

**Record Number:** 490  
**Author, Monographic:** Bobée, B.//Robitaille, R.  
**Author Role:**  
**Title, Monographic:** Étude sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement d'un échantillon  
**Translated Title:**  
**Reprint Status:**  
**Edition:**  
**Author, Subsidiary:**  
**Author Role:**  
**Place of Publication:** Québec  
**Publisher Name:** INRS-Eau  
**Date of Publication:** 1975  
**Original Publication Date:**  
**Volume Identification:**  
**Extent of Work:** 22  
**Packaging Method:** pages  
**Series Editor:**  
**Series Editor Role:**  
**Series Title:** INRS-Eau, Rapport de recherche  
**Series Volume ID:** 49  
**Location/URL:**  
**ISBN:** 2-89146-025-1  
**Notes:** Rapport annuel 1974-1975  
**Abstract:** 10.00\$  
**Call Number:** R000049  
**Keywords:** rapport/ ok/ dl

UIR 22 N 249

Etude sur les coefficients d'asymétrie  
et d'aplatissement d'un échantillon

B. Bobée et R. Robitaille  
INRS-Eau  
Université du Québec  
Québec

Janvier 1975

Référence: Bobée, B. et Robitaille, R. (1975). *Etude sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement d'un échantillon*. INRS-Eau, rapport scientifique no 49, 22 p.

Bardadueq 0043858

RESUME

Cette étude a pour but de rappeler certains résultats concernant les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement d'un échantillon.

Dans le cas de la loi Normale, on considère des tests de signification portant sur ces coefficients.

De plus, tenant compte du fait que le coefficient d'asymétrie d'un échantillon de taille donnée est borné, on propose une relation permettant de déduire dans le cas de la loi Pearson III, le coefficient d'asymétrie théorique de la population à partir de celui de l'échantillon.

## ETUDE SUR LE COEFFICIENT D'ASYMETRIE D'UN ECHANTILLON

### 1. Biais sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement d'un échantillon

A partir de l'ordre 2, les moments centrés par rapport à la moyenne d'un échantillon sont des estimations biaisées des moments centrés de la population. Ce biais est lié à la taille de l'échantillon.

Soient:

$\mu_r$  : moment théorique centré par rapport à la moyenne;

$\kappa_r$  : cumulants théoriques

$\bar{C}_s$  : coefficient d'asymétrie de la population;

$\bar{C}_k$  : coefficient d'aplatissement de la population.

on a :

$$\bar{C}_s = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} \quad (1)$$

$$\bar{C}_k = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} + 3 \quad (2)$$

$$\alpha_k = \bar{C}_k - 3 = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \quad \text{représente l'excès d'aplatissement}$$

Si  $m_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^r$  est le moment centré par rapport à la

moyenne  $\bar{x}$  de l'échantillon  $(x_1, \dots, x_N)$  on peut définir:

$$C_s = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \quad \text{coefficient d'asymétrie de l'échantillon}$$

$$C_k = \frac{m_4}{m_2^2} \quad \text{coefficient d'aplatissement de l'échantillon}$$

Puisque à partir de l'ordre 2 les moments  $m_r$  sont des estimations biaisées des  $\mu_r$  (on a  $E(m_r) \neq \mu_r$ ), on peut définir (Kendall 1969)

$k_r$  et  $\hat{m}_r$  qui sont des estimations non biaisées  $\kappa_r$  et  $\mu_r$  respectivement; on a:

$$k_2 = \hat{m}_2 = \frac{N}{N-1} m_2 \quad (3)$$

$$k_3 = \hat{m}_3 = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)} m_3 \quad (4)$$

$$k_4 = \hat{m}_4 - 3\hat{m}_2^2 = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)(N-3)} \left[ (N+1)m_4 - 3(N-1)m_2^2 \right] \quad (5)$$

