{'},m_1^{'})$ en reprenant l'équation (E.8);

$$Cov(m_0^{'},m_1^{'}) = \frac{\mu_1^{'}}{N} \; [\frac{1}{K_{\nu+1}(2\alpha)} \frac{\partial K_{\nu+1}(2\alpha)}{\partial \nu} - \frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)} \frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial \nu}) \qquad (E.12)$$

E.3 <u>Évaluation de Cov $(m_0^{'},m_{-1}^{'})$</u>:

Pour déterminer $Cov(m_0^{'},m_{-1}^{'}) = \frac{1}{2m^{\nu}K_{\nu}(2\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\nu+1} \exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x})) \frac{\ln x dx}{x}$ (E.13)

En posant $\nu=\nu+1$, on a l'égalité: $2m^{\nu-1}K_{\nu-1}(2\alpha) = \int_0^{\infty} x^{(\nu-1)-1} \exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}))dx$. On dérive cette dernière équation par rapport à ν et o

$$2m^{\nu-1} \ln m \; K_{\nu-1}(2\alpha) + 2m^{\nu-1} \frac{\partial K_{\nu-1}\,(2\alpha)}{\partial \nu} = \int_0^{\infty} x^{(\nu-1)-1} \exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}))dx \qquad (E.14)$$

En combinant les expressions (E.13)et (E.14), on obtient la valeur $E(m_0^{'},m_{-1}^{'})$:

$$E(m_0^{'},m_{-1}^{'}) = \frac{K_{\nu-1}(2\alpha)}{m\,K_{\nu}(2\alpha)} \; [\; \ln m + \frac{1}{K_{\nu+1}(2\alpha)} \frac{\partial K_{\nu-1}(2\alpha)}{\partial \nu} \;] \qquad (E.15)$$

À partir de l'équation (E.15) et de l'équation (E.8), on peut calculer la covariance Cov $(m_0^{'}, m_{-1}^{'})$:

$$\mathrm{Cov}\ (m_0^{'}, m_{-1}^{'}) = \frac{\mu_{-1}^{'}}{N} \left[\frac{1}{K_{\nu-1}(2\alpha)} \frac{\partial K_{\nu-1}(2\alpha)}{\partial \nu} - \frac{1}{K_{\nu}(2\alpha)} \frac{\partial K_{\nu}(2\alpha)}{\partial \nu} \right] \tag{E.16}$$

APPENDICE F

Appendice F

Loi de type B- Évaluation de la variance du logarithme de la moyenne géométrique et des covariances: Cov (m_0', m_2') et Cov (m_0', m_1')

Le logarithme de la moyenne géométrique de la loi de type B s'exprime ainsi:

$$\mu_0' = \ln m + \frac{1}{2ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \alpha} \tag{F.1}$$

Comme les lois de type A et de type B, on pose $Y = \ln X$ et on a que $m_1'(Y) = \frac{1}{N}$ $EY = \frac{1}{N} \sum \ln X = m_0'(x)$ où

$$Var(m_0'(x)) = \frac{1}{N}\ Var(Y) = \frac{1}{N} Var(\ln x)$$

F . 1 **Évaluation de la variance Var (m_0'):**

On reprend la définition de la variance:

$$Var\ (\ln)/N = [\ E(\ln^2) - E(\ln)^2\ ]/N \tag{F.2}$$

On sait que la valeur E(ln) est équivalente à μ_0', il nous reste à évaluer la valeur de $E(\ln^2)$ afin de déterminer Var(ln).

Par définition $E(\ln^2)$ est équivalent à:

$$E(\ln^2) = \frac{2}{m^{2\nu} ef_\nu(\alpha)} \int_0^\infty x^{2\nu-1} \exp(-(x/m)^2 + \alpha x/m)\ \ln^2 x\ dx \quad \text{(F}$$

D'après la définition de la fonction exponentielle factorielle, on a que:

$$m^{2\nu} ef_\nu(\alpha) = 2 \int_0^\infty x^{2\nu-1} \exp(-(\frac{x}{m})^2 + \frac{\alpha x}{m})\ dx \tag{F.4}$$

En dérivant deux fois l'équation (F.4), on obtient l'expression suivante:

$$\{\ln^2 m + \frac{\ln m}{ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu} + \frac{1}{4ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial^2 ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu^2}\} = E(\ln^2) \qquad (F.5)$$

