

Record Number:
Author, Monographic: Boucher, S.//Ashkar, F.//Bobée, B.
Author Role:
Title, Monographic: Lois de Halphen : propriétés statistiques et mathématiques
Translated Title:
Reprint Status:
Edition:
Author, Subsidiary:
Author Role:
Place of Publication: Québec
Publisher Name: INRS-Eau
Date of Publication: 1989
Original Publication Date: Juillet 1989
Volume Identification:
Extent of Work: vi, 82
Packaging Method: pages
Series Editor:
Series Editor Role:
Series Title: INRS-Eau, Rapport de recherche
Series Volume ID: 241
Location/URL:
ISBN: 2-89146-238-6
Notes: Rapport annuel 1989-1990
Abstract: 15.00\$
Call Number: R000241
Keywords: rapport/ ok/ dl

**Lois de Halphen:
propriétés statistiques et mathématiques**

Rapport scientifique No 241

par

Sylvie Boucher
Fahim Ashkar
Bernard Bobée

Juillet 1989

INRS-Eau
Université du Québec
C.P. 7500
Sainte-Foy (Qué)
G1V 4G7

TABLE DES MATIÈRES

	page
LISTE DES FIGURES	iv
LISTE DES TABLEAUX	vi
1. INTRODUCTION AUX LOIS DE HALPHEN	
1.1 Origine des lois de Halphen	7
1.2 Présentation des fonctions de densité de probabilité des lois de Halphen	9
1.3 Présentation des systèmes d'équations différentielles générales des lois de Halphen	11
1.4 Étude des modes et des points d'inflexion des lois de Halphen.	13
1.5 Étude des valeurs aux limites	17
1.6 Présentation des différentes formes de la loi de Halphen-type A.	19
1.7 Présentation des différentes formes de la loi de Halphen-type B.	22
1.8 Présentation des différentes formes de la loi de Halphen-type B ⁻¹ .	27
2. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE LA LOI DE HALPHEN - Type A	
2.1 Fonction caractéristique, moments et cumulants.	30
2.2 Détermination des coefficients caractéristiques de la loi de Type A.	34
2.3 Détermination du moment d'ordre quasi-zéro de la loi de type A.	36
3. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE LA LOI DE HALPHEN - Type B	
3.1 Fonction caractéristique, moments et cumulants.	38
3.2 Détermination des coefficients caractéristiques de la loi de type B.	42
3.3 Détermination du moment d'ordre quasi-zéro de la loi de type B.	43

4. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE LA LOI DE HALPHEN - Type B^{-1}	
4.1 Fonction caractéristique, moments et cumulants.	44
4.2 Détermination des coefficients caractéristiques de la loi de Halphen de type B^{-1} .	47
4.3 Détermination du moment d'ordre quasi-zéro de la loi de type B^{-1} .	47
5. ÉVALUATION DES FONCTIONS DE DISTRIBUTION DES LOIS DE HALPHEN DE TYPE A, DE TYPE B ET DE TYPE B^{-1}.	49
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	55
ANNEXE A Fonction de Bessel modifiée: Description et propriétés	56
ANNEXE B Fonction exponentielle factorielle: Description et propriétés	65
ANNEXE C Valeurs de certaines caractéristiques statistiques des populations des lois de Halphen de type A	72
ANNEXE D Valeurs de certaines caractéristiques statistiques des populations des lois de Halphen de type B	74
ANNEXE E Valeurs de certaines caractéristiques statistiques des populations des lois de Halphen de type B^{-1}	76
APPENDICE 1 - Fonction de distribution d'une loi de Halphen de type A pour une variable transformée $Y = k * X$	78
APPENDICE 2 - Fonction de distribution d'une loi de Halphen de Type B pour une variable transformée $Y = k * X$	80
APPENDICE 3 - Équivalence entre les lois de Halphen de type B et de type B^{-1}	82
APPENDICE 4 - Fonction de distribution d'une loi de Halphen de type B^{-1} pour une variable transformée $Y = k * X$	84
APPENDICE 5 - Relation entre les moments de la loi de type B et de la loi de type B^{-1}	86

LISTE DES FIGURES

1.1	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	20
	type A: $\alpha = 0,5$ et $m = 1,0$	
1.2	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	20
	type A: $\alpha = 0,5$ et $m = 2,0$	
1.3	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	21
	type A: $\nu = 1,0$ et $m = 1,0$	
1.4	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	21
	type A: $\nu = 1,0$ et $m = 2,0$	
1.5	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	24
	type B: $\nu = 0,1$ et $m = 1,0$	
1.6	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	24
	type B: $\nu = 0,5$ et $m = 1,0$	
1.7	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	26
	type B: $\nu = 1,0$ et $m = 1,0$	
1.8	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	26
	type B: $\alpha = 1,0$ et $m = 2,0$	
1.9	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	28
	type B ⁻¹ : $\nu = 2,0$ et $m = 1,0$	
1.10	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	28
	type B ⁻¹ : $\nu = 2,0$ et $m = 2,0$	
1.11	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	29
	type B ⁻¹ : $\alpha = 1,0$ et $m = 1,0$	
1.12	Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen -	29
	type B ⁻¹ : $\alpha = 1,0$ et $m = 2,0$	

LISTE DES FIGURES (suite)

5.1	Abaque de la loi Harmonique et note d'utilisation.	54
A.1	Représentation graphique des fonctions de Bessel $K_0(z)$ et $K_1(z)$.	60
B.1	Représentation graphique des fonctions exponentielles factorielles d'ordre 1,0 et 2,0.	69

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Équations différentielles générales des trois types de loi de Halphen	12
1.2	Dérivées premières des fonctions de densité de probabilité des trois types de loi de Halphen	13
1.3	Étude générale de l'existence des modes	14
1.4	Dérivées secondes des lois de Halphen	17
1.5	Valeurs aux limites des fonctions de densité de probabilité des lois de Halphen	18
2.1	Moments centrés de la loi de Halphen - type A	33
2.2	Coefficients caractéristiques de la loi de Halphen -type A	35
3.1	Principaux moments centrés par rapport à la moyenne et cumulants de la loi de Halphen - type B	41
4.1	Principaux moments centrés et cumulants de la loi de Halphen-type B^{-1}	46
5.1	Exemples des valeurs tabulées des fonctions de distribution des lois de Halphen de type A et de type B.	51
5.2	Exemples des valeurs tabulées des fonctions de distribution des lois de Halphen de type A et de type B (programme "PROBTAB")	52
A.1	Équations de récurrence utiles pour le calcul des fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce.	61
A.2	Tables des valeurs des fonctions de Bessel modifiées $K_\nu(z)$	62
B.1	Tables des valeurs des fonctions exponentielles factorielles $ef_\nu(x)$	70
C.1	Coefficients caractéristiques de la loi de Halphen de type A	73
D.1	Coefficients caractéristiques de la loi de Halphen de type B	75
E.1	Coefficients caractéristiques de la loi de Halphen de type B^{-1}	77

1. INTRODUCTION AUX LOIS DE HALPHEN

1.1 Origine des lois de Halphen

Vers la fin des années 1940, Etienne Halphen a développé une famille de lois statistiques conçue principalement pour représenter des séries chronologiques de débits de rivières. À l'époque, Halphen avait constaté que les lois généralement utilisées en hydrologie (Normale, Galton-Gibrat, etc..) n'étaient pas toujours adéquates pour représenter les données hydrométriques. De plus, il considérait qu'une loi statistique à deux paramètres n'est pas assez souple pour représenter la forme et la dispersion des courbes. Halphen (Morlat, 1956) a alors introduit deux types de lois statistiques à trois paramètres: loi de type A et loi de type B. La construction de ces deux types de loi était basée principalement sur:

- la connaissance de Halphen des distributions empiriques des données hydrologiques;
- l'adéquation de ses lois statistiques quand elles étaient ajustées à des séries de données hydrologiques.

Par la suite, Larcher selon Morlat (1956) eu l'idée d'introduire un nouveau type de loi appelé type B inverse (ou B^{-1}). Cette nouvelle loi venait prolonger le domaine d'application des lois de Halphen de type A et B. Les lois de Halphen furent utilisées pour l'analyse des séries de débits des rivières françaises (Le Cam et Morlat, 1949) et présentèrent de bons résultats. En fait, les lois de Halphen peuvent être comparées en terme de souplesse au système de Pearson. Cependant, l'utilisation pratique ainsi que le développement algébrique et mathématique associés aux lois de Halphen sont plus complexes que ceux des lois du système Pearson. En effet, le calcul pratique des lois de Halphen de type A et de type B demande respectivement la détermination de la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce $K_\nu(\alpha)$ et de la fonction exponentielle factorielle $ef_\nu(\alpha)$. Ces deux types de fonctions mathématiques spéciales sont très peu utilisées dans la pratique et ont été moins bien étudiées que la fonction Gamma, par exemple. De plus, les moyens informa-

tiques des années '50 n'étaient pas aussi développés qu'ils le sont aujourd'hui, l'utilisation pratique des lois de Halphen devenait assez compliquée et du même coup, peu populaire auprès des hydrologues. Cependant, plusieurs avantages incitent au développement et à l'étude des lois de Halphen pour l'analyse de fréquence de données hydrologiques et font l'objet de ce rapport.

L'approche utilisée par Halphen pour le développement de ses lois est plutôt intuitive. Il existe peu de publications sur les propriétés statistiques et mathématiques des lois de Halphen (Morlat, 1956; Halphen, 1955). Dvorak et al. (1988) ont réalisé une étude sur les propriétés mathématiques des lois de Halphen. Ces derniers ont concentré principalement leurs efforts sur l'étude des propriétés mathématiques de la loi de type A.

Le présent rapport a pour objectif de présenter l'ensemble des propriétés mathématiques et statistiques des trois types de loi de Halphen:

- Loi de Type A
- Loi de Type B
- Loi de Type B^{-1}

Dans un premier temps, on présente les propriétés mathématiques déjà connues des lois de Halphen par le biais de la littérature (Halphen, 1955; Morlat, 1956) et on complète ces informations en introduisant des nouveaux développements théoriques. Les principaux résultats de l'étude de Dvorak et al. (1988) sur la loi de Halphen de type A sont repris dans ce rapport et ont été complétés. Pour les lois de Halphen de type B et de type B^{-1} , plusieurs nouveaux éléments sont décrits tels que l'étude des formes des fonctions de densité, les formules théoriques décrivant les moments et cumulants ainsi que la détermination du moment quasi-zéro.

1.2 Présentation des fonctions de densité de probabilité des lois de Halphen

TYPE A:

La fonction de densité de probabilité (f.d.p.) de la loi de Halphen de type A est la suivante:

$$f(x) = \frac{1}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} x^{\nu-1} \cdot \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right] \quad (1.1)$$

où $x > 0$; $m > 0$; $\alpha > 0$ et ν est réel.

Les variables α et ν sont des paramètres de forme et m est un paramètre d'échelle. Il est également possible de montrer que si une variable $X \sim HA(\alpha, m, \nu)$ alors la variable $Y = kX \sim HA(\alpha, mk, \nu)$; on a $k > 0$ car le paramètre d'échelle m doit toujours être supérieur à zéro (c.f. démonstration, Appendice 1).

La fonction $K_\nu(2\alpha)$ correspond à la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre ν :

$$K_\nu(2\alpha) = \frac{1}{2m^\nu} \int_0^\infty x^{\nu-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right] dx \quad (1.2)$$

L'annexe A présente quelques propriétés mathématiques des fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce.

En posant le paramètre de forme ν égal à zéro, on retrouve dans l'équation 1.1, la f.d.p. de la loi harmonique (Morlat, 1956). La f.d.p. de la loi de type A est à asymétrie positive ce qui démontre l'intérêt de son utilisation dans le domaine de l'hydrologie.

TYPE B:

Halphen a introduit un autre type de loi de probabilité qui complète, en terme de diversités de forme de courbes, la loi de type A. Il détermine cette loi

par essais empiriques et lui donne le nom de type B. La f.d.p. de la loi de Halphen de type B s'énonce comme suit:

$$f(x) = \frac{2}{m^{2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \cdot x^{2\nu-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right] \quad (1.3)$$

où $x > 0$; $m > 0$; $\nu > 0$ et α est réel.

Les variables α et ν sont des paramètres de forme et m est un paramètre d'échelle. Pour la loi de type B, on peut montrer que si $X \sim \text{HB}(\alpha, m, \nu)$ alors $Y = kX \sim \text{HB}(\alpha, km, \nu)$; où $k > 0$ car le paramètre d'échelle est toujours plus grand que zéro. La démonstration de cette propriété mathématique est présentée à l'Appendice 2.

La fonction $\text{ef}_\nu(\alpha)$ est appelée "fonction exponentielle factorielle". Les diverses propriétés mathématiques de cette fonction ont été étudiées par Halphen (1955) et sont reprises à l'Annexe B.

La fonction exponentielle factorielle s'exprime par la relation suivante:

$$\text{ef}_\nu(\alpha) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2 + \alpha t} \cdot t^{2\nu-1} dt \quad (1.4)$$

De nombreux avantages sont reliés à l'utilisation pratique de la loi de Halphen de type B. En effet, selon les valeurs attribuées aux paramètres α , m et ν , il est possible d'obtenir une grande variété de formes de courbe de probabilité. Ainsi, les courbes de probabilité peuvent prendre les différentes formes suivantes:

- forme en J inversée : infini à l'origine et décroissante;
- forme en S inversée : infini à l'origine, présente un maximum et décroissante;
- courbes de Gauss tronquées.

TYPE B⁻¹:

Faisant suite aux travaux de Halphen, Larcher (Morlat, 1956) a complété le système de Halphen en introduisant la loi de type B⁻¹ ou (B inverse).

La f.d.p. de la loi de type B^{-1} est définie par la relation suivante:

$$f(x) = \frac{2}{m^{-2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \cdot x^{-2\nu-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right] \quad (1.5)$$

où $x > 0$; $m > 0$; $\nu > 0$ et α est réel.

Comme les lois de type A et de type B, les variables α et ν sont des paramètres de forme. m est un paramètre d'échelle. La fonction $\text{ef}_\nu(\alpha)$ est la fonction exponentielle factorielle définie par la relation (1.4).

La loi de type B^{-1} est en réalité la fonction inverse de la loi de type B. Si une variable aléatoire Y suit une loi de type B^{-1} ($Y \sim \text{HB}^{-1}(\alpha, m, \nu)$), alors la variable aléatoire $X = \frac{m^2}{Y}$ suit une loi de Halphen de type B (i.e. $X = \frac{m^2}{Y} \sim \text{HB}(\alpha, m, \nu)$) (démonstration, Appendice 3).

Il existe également pour la loi de Halphen de type B^{-1} , les propriétés suivantes:

1. si $Y \sim \text{HB}^{-1}(\alpha, m, \nu)$ alors $X = \frac{1}{Y} \sim \text{HB}(\alpha, \frac{1}{m}, \nu)$
(démonstration, Appendice 3)
2. si $X \sim \text{HB}^{-1}(\alpha, m, \nu)$ alors $Y = kX \sim \text{HB}^{-1}(\alpha, km, \nu)$ avec $k > 0$.
(démonstration, Appendice 4)

1.3 Présentation des systèmes d'équations différentielles générales des lois de Halphen

Plusieurs familles de distribution ont été développées dans le but de fournir des approximations à une gamme de distributions empiriques. De telles familles sont appelées système de distribution ou système de courbes de fréquence. Un des systèmes les plus connus est celui de Pearson (Bobée, 1975). Ce système a été développé à la fin des années 1800.

Pour chaque type de loi du système Pearson, la f.d.p. $y = f(x)$ d'une loi satisfait l'équation différentielle suivante:

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dx} = \frac{a-x}{b_0+b_1x+b_2x^2} \quad (1.6)$$

Dans cette équation, on remarque que les valeurs des paramètres a , b_0 , b_1 et b_2 déterminent la forme d'une distribution du système Pearson. Par intégration de la relation (1.6), on peut déduire l'ensemble des f.d.p. de la famille des lois Pearson.

Dans le but d'approfondir les fondements théoriques et définir les propriétés mathématiques des distributions de Halphen, Dvorak et al. (1988) ont suivi sensiblement la même approche théorique que Pearson. Ces auteurs ont déterminé un système d'équations différentielles générales s'appliquant aux distributions de Halphen. Dvorak et al. (1988) ont démontré que les trois types de f.d.p. de Halphen (c.f. Eq. 1.1, 1.3 et 1.5) satisfont les équations différentielles présentées au tableau 1.1.

TABEAU 1.1: Équations différentielles générales des trois types de loi de Halphen

Loi de Halphen	Équation différentielle générale	Valeurs des paramètres
TYPE A	$\frac{1}{f} \frac{df}{dx} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{x^2}$	$a_0=\alpha m; a_1=\nu-1; a_2=-\alpha/m$
TYPE B	$\frac{1}{f} \frac{df}{dx} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{x}$	$a_0=2\nu-1; a_1=\alpha/m; a_2=-2/m^2$
TYPE B ⁻¹	$\frac{1}{f} \frac{df}{dx} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{x^3}$	$a_0=2m^2; a_1=-\alpha m; a_2=-(2\nu+1)$

Pour les trois types de loi de Halphen, on constate que la dérivée $\frac{df}{dx}$ s'annule lorsque $f(x)$ s'annule ou lorsque $a_0+a_1x+a_2x^2$ est égal à zéro. Selon les contraintes déterminées par les valeurs des paramètres (α , m et ν), on verra plus loin que les lois de type A, B et B⁻¹ sont unimodales. De plus, la loi de type B peut aussi posséder deux extrema (un mode et un antimode) ou aucun extremum.

Dans le domaine de l'hydrologie, ces types de distributions théoriques représentent bien souvent les distributions observées. En effet, les distributions observées des séries hydrologiques débutent souvent à $Y = 0$, elles présentent un maximum et sont, par la suite, décroissantes vers zéro.

1.4. Étude des modes et des points d'inflexion des lois de Halphen

La valeur modale d'une distribution s'obtient en annulant la dérivée première de la f.d.p. L'approche la plus simple pour la détermination de la dérivée première est de considérer les équations différentielles générales des trois types de loi de Halphen (c.f. tableau 1.1). Par ces équations, on constate pour les trois types de distribution que la dérivée $\frac{df}{dx}$ s'annule lorsque la fonction $f(x)$ s'annule ou lorsque le trinôme $(a_0 + a_1x + a_2x^2)$ est égal à zéro (où a_0, a_1 et a_2 sont des fonctions de α, m et ν). La valeur de la dérivée première de chaque type de loi de Halphen est donnée au tableau 1.2.

TABLEAU 1.2: Dérivées premières des fonctions de densité de probabilité des trois types de loi de Halphen

TYPE DE LOI	DÉRIVÉES PREMIÈRES $(\frac{df}{dx})$
A	$\frac{1}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} [x^{\nu-3} \cdot \exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}))] [-\frac{\alpha}{m}x^2 + (\nu-1)x + \alpha m]$
B	$\frac{2}{m^{2\nu} e f_\nu(\alpha)} [x^{2\nu-2} \cdot \exp(-(\frac{x}{m})^2 + \frac{\alpha x}{m})] [\frac{-2x^2}{m^2} + \frac{\alpha x}{m} + (2\nu-1)]$
B ⁻¹	$\frac{2}{m^{-2\nu} e f_\nu(\alpha)} [x^{-2\nu-4} \cdot \exp(-(\frac{m}{x})^2 + \frac{\alpha m}{x})] [(-2\nu-1)x^2 - \alpha m x + 2m^2]$

De façon générale, on sait que le trinôme $(a_0+a_1x+a_2x^2)$ s'annule pour les valeurs de x suivantes:

$$x_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}} \quad (1.7)$$

Pour déterminer l'existence des différentes racines de ce trinôme, on examine les valeurs du discriminant $\left(\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}\right)$. Si le discriminant est négatif, il n'existe aucune racine réelle donc aucun extremum possible. Si le discriminant est égal ou supérieur à zéro, il existe une ou deux racines réelles, donc une possibilité d'un ou deux extrema. De plus, pour les f.d.p. de Halphen, la valeur de x doit toujours être supérieure à zéro. Donc, si les racines x_1 et x_2 existent, elles doivent prendre des valeurs positives.

Ayant fait l'étude générale des modes des f.d.p. de Halphen, Dvorak et al. (1988) ont démontré qu'il existe quatre cas possibles de formes de courbes. Les résultats sont présentés au tableau 1.3.