A partir de ces relations et de (1) et (2), on obtient des valeurs corrigées des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement par:

$$\left\{ \hat{C}_s = \frac{k_3}{k_2^{3/2}} = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{(N-2)} C_s \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \hat{C}_k = \frac{\hat{m}_4}{\hat{m}_2^2} = \frac{k_4}{k_2^2} + 3 = \frac{N^2-1}{(N-2)(N-3)} C_k - 3 \left[ \frac{(3N-5)}{(N-2)(N-3)} \right] \right. \quad (7)$$

$$\hat{\alpha}_k = \hat{C}_k - 3 = \frac{k}{k^2} = \frac{N^2-1}{(N-2)(N-3)} \cdot C_k - 3 \left[ \frac{(N-1)^2}{(N-2)(N-3)} \right] \quad (8)$$

Quand N est grand, les relations (6), (7) et (8) montrent que  $\hat{C}_s$ ,  $\hat{C}_k$  et  $\hat{\alpha}_k$  tendent vers les valeurs non corrigées correspondantes  $C_s$ ,  $C_k$  et  $\alpha_k$ . Cependant, si les valeurs corrigées obtenues  $\hat{C}_s$  et  $\hat{C}_k$  tiennent compte des biais sur les moments, on ne peut dire en général que ce sont des estimations non biaisées des valeurs vraies  $C_s$  et  $C_k$ .

En ce qui concerne le coefficient d'asymétrie, une autre correction est appliquée en hydrologie et l'on a :

$$C_s^* = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2} \left( 1 + \frac{8.5}{N} \right) \quad (9)$$

Cette correction est basée sur l'expérience et n'a aucune justification théorique.

## 2. Tests de normalité

La loi normale est caractérisée par  $\bar{C}_s = 0$  et  $\bar{C}_k = 3$ . Il est possible de montrer (Kendall 1969) que pour des échantillons tirés d'une population normale:

$\hat{C}_s$  est distribué normalement avec:

- une moyenne  $\bar{C}_s = 0$
- une variance  $\text{var } \hat{C}_s = \frac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}$  (10)

$\hat{C}_k$  est distribué normalement avec:

- une moyenne  $\bar{C}_k = 3$
- une variance  $\text{var } \hat{C}_k = \frac{24N(N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)}$  (11)

A partir de ces résultats, il est possible de construire des tests de normalité; en effet:

$$u = \frac{\hat{C}_s}{\sqrt{\text{var } \hat{C}_s}} \quad \text{et} \quad v = \frac{\hat{C}_k - 3}{\sqrt{\text{var } \hat{C}_k}} \quad (12)$$

suivent des distributions normales  $N(0,1)$  pour des échantillons provenant d'une population normale.

Pour un échantillon donné de taille  $N$ , on calcule  $\hat{C}_s$  et  $\hat{C}_k$  et les valeurs correspondantes de  $u$  et  $v$ . On peut alors tester au niveau de signification  $\alpha$ :

- a) l'hypothèse  $H_0 : \bar{C}_s = 0$  ( $H_1 : \bar{C}_s \neq 0$ )
- b) l'hypothèse  $H_0 : \bar{C}_k = 3$  ( $H_1 : \bar{C}_k \neq 3$ )

Pour un niveau de signification:

- $\alpha = 5\%$  la zone d'acceptation est  $-1.960 < u < 1.960 = u_1$
- $\alpha = 1\%$  la zone d'acceptation est  $-2.575 < u < 2.575 = u_2$

La figure 1 donne les limites de la zone d'acceptation pour  $\alpha = 5\%$  et  $\alpha = 1\%$  de l'hypothèse  $\bar{C}_s = 0$ . Lorsque pour un échantillon de taille  $N$ , on trouve  $\hat{C}_s$ , si :