La variance $Var(m_\ell')$ peut donc être déterminée par l'équation (F.2):

$$Var(m_\ell') = \{[\ln^2 m + \frac{\ln m}{ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu} + \frac{1}{4ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial^2 ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu^2}] - [\ln^2 m - \frac{\ln m}{ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu} + \frac{1}{4ef_\nu^2(\alpha)} (\frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu})^2]\}/N \qquad (F.6)$$

$$= \frac{1}{4ef_\nu(\alpha)} \{\frac{\partial^2 ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu^2} - \frac{1}{ef_\nu(\alpha)} (\frac{\partial ef_\nu^2(\alpha)}{\partial \nu})^2\} \cdot \frac{1}{N} \qquad (F.7)$$

F.2. Évaluation des covariances: $Cov(m_0', m_2')$ et $Cov(m_0', m_1')$

La covariance de deux variables s'exprime par l'équation:

$$Cov(M_1, M_2) = [E(M_1 M_2) - E(M_1)E(M_2]/N \qquad (F.9)$$

où M_1, M_2 = moments d'ordre quelconque.
Dans le cas de la détermination des $Cov(m_\ell', m_2')$ et $Cov(m_\ell', m_1')$, on connaît les valeurs de $E(m_\ell')$,$E(m_1')$ et $E(m_2')$. Alors il ne reste plus qu'à évaluer $E(m_\ell', m_1')$ et $E(m_\ell', m_2')$.

F.2.1 Évaluation de $Cov(m_0', m_2')$:

On a par définition de $E(m_0', m_2')$, l'expression suivante:

$$E(m_\ell', m_2') = \frac{2}{m^{2\nu} ef_\nu(\alpha)} \int_0^\infty x^{2(\nu+1)-1} \exp(-(\frac{x}{m})^2 + \frac{\alpha x}{m}) \ln x dx \qquad (F.10)$$

En posant $\nu = \nu+1$, l'équation (F.4) devient:

$$m^{2(\nu+1)} ef_{\nu+1}(\alpha) = 2 \int_0^\infty x^{2(\nu+1)-1} \exp(-(\frac{x}{m})^2 + \frac{\alpha x}{m}) dx \qquad (F.11)$$

On dérive l'équation (F.11) par rapport à ν et on peut obtenir la relation exprimant la valeur $E(m_\ell', m_2')$:

$$E(m_0',m_2') = \mu_2' \left[\frac{1}{2ef_{\nu+1}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+1}}{\partial \nu} + \ln m\right] \tag{F.12}$$

La covariance $Cov(m_0',m_2')$ sera équivalente à :

$$Cov(m_0',m_2') = \frac{\mu_2'}{N} \left(\frac{1}{2ef_{\nu+1}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+1}(\alpha)}{\partial \nu} + \ln m\right) - \mu_2'\left(\ln m + \frac{1}{2ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu}\right) \tag{F.13}$$

L'équation finale de la covariance $Cov(m_0',m_2')$ est

$$Cov(m_0',m_2') = \frac{\mu_2'}{N} \left(\frac{1}{2ef_{\nu+1}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+1}(\alpha)}{\partial \nu} - \frac{1}{2ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu}\right. \tag{F.14}$$

F.2.2 <u>Évaluation de la covariance $Cov(m_0',m_1')$</u>:

La relation générale de la valeur $E(m_0',m_1')$ est

$$E(m_0',m_1') = \frac{2}{m^{2\nu} ef_{\nu}(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{2(\nu+\frac{1}{2})-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right) \ln x dx \tag{F.15}$$

En posant $\nu = \nu+\frac{1}{2}$, l'équation (F.4) devient alors:

$$m^{2(\nu+\frac{1}{2})} ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} x^{2(\nu+\frac{1}{2})-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right) dx \tag{F.16}$$

En dérivant cette dernière équation par rapport à l'ordre ν et en combinant le résultat de la dérivation avec l'équation (F.15), on peut obtenir la valeur de $E(m_0',m_1')$:

$$E(m_0',m_1') = \mu_1' \left(\ln m + \frac{1}{2ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \nu}\right) \tag{F.17}$$

Il est possible maintenant d'évaluer la valeur de la $Cov(m_0',m_1')$ en utilisant l'équation (F.9)

$$\mathrm{Cov}(m_0',m_1') = \Big[\, \mu_1'\Big(\ln m + \frac{1}{2ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \nu}\Big) - \mu_1'\Big(\ln m + \frac{1}{2ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu}\Big)\Big]\frac{1}{N} \qquad \text{(F.18)}$$

En réduisant l'équation F.18, on obtient l'équation de $\mathrm{Cov}(m_0',m_1')$ pour la loi de Halphen de type B:

$$\mathrm{Cov}(m_0',m_1') = \frac{\mu_1'}{N} \Big[\frac{1}{2ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \nu} - \frac{1}{2ef\nu(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu}\Big] \qquad \text{(F.19)}$$

APPENDICE G

Appendice G

Équivalence entre la loi de Halphen de type B et la loi de Halphen de type B^{-1}.