TABEAU 1.3: Étude générale de l'existence des modes.

CAS POSSIBLES	DIFFÉRENTES VALEURS DES PARAMÈTRES		MODES
	$\frac{a_1}{2a_2}$	$\frac{a_0}{a_2}$	
I	> 0	> 0 et $\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 > \frac{a_0}{a_2}$ (*)	aucun mode
II	> 0	< 0	un mode
III	< 0	> 0 et $\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 > \frac{a_0}{a_2}$ (*)	Deux extrema (un mode et un antimode)
IV	< 0	< 0	un mode

(*) Si la condition telle que $\left(\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 > \frac{a_0}{a_2}\right)$ n'est pas respectée, la f.d.p. n'a aucun mode.

Le tableau 1.3 montre que selon les valeurs prises par $\frac{a_1}{2a_2}$ et $\frac{a_0}{a_2}$ (positives ou négatives), on peut obtenir des courbes de Halphen ayant un, deux extrema ou aucun extremum.

Pour déterminer les valeurs modales de chaque type de loi de Halphen, on substitue les valeurs des paramètres a_0 , a_1 et a_2 en fonction de α , m et ν .

Pour la loi de type A, on remplace a_0 , a_1 et a_2 par leurs valeurs respectives αm , $\nu-1$ et $\frac{-\alpha}{m}$ avec $\alpha > 0$, $m > 0$ et ν est réel.

Selon les valeurs possibles des paramètres a_0 , a_1 et a_2 pour la loi de Type A, on constate, d'après le tableau 1.3, que cette loi correspond aux cas II et IV. La loi de Type A de Halphen est donc exclusivement unimodale.

La valeur modale de la loi de Type A est donnée par :

$$x_M = m \left[\frac{\nu-1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\nu-1}{2\alpha}\right)^2 + 1} \right] \quad (1.8)$$

Pour la loi de type B, les valeurs de a_0 , a_1 et a_2 correspondent respectivement à $(2\nu-1)$, α/m et $-2/m^2$ avec $m > 0$ et $\nu > 0$. En effectuant ces substitutions, on remarque que la loi de type B peut correspondre aux cas I à IV du tableau 1.3. Donc, la loi de Halphen de type B possède plusieurs types de courbes selon les valeurs de ses paramètres de forme α et ν (sans mode, unimodale ou deux extrema).

Quand elles existent, la valeur modale ou les valeurs correspondant aux extrema de la loi de type B sont déterminées par la relation suivante:

$$x_M = m \left[\frac{\alpha}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \nu - \frac{1}{2}} \right] \quad (1.9)$$

La loi de type B ne possède aucun mode dans les deux cas suivants:

1. les termes $\left(\frac{-\alpha}{4}\right)$ et $(-\nu + \frac{1}{2})$ sont supérieurs à zéro;
2. l'égalité $\left(\frac{-\alpha}{4}\right)^2 > (-\nu + \frac{1}{2})$ n'est pas respectée.

Dans ces deux cas, la formule (1.9) ne s'applique pas.

La loi de type B possède une valeur modale seulement dans le cas suivant:

- le terme $(-\nu + \frac{1}{2}) \leq 0$ et le terme $(-\alpha/4)$ est positif ou négatif.

Dans ce cas précis, la valeur modale s'exprime ainsi:

$$x_M = m \left[\frac{\alpha}{4} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \nu - \frac{1}{2}} \right] \quad (1.10)$$

Lorsque la loi de type B possède deux extrema (un mode et un antimode), les valeurs des paramètres de forme α et ν respectent les conditions:

$$(-\alpha/4) \leq 0 ; (-\nu + \frac{1}{2}) > 0 \text{ et } (-\alpha/4)^2 > (-\nu + \frac{1}{2})$$

La valeur modale est obtenue par l'équation (1.10) et l'antimode est défini par:

$$x_M = m \left[\frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \nu - \frac{1}{2}} \right] \quad (1.11)$$

Pour la loi de type B^{-1} , les valeurs des paramètres a_0 , a_1 et a_2 sont respectivement $2m^2$, $-\alpha m$ et $-(2\nu+1)$ avec $m > 0$ et $\nu > 0$. Après substitutions, on constate que la loi de type B^{-1} correspond aux cas II et IV du tableau 1.3. La loi du type B^{-1} est donc comme la loi de type A, exclusivement unimodale. La valeur modale de cette loi est donnée par l'équation suivante:

$$x_M = m \left[\frac{-\alpha}{4\nu+2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{4\nu+2}\right)^2 + \frac{2}{(2\nu+1)}} \right] \quad (1.12)$$

Lorsqu'on examine les relations définissant les valeurs modales des lois, on remarque que le paramètre m agit comme un paramètre d'échelle.

Pour l'étude des points d'inflexion des f.d.p. de Halphen, on doit annuler les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. En utilisant les relations du tableau 1.1, on peut déterminer facilement les dérivées secondes des fonctions de densité des trois

lois. Le tableau 1.4 présente les valeurs des dérivées secondes de ces fonctions. En examinant les relations exprimant la dérivée seconde de chaque loi, on remarque que celle-ci s'annule lorsque $f(x)$ s'annule ou lorsque les polynômes qui multiplient $f(x)$ s'annulent (c.f. TABLEAU 1.4).

TABLEAU 1.4: Dérivées secondes des lois de Halphen

TYPE DE LOI HALPHEN	DERIVÉES SECONDES [$\frac{d^2f}{dx^2}$]
A	$\frac{f(x)}{x^4} (p^2 - 2px + p'x^2)$
B	$\frac{f(x)}{x^2} (p^2 - p + p'x)$
B ⁻¹	$\frac{f(x)}{x^6} (p^2 - 3x^2p + p'x^3)$

Note: $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$
 $p' = 2a_2x + a_1$
 a_0, a_1 et a_2 sont donnés au tableau 1.1

1.5 Étude des valeurs aux limites.

Pour bien connaître les formes des courbes définies par les f.d.p. des lois de Halphen, on détermine les valeurs aux limites (i.e. au voisinage de zéro et à l'infini). Les valeurs aux limites de ces fonctions ont été étudiées par Dvorak et al. (1988) et sont présentées au tableau 1.5.

D'après ces résultats, on remarque que pour les fonctions de type A et de type B⁻¹, l'allure des courbes tant à l'origine qu'à l'infini tend vers zéro. Pour la loi de type B, l'allure des courbes varie selon la valeur du paramètre ν .

TABLEAU 1.5: Valeur aux limites des fonctions de densité de probabilité des lois de Halphen.

Type de loi	Valeurs aux limites
TYPE A $(x>0; m>0;$ $\alpha>0 \text{ et } \nu \in \mathbb{R})$	1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
TYPE B $(x>0; m>0;$ $\nu>0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R})$	1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \nu < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{m e^{\nu} \text{ef}_{\frac{1}{2}}(\alpha)} & \text{si } \nu = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \nu > \frac{1}{2} \end{cases}$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
TYPE B ⁻¹ $(x>0; m>0;$ $\nu>0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R})$	1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

En effet, quand la valeur de x tend vers zéro, la courbe de densité de la loi de Halphen de type B, débute soit à l'infini, soit à la valeur $[\frac{2}{m^{2\nu} \text{ef}_{\nu}(\alpha)}]$ ou à zéro et ce, selon les différentes valeurs de ν du tableau 1.5. Par exemple, lorsque ν prend une valeur inférieure à $\frac{1}{2}$, la courbe de densité aura une allure exponentielle décroissante.

1.6 Présentation des différentes formes de la loi de Halphen - Type A

Selon les résultats de l'étude des valeurs modales et des limites de la f.d.p. de la loi de type A, on peut montrer que cette loi est toujours à asymétrie positive. La loi de type A est définie pour les valeurs de x positives seulement. Les valeurs de la fonction densité de la loi de type A au voisinage de l'origine et de l'infini tendent vers zéro. Etant donné que la loi de type A ne possède qu'un seul mode, la valeur modale pour chaque fonction peut être évaluée par l'équation 1.8.

Les figures 1.1 à 1.4 représentent les différentes formes que peuvent prendre la f.d.p. de la loi de type A. Pour chacune des formes présentées de la loi de type A, les valeurs de certaines caractéristiques statistiques de la population associées à ces courbes (valeur modale, moyenne, écart-type, coefficient de variation et coefficient d'asymétrie) sont indiquées à l'Annexe C.

Aux figures 1.1 et 1.2, le paramètre de forme α est fixé à 0,5 et l'autre paramètre de forme ν varie de -1 à 1. À la figure 1.1, on remarque que lorsque le paramètre de forme ν diminue, la symétrie de la courbe diminue et la valeur modale est plus élevée. Pour cette courbe, le paramètre d'échelle m est fixé égal à 1.

À la figure 1.2, les valeurs des paramètres de forme ν et α restent inchangés; seul le paramètre d'échelle est augmenté à deux ($m=2$). L'augmentation du paramètre d'échelle a pour effet de diminuer les valeurs de la fonction de densité de la loi de type A. Par rapport à la figure 1.1, les valeurs de la fonction de densité ont diminuées de moitié à la figure 1.2. Les formes des fonctions sont cependant similaires à celles de la figure 1.1, mais plus étalées.

Aux figures 1.3 et 1.4, on peut voir l'influence du paramètre de forme α sur l'allure de la courbe représentant une loi de type A. Le paramètre de forme ν est fixé à 1,0 tandis que l'autre paramètre de forme α varie de 0,5 à 2. Il est bon de souligner que pour ces valeurs spécifiques de $\nu=1$ et $m=1$, toutes les f.d.p. de la loi de type A possèdent la même valeur modale soit $x_M=1$. Une

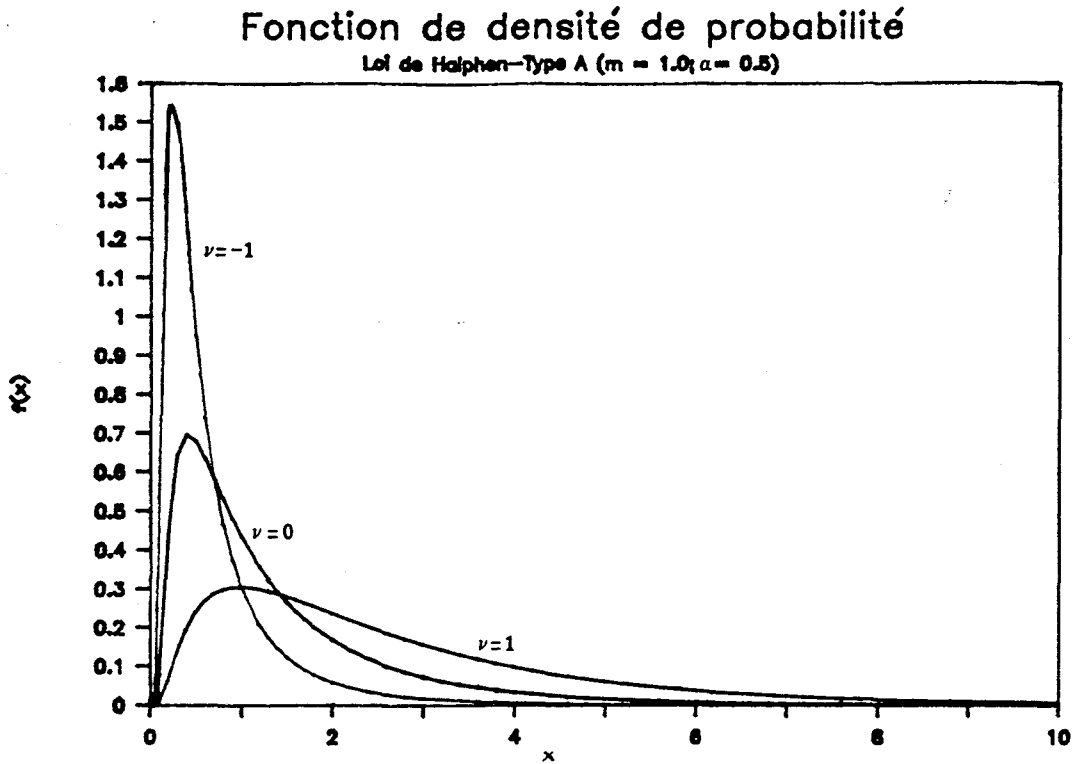


FIGURE 1.1 : Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type A:
 $\alpha = 0,5$ et $m = 1,0$

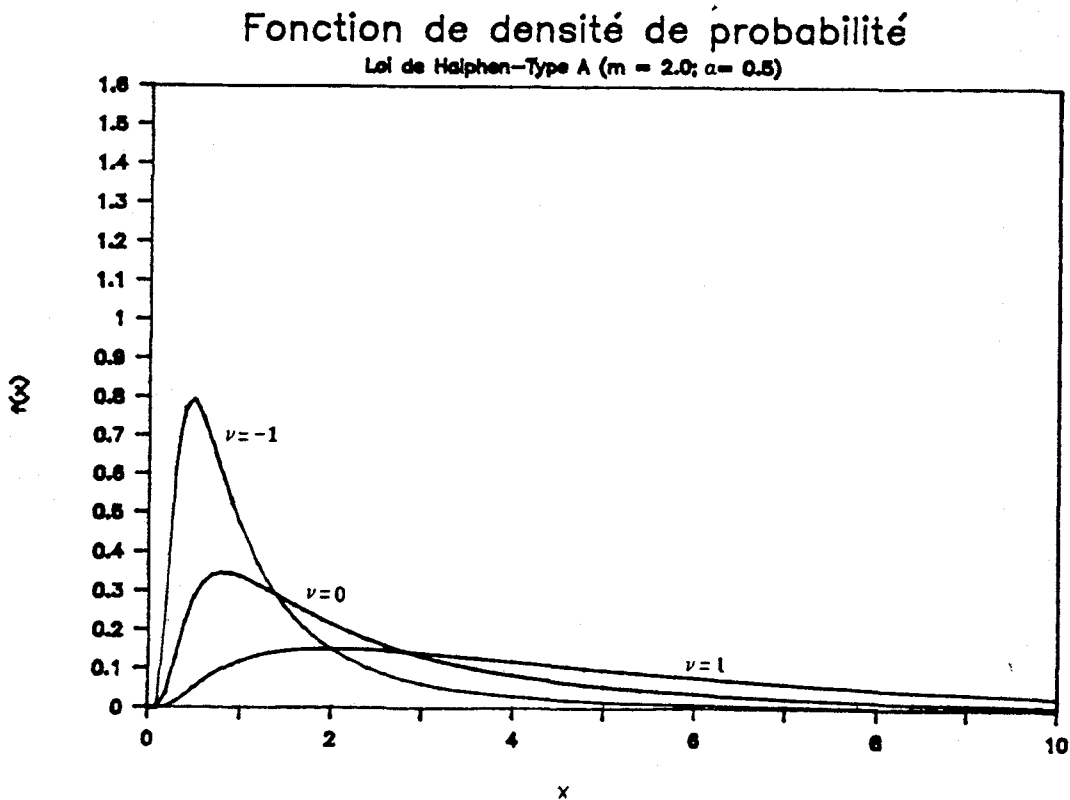


FIGURE 1.2 : Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type A
 $\alpha = 0,5$ et $m = 2$

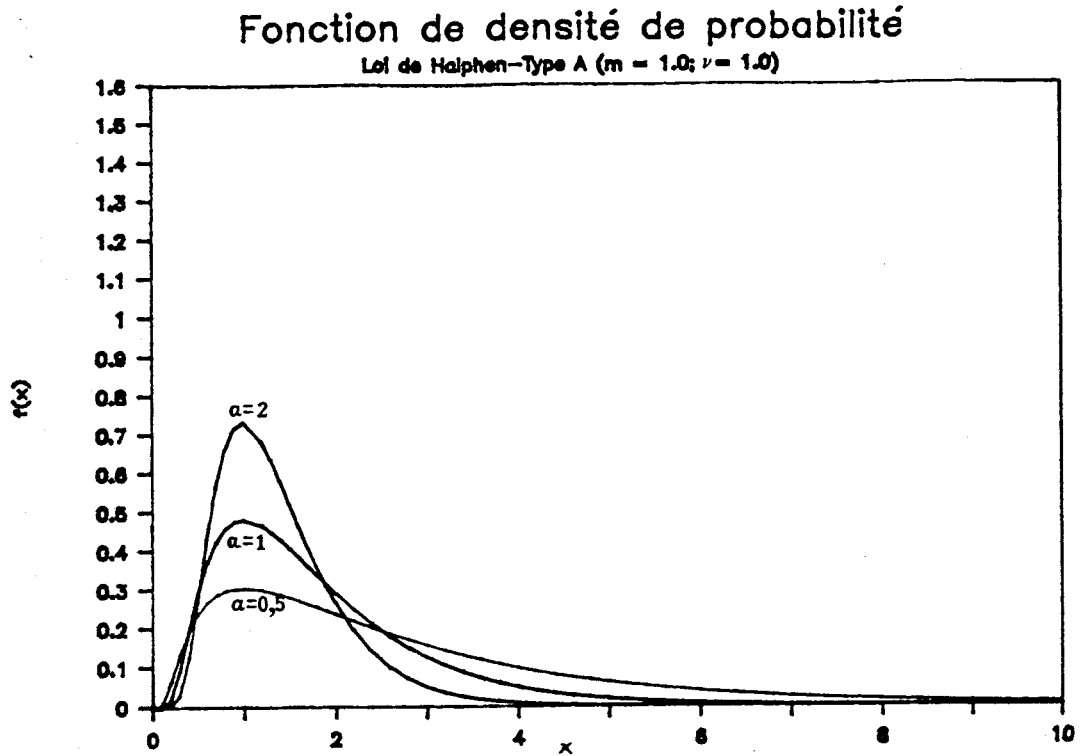


FIGURE 1.3 : Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type A:
 $\nu = 1,0$ et $m = 1,0$

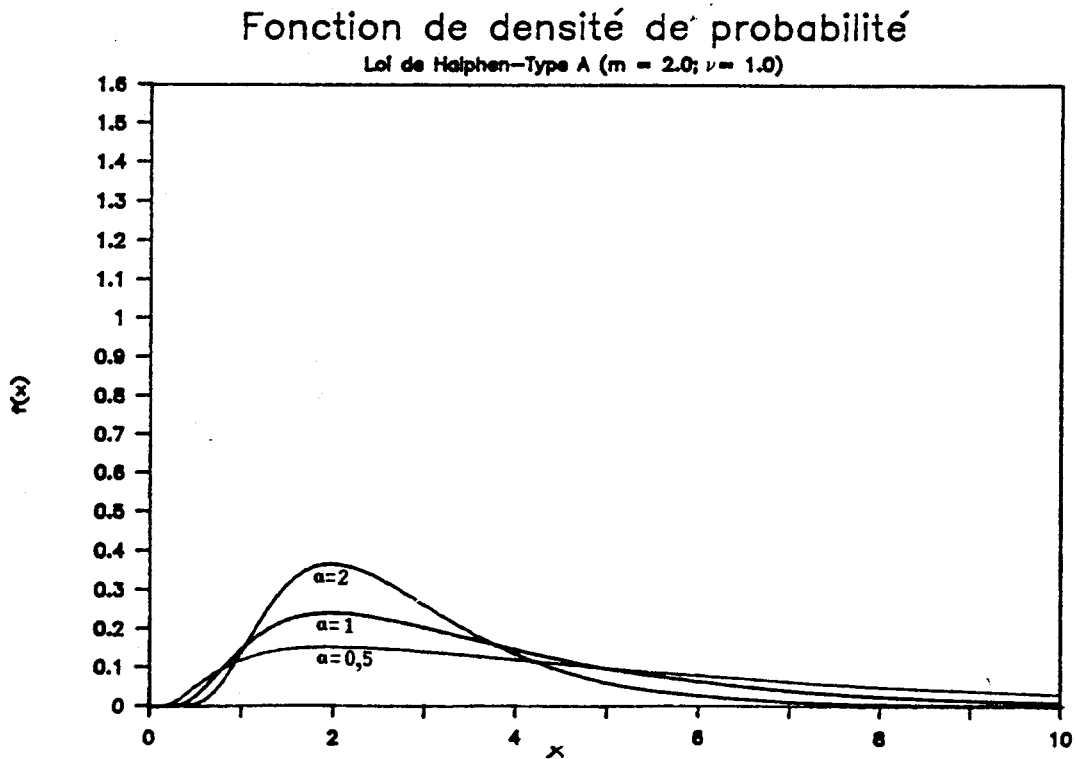


FIGURE 1.4 : Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type A
 $\nu = 1,0$ et $m = 2$

diminution du paramètre de forme α a pour effet d'aplatir la courbe (c.f. figure 1.3).