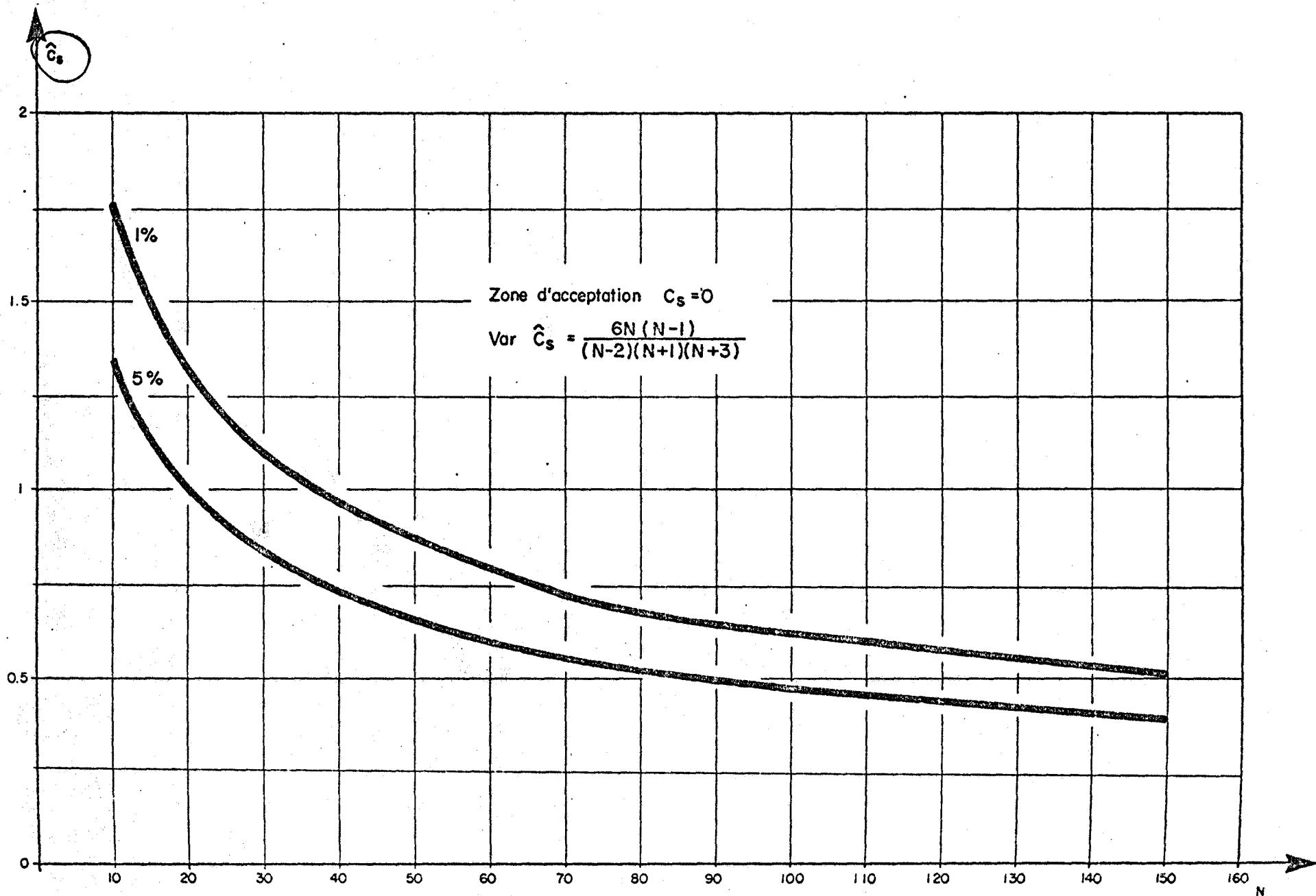


Fig. 1 : Test sur le coefficient d'asymétrie ( Loi normale )



$$|\hat{C}_s| < 1.960 \sqrt{\frac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}}$$

on accepte l'hypothèse  $H_0$  au niveau 5%;

$$|\hat{C}_s| < 2.575 \sqrt{\frac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}}$$

on accepte l'hypothèse  $H_0$  au niveau 1%.

De la même manière, la figure 2 donne les limites de la zone d'acceptation à 5% et 1% lorsque l'on teste l'hypothèse  $H_0 : \bar{C}_k = 3$  (où  $\hat{C}_k - 3 = 0$ ). Pour utiliser ce graphique, on calcule  $|\hat{C}_k - 3|$  à partir de l'échantillon de taille  $N$ , si la valeur obtenue tombe à l'intérieur de la zone d'acceptation à  $\alpha = 5\%$  (ou 1%), on accepte  $H_0$  au niveau de signification  $\alpha = 5\%$  (ou 1%).

Lorsque l'on accepte les deux (2) hypothèses  $H_0$  et  $H_0^1$ , on admet généralement que l'échantillon considéré est tiré d'une population normale.