Soit la variable $y = m^2/x$ qui suit une loi de Halphen de type B ($HB(\alpha,m,\nu)$), la f.d.p. de la loi de Halphen de type B est:

$$f(y;\alpha,m,\nu) = \frac{2}{m^{2\nu}ef_{\nu}(\alpha)} y^{2\nu-1}\exp(-(\frac{y^2}{m}) + \frac{\alpha y}{m}) \quad \text{(G.1)}$$

La formule générale qui donne la f.d.p. de x en fonction de celle de y (x étant une fonction de y)

$$g(x) = f(y(x))\left|\frac{dy}{dx}\right| \quad \text{(G.2)}$$

Selon la transformation $y = m^2/x$, on aura $dy = -\frac{m^2dx}{x^2}$, on peut obtenir la fonction de distribution de la variable x en appliquant l'équation (G.2):

$$agx) = \frac{2m^{2\nu}}{ef_{\nu}(\alpha)} x^{-2\nu-1}\exp(-(\frac{m}{x})^2 + \frac{\alpha m}{x})) \quad \text{(G.3)}$$

L'équation G.3 nous donne la f.d.p. d'une variable x qui suit une loi de Halphen de type B^{-1}($HB^{-1}(\alpha,m,\nu)$).

Lorsqu'on désire estimer les paramètres d'une loi de type B^{-1} par le biais de la loi de type B, on peut utiliser la correspondance suivante:

$$\text{Si } Y = 1/X \sim HB^{-1}(\alpha,m,\nu) \text{ alors } X \sim HB(\alpha,1/m,\nu) \quad \text{(G.4)}$$

En supposant que la série de valeurs observées Y suit une loi de Halphen de type B^{-1} de paramètre α, ν et m, on peut montrer que la série des valeurs inverses $X = 1/Y$ suit une loi de Halphen de type B dont le paramètre d'échelle est $1/m$ et les paramètres de forme sont α et ν.

En effet, si on utilise la formule générale (G.2) la transformation $Y=1/x$, on obtient:

$$g(x) = \frac{2m^{2\nu}}{ef_\nu(\alpha)} x^{2\nu+1} \exp(-(mx)^2 + \frac{\alpha m}{x}) \frac{1}{x^2} \qquad (G.5)$$

L'équation (G.5) revient à l'expression:

$$g(x) = \frac{2}{(1/m)^{2\nu} ef_\nu(\alpha)} x^{2\nu-1} \exp(-(\frac{x}{1/m})^2 + \frac{\alpha x}{1/m})) \qquad (G.6)$$

Cette dernière équation est l'expression de la fonction de distribution d'une loi de Halphen de type B dont le paramètre d'échelle est 1/m ($X \sim HB(\alpha,1/m,\nu)$).

Si on utilise la méthode d'estimation des paramètres de la loi de type B pour estimer les paramètres de la loi de type B^{-1}, il est possible de démontrer l'équivalence entre ces deux méthodes.

On évalue les paramètres α, m et ν d'une loi de type B en utilisant le système d'équations suivant (c.f. section 5.1):

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i/N = m\, ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)/ef_\nu(\alpha)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2/N = m^2 ef_{\nu+1}(\alpha)/ef_\nu(\alpha) \qquad (G.7)$$

$$\ln G = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i/N = \ln m + \frac{1}{2ef_\nu(\alpha)} (\frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu})$$

On pose le paramètre d'échelle égal à 1/m, le système d'équations (G.7) est équivalent à ce système:

$$A = \frac{1}{m} [ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)/ef_\nu(\alpha)]$$

$$Q = (\frac{1}{m^2})[ef_{\nu+1}(\alpha)/ef_\nu(\alpha)] \qquad (G.8)$$

$$\ln G = \ln (\frac{1}{m}) + \frac{1}{2ef_\nu(\alpha)} (\frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu})$$

En réalité, si on utilise la procédure d'estimation des paramètres de la loi de Type B, on doit effectuer:

1) Elimination du paramètre d'échelle 1/m en utilisant ces équations:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{A^2} &= \frac{ef_{\nu+1}(\alpha)\ ef_{\nu}(\alpha)}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)} \\ \frac{G}{A} &= \frac{ef_{\nu}(\alpha).\exp(\frac{1}{2ef_{\nu}(\alpha)} \cdot \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu}))}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)} \end{aligned} \tag{G.9}$$

Utilisation de la méthode de Quasi-Newton pour résoudre le système d'équations.