À la figure 1.4, le paramètre d'échelle est augmenté à 2.0. Une augmentation du paramètre d'échelle implique une diminution des valeurs de la f.d.p. La valeur modale de toutes les fonctions de densité de la figure 1.4 est égale à 2.

En général, le comportement de la f.d.p. de la loi de type A est le suivant:

- Une augmentation du paramètre d'échelle m implique une diminution de la valeur de la f.d.p. lorsque les valeurs des paramètres de forme α et ν sont fixées.
- Une augmentation du paramètre de forme ν a pour effet d'aplatir la forme de la courbe quand les valeurs des paramètres α et m sont fixées.
- Une diminution de la valeur de α quand m et ν sont fixes, implique un aplatissement de la courbe de la f.d.p.

1.7 Présentation des différentes formes de courbes de la loi de Halphen de type B

La f.d.p. de la loi de Halphen de type B (c.f. Eq. 1.3) peut prendre différentes allures selon les valeurs des paramètres. Ce type de loi de Halphen est très souple et existe pour toute valeur de x supérieure à 0.

Le paramètre qui possède le plus d'influence sur la forme de la courbe de la fonction de densité de type B est le paramètre ν . L'autre paramètre de forme α détermine, en fonction de ν , l'existence ou non de mode ou de points d'inflexion. La valeur modale, quand elle existe, est obtenue en utilisant l'équation 1.9.

L'allure de la courbe décrivant la fonction de densité d'une loi de type B varie lorsque le paramètre de forme ν prend les valeurs suivantes:

1. $0 < \nu < 0,5$
2. $\nu = 0,5$
3. $\nu > 0,5$

Dans le cas où le paramètre de forme ν est inférieur à 0,5 (c.f. fig. 1.5), l'allure de la courbe est en forme de J inversée (sans mode) ou en S inversée (un mode et un antimode). En général, si la valeur de ν est inférieure à 0,5 et la valeur du paramètre de forme α est telle que la condition 1 du tableau 1.3 est respectée, alors la courbe est décroissante en J inversée ou en S inversée sans extrêmes. Si les valeurs de paramètres ν et α respectent le cas III du tableau 1.3 (c'est-à-dire, $\alpha > 0$, $\nu < \frac{1}{2}$ et $(\frac{\alpha m}{4})^2 > \frac{(2\nu-1)m^2}{-2}$) alors la courbe de la fonction de densité sera en S inversée possédant deux extrêmes (un mode et un antimode).

La forme en J inversée est représentée à la figure 1.5 par la valeur du paramètre α égal à 1. Ce type de courbe à tendance à tendre vers l'infini quand x tend vers l'origine et décroît vers la valeur zéro quand x tend vers l'infini. Ce type de courbe ne comprend aucune valeur modale.

Deux autres types de courbe sont possibles quand la valeur de ν est inférieure à 0,5: la forme en S inversée sans mode ou avec un mode et un antimode. À la figure 1.5. on constate que la courbe en S inversée sans mode mais avec deux points d'inflexions est celle dont le paramètre de forme α est 2. Tandis que la courbe en S renversée possédant deux extrêmes (un mode et un antimode) est celle dont le paramètre α est 3.

Si le paramètre de forme ν est fixé à 0,5, la loi de Halphen de type B est représentée par une courbe de Gauss tronquée, une courbe exponentielle ou une moitié de courbe de Gauss (c.f. fig. 1.6). Quand la valeur de x tend vers zéro, la f.d.p. de la loi de type B, pour un paramètre d'ordre de 0,5, tend vers la valeur $2/(mef^{\frac{1}{2}}(\alpha))$. Quand la valeur de x tend vers l'infini alors la f.d.p. de la loi de type B tend vers zéro.

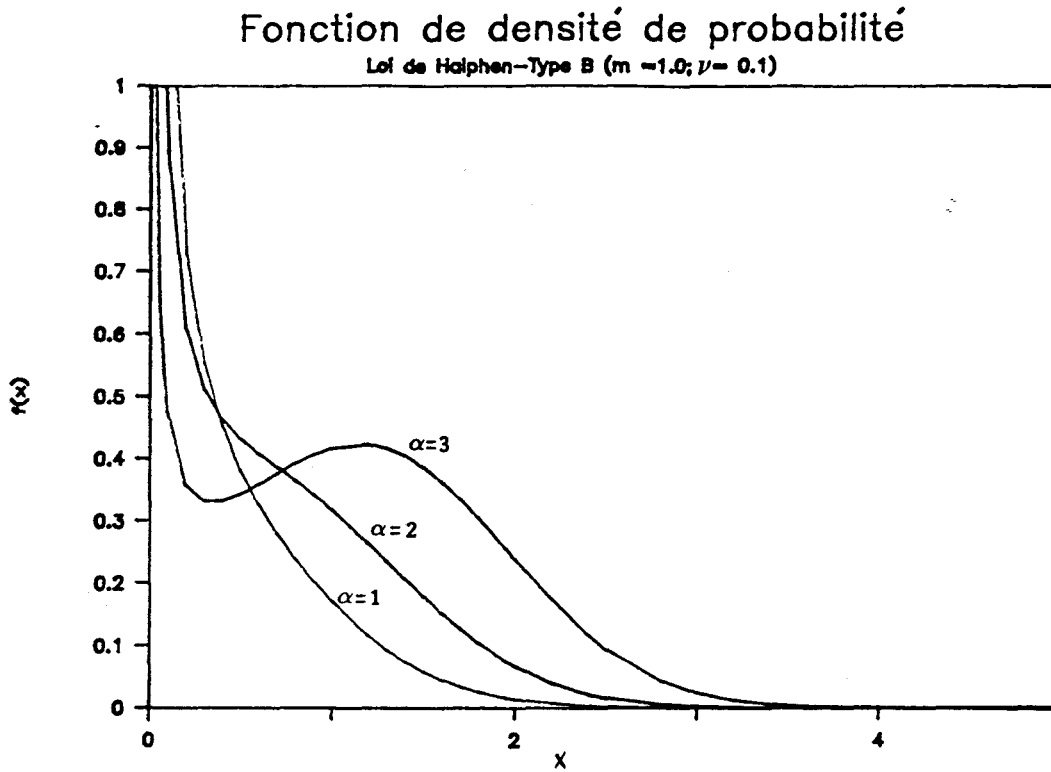


FIGURE 1.5 : Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type B:
 $\nu = 0,1$ et $m = 1,0$

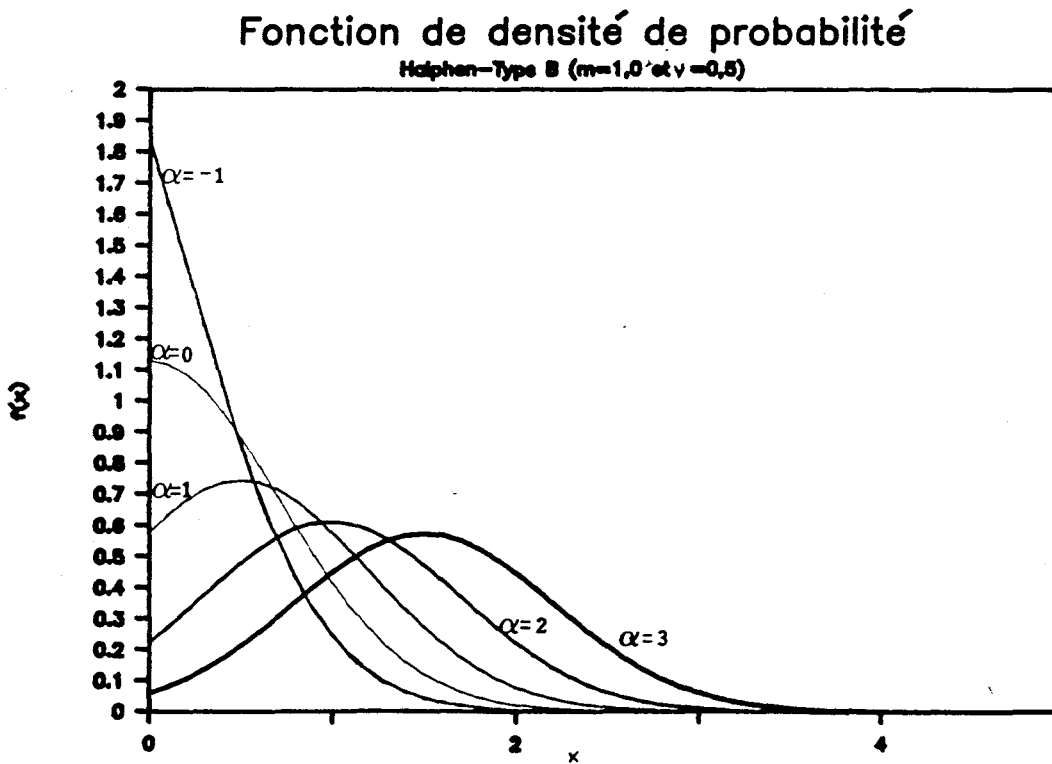


FIGURE 1.6 : Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type B:
 $\nu = 0,5$ et $m = 1,0$

Comme on peut le constater à la figure 1.6, l'allure de la courbe de la loi de type B lorsque ν est fixé à 0,5, dépend du signe de la valeur du paramètre α . Pour une valeur négative de α , la loi de type B adopte une forme exponentielle. Pour une valeur de α égale à 0, la loi de type B est représentée par une moitié de courbe de Gauss. Enfin, si la valeur du paramètre de forme α est positive, on obtient alors une courbe de Gauss tronquée.

Pour une valeur de ν équivalente à 0,5, la valeur de la fonction de densité de la loi de type B près de l'origine, a tendance à diminuer lorsque la valeur de α augmente.

La f.d.p. adopte un autre type de forme lorsque le paramètre ν est supérieur à 0,5, elle est alors une courbe à asymétrie positive (c.f. fig. 1.7). Une augmentation du paramètre de forme α , en fixant ν , aura pour effet d'étaler la courbe et de faire diminuer les valeurs de la f.d.p.

Pour la loi de type B, une augmentation du paramètre d'échelle m , et ce, pour des valeurs de ν et α fixées, implique une diminution des valeurs de la f.d.p. (c.f. fig. 1.8).

En résumé, la loi de Halphen de type B peut avoir les formes de courbes suivantes:

1. Si $\nu < 0,5$: courbe en J inversée; en S inversée avec extrêmes (mode et antimode) ou sans extrêmes;
2. Si $\nu = 0,5$: courbe exponentielle ($\alpha < 0$); moitié de courbe de Gauss (si $\alpha = 0$) ou courbe de Gauss tronquée (si $\alpha > 0$);
3. Si $\nu > 0,5$: courbe à asymétrie positive.

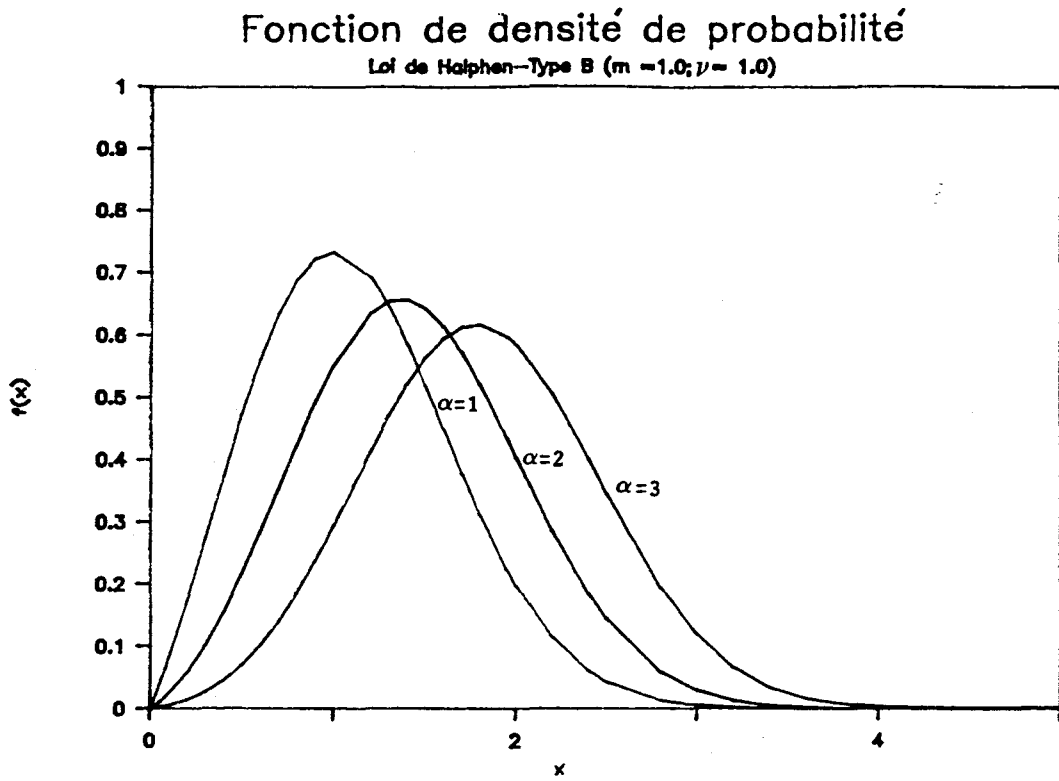


FIGURE 1.7 : Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type B
 $\nu = 1,0$ et $m = 1,0$

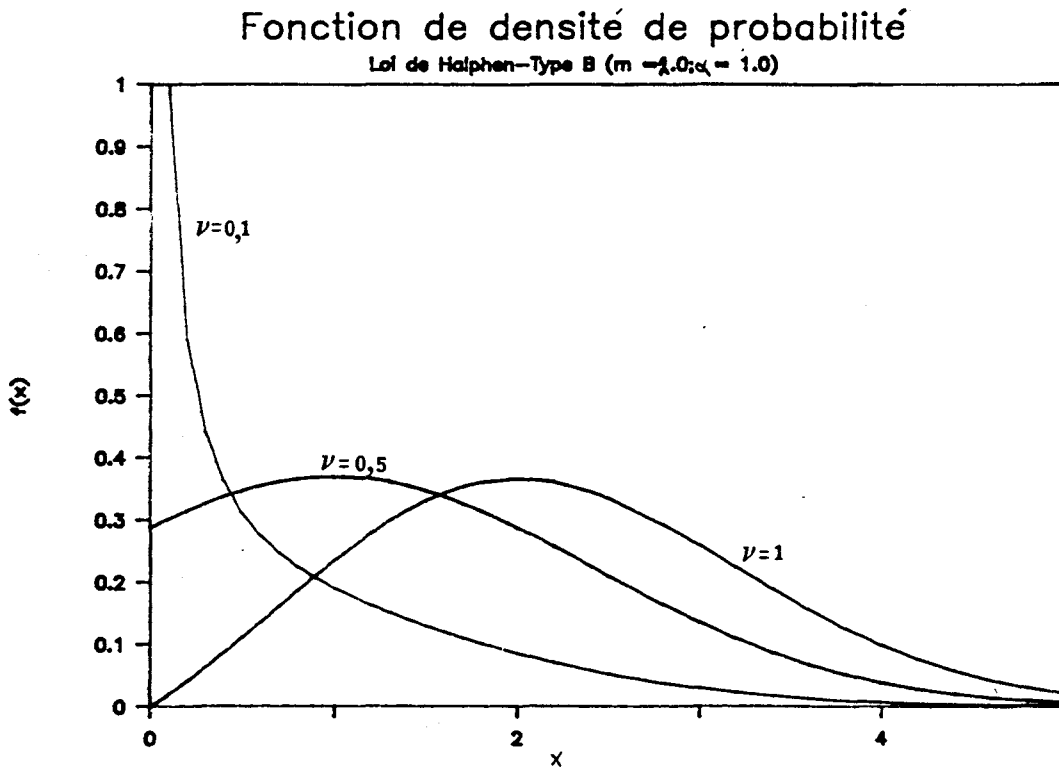


FIGURE 1.8 : Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type B
 $\alpha = 1,0$ et $m = 2,0$

1.8 Présentation des différentes formes de la loi de Halphen de type B^{-1}

Par l'étude des valeurs modales et des valeurs aux limites, on peut montrer que la f.d.p. de la loi de Halphen de type B^{-1} possède une asymétrie positive.

Les figures 1.9 et 1.10 représentent différentes formes de courbes de la loi de type B^{-1} . À la figure 1.9, le paramètre de forme ν et le paramètre d'échelle m sont fixés respectivement à 2,0 et 1,0; l'autre paramètre de forme α varie de 1 à 3. Une diminution du paramètre de forme α , pour des valeurs fixes de ν et m , a pour effet d'aplatir la forme de la courbe. À la figure 1.10, les valeurs du paramètre de forme α et ν sont les mêmes qu'à la figure 1.9 mais le paramètre d'échelle a été augmenté à 2. On remarque que l'augmentation du paramètre d'échelle m fait diminuer les valeurs de la f.d.p. et les courbes deviennent plus étalées.

À la figure 1.11, le paramètre de forme ν varie de 2,0 à 1,0 et les paramètres α et m sont fixés à 1. On remarque que l'allure des courbes est similaire à la figure 1.9. Une augmentation du paramètre d'échelle m a le même effet sur les courbes de densité qu'à la figure 1.10; les valeurs de la f.d.p. de la loi de type B^{-1} diminuent (c.f. figure 1.12).