Les figures 1 et 2 montrent que pour des échantillons de taille réduite,  $\hat{C}_s$  et  $\hat{C}_k$  ont de grandes variances d'échantillonnage. Pour les échantillons de taille  $N < 15$ , des tests plus puissants que ceux proposés ici doivent être employés.

Remarque:

Si l'on effectue les développements limités de  $\text{var}(\hat{C}_s)$  et  $\text{var}(\hat{C}_k)$  on trouve:

$$\text{var } \hat{C}_s \approx \frac{6}{N} \left[ 1 - \frac{3}{N} + \frac{11}{N^2} \right] \quad (13)$$

$$\text{var } \hat{C}_k \approx \frac{24}{N} \left[ 1 - \frac{5}{N} + \frac{35}{N^2} \right] \quad (14)$$

### 3. Coefficient de biais du coefficient d'asymétrie pour la loi Pearson III

Kirby (1974) a montré que le coefficient d'asymétrie d'un échantillon est borné, et ce quelle que soit la population dont est tiré l'échantillon.

Pour une série de taille  $N$ , on a :

$$- \frac{N-2}{\sqrt{N-1}} \leq C_s \leq \frac{N-2}{\sqrt{N-1}} \quad (15)$$

Ce résultat important montre que si par exemple, on considère un échantillon de taille  $N = 10$  tiré d'une population d'asymétrie  $\bar{C}_s = 3$ , le coefficient d'asymétrie de l'échantillon est tel que:

$$|C_s| \leq 2.67.$$

Il est donc nécessaire de multiplier  $C_s$  observé dans l'échantillon par un facteur correctif  $\alpha$ , de manière à obtenir une estimation de la valeur  $\bar{C}_s$  de la population.

Le problème principal est donc de déterminer  $\alpha$  ;

La relation (6) donne  $\hat{\alpha} = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2} = \frac{\hat{C}_s}{C_s} \quad (16)$

La relation (9) donne  $\alpha^* = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2} \left( 1 + \frac{8.5}{N} \right) = \frac{C_s^*}{C_s} \quad (17)$