2) Estimation du paramètre d'échelle 1/m en utilisant l'équation de la moyenne: (où $\tilde{m}, \tilde{\nu}$ et $\tilde{\alpha}$ sont les paramètres estimés)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i/N = (\frac{1}{\tilde{m}}) (\frac{ef_{\tilde{\nu}+\frac{1}{2}}(\tilde{\alpha})}{ef_{\tilde{\nu}}(\tilde{\alpha})}) \tag{G.10}$$

En réalité, cette procédure d'estimation des paramètres α, 1/m et ν par la loi de type B est équivalente à la procédure d'estimation des paramètres de la loi de type B^{-1} décrite à la section 6.1.

APPENDICE H

Appendice H

Loi de type B^{-1} - Évaluation de la variance du logarithme de la moyenne géométrique et de covariances: ($Cov(m'_0, m'_{-1})$ et $Cov(m'_0, m'_{-2})$)

Le logarithme de la moyenne géométrique s'exprime comme suit:

$$\mu'_{\ell} = \ln m - \frac{1}{2ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu} \qquad (H.1)$$

La variance du moment $m'_{\ell}(x)$ s'obtient en posant $Y = \ln(X)$:

$$Var(m'_{\ell}) = \frac{Var(Y)}{N} = \frac{Var\ (\ln X)}{N} \qquad (H.2)$$

H.1 Évaluation de la variance $Var(m'_0)$:

Par la définition générale de la variance, on a que:

$$Var(\ln X)/N = [\ E(\ln^2 X) - E(\ln X)^2]/N \qquad (H.3)$$

On sait la valeur $E(\ln X)$ est équivalente à m'_{ℓ}, on doit alors évaluer la valeur de $E(\ln^2 X)$.

La valeur de $E(\ln^2 X)$ est donnée par l'expression:

$$E(\ln^2 X) = \frac{2m^{2\nu}}{ef_{\nu}(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{-2\nu-1} \exp(-(\frac{m}{x})^2 + \alpha(\frac{m}{x}) \ln^2 x \, dx \qquad (H.4)$$

On connaît également l'égalité suivante:

$$\frac{ef_{\nu}(\alpha)}{2m^{2\nu}} = \int_0^{\infty} x^{-2\nu-1} \exp(-(\frac{m}{x})^2 + \frac{\alpha m}{x}) dx \qquad (H.5)$$

Si on dérive deux fois l'expression H.5 par rapport à l'ordre ν, on obtient, après réarrangement des termes:

$$E(\ln^2 X) = \ln^2 m - \frac{\ln m}{ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu} + \frac{1}{4ef_\nu(\alpha)} \left(\frac{\partial^2 ef_\nu(\alpha)}{\partial^2 \nu}\right) =$$

$$\frac{2m^{2\nu}}{ef_\nu(\alpha)} \left[\int_0^\infty x^{-2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right) \ln^2 x \, dx \right] \qquad (H.6)$$

On utilise l'expression de $E(\ln^2 X)$ pour calculer la variance $Var(m_{\ell}^{'})$:

$$Var(m_{\ell}^{'}) = \frac{1}{N} \left[\ln^2 m - \frac{\ln m}{ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu} + \frac{1}{4ef_\nu(\alpha)} \left(\frac{\partial^2 ef_\nu(\alpha)}{\partial^2 \nu}\right) - \right.$$

$$\left. \left(\ln^2 m - \frac{\ln m}{ef_\nu(\alpha)} \frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu} + \frac{1}{4ef_\nu^2(\alpha)} \left(\frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu}\right)\right] \qquad (H.7)$$

En éliminant quelques termes, on retrouve cette équation finale

$$Var(m_{\ell}^{'}) = \frac{1}{4Nef_\nu(\alpha)} \left\{ \frac{\partial^2 ef_\nu(\alpha)}{\partial^2 \nu} - \frac{1}{ef_\nu(\alpha)} \left(\frac{\partial ef_\nu(\alpha)}{\partial \nu}\right)^2 \right\} \qquad (H.8)$$

En fait, on retrouve exactement la même formule de la variance $Var(m_{\ell}^{'})$ pour la loi de type B.

H.2 Évaluation des covariances $Cov(m_0^{'}, m_{-1}^{'})$ et $Cov(m_0^{'}, m_{-2}^{'})$.

Comme pour la loi de Halphen de Type A et B, on a qu'à évaluer les valeurs de $E(\frac{\ln X}{X})$ et $E(\frac{\ln X}{X^2})$ pour déterminer les covariances $Cov(m_{\ell}^{'}, m_{-1}^{'})$ et $Cov(m_{\ell}^{'}, m_{-2}^{'})$.