Fonction de densité de probabilité

Halphen-Type $B^{-1}(m=1,0 \text{ et } \nu=2,0)$

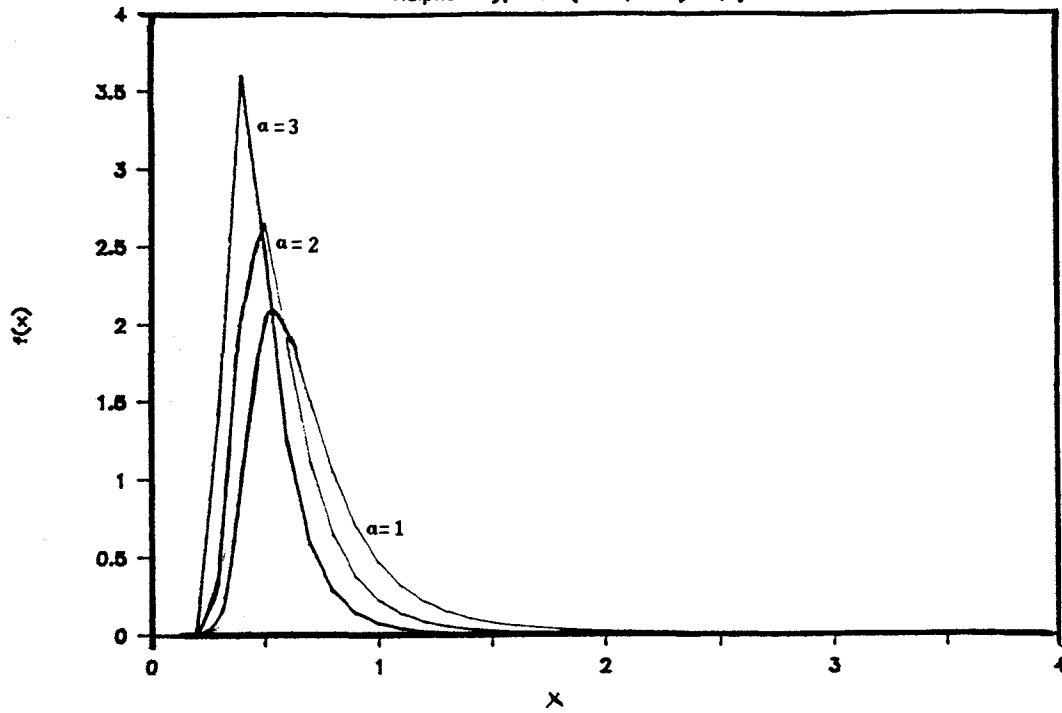


FIGURE 1.9 : Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type B^{-1}
 $\nu = 2,0$ et $m = 1,0$

Fonction de densité de probabilité

Halphen-Type $B^{-1}(m=2,0 \text{ et } \nu=2,0)$

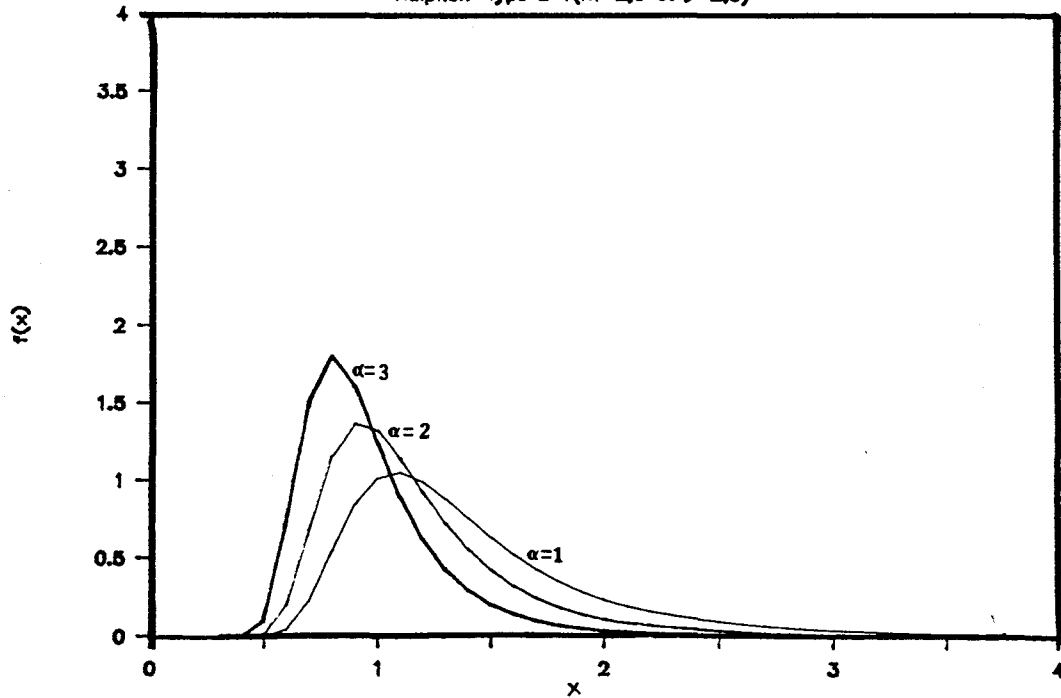


FIGURE 1.10: Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type B^{-1}
 $\nu = 2,0$ et $m = 2,0$

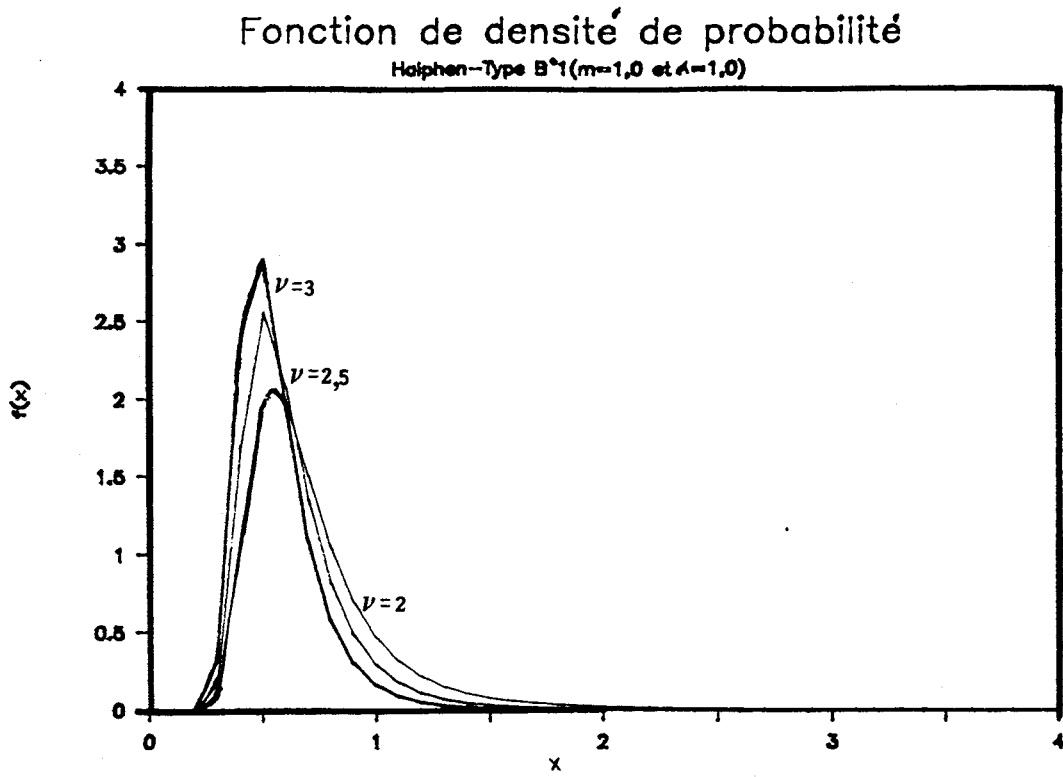


FIGURE 1.11: Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type B⁻¹
 $\alpha = 1,0$ et $m = 1,0$

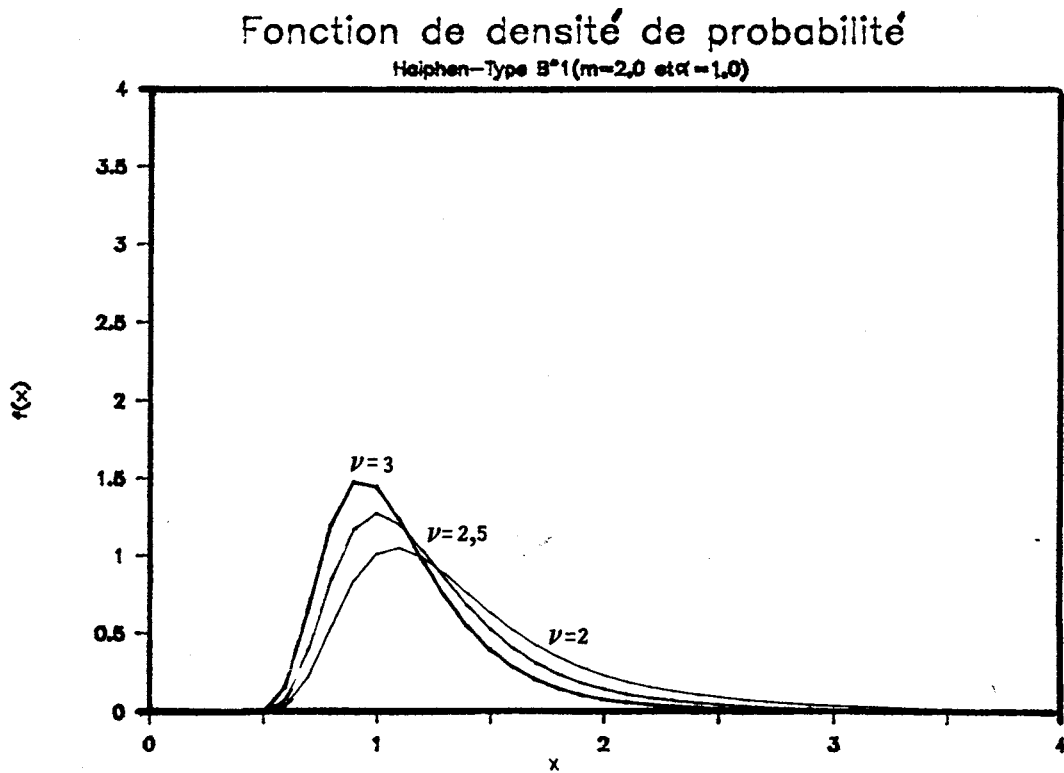


FIGURE 1.12: Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen - Type B⁻¹
 $\alpha = 1,0$ et $m = 2,0$

2. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE LA LOI DE HALPHEN - TYPE A

2.1 Fonction caractéristique, moments et cumulants.

La forme générale de la f.d.p. de la loi de Halphen de type A est :

$$f(x) = k \cdot x^{\nu-1} \cdot \exp \left[-\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right] \quad (2.1)$$

où k est la constante d'ajustement.

Pour que la fonction f(x) soit une f.d.p., elle doit répondre à deux conditions:

1. $f(x) \geq 0$ pour tout x
2. $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$ pour x > 0

La constante k d'ajustement de la f.d.p. doit satisfaire cette relation:

$$k \int_0^{\infty} x^{\nu-1} \exp \left[-\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right] dx = 1 \quad (2.2)$$

Dvorak et al. (1988), ont démontré que la valeur de l'intégrale de l'équation 2.2 correspond à cette égalité :

$$2m^{\nu} K_{\nu}(2\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\nu-1} \exp \left[-\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right] dx$$

où $K_{\nu}(2\alpha)$ est une fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce.

La valeur de la constante k de l'équation 2.2 est alors:

$$k = \frac{1}{2m^{\nu} K_{\nu}(2\alpha)} = \frac{1}{\int_0^{\infty} x^{\nu-1} \cdot \exp \left(-\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right) dx} \quad (2.3)$$

À partir de ce résultat, on peut retrouver la formule de la f.d.p. de la loi de type A. (c.f. Eq. 1.1).

Une des principales propriétés statistiques étudiées pour une distribution est l'étude des moments et des cumulants. On détermine le moment non-centré d'ordre r à partir de la relation suivante:

$$\mu'_r = E[x^r] = \int_0^{\infty} x^r f(x) dx \quad (2.4)$$

Pour la loi de Halphen de type A, le moment non-centré d'ordre r est donné par:

$$\mu'_r = \frac{1}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} \int_0^{\infty} x^{(\nu+r)-1} \exp\left(-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right) dx \quad (2.5)$$

Par la relation 2.3, on retrouve l'égalité suivante:

$$2m^{\nu+r} K_{\nu+r}(2\alpha) = \int_0^{\infty} x^{(\nu+r)-1} \exp\left(-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right) dx \quad (2.6)$$

Cette dernière intégrale existe pour toute valeur réelle de ν et de r . On obtient alors, par les relations 2.5 et 2.6, le moment non-centré d'ordre r pour la loi de type A:

$$\mu'_r = \frac{m^r K_{\nu+r}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} \quad (2.7)$$

Le moment non-centré μ'_r de la loi de type A de Halphen est relié aux fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce K_ν .

De façon générale, on peut également déterminer les moments en évaluant la fonction caractéristique. On évalue la fonction caractéristique d'une distribution de la façon suivante:

$$\psi(t) = \int_a^b e^{itx} f(x) dx \quad (2.8)$$

où $t \in \mathbb{R}$

i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$

$[a, b]$ = domaine de définition de la fonction $f(x)$

Si cette fonction $\psi(t)$ peut se développer selon les puissances de t , on a :

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} \mu'_r \quad (2.9)$$

Pour la loi de type A, la fonction caractéristique s'exprime comme suit :

$$\psi_A(t) = \frac{1}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} \int_0^\infty e^{itx} \cdot x^{\nu-1} \cdot \exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x})) dx \quad (2.10)$$

Effectuant le développement limité du terme exponentiel, on obtient :

$$\psi_A(t) = \frac{1}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} \int_0^\infty [1 + \frac{itx}{1!} + \frac{(itx)^2}{2!} + \dots + \frac{(itx)^r}{r!}] [x]^{\nu-1} \cdot \exp(-\alpha(\frac{x}{m} + \frac{m}{x})) dx \quad (2.11)$$

En utilisant la relation 2.3, l'équation 2.11 devient équivalente à :

$$\psi_A(t) = 1 + \frac{(it)}{1!} \frac{m K_{\nu+1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} + \frac{(it)^2}{2!} \frac{m^2 K_{\nu+2}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} + \dots + \frac{(it)^r}{r!} \frac{m^r K_{\nu+r}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} \quad (2.12)$$

On sait, par la relation 2.9, que le coefficient du terme $\frac{(it)^r}{r!}$ correspond au moment non-centré d'ordre r de la loi de type A, on retrouve ainsi la relation 2.7.

À partir des moments non-centrés d'ordre r (μ'_r), il est possible d'évaluer les moments centrés μ''_r par la relation :

$$\mu_r = \sum_{j=0}^r C_r^j \mu_{r-j}' (-\mu_1')^j \quad (2.13)$$

où

$$C_r^j = \frac{r!}{j!(r-j)!}$$

En posant $r= 1, 2, 3$ et 4 , on obtient les relations suivantes entre les moments centrés et non-centrés:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= \mu_2' - \mu_1'^2 \\ \mu_3 &= \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3 \\ \mu_4 &= \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4 \end{aligned} \quad (2.14)$$

À partir de ces relations, les moments centrés d'ordre un à quatre peuvent être évalués. Ces moments sont présentés au tableau 2.1. Pour simplifier la notation, les fonctions de Bessel $K_\nu(2\alpha)$ sont notées simplement K_ν .

TABEAU 2.1 Moments centrés de la loi de Halphen - type A

MOMENTS CENTRÉS	
μ_1	0
μ_2 (variance)	$\frac{m^2}{K_\nu^2} [K_\nu K_{\nu+2} - K_{\nu+1}^2]$
μ_3	$\frac{m^3}{K_\nu^3} [K_{\nu+3} K_\nu^2 - 3K_{\nu+2} K_{\nu+1} K_\nu + 2K_{\nu+1}^3]$
μ_4	$\frac{m^4}{K_\nu^4} [K_\nu^3 K_{\nu+4} - 4K_\nu^2 K_{\nu+1} K_{\nu+3} + 6K_\nu K_{\nu+1}^2 K_{\nu+2} - 3K_{\nu+1}^4]$

Par définition, le cumulants d'ordre r (κ_r) correspond au coefficient du terme de $\frac{(it)^r}{r!}$ lorsqu'on prend le logarithme de la fonction caractéristique $\psi(t)$. Il existe également des relations entre les cumulants et les moments qui sont les suivantes:

$$\begin{aligned}\mu_1' &= \kappa_1 \\ \mu_2 &= \kappa_2 \\ \mu_3 &= \kappa_3 \\ \mu_4 &= \kappa_4 + 3\kappa_2^2\end{aligned}\tag{2.15}$$

Donc, les relations évaluant les cumulants d'ordre 1, 2 et 3 sont respectivement les mêmes que pour les moments μ_1 , μ_2 et μ_3 (c.f. Eq. 2.7 et tableau 2.1). En ce qui concerne le cumulants d'ordre 4 (κ_4), il est défini par:

$$\kappa_4 = \frac{m^4}{K_\nu^4} [K_\nu^3 K_{\nu+4} - 4K_\nu^2 K_{\nu+1} K_{\nu+3} + 12K_\nu K_{\nu+1}^2 K_{\nu+2} - 6K_{\nu+1}^4 - 3 K_\nu^2 K_{\nu+2}^2]\tag{2.16}$$

2.2 Détermination des coefficients caractéristiques de la loi de Type A.

Ayant déterminé les principaux moments de la loi de Halphen Type A, on peut maintenant évaluer les coefficients caractéristiques de cette loi. Les principaux coefficients caractéristiques étudiés sont le coefficient de variation (C_v), le coefficient d'asymétrie (C_s) et le coefficient d'aplatissement (C_k).

Pour ces coefficients, on a par définition:

$$\begin{aligned}\text{Coefficient de variation: } C_v &= \frac{\mu_2^{1/2}}{\mu_1'} \\ \text{Coefficient d'asymétrie: } C_s &= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}\end{aligned}\tag{2.17}$$

Coefficient d'aplatissement: $C_k = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

En utilisant les valeurs des moments de la loi de Halphen de Type A déterminés à la section 2.1, on peut évaluer les coefficients caractéristiques C_v , C_s et C_k ; ces derniers sont donnés au tableau 2.2.

TABLEAU 2.2 Coefficients caractéristiques de la loi de Halphen - Type A,

Coefficient de variation (C_v)	$\frac{[K_v K_{v+2} - K_{v+1}^2]^{\frac{1}{2}}}{[K_{v+1}]}$
Coefficient d'asymétrie (C_s)	$\frac{[K_v^2 K_{v+3} - 3K_v K_{v+1} K_{v+2} + 2K_{v+1}^3]}{[K_v K_{v+2} - K_{v+1}^2]^{3/2}}$
Coefficient d'aplatissement (C_k)	$\frac{[K_v^3 K_{v+4} - 4K_v^2 K_{v+1} K_{v+3} + 6K_v K_{v+1}^2 K_{v+2} - 3K_{v+1}^4]}{[K_v K_{v+2} - K_{v+1}^2]^2}$

Tous les coefficients caractéristiques du tableau 2.2 font intervenir des fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce de plusieurs ordres. Dans le but de faciliter le calcul numérique, il est possible de simplifier ces équations en utilisant la formule de récurrence suivante (Watson, 1966):

$$K_{v+1}(2\alpha) = K_{v-1}(2\alpha) + \frac{v}{\alpha} K_v(2\alpha) \tag{2.18}$$

Par exemple, si on évalue la variance d'une loi de Halphen de type A, on doit calculer les fonctions de Bessel modifiées d'ordre v , $v+1$ et $v+2$. En utilisant l'équation (2.18), on simplifie l'équation de la variance (tableau 2.2) de cette façon:

$$\mu_2 = m^2 \left[1 + \frac{(\nu+1)}{\alpha} \frac{K_{\nu+1}}{K_\nu} - \frac{K_{\nu+1}^2}{K_\nu^2} \right] \quad (2.19)$$

Par la dernière équation, on évalue la variance en utilisant les fonctions de Bessel d'ordre ν et $\nu+1$ seulement. Cette méthode peut être avantageuse car elle diminue le nombre de fonctions de Bessel à évaluer numériquement (en terme de calcul d'ordinateur), cependant elle ne simplifie pas la nature des relations.

2.3 Détermination du moment d'ordre quasi-zéro de la loi de type A.

L'évaluation de la moyenne géométrique est très importante pour la loi de Halphen de type A car elle est utilisée pour estimer les paramètres de cette loi. La moyenne géométrique est également appelée le moment d'ordre quasi-zéro.

Pour un échantillon x_1, x_2, \dots, x_N de taille N , la moyenne géométrique s'exprime comme suit:

$$G = \left[\prod_{i=1}^N x_i \right]^{1/N} \quad (2.20)$$

Dans la pratique, on utilise le logarithme de de la moyenne géométrique exprimé ainsi:

$$\ln G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i \quad (2.21)$$

Dans le cas d'une fonction de densité continue $f(x)$, comme c'est le cas avec la loi de Halphen de type A, on définit le logarithme de la moyenne géométrique de la population par l'équation:

$$\ln G = \int f(x) \ln x \, dx \quad (2.22)$$

Pour la loi de Halphen de type A, le logarithme de la moyenne géométrique est donnée par:

$$\ln G = \frac{1}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} \int_0^\infty x^{\nu-1} \cdot \exp\left(-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right) \cdot \ln x dx \quad (2.23)$$

Dvorak et al. (1988) ont démontré l'égalité suivante:

$$2m^\nu K_\nu(2\alpha) = \int_0^\infty x^{\nu-1} \cdot \exp\left(-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right) dx \quad (2.24)$$

En dérivant cette dernière équation des deux côtés par rapport au paramètre ν , on obtient:

$$2(m^\nu \ln m K_\nu(2\alpha) + m^\nu \frac{\partial K_\nu(2\alpha)}{\partial \nu}) = \int_0^\infty x^{\nu-1} \exp\left(-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right) \ln x dx \quad (2.25)$$

En utilisant cette dernière équation avec l'équation (2.23), on obtient le logarithme de la moyenne géométrique:

$$\ln G = \ln m + \frac{1}{K_\nu(2\alpha)} \cdot \frac{\partial K_\nu(2\alpha)}{\partial \nu} \quad (2.26)$$

3. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE LA LOI DE HALPHEN - TYPE B

3.1 Fonction caractéristique, moments et cumulants

La forme générale de la f.d.p. de la loi de Halphen de Type B est:

$$f(x) = k \cdot x^{2\nu-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right) \quad (3.1)$$

où k est la constante d'ajustement
 $x > 0$; $\nu > 0$; $m > 0$ et α est réel.

La fonction $f(x)$ de la relation (3.1) est toujours supérieure ou égale à 0 à la condition que $k \geq 0$.