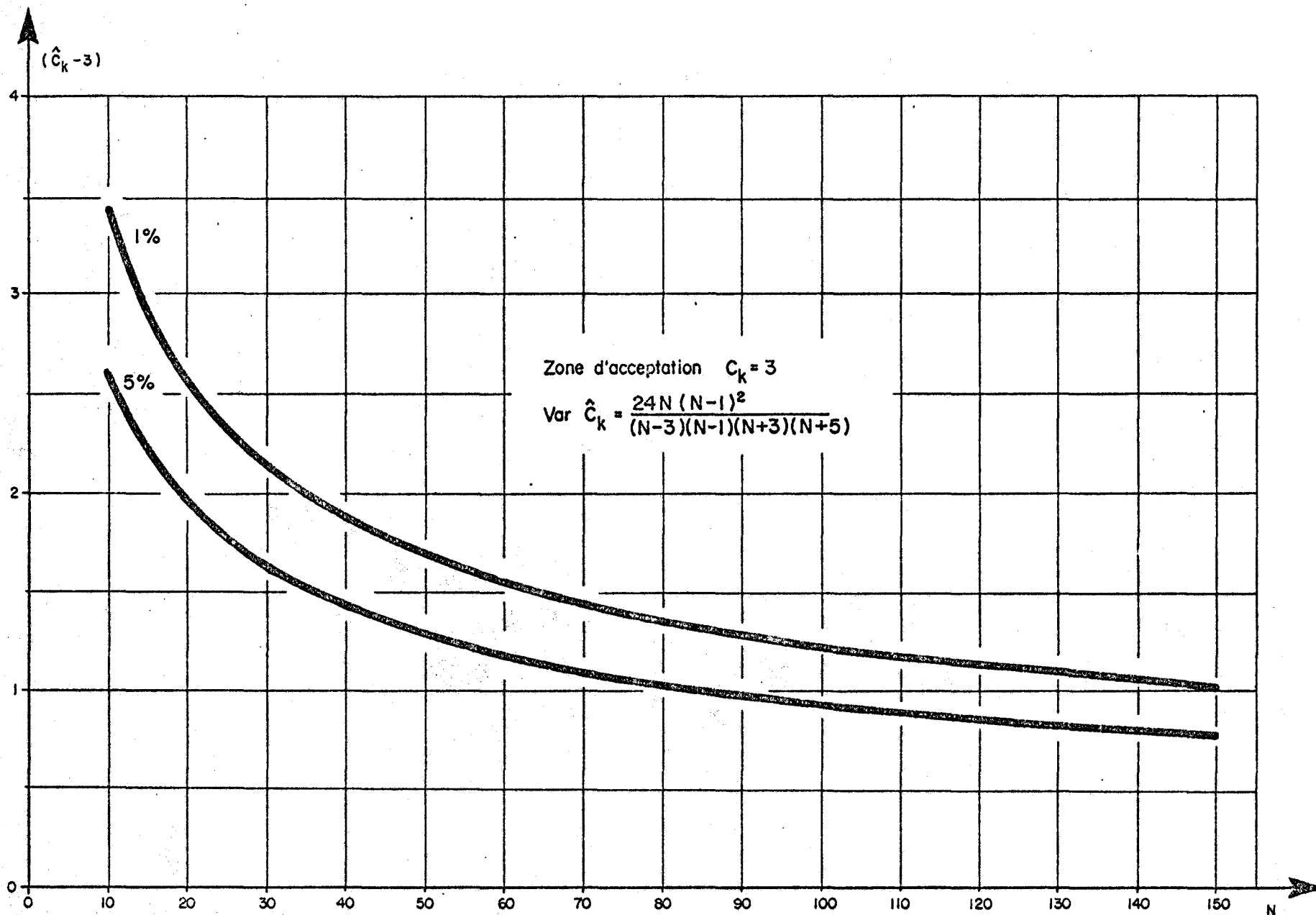


Fig. 2 : Test sur le coefficient d'aplatissement. ( Loi normale )

Dans l'un et l'autre cas, on espère que  $\hat{C}_S$  ou  $C_S^*$  est une estimation non biaisée de la valeur vraie  $\bar{C}_S$ , c'est-à-dire  $E(\hat{C}_S) = \bar{C}_S$  ou  $E(C_S^*) = \bar{C}_S$ , mais ceci est généralement faux.

Si l'on considère une loi asymétrique telle que Pearson III, pour laquelle l'asymétrie théorique peut varier (loi à trois (3) paramètres), il est peu probable que ces coefficients  $\hat{\alpha}$  ou  $\alpha^*$  soient satisfaisants puisqu'ils dépendent uniquement de la taille de l'échantillon et sont indépendants de l'asymétrie de la distribution.

Wallis et al. (1974) ont étudié la distribution du coefficient d'asymétrie  $C_S$  d'un échantillon de taille  $N$ , tiré d'une population d'asymétrie  $\bar{C}_S$  donnée. Cette étude a porté sur plusieurs lois; ici nous considérons seulement les résultats relatifs à la loi Pearson III.

La simulation a porté sur 100,000 échantillons de taille  $N$  donnée, tirés d'une population Pearson III d'asymétrie fixée  $\bar{C}_S$ .

Pour  $N$  et  $\bar{C}_S$ , la distribution empirique de  $C_S$  a été tracée. L'examen de cette distribution montre bien l'existence des bornes mises en évidence par Kirby (1974).

Le tableau 1 donne les valeurs de  $\alpha = \frac{\bar{C}_S}{E(C_S)}$  obtenues par Wallis et al. (1974).  $E(C_S)$  représente la valeur moyenne de la distribution de  $C_S$ , ( $\bar{C}_S$  et  $N$  étant fixés).