L'expression pour $E(\frac{\ln X}{X})$ est la suivante:

$$E\left(\frac{\ln X}{X}\right) = \frac{2m^{2\nu}}{ef_\nu(\alpha)} \int_0^\infty x^{-2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right) \frac{\ln x}{x} \, dx \qquad (H.9)$$

En posant $\nu = \nu + \frac{1}{2}$ dans l'équation H.5, on a:

$$\frac{ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{m^{2(\nu+\frac{1}{2})}} = 2 \int_0^\infty x^{-2(\nu+\frac{1}{2})-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{m\alpha}{x}\right) dx \qquad (H.10)$$

On dérive cette dernière équation par rapport à ν et on obtient:

$$- \frac{ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)\ln m}{m^{2(\nu+\frac{1}{2})}} - \frac{2}{m^{2(\nu+\frac{1}{2})}} \frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial\nu} = 2 \int_0^\infty x^{-2(\nu+\frac{1}{2})-1} \exp(-(\frac{m}{x})^2 + \frac{m\alpha}{x}) \ln x \, dx \tag{H.11}$$

En combinant les équations (H.9) et (H.11), on aura la valeur de $E(\frac{\ln X}{X})$:

$$E(\frac{\ln X}{X}) = \mu'_{-1} (\ln m - \frac{1}{2ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial\nu}) \tag{H.12}$$

Donc l'équation de la covariance $Cov(m'_0,m'_{-1})$ est:

$$Cov(\mu'_0,\mu'_{-1}) = \mu'_{-1}(\ln m - \frac{1}{2ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial\nu})-$$

$$\mu'_{-1} (\ln m - \frac{1}{2ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial\nu}) \tag{H.13}$$

L'équation finale de $Cov(m'_0,m'_{-1})$ est

$$Cov(m'_0,m'_{-1}) = - \frac{\mu'_{-1}}{2N} [\frac{1}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial\nu} - \frac{1}{ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial\nu}] \tag{H.14}$$

L'équation de la covariance $Cov(m'_0,m'_{-1})$ pour la loi de type B^{-1} est équivalente à celle de la $Cov(m'_0,m'_{-1})$ de la loi de type B lorsqu'on inverse les signes.

H.3 <u>Évaluation de la covariance $Cov(m'_0,m'_{-2})$</u>:

Par définition, l'expression de $E(\frac{\ln X}{X^2})$ est:

$$E(\frac{\ln X}{X^2}) = \frac{2m^{2\nu}}{ef_{\nu}(\alpha)} \int_0^\infty x^{-2\nu-1} \exp(-(\frac{m}{x})^2 + \frac{\alpha m}{x}) \frac{\ln x}{x^2} \, dx \tag{H.15}$$

En posant $\nu=\nu+1$, l'équation (H.5) devient alors:

$$\frac{ef_{\nu+1}(\alpha)}{m^{2(\nu+1)}} = 2\int_0^\infty x^{-2(\nu+1)-1} \exp(-(\frac{m}{x})^2 + \frac{m\alpha}{x}))dx \tag{H.16}$$

On dérive par rapport à ν l'équation (H.16) et on obtient:

$$\frac{ef_{\nu+1}(\alpha)}{m^{2\nu+2}} \ln m - \frac{1}{2m^{2\nu+2}} \frac{\partial ef_{\nu+1}(\alpha)}{\partial \nu} = 2\int_0^\infty x^{-2(\nu+1)-1} \exp(-(\frac{m}{x})^2 + \frac{m}{x})\ln x \, dx \tag{H.17}$$

En combinant les expressions H.17 et H.15, on peut détermine la valeur de $E(\frac{\ln X}{X^2})$:

$$E(\frac{\ln X}{X^2}) = \mu'_{-2} \left[\ln m - \frac{1}{2ef_{\nu+1}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+1}(\alpha)}{\partial \nu}\right] \tag{H.18}$$

L'équation de la covariance $Cov(m'_\ell, m'_{-2})$ deviendra égale à :

$$\begin{aligned} Cov(m'_\ell, m'_{-2}) = {} & \frac{\mu'_{-2}}{N} (\ln m - \frac{1}{2ef_{\nu+1}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+1}(\alpha)}{\partial \nu}) \\ & - \frac{\mu'_{-2}}{N} (\ln m - \frac{1}{2ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu} \end{aligned} \tag{H.19}$$

ou

$$Cov(m'_\ell, m'_{-2}) = -\frac{\mu'_{-2}}{2N} \left\{ \frac{1}{ef_{\nu+1}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu+1}(\alpha)}{\partial \nu} - \frac{1}{ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu} \right\} \tag{H.20}$$