Pour que la relation 3.1 corresponde à une f.d.p., on doit avoir l'expression suivante:

$$k \int_0^{\infty} x^{2\nu-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right) dx = 1 \quad (3.2)$$

La constante d'ajustement k est alors:

$$k = \frac{1}{\int_0^{\infty} x^{2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right) dx} \quad (3.3)$$

En effectuant la transformation $y = x/m$ dans l'équation 3.3, ($dy = \frac{dx}{m}$), on obtient:

$$k = \frac{1}{m^{2\nu} \int_0^{\infty} y^{2\nu-1} \cdot \exp(-y^2 + \alpha y) dy} \quad (3.4)$$

Halphen (1955) a défini k en relation avec la fonction exponentielle facto-

rielle $ef_{\nu}(\alpha)$:

$$ef_{\nu}(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} y^{2\nu-1} \cdot \exp(-y^2 + \alpha y) dy \quad (3.5)$$

où

$\nu > 0$ et α est réel.

La fonction $ef_{\nu}(\alpha)$ est définie pour des valeurs positives d'ordre ν seulement. Certaines propriétés des fonctions $ef_{\nu}(\alpha)$ sont disponibles à l'annexe B.

En combinant les équations 3.4 et 3.5, on peut montrer que la valeur de la constante d'ajustement k est définie par:

$$k = \frac{2}{m^{2\nu} ef_{\nu}(\alpha)} \quad (3.6)$$

En remplaçant k dans l'équation 3.1, on obtient alors l'équation de la f.d.p. de la loi de Halphen de type B (c.f. Eq. 1.3).

Le moment non-centré d'ordre r de la loi de Halphen de type B, déduit de la relation générale 2.4, est défini comme suit:

$$\mu_r' = \frac{2}{m^{2\nu} ef_{\nu}(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{2\nu+r-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right) dx \quad (3.7)$$

Selon Halphen (1955) et par la relation (3.5), on sait que l'intégrale de l'équation (3.7) existe pour toute valeur de $(\nu+r/2) > 0$ (où $\nu > 0$ et $r \in \mathbb{Z}$). En sachant (par l'équation 3.2) que l'intégrale de l'équation précédente est équivalente à l'inverse de la relation 3.6 (c.-à-d., $\frac{m^{2\nu} ef_{\nu}(\alpha)}{2}$), alors on aura pour une valeur d'ordre $\nu + \frac{1}{2} > 0$ que:

$$\int_0^{\infty} x^{2(\nu+r/2)-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right) dx = \frac{m^{2(\nu+r/2)} ef_{\nu+r/2}(\alpha)}{2} \quad (3.8)$$

En remplaçant l'intégrale de l'équation 3.7 par sa définition (Equation 3.8), on obtient le moment non-centré d'ordre r de la loi de Halphen de type B:

$$\mu_r' = \frac{m^r \text{ef}_{\nu+r/2}(\alpha)}{\text{ef}_{\nu}(\alpha)} \quad (3.9)$$

Ces moments existent à condition que $r > -2\nu$. Les valeurs des moments non-centrés de la loi de type B sont donc reliées aux fonctions exponentielles factorielles de Halphen ($\text{ef}_{\nu}(\alpha)$).

Comme on l'a fait pour la loi de type A, on peut aussi déterminer les moments non-centrés et les cumulants en passant par la fonction caractéristique. En utilisant l'équation de la fonction caractéristique (c.f. Eq. 2.8), on a pour la loi de type B, la relation suivante:

$$\psi_B(t) = \frac{2}{m^{2\nu} \text{ef}_{\nu}(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{2\nu-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m} + itx\right) dx \quad (3.10)$$

En développant le terme exponentiel, on obtient :

$$\begin{aligned} \psi_B(t) = \frac{2}{m^{2\nu} \text{ef}_{\nu}(\alpha)} \int_0^{\infty} & \left(1 + \frac{itx}{1!} + \frac{(itx)^2}{2!} + \dots + \frac{(itx)^r}{r!}\right) \cdot x^{2\nu-1} \\ & \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right) dx \end{aligned} \quad (3.11)$$

En utilisant la définition des fonctions exponentielles factorielles (c.f. Eq. 3.5), la fonction caractéristique est équivalente à:

$$\begin{aligned} \psi_B(t) = \left[1 + \frac{(it)}{1!} \frac{m \text{ef}_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\text{ef}_{\nu}(\alpha)} + \frac{(it)^2}{2!} \frac{m^2 \text{ef}_{\nu+1}(\alpha)}{\text{ef}_{\nu}(\alpha)} \right. \\ \left. + \dots + \frac{(it)^r}{r!} \frac{m^r \text{ef}_{\nu+r/2}(\alpha)}{\text{ef}_{\nu}(\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

En utilisant la définition de la fonction caractéristique donnée à l'équation

2.8, on retrouve dans l'équation 3.12 que la valeur du moment non-centré μ'_r est le coefficient du terme $\frac{(it)^r}{r!}$. Cette valeur de μ'_r est identique à la relation 3.9.

En utilisant l'équation reliant les moments non-centrés et centrés d'ordre r (c.f. Eq. 2.13), les moments centrés par rapport à la moyenne pour $r = 1, 2, 3$ et 4 ont été évalués. Ces moments sont présentés au tableau 3.1. La fonction exponentielle factorielle $ef_\nu(\alpha)$ est notée ef_ν .

TABLEAU 3.1 Principaux moments centrés par rapport à la moyenne et cumulants de la loi de Halphen-Type B

MOMENTS CENTRÉS (μ_r)	
μ_1	0
$\mu_2 = K_2$	$\frac{m^2}{ef_\nu^2} [ef_\nu ef_{\nu+1} - ef_{\nu+\frac{1}{2}}^2]$
$\mu_3 = K_3$	$\frac{m^3}{ef_\nu^3} [ef_\nu^2 ef_{\nu+3/2} - 3ef_\nu ef_{\nu+1} ef_{\nu+\frac{1}{2}} + 2ef_{\nu+\frac{1}{2}}^3]$
μ_4	$\frac{m^4}{ef_\nu^4} [ef_\nu^3 ef_{\nu+2} - 4ef_\nu^2 ef_{\nu+\frac{1}{2}} ef_{\nu+3/2} + 6ef_\nu ef_{\nu+\frac{1}{2}}^2 ef_{\nu+1} - 3ef_{\nu+\frac{1}{2}}^4]$

On a que les cumulants κ_1, κ_2 et κ_3 correspondent respectivement aux moments μ'_1, μ'_2 et μ'_3 . Le cumulants d'ordre 4 (κ_4) est:

$$\begin{aligned} \kappa_4 = \frac{m^4}{ef_\nu^4} [& ef_\nu^3 ef_{\nu+2} - 4ef_\nu^2 ef_{\nu+\frac{1}{2}} ef_{\nu+3/2} + 12ef_\nu ef_{\nu+1} ef_{\nu+\frac{1}{2}}^2 \\ & - 3ef_\nu^2 ef_{\nu+1}^2 - 6ef_{\nu+\frac{1}{2}}^4] \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2 Détermination des coefficients caractéristiques de la loi de type B.

La moyenne et la variance de la population Halphen de Type B sont les moments respectifs μ_1' déduit de la relation 3.9 et μ_2 (tableau 3.1). Les coefficients caractéristiques de la loi de Halphen de type B déduits de 2.17, sont les suivants:

Coefficient de variation:

$$C_V = \frac{[ef_{\nu} ef_{\nu+1} - ef_{\nu+\frac{1}{2}}^2]^{\frac{1}{2}}}{ef_{\nu+\frac{1}{2}}} \quad (3.14)$$

Coefficient d'asymétrie:

$$C_S = \frac{[ef_{\nu}^2 ef_{\nu+3/2} - 3ef_{\nu} ef_{\nu+\frac{1}{2}} ef_{\nu+1} + 2ef_{\nu+\frac{1}{2}}^3]}{[ef_{\nu} ef_{\nu+1} - ef_{\nu+\frac{1}{2}}^2]^{3/2}} \quad (3.15)$$

Coefficient d'aplatissement:

$$C_K = \frac{[ef_{\nu}^3 ef_{\nu+2} - 4ef_{\nu}^2 ef_{\nu+\frac{1}{2}} ef_{\nu+3/2} + 6ef_{\nu} ef_{\nu+\frac{1}{2}}^2 ef_{\nu+1} - 3ef_{\nu+\frac{1}{2}}^4]}{[ef_{\nu} ef_{\nu+1} - ef_{\nu+\frac{1}{2}}^2]^2} \quad (3.16)$$

Dans les équations précédentes, la fonction $ef_{\nu}(\alpha)$ est notée ef_{ν} . Tout comme pour la fonction de Bessel modifiée $K_{\nu}(2\alpha)$, il existe une relation de récurrence pour la fonction exponentielle factorielle $ef_{\nu}(\alpha)$. Cette relation de récurrence (Halphen, 1955) est la suivante:

$$ef_{\nu+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{2} ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha) + \nu ef_{\nu}(\alpha) \quad (3.17)$$

Donc, on peut simplifier le calcul numérique de la variance ou tout autre coefficient caractéristique en utilisant cette équation. Par exemple, pour la variance, on obtient cette nouvelle équation:

$$\mu_2 = m^2 \left[\nu + \frac{\alpha}{2} \frac{ef_{\nu+\frac{1}{2}}}{ef_{\nu}} - \frac{ef_{\nu+\frac{1}{2}}^2}{ef_{\nu}} \right] \quad (3.18)$$

L'utilisation de la relation de récurrence 3.17 est importante pour diminuer le temps de calcul sur ordinateur de l'évaluation de la fonction exponentielle factorielle.

3.3 Détermination du moment d'ordre quasi-zéro de la loi de type B.

Selon la définition du logarithme de la moyenne géométrique ($\ln G$), on a pour la loi de Halphen de type B:

$$\ln G = \frac{2}{m^{2\nu} ef_{\nu}(x)} \cdot \int_0^{\infty} x^{2\nu-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right) \ln x dx \quad (3.19)$$

On sait par définition de la fonction exponentielle factorielle $ef_{\nu}(x)$ (c.f. Eq. 1.4), qu'on peut écrire la relation suivante:

$$m^{2\nu} ef_{\nu}(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} x^{2\nu-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right) dx \quad (3.20)$$

Si on dérive cette dernière équation des deux côtés par rapport à ν , on obtient:

$$m^{2\nu} ef_{\nu}(\alpha) \left(2 \ln m + \frac{1}{ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu} \right) = 2 \left(2 \int_0^{\infty} x^{2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right) \ln x dx \right) \quad (3.21)$$

En combinant les deux équations (3.19) et (3.21), on aura l'équation du logarithme de la moyenne géométrique pour la loi de type B:

$$\ln G = \ln m + \frac{1}{2ef_{\nu}(\alpha)} \cdot \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu} \quad (3.22)$$

4. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE LA LOI DE HALPHEN - TYPE B⁻¹

4.1 Fonction caractéristique, moments et cumulants

La f.d.p. de la loi de Halphen de type B⁻¹ est de la forme suivante:

$$f(x) = k \cdot x^{-2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right) \quad (4.1)$$

où k est la constante d'ajustement, $x > 0$; $m > 0$; $\nu > 0$ et α réel.

En réalité, la fonction (4.1) peut être obtenue en effectuant la transformation suivante $\frac{x}{m} = \frac{m}{y}$ dans la f.d.p. de Halphen de type B (c.f. Eq. 1.3).

La fonction $f(x)$ de l'équation 4.1 est toujours supérieure et égale à zéro à condition que $k \geq 0$. De plus, on doit avoir:

$$k \int_0^{\infty} x^{-2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right) dx = 1 \quad (4.2)$$

En effectuant la transformation $\frac{x}{m} = \frac{m}{y}$ dans l'intégrale de l'équation 4.2, on obtient :

$$\frac{k}{(m^2)^{2\nu}} \int_0^{\infty} y^{2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{y}{m}\right)^2 + \frac{\alpha y}{m}\right) dy = 1 \quad (4.3)$$

D'après les relations 3.3 et 3.6, on sait que

$$\int_0^{\infty} y^{2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{y}{m}\right)^2 + \frac{\alpha y}{m}\right) dy = \frac{m^{2\nu} \text{ef}_{\nu}(\alpha)}{2} \quad (4.4)$$

Donc, dans la relation 4.3, on a :

$$k = \frac{2m^{2\nu}}{\text{ef}_{\nu}(\alpha)} \quad (4.5)$$

Si on remplace k dans l'équation 4.1, on obtient alors la f.d.p. de la loi de Halphen de Type B^{-1} (Eq. 1.5).

Les moments non-centrés de la loi de type B^{-1} déduits par la relation 2.4, sont définis par:

$$\mu_r^i = \frac{2m^{2\nu}}{ef_{\nu}(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{-2(\nu-r/2)-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right) dx \quad (4.6)$$

On sait que l'intégrale suivante existe et ce, pour toute valeur de $\nu > 0$:

$$\int_0^{\infty} x^{-2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right) dx = \frac{ef_{\nu}(\alpha)}{2m^{2\nu}} \quad (4.7)$$

L'équation (4.6) existe pour toute valeur de $\nu-r/2 > 0$. Donc, les moments d'ordre r de la loi de type B^{-1} existent jusqu'à l'ordre $r < 2\nu$ avec $\nu > 0$.

En utilisant la relation (4.6) et l'égalité (4.7), on obtient la valeur des moments non-centrés de la loi de Halphen de type B^{-1} :

$$\mu_r^i = \frac{m^r ef_{\nu-r/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} \quad (4.8)$$

Tout comme la f.d.p. de la loi de type B , on peut trouver la fonction caractéristique de la loi de type B^{-1} . Cette fonction correspond à cette relation:

$$\psi_{B^{-1}}(t) = \frac{2m^{2\nu}}{ef_{\nu}(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{-2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{m}{x} + itx\right) dx \quad (4.9)$$

En utilisant la fonction caractéristique de la loi de type B (c.f. 3.10) et en effectuant la transformation $x = \frac{m^2}{y}$, on reprend la démonstration de la section 3.1 et on obtient:

$$\psi_{B^{-1}}(t) = \left[1 + \frac{(it)mef_{\nu-\frac{1}{2}}(\alpha)}{1! ef_{\nu}(\alpha)} + \frac{(it)^2 m^2 ef_{\nu-1}(\alpha)}{2! ef_{\nu}(\alpha)} + \dots + \frac{(it)^r m^r ef_{\nu-r/2}(\alpha)}{r! ef_{\nu}(\alpha)} \right] \quad (4.10)$$

En sachant que si une variable aléatoire $X \sim HB^{-1}(\alpha, m, \nu)$ alors la variable $Y = \frac{1}{X} \sim HB(\alpha, \frac{1}{m}, \nu)$, il est possible de déduire à partir des moments de la loi de type B, les moments de la loi de type B^{-1} (c.f. démonstration, Appendice 5).

Les moments centrés par rapport à la moyenne pour la loi de type B^{-1} sont déterminés par les relations les unissant aux moments non-centrés (c.f. Eq. 2.14).

Le tableau 4.1 présente les relations définissant les moments centrés de la loi de type B^{-1} de Halphen.

TABLEAU 4.1: Principaux moments centrés et cumulants de la loi de Halphen - type B^{-1} (*)

Moments centrés et cumulants	
μ_1	0
$\mu_2 = K_2$	$\frac{m^2}{ef_{\nu}^2} [ef_{\nu-1}ef_{\nu} - ef_{\nu-\frac{1}{2}}^2]$
$\mu_3 = K_3$	$\frac{m^3}{ef_{\nu}^3} [ef_{\nu}^2 ef_{\nu-3/2} - 3ef_{\nu-1}ef_{\nu}ef_{\nu-\frac{1}{2}} + 2ef_{\nu-\frac{1}{2}}^3]$
μ_4	$\frac{m^4}{ef_{\nu}^4} [ef_{\nu-2}ef_{\nu}^3 - 4ef_{\nu-3/2}ef_{\nu-\frac{1}{2}}ef_{\nu}^2 + 6ef_{\nu}ef_{\nu-1}ef_{\nu-\frac{1}{2}}^2 - 3ef_{\nu-\frac{1}{2}}^4]$

(*) les fonctions factorielles $ef_{\nu}(\alpha)$ sont notées ef_{ν} .

Le cumulants d'ordre 4 (κ_4), est obtenu en utilisant l'expression suivante:

$$\kappa_4 = \frac{m^4}{ef_\nu^4} [-3ef_{\nu-1}^2 ef_\nu^2 + 12ef_\nu ef_{\nu-1} ef_{\nu-\frac{1}{2}}^2 - 6ef_{\nu-\frac{1}{2}}^4 + ef_{\nu-2} ef_\nu^{-4} ef_{\nu-3/2} ef_{\nu-\frac{1}{2}} ef_\nu^2] \quad (4.11)$$

4.2 Détermination des coefficients caractéristiques de la loi de Halphen de type B⁻¹.

Les coefficients caractéristiques de la loi de Halphen de type B⁻¹, déduits de 2.17, sont:

Coefficient de variation (C_V):

$$C_V = \frac{[ef_{\nu-1} ef_\nu^{-ef_{\nu-\frac{1}{2}}^2}]^{\frac{1}{2}}}{ef_{\nu-\frac{1}{2}}} \quad (4.12)$$

Coefficient d'asymétrie C_S:

$$C_S = \frac{[ef_\nu^2 ef_{\nu-3/2} - 3ef_{\nu-1} ef_\nu ef_{\nu-\frac{1}{2}} + 2ef_{\nu-\frac{1}{2}}^3]}{[ef_{\nu-1} ef_\nu^{-ef_{\nu-\frac{1}{2}}^2}]^{3/2}} \quad (4.13)$$

Coefficient d'aplatissement:

$$C_K = \frac{[ef_{\nu-2} ef_\nu^3 - 4ef_{\nu-3/2} ef_{\nu-\frac{1}{2}} ef_\nu^2 + 6ef_\nu ef_{\nu-1} ef_{\nu-\frac{1}{2}}^2 - 3ef_{\nu-\frac{1}{2}}^4]}{[ef_{\nu-1} ef_\nu^{-ef_{\nu-\frac{1}{2}}^2}]^2} \quad (4.14)$$

4.3 Détermination du moment d'ordre quasi-zéro de la loi de type B⁻¹

Le logarithme de la moyenne géométrique de la loi de Halphen de type B⁻¹ s'écrit comme suit:

$$\ln G = \frac{2m^{2\nu}}{ef_\nu(\alpha)} \int_0^\infty x^{-2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right) \ln x \, dx \quad (4.15)$$

La fonction exponentielle factorielle $ef_{\nu}(\alpha)$ est définie par la relation (1.4). En effectuant la transformation suivante $x = \frac{m^2}{y}$ dans cette équation, on a que:

$$\frac{ef_{\nu}(\alpha)}{2m^{2\nu}} = \int_0^{\infty} y^{-2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{y}\right)^2 + \frac{\alpha m}{y}\right) dy \quad (4.16)$$

On dérive cette dernière équation des deux côtés par rapport à l'ordre ν et on obtient:

$$\frac{1}{2m^{2\nu}} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu} - \frac{1}{m^{2\nu}} \ln m ef_{\nu}(\alpha) = -2 \int_0^{\infty} y^{-2\nu-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{m}{y}\right)^2 + \frac{\alpha m}{y}\right) \ln y dy \quad (4.17)$$

On réarrange les termes de l'équation (4.17) et on aura l'équation du logarithme de la moyenne géométrique:

$$\ln G = \frac{2}{m^{-2} ef_{\nu}(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{-2\nu-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{m}{y}\right)^2 + \frac{\alpha m}{y}\right) \ln y dy \quad (4.18)$$

ou

$$\ln G = \ln m - \frac{1}{2 ef_{\nu}(\alpha)} \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)}{\partial \nu} \quad (4.19)$$

5. ÉVALUATION DES FONCTIONS DE DISTRIBUTION DES LOIS DE HALPHEN DE TYPE A, DE TYPE B ET DE TYPE B⁻¹

Les fonctions de distribution des lois de Halphen de type A, de type B et de type B⁻¹ sont représentées par ces équations:

TYPE A:

$$F(x) = (2m^\nu K_\nu(2\alpha))^{-1} \int_0^\infty x^{\nu-1} [\exp(-\alpha(x/m + m/x))] dx \quad (5.1)$$

TYPE B:

$$F(x) = (2/(m^{2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha))) \int_0^\infty x^{2\nu-1} [\exp(-(x/m)^2 + \alpha x/m)] dx \quad (5.2)$$

TYPE B⁻¹:

$$F(x) = \frac{2}{m^{-2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \int_0^\infty x^{-2\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right) dx \quad (5.3)$$

Selon Morlat (1956), la tabulation des fonctions de distribution des lois de type A et de type B a été faite durant les années 1952 à 1955 par le Service de Calcul Scientifique d'I.B.M. France. Dans son article, Morlat présente un exemple de valeurs tabulées des fonctions de distribution de la loi de type A et de type B (c.f. tableau 5.1). Étant donné les moyens informatiques qui existaient à l'époque, le calcul de ces fonctions demandait un énorme travail de calcul numérique. Nous avons à notre disposition ces tables de valeurs de fonction de distribution des lois de type A et de type B pour une soixantaine de triplets de paramètres.