Les deux dernières lignes du tableau donnent les valeurs de  $\hat{\alpha}$  et  $\alpha^*$  définis par les relations (16) et (17). En pratique, dans l'étude d'une série (hydrologique, par exemple), on ne dispose

$C_s \backslash N$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
.25	1.868	1.359	1.232	1.169	1.129	1.103	1.088	1.078	1.066
.50	1.925	1.407	1.255	1.186	1.146	1.119	1.103	1.088	1.080
$\sqrt{2}/2$	1.969	1.416	1.270	1.201	1.160	1.132	1.112	1.098	1.087
1	1.963	1.430	1.279	1.207	1.165	1.138	1.119	1.104	1.093
1.14	1.972	1.441	1.291	1.216	1.174	1.145	1.125	1.109	1.096
$\sqrt{2}$	1.978	1.450	1.302	1.226	1.182	1.151	1.130	1.113	1.100
2	2.054	1.519	1.354	1.273	1.225	1.192	1.166	1.147	1.132
3	2.233	1.650	1.464	1.364	1.302	1.260	1.228	1.204	1.186
4	2.466	1.811	1.590	1.473	1.398	1.345	1.307	1.276	1.252
5	2.735	1.982	1.724	1.588	1.499	1.436	1.389	1.352	1.323
$\hat{\alpha}$	1.186	1.083	1.053	1.039	1.031	1.026	1.022	1.019	1.017
$\alpha^*$	2.194	1.543	1.352	1.260	1.207	1.171	1.146	1.128	1.113

Table 1 : Biases sur le coefficient d'asymétrie de la loi Pearson III.  
(tiré de Wallis et al. 1974).

que d'un seul échantillon de taille  $N$  pour lequel on calcule  $C_s$ . Puisque l'on dispose d'une seule valeur et non de la distribution de  $C_s$ , on suppose que cette valeur est une estimation de  $E(C_s)$  et l'application du facteur correctif  $\alpha$  conduit à la valeur théorique  $\bar{C}_s = \alpha C_s$ .

La table 1 montre bien que  $\hat{\alpha}$  et  $\alpha^*$  ne conviennent pas; en effet:

- $\hat{\alpha}$  conduit toujours à une sous-évaluation de  $\bar{C}_s$
- $\alpha^*$  conduit à une bonne estimation pour  $\bar{C}_s$  voisin de 2.

De plus, les résultats obtenus par Wallis et al. (1974) montrent bien que  $\alpha$  ne doit pas dépendre seulement de  $N$ , mais qu'il doit aussi être fonction de l'asymétrie.

A partir des résultats de la table 1, il est possible de déterminer pour  $N$  et  $\bar{C}_s$  donnés,  $E(C_s) = \frac{\bar{C}_s}{\alpha}$ . Les valeurs obtenues se trouvent dans la table 2. La dernière ligne de cette table donne la borne supérieure de la distribution de  $C_s$ ,  $C_M = \frac{N-2}{\sqrt{N-1}}$ .

Les résultats peuvent être mis en graphique:

- . distribution de  $E(C_s)$  en fonction de  $N$  pour  $\bar{C}_s$  fixé, ce qui donne les courbes de la figure 3;
- . distribution de  $\bar{C}_s$  en fonction de  $E(C_s)$  pour  $N$  fixé et l'on obtient les courbes de la figure 4.

Détermination de  $\bar{C}_s = f(C_s, N)$ .

En pratique, étant donné un échantillon de taille  $N$ , que l'on suppose tiré de la distribution Pearson III, on calcule  $C_s$  et l'on

$\bar{C}_s \backslash N$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
.25	.1338	.1840	.2029	.2139	.2214	.2267	.2298	.2319	.2345
.50	.2597	.3554	.3984	.4216	.4363	.4468	.4533	.4596	.4630
$\sqrt{2}/2$	.3591	.4994	.5568	.5888	.6096	.6247	.6359	.6440	.6505
1.00	.5094	.6993	.7819	.8285	.8584	.8787	.8937	.9058	.9149
1.14	.5781	.7911	.8830	.9375	.9710	.9956	1.0133	1.0280	1.0401
$\sqrt{2}$	.7150	.9753	1.0862	1.1535	1.1965	1.2287	1.2515	1.2706	1.2856
2	.9737	1.3167	1.4771	1.5711	1.6327	1.6779	1.7153	1.7437	1.7668
3	1.3435	1.8182	2.0492	2.1994	2.3041	2.3810	2.4430	2.4917	2.5295
4	1.6221	2.2087	2.5157	2.7155	2.8612	2.9740	3.0604	3.1348	3.1949
5	1.8282	2.5227	2.9002	3.1486	3.3356	3.4819	3.5997	3.6982	3.7793
$C_M$	2.6677	4.1290	5.1990	6.0850	6.8570	7.5510	8.1860	8.7760	9.3280

Table 2 : Moyenne de la distribution du coefficient d'asymétrie  
(loi Pearson III).