Suite à l'article de Morlat en 1956, aucune autre publication n'a été réalisée concernant la description détaillée de la méthode d'évaluation des fonctions de distribution des trois lois de Halphen. Pour son utilisation pratique dans le

domaine des Sciences de l'Eau, il a fallu concevoir des programmes informatiques servant à calculer les valeurs suivantes:

- les fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce $K_\nu(2\alpha)$ (c.f. Eq 1.2)
- les fonctions exponentielles factorielles $ef_\nu(\alpha)$ (c.f. Eq. 1.4).
- la fonction de distribution de la loi de type A (c.f. Eq. 5.1)
- la fonction de distribution de la loi de type B (c.f. Eq. 5.2)
- la fonction de distribution de la loi de type B⁻¹ (c.f. Eq. 5.3)

La description détaillée des méthodes d'évaluation des fonctions de Bessel $K_\nu(2\alpha)$ et des fonctions exponentielles factorielles $ef_\nu(\alpha)$ est disponible dans le rapport de Boucher et al. 1988a. Un autre rapport de Boucher et al. 1988b présente l'approche utilisée concernant la détermination des fonctions de distribution de la loi de type A, de la loi de type B et de la loi de type B⁻¹.

Le programme intitulé "PROBTAB" (langage: FORTRAN; Version micro-ordinateur: compatible IBM, Boucher et al. 1988b.) fait l'évaluation des f.d.p. et des fonctions de distribution de la loi de type A, de type B et de type B⁻¹ pour diverses valeurs de paramètres α , ν et m . Ce programme détermine également les valeurs de la moyenne, de la variance, du coefficient de variation et du coefficient d'asymétrie.

Le tableau 5.2 présente les résultats d'ajustement des lois de Halphen de type A et de type B réalisés par le programme "PROBTAB". Les valeurs des fonctions de distribution $F(x)$ des lois de type A et de type B calculées à l'aide de ce programme sont plus précises que les tables présentées par Morlat en 1956.

Un des cas particuliers de la loi de type A est appelé la loi Harmonique (Morlat, 1956). En posant la valeur de l'ordre ν égale à zéro dans l'équation de la f.d.p. de la loi de type A (c.f Eq. 1.1), on obtient la loi Harmonique. La f.d.p. de la loi Harmonique est:

$$f(x) = (1/(2mK_0(2\alpha))) (\exp(-\alpha(x/m+m/x))) \quad (5.4)$$

TABLEAU 5.1 : Exemples des valeurs tabulées des fonctions de distribution des lois de Halphen de type A et de type B (tiré de Morlat, 1956).

LOI DU TYPE A		LOI DU TYPE B			
$\nu = 1$	$\alpha = 1$	$cv = .635$	$\nu = .814$	$\alpha = 1,26$	$cv = .50$
z	$F(z)$	z	$F(z)$	$f(z)$	
.200	.001	.030	.001	.062	
.300	.006	.040	.002	.075	
.400	.021	.050	.003	.087	
.500	.045	.060	.004	.099	
.600	.0785	.070	.005	.110	
.700	.118	.080	.006	.122	
.800	.163	.090	.007	.132	
.900	.210	.100	.008	.143	
1.000	.258	.120	.011	.163	
1.200	.353	.140	.015	.184	
1.400	.443	.160	.019	.204	
1.600	.525	.180	.023	.224	
1.800	.597	.200	.028	.243	
2.000	.661	.300	.057	.338	
2.200	.715	.400	.095	.429	
2.400	.762	.500	.142	.511	
2.600	.801	.600	.197	.583	
2.800	.834	.700	.258	.639	
3.000	.862	.800	.324	.679	
3.200	.886	.900	.393	.699	
3.400	.905	1.000	.464	.701	
3.600	.921	1.100	.533	.684	
3.800	.935	1.200	.600	.651	
4.000	.946	1.300	.663	.605	
4.200	.956	1.400	.721	.549	
4.4000	.963	1.500	.772	.486	
4.600	.970	1.600	.818	.421	
4.800	.975	1.700	.857	.357	
5.000	.979	1.800	.890	.296	
5.500	.987	1.900	.916	.240	
6.000	.992	2.000	.937	.190	
6.500	.995	2.200	.967	.112	
7.000	.997	2.400	.984	.060	
7.500	.998	2.600	.993	.030	
8.000	.999	2.800	.997	.014	
8.500	.999	3.000	.999	.006	

Note : α, ν = paramètres des lois

C_v = coefficient de variation

$F(x)$ = fonction de distribution $F(x) = \int_0^x f(x)dx$

$f(x)$ = fonction de densité

TABLEAU 5.2 : Exemples des valeurs tabulées des fonctions de distribution des lois de Halphen de type A et de type B
(Programme "PROBTAB", Boucher et al. 1988b)

Halphen Type A			Halphen Type B		
Ordre ν :	1.00000		Ordre :	.81400	
Argument α :	1.00000		Argument :	1.26000	
M :	1.00000		M :	1.00000	
Moments de la population :			Moments de la population :		
Moyenne :	1.81431		Moyenne :	1.09760	
Ecart-type :	1.33690		Ecart-type :	.30077	
Coeff. d'asymétrie :	1.58580		Coeff. d'asymétrie :	.47309	
Coeff. de variation :	.63729		Coeff. de variation :	.49966	
Coeff. d'aplatissement :	6.93775		Coeff. d'aplatissement :	2.97461	
x	F(x)	f(x)	x	F(x)	f(x)
.20000	.00060	.01972	.03000	.00113	.06199
.30000	.00590	.09448	.04000	.00181	.07515
.40000	.02040	.19670	.05000	.00263	.08747
.50000	.04504	.29344	.06000	.00356	.09922
.60000	.07842	.37056	.07000	.00461	.11055
.70000	.11840	.42543	.08000	.00577	.12156
.80000	.16284	.46021	.09000	.00704	.13232
.90000	.20989	.47846	.10000	.00842	.14290
1.00000	.25810	.48380	.12000	.01148	.16360
1.20000	.35375	.46794	.14000	.01496	.18387
1.40000	.44392	.43155	.16000	.01883	.20383
1.60000	.52579	.38633	.18000	.02311	.22355
1.80000	.59832	.33904	.20000	.02778	.24309
2.00000	.66152	.29344	.30000	.05688	.33834
2.20000	.71594	.25142	.40000	.09528	.42868
2.40000	.76239	.21379	.50000	.14236	.51124
2.60000	.80176	.18074	.60000	.19715	.58251
2.80000	.83498	.15210	.70000	.25837	.63916
3.00000	.86288	.12753	.80000	.32441	.67859
3.20000	.88623	.10661	.90000	.39346	.69923
3.40000	.90573	.08890	1.00000	.48362	.70075
3.60000	.92198	.07399	1.10000	.53300	.68403
3.80000	.93549	.06147	1.20000	.59988	.65109
4.00000	.94670	.05099	1.30000	.66277	.60481
4.20000	.95600	.04225	1.40000	.72051	.54864
4.40000	.96370	.03497	1.50000	.77230	.48628
4.60000	.97007	.02891	1.60000	.81768	.42128
4.80000	.97533	.02389	1.70000	.85657	.35687
5.00000	.97968	.01972	1.80000	.88916	.29568
5.50000	.98751	.01218	1.90000	.91588	.23968
6.00000	.99234	.00750	2.00000	.93731	.19008
6.50000	.99531	.00461	2.20000	.96708	.11209
7.00000	.99713	.00283	2.40000	.98393	.06070
7.50000	.99824	.00173	2.60000	.99273	.03021
8.00000	.99893	.00106	2.80000	.99696	.01383
8.50000	.99935	.00065	3.00000	.99882	.00582

N.B. : $F(x)$ = fonction de distribution $F(x) = \int_0^x f(x)dx$.

$f(x)$ = fonction de densité de probabilité

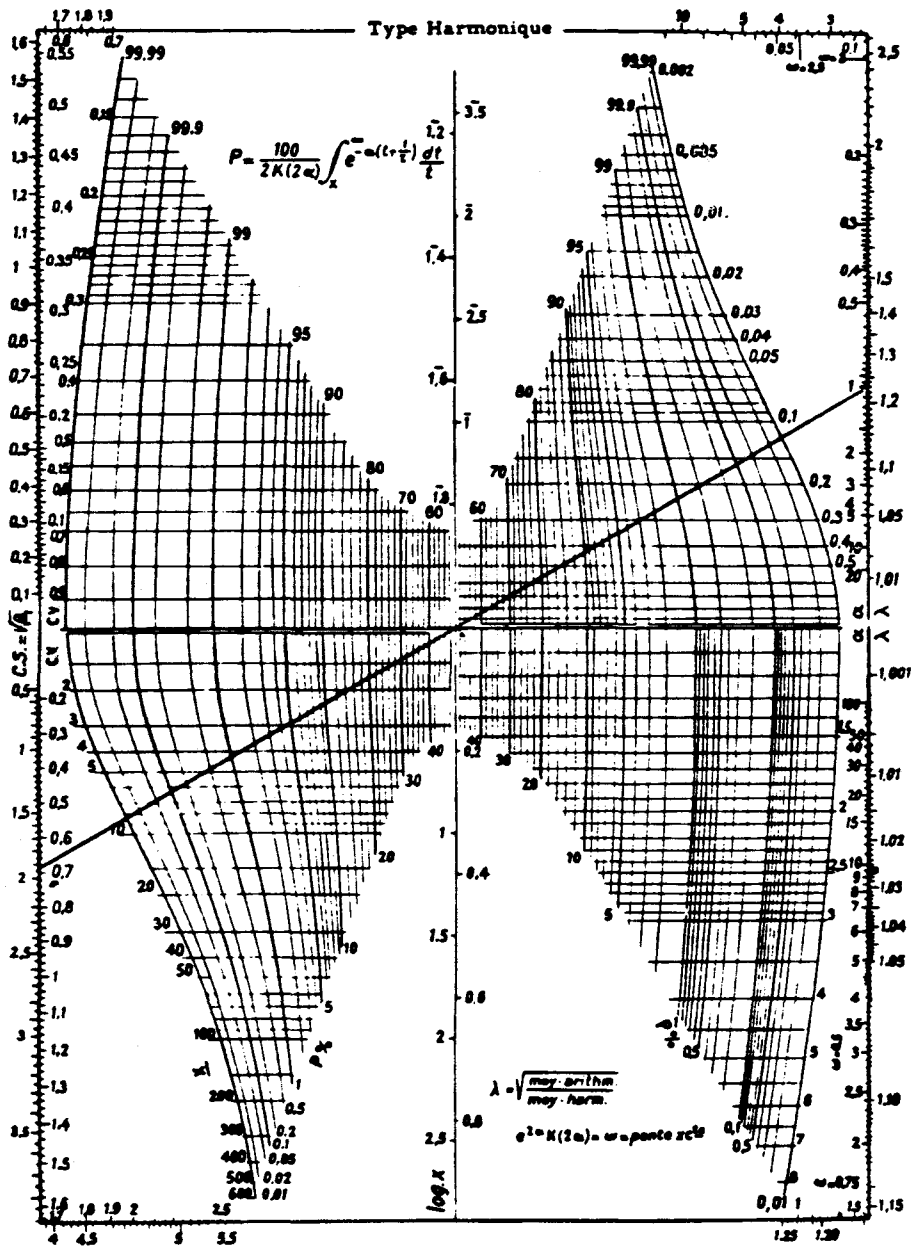
La valeur $K_0(2\alpha)$ correspond à la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre zéro.

Dans le but de faciliter le calcul de la fonction de distribution de la loi Harmonique, Halphen a construit un abaque. Cet abaque permet de calculer les probabilités au dépassement d'une distribution Harmonique à l'aide des paramètres suivants:

- paramètre de forme α ;
- paramètre d'échelle m ;
- coefficient d'asymétrie C_s ;
- coefficient de variation C_v .

L'abaque servant à calculer les probabilités au non-dépassement de la loi Harmonique est présenté à la figure 5.1.

Il est bon de souligner que les trois types de loi de Halphen ont été conçus pour l'analyse des séries de données hydrologiques. Cependant, les différentes formes des courbes de densité des lois de Halphen démontrent que celles-ci sont assez souples et peuvent servir à la représentation de séries autres que les séries hydrologiques.



Mode d'emploi de l'abaque de la loi harmonique. Toute droite passant par le centre du graphique définit une loi particulière du type harmonique, qui peut être repérée par la valeur de l'un des paramètres a , λ , c.v. ou c.s. figurant sur les 4 échelles encadrant l'abaque.

FIGURE 5.1 : Abaque de la loi Harmonique et note d'utilisation (tirée de Morlat, 1956).

Références bibliographiques

- BOBÉE, B. (1975). The Log-Pearson type III distribution and its application in hydrology. *Wat. Res. Res.*, 11(5): 681-689.
- BOUCHER, S., LAVOIE, M., ASHKAR, F. et B. BOBÉE (1988a). Développements mathématiques liés aux lois de Halphen: fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce et fonction exponentielle factorielle. Rapport interne no. 111, INRS-Eau.
- BOUCHER, S., LAVOIE, M., ASHKAR, F. et B. BOBÉE (1988b). Détermination des fonctions de distribution des lois de Halphen. Rapport interne no. 112, INRS-Eau.
- DVORAK, V., BOBÉE, B. et ASHKAR, F. (1988). Halphen distributions and related systems of frequency functions. Rapport scientifique No. 236, INRS-Eau, 78 p.
- HALPHEN, E. (1955). Les fonctions factorielles. Publications de l'Institut de statistiques de l'Université de Paris, volume IV, fascicule 1: 21-39
- LE CAM, MM. et MORLAT, G. (1949). Les lois des débits de rivières françaises. *La Houille Blanche*, No. Spécial B.
- MORLAT, G. (1956). Les lois de probabilités de Halphen, *Revue de Statistique Appliquée*, 4 no 3, 21-46.
- WATSON, G.N. (1966). A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge University Press, 804 p.

ANNEXE A.

**Fonction de Bessel modifiée:
Description et propriétés.**

A. FONCTION DE BESSEL MODIFIÉE: DESCRIPTION ET PROPRIÉTÉS

Cette annexe présente une brève synthèse des propriétés des fonctions de Bessel.

Les fonctions de Bessel ont été introduites par F.W. Bessel au 19ième siècle. Plusieurs publications traitent des fonctions de Bessel modifiées et sont de bons outils de références entre autre Watson (1966); Farell et Ross (1963); Abramowitz et Stegun (1972). Ces fonctions sont également appelées fonctions cylindriques. En réalité, il existe cinq formes de fonction de Bessel dont:

- $J_\nu(z)$: fonction de Bessel de première espèce;
- $Y_\nu(z)$: fonction de Bessel de deuxième espèce (fonction de Weber);
- $H_\nu(z)$: fonction de Bessel de troisième espèce (fonction de Hankel);
- $I_\nu(z)$: fonction de Bessel modifiée de première espèce;
- $K_\nu(z)$: fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce.

Pour l'étude de la loi de Halphen de type A, les fonctions de Bessel qui nous intéressent sont les fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce d'ordre ν ($K_\nu(z)$). En terme de séries, la fonction $K_\nu(z)$ est définie par:

$$\frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)} \{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\} \quad \nu \neq 0, 1, 2, \dots$$

$$K_\nu(z) = \{ \tag{A.1}$$

$$\lim_{p \rightarrow \nu} \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)} \{I_{-p}(z) - I_p(z)\} \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

où

$$I_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)}$$

La fonction $I_\nu(z)$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre ν . Elle est aussi appelée "fonction d'argument imaginaire" (fonction de Basset). Les fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ sont réelles et positives pour toutes valeurs de $\nu > -1$ et $z > 0$. De plus, pour toute valeur de n entière positive, on a l'égalité suivante:

$$I_{-n}(z) = I_n(z) \quad (\text{A.2})$$

La fonction de Bessel modifiée $K_\nu(z)$ est d'allure exponentielle décroissante comme le montre la figure A.1. La fonction $K_\nu(z)$ tend vers zéro lorsque $|z|$ tend vers l'infini pour toute valeur de ν .

La fonction $K_\nu(z)$ peut s'écrire sous forme d'intégrale:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \quad (\text{A.3})$$

où

$$\nu > -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |\arg z| < \frac{1}{2} \pi$$

Dans le cas de la loi de Halphen de type A et en posant $z = 2\alpha$, on a que (Dvorak et al. (1988)):

$$K_\nu(2\alpha) = \frac{1}{2m^\nu} \int_0^\infty t^{\nu-1} \exp(-\alpha(\frac{t}{m} + \frac{m}{t})) dt \quad (\text{A.4})$$

$$\text{où } m > 0, \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Le tableau A.1 présente plusieurs relations de récurrence importantes pour les fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce. De plus, on retrouve dans les ouvrages citées précédemment, les valeurs tabulées de la fonction de Bessel modifiée pour diverses valeurs de z et ν . Quelques exemples de valeurs tabulées de la fonction de Bessel modifiée $K_\nu(z)$ sont présentés dans le tableau A.2.

Références

ABRAMOWITZ, M. et STEGUN, I.A. (1972). Handbook of Mathematical functions.
Dover publications inc. New-York.

FARRELL, O. J. and ROSS, B. (1963). Solved problems in Analysis. As Applied to
gamma, Beta Legendre polynomials and Bessel functions - Dover
publications, Inc New-York.

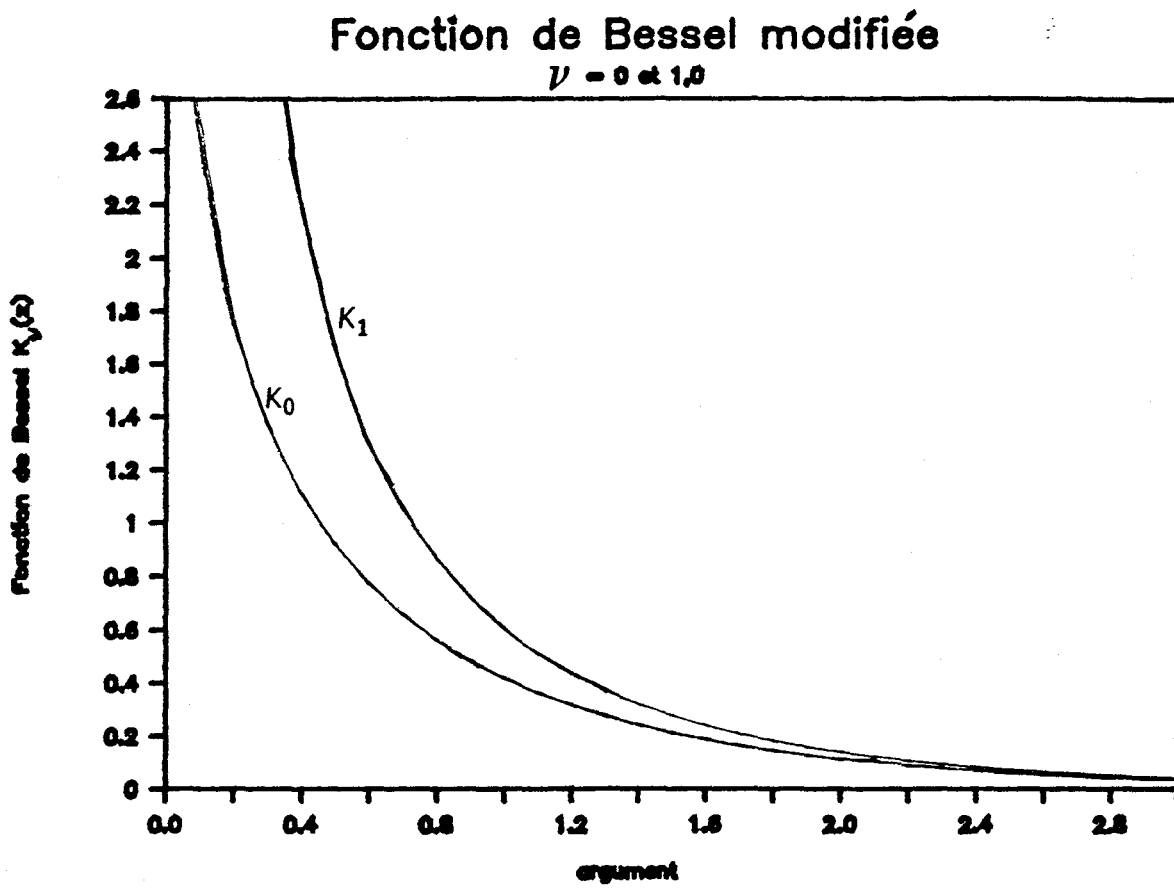


FIGURE A.1: Représentation graphique des fonctions de Bessel $K_0(z)$ et $K_1(z)$

TABLEAU A.1: Équations de récurrence utiles pour le calcul des fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce (tirés d'Abramowitz et Stegun, 1972 et Watson, 1966).

ÉQUATION DE RÉCURRENCE	
1.	$2K'_\nu(z) = K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z)$
2.	$-\frac{2\nu}{z} K_\nu(z) = K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z)$
3.	$-K_{\nu-1}(z) = \frac{\nu}{z} K_\nu(z) + K'_\nu(z)$
4.	$-K_{\nu+1}(z) = -\frac{\nu}{z} K_\nu(z) + K'_\nu(z)$
5.	$K_1(z) = -K'_0(z)$
6.	$K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$
7.	$\left[\frac{\partial K_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} = \frac{n! \left(\frac{-z}{2}\right)^{-n}}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^k K_k(z)}{(n-k)k!}$
8.	$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \sum_{r=0}^n \frac{(n+r)!}{r! (n-r)! (2z)^r}$
9.	$K_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}$

TABLEAU A.2: Tables des valeurs des fonctions de Bessel modifiées $K_\nu(x)$

x	$K_0(x)$	$K_1(x)$	$K_2(x)$	$K_3(x)$	x
0.1	2.4270690	9.8538448	199.5039646	7990.0124305	0.1
0.2	1.7527039	4.7759725	49.5124293	995.0245583	0.2
0.3	1.3724601	3.0559920	21.7457493	292.9991958	0.3
0.4	1.1145291	2.1843544	12.0363913	122.5473670	0.4
0.5	0.9244191	1.6504411	7.5501836	62.0579095	0.5
0.6	0.7775221	1.3028349	5.1203052	35.4382031	0.6
0.7	0.6605199	1.0502835	3.6613300	21.9721690	0.7
0.8	0.5653471	0.8617816	2.7198012	14.4607876	0.8
0.9	0.4867303	0.7105336	2.0790271	9.9566542	0.9
1.0	0.4210244	0.6019072	1.6248389	7.1012628	1.0
1.1	0.3656024	0.5097600	1.2924388	5.2095375	1.1
1.2	0.3185082	0.4345924	1.0428289	3.9106886	1.2
1.3	0.2782476	0.3725475	0.8513976	2.9922325	1.3
1.4	0.2436551	0.3208359	0.7019921	2.3265275	1.4
1.5	0.2138056	0.2773878	0.5836560	1.8338037	1.5
1.6	0.1879548	0.2406339	0.4887471	1.4625018	1.6
1.7	0.1654963	0.2093625	0.4118051	1.1783157	1.7
1.8	0.1459314	0.1826231	0.3488460	0.9578363	1.8
1.9	0.1288860	0.1596602	0.2969093	0.7847324	1.9
2.0	0.1138939	0.1398659	0.2537598	0.6473854	2.0
2.1	0.1007837	0.1227464	0.2176851	0.5373847	2.1
2.2	0.0892690	0.1078968	0.1873570	0.4485459	2.2
2.3	0.0791399	0.0949824	0.1617334	0.3762579	2.3
2.4	0.0702173	0.0837248	0.1399880	0.3170382	2.4
2.5	0.0623476	0.0738908	0.1214602	0.2682271	2.5
2.6	0.0553983	0.0652840	0.1056168	0.2277714	2.6
2.7	0.0492554	0.0577384	0.0920246	0.1940711	2.7
2.8	0.0438200	0.0511127	0.0803290	0.1658685	2.8
2.9	0.0390062	0.0452864	0.0702383	0.1421668	2.9
3.0	0.0347395	0.0401564	0.0615105	0.1221704	3.0
3.1	0.0309547	0.0356341	0.0539444	0.1052398	3.1
3.2	0.0275950	0.0316420	0.0473718	0.0908577	3.2
3.3	0.0246106	0.0281169	0.0416512	0.0786632	3.3
3.4	0.0219580	0.0249990	0.0366633	0.0681323	3.4
3.5	0.0195989	0.0222394	0.0323071	0.0591618	3.5
3.6	0.0174906	0.0197950	0.0284968	0.0514581	3.6
3.7	0.0156307	0.0176280	0.0251593	0.0448273	3.7
3.8	0.0139659	0.0157057	0.0222321	0.0391079	3.8
3.9	0.0124823	0.0139993	0.0196614	0.0341649	3.9
4.0	0.0111597	0.0124835	0.0174014	0.0298849	4.0
4.1	0.0099800	0.0111363	0.0154123	0.0261727	4.1
4.2	0.0089275	0.0099382	0.0136599	0.0229477	4.2
4.3	0.0079880	0.0088722	0.0121146	0.0201416	4.3
4.4	0.0071491	0.0079233	0.0107506	0.0176965	4.4
4.5	0.0063999	0.0070781	0.0095457	0.0155631	4.5
4.6	0.0057304	0.0063250	0.0084804	0.0136993	4.6
4.7	0.0051321	0.0056538	0.0075380	0.0120691	4.7
4.8	0.0045972	0.0050552	0.0067036	0.0106415	4.8
4.9	0.0041189	0.0045212	0.0059643	0.0093900	4.9
5.0	0.0036911	0.0040446	0.0053089	0.0082918	5.0

Tirés de Watson G.N. (1966)

D'après Farell et Ross (1963):

1. Quand $x \geq 10$, $K_0(x) = \frac{1.2533 e^{-x}}{\sqrt{x}} \left\{ \frac{1-1}{8x} + \frac{9}{128x^2} - \frac{75}{1024x^3} \right\}$

2. Quand $x \geq 10$, $K_1(x) \approx \frac{1.2533 e^{-x}}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + \frac{3}{8x} - \frac{15}{128x^2} + \frac{105}{1024x^3} \right\}$

TABLEAU A.2: Tables des valeurs des fonctions de Bessel modifiées $K_\nu(x)$
(suite)

x	$K_4(x)$	$K_5(x)$	$K_6(x)$	$K_7(x)$	x
0.1	479600.2498	38376010.00	3838080599.8	460608047990	0.1
0.2	29900.2492	1197004.99	59880149.8	3594005995	0.2
0.3	5881.7297	157139.12	5243852.5	209911239	0.3
0.4	1850.2468	37127.48	930037.3	27938248	0.4
0.5	752.2451	12097.98	242711.8	5837182	0.5
0.6	359.502336	4828.8027	80839.547	1621619.74	0.6
0.7	191.994207	2216.1917	31851.875	548248.34	0.7
0.8	111.175708	1126.2179	14188.869	213959.70	0.8
0.9	68.456722	618.4609	6940.244	93155.05	0.9
1.0	44.232416	360.9606	3653.838	44207.02	1.0
1.1	29.708098	221.26843	2041.2393	22489.333	1.1
1.2	20.596272	141.21917	1197.4227	12115.446	1.2
1.3	14.661702	93.21809	731.7239	6847.593	1.3
1.4	10.672824	63.31409	462.9164	4031.169	1.4
1.5	7.918871	44.06778	301.7041	2457.700	1.5
1.6	5.973129	31.328146	201.77404	1544.6334	1.6
1.7	4.570567	22.686864	138.02271	996.9648	1.7
1.8	3.541634	16.698431	96.31069	658.7697	1.8
1.9	2.775011	12.468991	68.40128	444.4771	1.9
2.0	2.195916	9.431049	49.35116	305.5380	2.0
2.1	1.7530699	7.215746	36.113765	213.58012	2.1
2.2	1.4106641	5.578234	26.766271	151.57608	2.2
2.3	1.1432756	4.352869	20.068791	109.05961	2.3
2.4	0.9325836	3.425650	15.206127	79.45628	2.4
2.5	0.7652054	2.716884	11.632743	58.55405	2.5
2.6	0.6312432	2.1700581	8.977621	43.60523	2.6
2.7	0.5232937	1.7445711	6.984668	32.78754	2.7
2.8	0.4357615	1.4109012	5.474094	24.87388	2.8
2.9	0.3643764	1.1473430	4.320732	19.02623	2.9
3.0	0.3058512	0.9377736	3.431763	14.66483	3.0
3.1	0.2576343	0.7701024	2.7418356	11.383660	3.1
3.2	0.2177299	0.6351824	2.2020750	8.895214	3.2
3.3	0.1845662	0.5260364	1.7780158	6.993730	3.3
3.4	0.1568967	0.4373011	1.4430764	5.530512	3.4
3.5	0.1337274	0.3648244	1.1760828	4.397108	3.5
3.6	0.1142604	0.3053701	0.9625106	3.513739	3.6
3.7	0.0978523	0.2563998	0.7908246	2.821236	3.7
3.8	0.0839814	0.2159108	0.6521676	2.275387	3.8
3.9	0.0722228	0.1823141	0.5396949	1.842914	3.9
4.0	0.0622288	0.1543425	0.4480852	1.498598	4.0
4.1	0.0537139	0.1309802	0.3731778	1.2232080	4.1
4.2	0.0464423	0.1114092	0.3117023	1.0019872	4.2
4.3	0.0402191	0.0949678	0.2610745	0.8235478	4.3
4.4	0.0348822	0.0811187	0.2192429	0.6790539	4.4
4.5	0.0302965	0.0694236	0.1845713	0.5616138	4.5
4.6	0.0263491	0.0595239	0.1557490	0.4658258	4.6
4.7	0.0229453	0.0511250	0.1317219	0.3874361	4.7
4.8	0.0200054	0.0439839	0.1116385	0.3230800	4.8
4.9	0.0174623	0.0378998	0.0948088	0.2700847	4.9
5.0	0.0152591	0.0327063	0.0806716	0.2263181	5.0

TABLEAU A.2: Tables des valeurs des fonctions de Bessel modifiées $K_\nu(x)$
(suite)

x	$K_8(x)$	$K_9(x)$	$K_{10}(x)$	x
0.1	644889647992[2]	10318694975920[3]	18574295846304[5]	0.1
0.2	2516402998[2]	20134817990[3]	18123852594[5]	0.2
0.3	98011017[2]	522935335[3]	313859212[5]	0.3
0.4	9787687[2]	39178686[3]	17640197[5]	0.4
0.5	1636838[2]	5243719[3]	1889376[5]	0.5
0.6	37918633.59	1012785182	304214741[2]	0.6
0.7	10996818.60	251904104	64885309[2]	0.7
0.8	3758483.72	75383634	16998902[2]	0.8
0.9	1456018.75	25977933	5210147[2]	0.9
1.0	622552.12	10005041	1807133[2]	1.0
1.1	288269.12	4215494.70	69269092	1.1
1.2	142544.29	1912706.01	28833134	1.2
1.3	74475.03	923463.36	12860891	1.3
1.4	40774.60	470026.62	6083974	1.4
1.5	23240.24	250353.61	3027484	1.5
1.6	13717.316	138717.80	1574292.56	1.6
1.7	8348.321	79569.40	850847.84	1.7
1.8	5220.075	47059.44	475814.46	1.8
1.9	3343.496	28600.23	274293.04	1.9
2.0	2188.117	17810.48	162482.40	2.0
2.1	1459.9812	11337.247	98636.38	2.1
2.2	991.3413	7361.331	61220.41	2.2
2.3	683.9099	4866.694	38771.08	2.3
2.4	478.7011	3270.797	25009.68	2.4
2.5	339.5354	2231.581	16406.92	2.5
2.6	243.77501	1543.7592	10931.338	2.6
2.7	176.99414	1081.6417	7387.939	2.7
2.8	129.84408	766.8400	5059.530	2.8
2.9	96.17151	549.6277	3507.654	2.9
3.0	71.86762	397.9588	2459.620	3.0
3.1	54.15191	290.87739	1743.1174	3.1
3.2	41.11923	214.49139	1247.6333	3.2
3.3	31.44899	159.47366	901.3053	3.3
3.4	24.21577	119.48709	656.7945	3.4
3.5	18.76452	90.17775	482.5358	3.5
3.6	14.627050	68.52285	357.2413	3.6
3.7	11.465773	52.40296	266.3991	3.7
3.8	9.035174	40.31822	200.0162	3.8
3.9	7.155283	31.19792	151.1457	3.9
4.0	5.693179	24.27131	114.9141	4.0
4.1	4.549986	18.979250	87.87352	4.1
4.2	3.651659	14.913071	67.56482	4.2
4.3	2.942393	11.771986	52.22047	4.3
4.4	2.379869	9.333122	40.56082	4.4
4.5	1.931814	7.430286	31.65296	4.5
4.6	1.5734796	5.938798	24.812255	4.6
4.7	1.2857868	4.764583	19.533125	4.7
4.8	1.0539552	3.836264	15.439946	4.8
4.9	0.8664794	3.099405	12.252049	4.9
5.0	0.7143624	2.512278	9.758563	5.0

Note : le nombre entre parenthèses est le nombre de chiffres entre les derniers chiffres donnés et le point décimal. Par exemple, la fonction $K_{10}(0.1)$ est un nombre contenant 19 chiffres dont les 14 premiers sont donnés. La valeur obtenue doit être multipliée par 10^{15} pour obtenir le résultat souhaité.

ANNEXE B

**Fonction exponentielle factorielle:
Description et Propriétés**

B. FONCTION EXPONENTIELLE FACTORIELLE: DESCRIPTION ET PROPRIÉTÉS

Les f.d.p. des lois de Halphen de type B et type B⁻¹ utilisent des fonctions appelées "fonction exponentielle factorielle". Étant donné que peu d'auteurs ont étudié ce type de fonction, Halphen (1955) a introduit et analysé les diverses propriétés mathématiques de celles-ci.

Dans un premier temps, Halphen a défini deux fonctions par les séries suivantes:

$$cf_{\nu}(\alpha) = 1 + \frac{\nu\alpha^2}{2!} + \nu(\nu+1)\frac{\alpha^4}{4!} + (\nu)(\nu+1)(\nu+2)\frac{\alpha^6}{6!} + \dots \quad (\text{B.1})$$

et

$$sf_{\nu}(\alpha) = \alpha + (\nu + \frac{1}{2})\frac{\alpha^3}{3!} + (\nu + \frac{1}{2})(\nu + 3/2)\frac{\alpha^5}{5!} + (\nu + \frac{1}{2})(\nu + 3/2)(\nu + 5/2)\frac{\alpha^7}{7!} + \dots \quad (\text{B.2})$$

Les fonctions $cf_{\nu}(\alpha)$ et $sf_{\nu}(\alpha)$ sont appelées respectivement le cosinus factoriel et le sinus factoriel. Ces deux séries entières convergent pour toutes valeurs entières réelles ou imaginaires de ν et de α . Les dérivées par rapport à α des cosinus et sinus factoriels sont définies par les relations suivantes (Halphen, 1955):

$$cf'_{\nu}(\alpha) = \nu sf_{\nu + \frac{1}{2}}(\alpha) \quad (\text{B.3})$$

et

$$sf'_{\nu}(\alpha) = cf_{\nu + \frac{1}{2}}(\alpha) \quad (\text{B.4})$$

Halphen (1955) défini alors la fonction exponentielle factorielle par la relation suivante:

$$ef_{\nu}(\alpha) = cf_{\nu}(\alpha)\Gamma(\nu) + sf_{\nu}(\alpha)\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \quad (\text{B.5})$$

ou

$$ef_{\nu}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(\nu+n/2) \frac{\alpha^n}{n!} \quad (\text{B.6})$$

Lorsqu'on dérive la fonction $ef_{\nu}(\alpha)$ par rapport à α , on obtient la relation suivante:

$$ef'_{\nu}(\alpha) = ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha) \quad (\text{B.7})$$

De plus, il existe une relation de récurrence pour la fonction exponentielle factorielle:

$$ef_{\nu+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{2} ef_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha) + \nu ef_{\nu}(\alpha) \quad (\text{B.8})$$

En examinant cette dernière équation, on a que la fonction $y = ef_{\nu}(\alpha)$ est une solution de l'équation différentielle suivante:

$$y'' = \frac{\alpha}{2} y' + \nu y \quad (\text{B.9})$$

De cette équation, on peut obtenir, en effectuant un changement de variable et lorsque 2ν est un entier négatif, l'équation vérifiant le polynôme d'Hermite d'ordre -2ν (c.f. Boucher et al. 1988a).

La fonction exponentielle factorielle peut aussi s'écrire sous la forme d'une intégrale définie:

$$ef_{\nu}(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2+t\alpha} \cdot t^{2\nu-1} dt \quad (\text{B.10})$$

où $\nu > 0$ et α est réel.

Cette fonction est assez générale et possède comme cas particuliers ou cas limites: la fonction exponentielle, fonction trigonométrique, fonction eulérienne, polynômes d'Hermite, etc....

En posant le paramètre $\alpha = 0$ on peut montrer que la fonction exponentielle factorielle (Boucher, et al. 1988a) est équivalente à la fonction gamma, c'est-à-dire:

$$ef_{\nu}(0) = \Gamma(\nu) \quad (\text{B.11})$$

Si on pose $\alpha = 0$ et $\nu = \frac{1}{2}$, la fonction $ef_{\nu}(\alpha)$ correspond à l'égalité suivante:

$$ef_{\frac{1}{2}}(0) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad (\text{B.12})$$

La figure B.1 présente, à titre d'exemple, les graphiques représentant les fonctions exponentielles factorielles d'ordre 1,0 et 2,0.

Quelques exemples de valeurs tabulées des fonctions exponentielles factorielles sont présentés au tableau B.1 et proviennent du programme "FACTO" de Boucher et al. 1988a.

Fonction exponentielle factorielle

$\nu = 1,0$ et $2,0$

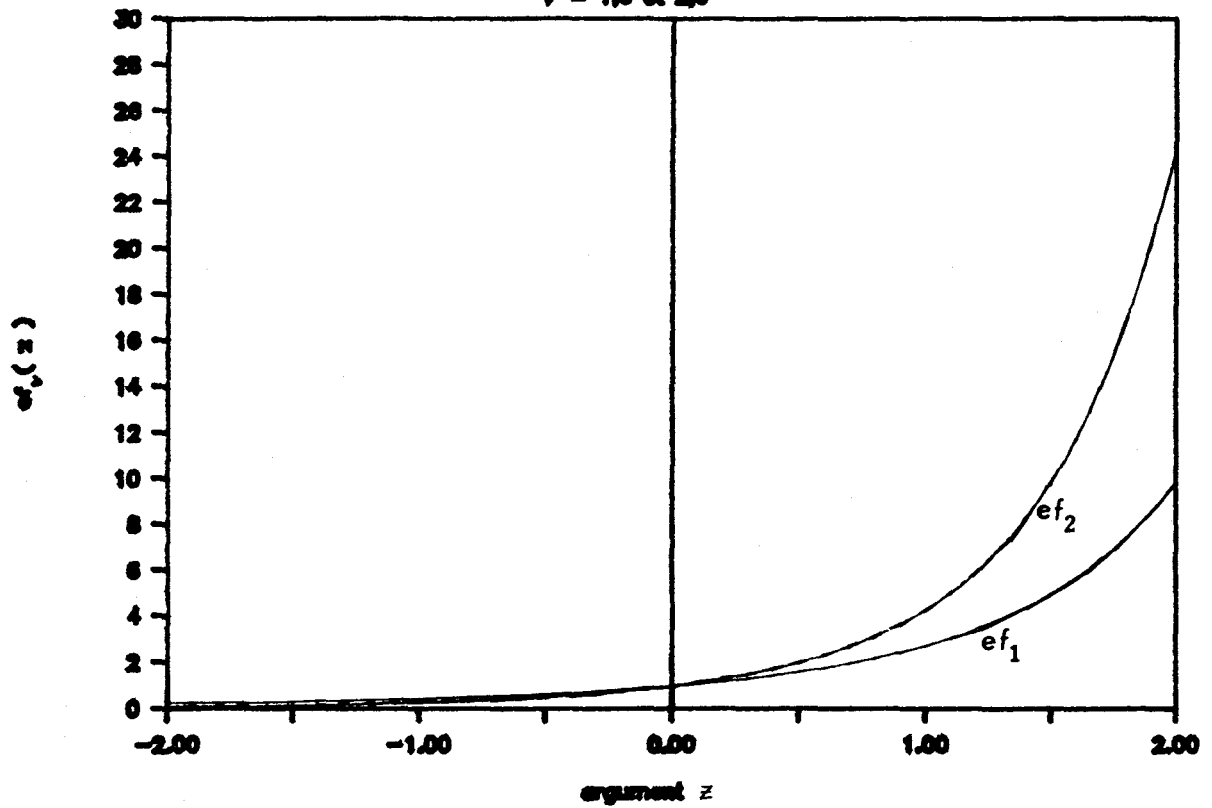


FIGURE B.1: Représentation graphique des fonctions exponentielles factorielles d'ordre 1,0 et 2,0.

TABLEAU B.1: Tables des valeurs des fonctions exponentielles factorielles $ef_{\nu}(\alpha)$

α	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.50$	$\nu = 1.00$	$\nu = 2.00$
0.10	99.61157	1.87706	1.09385	1.14351
0.30	100.00323	2.11733	1.31760	1.50604
0.50	100.44758	2.40813	1.60203	2.00318
0.70	100.95610	2.76351	1.96723	2.69183
0.90	101.54353	3.20224	2.44101	3.65581
1.10	102.22902	3.74971	3.06234	5.01987
1.30	103.03774	4.44064	3.88641	6.97163
1.50	104.00309	5.32298	4.99224	9.79649
1.70	105.16999	6.46383	6.49425	13.93348
1.90	106.59954	7.95810	8.56020	20.06588
2.10	108.37589	9.94182	11.43891	29.26977
2.30	110.61651	12.61235	15.50421	43.26062
2.50	113.48756	16.25986	21.32483	64.80728
2.70	117.22736	21.31669	29.77753	98.43585
2.90	122.18260	28.43594	42.23211	151.64118
3.10	128.86501	38.61813	60.85810	236.99875
3.30	138.04133	53.41820	89.14002	375.89377
3.50	150.87797	75.28837	132.75464	605.19309
3.70	169.17717	108.15417	201.08522	989.34202
3.90	195.76806	158.39589	309.87200	1642.59629
4.10	235.16393	236.54523	485.91772	2770.44586
4.30	294.68351	360.26171	775.56269	4747.88262
4.50	386.39370	559.63262	1260.17340	8269.38794
4.70	530.52746	886.75384	2084.87153	14640.51037
4.90	761.59274	1433.31731	3512.62742	26352.98724

TABLEAU B.1: Tables des valeurs des fonctions exponentielles factorielles
 $ef_{\nu}(\alpha)$
 (suite)

α	$\nu = 3.00$	$\nu = 4.00$	$\nu = 5.00$	$\nu = 6.00$
0.10	2.36438	7.29242	29.88542	152.72263
0.30	3.32864	10.85221	46.68500	249.21809
0.50	4.73327	16.31291	73.66710	410.80923
0.70	6.80030	24.77556	117.44853	684.18846
0.90	9.87414	38.02822	189.23386	1151.53364
1.10	14.49454	59.00524	308.19570	1958.99394
1.30	21.51660	92.57392	507.49256	3369.26435
1.50	32.30988	146.89622	845.09701	5859.65670
1.70	49.09274	235.81218	1423.49189	10307.02653
1.90	75.49973	383.05764	2425.89460	18340.33119
2.10	117.55576	629.81303	4183.63113	33020.31451
2.30	185.36803	1048.37030	7302.88264	60164.78200
2.50	296.09961	1767.16707	12905.90577	110962.57525
2.70	479.25851	3017.19123	23095.55082	207189.93208
2.90	786.22158	5219.04367	41860.54020	391744.13165
3.10	1307.59798	9148.29932	76861.25517	750171.70193
3.30	2205.28895	16253.51955	142996.06963	1455206.10914
3.50	3772.44768	29275.61786	269613.01300	2860052.35431
3.70	6547.09236	53469.72148	515278.56304	5696232.24427
3.90	0.1153025D+05	0.9904718D+05	0.9984131D+06	0.1149854D+08
4.10	0.2061048D+05	0.1861210D+06	0.1961671D+07	0.2352961D+08
4.30	0.3740133D+05	0.3548556D+06	0.3909023D+07	0.4881777D+08
4.50	0.6891637D+05	0.6865823D+06	0.7901568D+07	0.1027081D+09
4.70	0.1289667D+06	0.1348333D+07	0.1620451D+08	0.2191623D+09
4.90	0.2451503D+06	0.2688077D+07	0.3372168D+08	0.4743849D+09

ANNEXE C

**Valeur de certaines caractéristiques statistiques
des populations des lois de Halphen de type A
(figures 1.1 à 1.4)**

TABLEAU C.1: Coefficients caractéristiques de la loi de Halphen de Type A

Paramètres			Coefficients caractéristiques				
ν	α	m	X_m	\bar{x}	σ^2	C_v	C_s
-1	0,5	1	0,2361	0,6995	0,5107	1,0217	3,5221
0	0,5	1	0,4142	1,4296	1,8154	0,9425	2,5178
1	0,5	1	1,0000	2,6995	4,5107	0,7868	1,8043
-1	0,5	2	0,4721	1,3999	2,0429	1,0217	3,5221
0	0,5	2	0,8284	2,8593	7,2617	0,9425	2,5178
1	0,5	2	2,0000	5,3999	18,0429	0,7868	1,8043
1	1	1	1,0000	1,8143	1,3369	0,6373	1,5858
1	2	1	1,0000	1,3940	0,4509	0,4817	1,2913
1	1	2	2,0000	3,6286	5,3476	0,6373	1,5858
1	2	2	2,0000	2,7879	1,8034	0,4817	1,2913

ANNEXE.D

**Valeur de certaines caractéristiques statistiques
des populations des lois de Halphen de type B
(figures 1.5 à 1.8)**

TABLEAU D.1 Coefficients caractéristiques de la loi de Halphen de Type B

Paramètres			Coefficients caractéristiques				
ν	α	m	X_m	\bar{x}	σ	C_v	C_s
0,1	1	1	-----	0,2692	0,1621	1,4955	1,9665
0,1	2	1	-----	0,5150	0,3498	1,1483	1,1940
0,1	3	1	2,8601	0,9946	0,6027	0,7805	0,4328
0,5	-1	1	-----	0,4164	0,1185	0,8267	1,2331
0,5	0	1	-----	0,5642	0,1817	0,7555	0,9953
0,5	1	1	1,0000	0,7890	0,2720	0,6610	0,7140
0,5	2	1	2,0000	1,1126	0,3747	0,5501	0,4240
0,5	3	1	3,0000	1,5302	0,4537	0,4402	0,1868
1	1	1	1,3660	1,1337	0,2815	0,4680	0,4639
1	2	1	2,2247	1,4494	0,3487	0,4074	0,3043
1	3	1	3,1583	1,8268	0,4031	0,3476	0,1768
0,1	1	2	-----	0,5385	0,6485	1,4955	1,9666
0,5	1	2	2,0000	1,5779	1,0880	0,6610	0,7140
1	1	2	2,7320	2,2675	1,1261	0,4680	0,4639

ANNEXE E

**Valeur de certaines caractéristiques statistiques
des populations des lois de Halphen de type B⁻¹
(figures 1.9 à 1.12)**

TABLEAU E.1 Coefficients caractéristiques de la loi de Halphen de Type B⁻¹

Paramètres			Coefficients caractéristiques				
ν	α	m	X_m	\bar{x}	σ^2	C_V	C_S
2,0	1	1	0,5403	0,7236	0,1147	0,4680	4,6661
2,0	2	1	0,4633	0,5917	0,0581	0,4074	4,0378
2,0	3	1	0,4000	0,4884	0,0288	0,3476	3,2675
2,0	1	2	1,0806	1,4471	0,4586	0,4680	4,6660
2,0	2	2	0,9266	1,1835	0,2325	0,4074	4,0378
2,0	3	2	0,8000	0,9768	0,1153	0,3476	3,2675
2,5	1	1	0,5000	0,6308	0,0585	0,3835	2,9062
3,0	1	1	0,4678	0,5677	0,0358	0,3334	2,2354
2,5	1	2	1,0000	1,2616	0,2341	0,3835	2,9062
3,0	1	2	0,9357	1,1354	0,1433	0,3334	2,2354

APPENDICE 1

APPENDICE 1.

Fonction d'une distribution d'une loi de Halphen de Type A pour une variable transformée $Y = k \cdot X$.

Démonstration:

Si on effectue une transformation sur une variable aléatoire X quelconque qui suit une fonction $F(x)$, on peut retrouver la fonction de distribution $G(y)$ de la nouvelle variable Y , par la formule générale suivante:

$$G(y) = F(x(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| \quad (A.1.1)$$

Pour la loi de Halphen de type A, si la variable $X \sim HA(\alpha, m, \nu)$ alors la fonction de distribution $F(x)$ est:

$$F(x) = (2m^\nu K_\nu(2\alpha))^{-1} \int_0^\infty (x^\nu)^{-1} [\exp(-\alpha(x/m + m/x))] dx \quad (A.1.2)$$

Si on pose $Y = kX$ où k est une constante ($k > 0$ car X est toujours supérieure à zéro), il est possible de trouver la fonction de distribution de la nouvelle variable Y en utilisant l'équation (A.1.1):

$$G(y) = \frac{1}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{k}\right)^{\nu-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{y}{km} + \frac{km}{y}\right)\right] \left|\frac{1}{k}\right| dy \quad (A.1.3)$$

En réarrangeant les termes de l'équation (A.1.3), on trouve que la variable $Y = kX \sim HA(\alpha, km, \nu)$ c'est-à-dire:

$$G(y) = \frac{1}{2(km)^\nu K_\nu(2\alpha)} \int_0^\infty y^{\nu-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{y}{km} + \frac{km}{y}\right)\right] dy \quad (A.1.4)$$

APPENDICE 2

APPENDICE 2.

Fonction d'une distribution d'une loi de Halphen de Type B pour une variable transformée $Y = kX$

Démonstration:

On veut montrer que si $X \sim HB(\alpha, m, \nu)$ alors la variable transformée $Y = kX \sim HB(\alpha, km, \nu)$ où k doit être supérieur à zéro.

Si une variable X suit une loi de Halphen de type B ayant comme paramètres α , m et ν alors la fonction de distribution $F(x)$ est:

$$F(x) = \frac{2}{m^{2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \int_0^\infty x^{2\nu-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{\alpha x}{m}\right] dx \quad (\text{A.2.1})$$

Si on pose $Y = kX$ où k est une constante, on détermine la fonction de distribution de la nouvelle variable transformée $G(y)$ en utilisant la formule générale (A.1.1):

$$G(y) = \frac{2}{m^{2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{k}\right)^{2\nu-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{km}\right)^2 + \frac{\alpha y}{km}\right] \frac{1}{k} dy \quad (\text{A.2.2})$$

Cette équation est équivalente à:

$$G(y) = \frac{2}{(km)^{2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \int_0^\infty y^{2\nu-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{y}{km}\right)^2 + \frac{\alpha y}{km}\right] dy \quad (\text{A.2.3})$$

On retrouve alors la fonction de distribution d'une loi de Halphen de type B de paramètre α , km et ν . Étant donné que le paramètre d'échelle km doit être supérieur à zéro et que $m > 0$, alors la constante k est nécessairement supérieure à 0.

APPENDICE 3

APPENDICE 3.

Équivalence entre les lois de Halphen de type B et de type B⁻¹

Démonstration:

On veut montrer que si $Y \sim \text{HB}^{-1}(\alpha, m, \nu)$ alors la variable aléatoire $X = \frac{m^2}{Y} \sim \text{HB}(\alpha, m, \nu)$.

La variable Y suit une loi de Halphen de type B⁻¹ de paramètres α , m et ν alors la fonction de distribution F(y) est:

$$F(y) = \frac{2}{m^{-2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \int_0^\infty y^{-2\nu-1} \exp \left[- \left(\frac{m}{y} \right)^2 + \frac{\alpha m}{y} \right] dy \quad (\text{A.3.1})$$

Si on pose $X = \frac{m^2}{Y}$, on peut déduire la fonction de distribution G(x) en utilisant l'équation générale (A.1.1):

$$G(x) = \frac{2}{m^{-2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{m^2}{x} \right)^{-2\nu-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{m} \right)^2 + \frac{\alpha x}{m} \right] \left| \frac{m^2}{x^2} \right| dx \quad (\text{A.3.2})$$

En réarrangeant les termes de l'équation (A.3.2), on obtient cette expression:

$$G(x) = \frac{2}{m^{2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \int_0^\infty x^{2\nu-1} \cdot \exp \left[- \left(\frac{x}{m} \right)^2 + \frac{\alpha x}{m} \right] dx \quad (\text{A.3.3})$$

On retrouve alors la fonction de distribution d'une loi de Halphen de type B telle que $X \sim \text{HB}(\alpha, m, \nu)$ d'où le nom de la loi de type B⁻¹ ou B inverse.

On peut reprendre cette démonstration, en posant $X = \frac{1}{Y}$ où $Y \sim \text{HB}^{-1}(\alpha, m, \nu)$ et on aura que la variable $X \sim \text{HB}(\alpha, \frac{1}{m}, \nu)$.

APPENDICE 4

APPENDICE 4.

Fonction d'une distribution d'une loi de Halphen de Type B⁻¹ pour une variable transformée Y = kX

Démonstration:

On veut montrer que si $X \sim HB^{-1}(\alpha, m, \nu)$ alors la variable transformée $Y = kX \sim HB^{-1}(\alpha, km, \nu)$ avec $k > 0$.

Étant donné qu'une variable X suit une loi de Halphen de type B inverse de paramètres α , m et ν , sa fonction de distribution F(x) est:

$$F(x) = \frac{2}{m^{-2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \int_0^\infty x^{-2\nu-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right] dx \quad (\text{A.4.1})$$

Si on pose $Y = kX$ où $k > 0$ et en utilisant l'équation générale (A.1.1), on retrouve la fonction de distribution G(y) suivante:

$$G(y) = \frac{2}{m^{-2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{k}\right)^{-2\nu-1} \exp\left[-\left(\frac{km}{y}\right)^2 + \frac{\alpha km}{y}\right] \frac{1}{k} dy \quad (\text{A.4.2})$$

Après réarrangement des termes de l'équation (A.4.2), on retrouve:

$$G(y) = \frac{2}{(km)^{-2\nu} \text{ef}_\nu(\alpha)} \int_0^\infty (y)^{-2\nu-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{km}{y}\right)^2 + \frac{\alpha km}{y}\right] dy \quad (\text{A.4.3})$$

Alors $Y \sim HB^{-1}(\alpha, km, \nu)$.

APPENDICE 5

APPENDICE 5.

Relation entre les moments de la loi de type B et de la loi de type B⁻¹

À l'Appendice 3, on a démontré que si une variable aléatoire $Y \sim \text{HB}^{-1}(\alpha, m, \nu)$ alors la variable transformée $X = \frac{1}{Y} \sim \text{HB}(\alpha, \frac{1}{m}, \nu)$

D'après cette propriété, on a l'égalité suivante entre les moments de la loi de type B⁻¹ et ceux provenant de la loi de type B:

$$[\mu'_r(y)]_{\text{HB}^{-1}(\alpha, m, \nu)} = [\mu'_r(\frac{1}{y})]_{\text{HB}(\alpha, \frac{1}{m}, \nu)} \quad (\text{A.5.1})$$

À partir de cette relation, il est possible de déduire les moments μ'_r de la loi de type B⁻¹.

On a par la définition des moments non-centré d'ordre r pour la loi de type B (c.f. Eq. 2.4) que:

$$\mu'_r(\frac{1}{y}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{y^r} f_{\text{HB}(\alpha, m, \nu)} dy = \mu'_{-r}(y) \quad (\text{A.5.2})$$

on a alors l'égalité suivante:

$$[\mu'_r(y)]_{\text{HB}^{-1}(\alpha, m, \nu)} = [\mu'_{-r}(y)]_{\text{HB}(\alpha, \frac{1}{m}, \nu)} \quad (\text{A.5.3})$$

Pour une loi de Halphen de Type B, le moment μ'_{-r} est donné par:

$$[\mu'_{-r}(y)]_{\text{HB}(\alpha, m, \nu)} = \frac{m^r \text{ef}_{\nu+r/2}(\alpha)}{\text{ef}_{\nu}(\alpha)} \quad (\text{A.5.4})$$

D'après les résultats de A.5.3 et A.5.4, on aura alors pour la loi de Halphen de type B⁻¹:

$$[\mu_r^1(y)]_{HB^{-1}(\alpha, m, \nu)} = \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^{-r} \text{ef}_{\nu-r/2}(\alpha)}{\text{ef}_{\nu}(\alpha)} \quad (\text{A.5.5})$$

On pose $r = -r$ et on obtient:

$$[\mu_r^1(y)]_{HB^{-1}(\alpha, m, \nu)} = \frac{m^r \text{ef}_{\nu-r/2}(\alpha)}{\text{ef}_{\nu}(\alpha)} \quad (\text{A.5.6})$$

On sait également que

$(\mu_r^1)_{HB(\alpha, m, \nu)}$ est défini pour $r > -2\nu$

alors

$(\mu_r^1)_{HB^{-1}(\alpha, m, \nu)}$ sera défini pour $-r > -2\nu$ ou $r < 2\nu$.

FICHE EXPLICATIVE

AUTEUR(S) Boucher, S., Ashkar, F., Bobée, B.

TITRE Lois de Halphen: propriétés statistiques et mathématiques

SOUS-TITRE

SUJET/ MOTS-CLES / DESCRIPTEURS / / / / /
/ / / / / / / / /

DATE DE PUBLICATION OU DE SOUMISSION: ANNEE 1989 MOIS juillet JOUR 28

NATURE DE L'OUVRAGE (COCHER LA CASE APPROPRIEE)/ / /

- 1- PUBLICATION DANS UNE REVUE AVEC JURY _____
- 2- PUBLICATION DANS UNE REVUE SANS JURY _____
- 3- CONFERENCE SANS JURY _____ DATE _____
- 4- CONFERENCE SUR INVITATION _____ DATE _____
- 5- CONFERENCE AVEC JURY - PUBLIEE _____ DATE _____
- NON-PUBLIEE _____ DATE _____
- 6- RAPPORT INTERNE _____ MOIS _____
- 7- RAPPORT SCIENTIFIQUE - COMMANDITE (CONTRAT) _____ MOIS _____
FINANCE PAR:
- SUBVENTION MOIS _____
- INSTITUTIONNEL _____ MOIS _____
(INRS-EAU
UNIVERSITE DU QUEBEC)
- 8- COURS _____
- 9- DEMANDE DE SUBVENTION _____
- 10- COMMANDITE _____
- 11- OFFRE DE SERVICE _____
- 12- THESE: MOIS D'APPROBATION _____
- 13- AUTRE (PRECISER) _____

REFERENCE:

- POUR 1 ET 2 : NOM DE LA REVUE
- POUR 3,4,5 : NOM DU SYMPOSIUM OU DE LA CONFERENCE / ENDROIT
- POUR 6 ET 7 : NUMERO DU RAPPORT SCIENTIFIQUE OU INTERNE
- POUR 8 : NUMERO DE L'UNITE ET DE COURS
- POUR 9,10,11 : ORGANISME AUQUEL ON S'ADRESSE

R-241

PROFESSEUR: Bernard Bobée SECRETAIRE: Lise Dupuis

COMPLETER CETTE FORMULE POUR CHAQUE PUBLICATION ET REMETTRE A : GAETAN GODBOUT