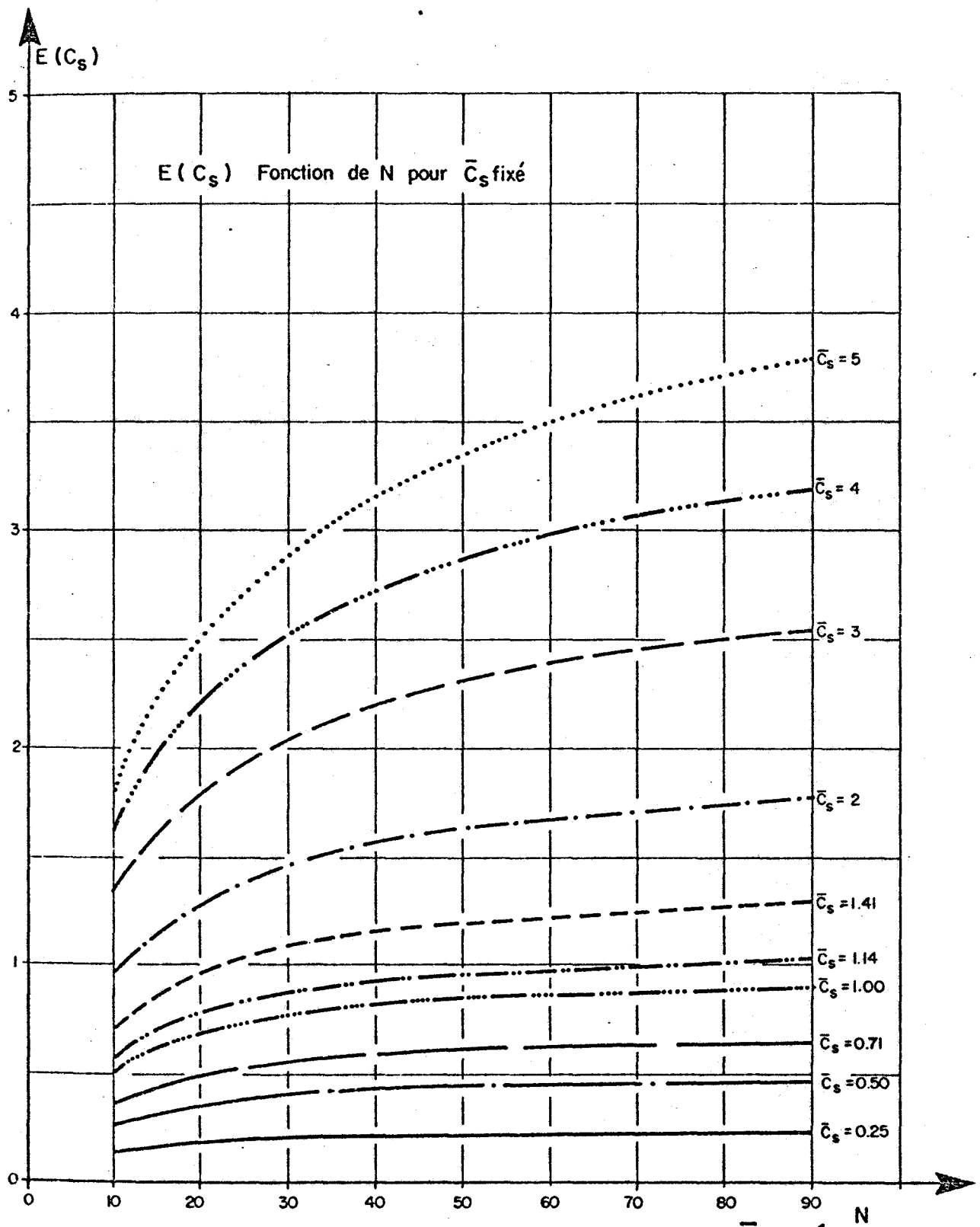


Fig. 3 : Distribution de  $E(C_s)$  en fonction de  $N$  pour  $\bar{C}_s$  fixé .  
 (Loi Pearson III)



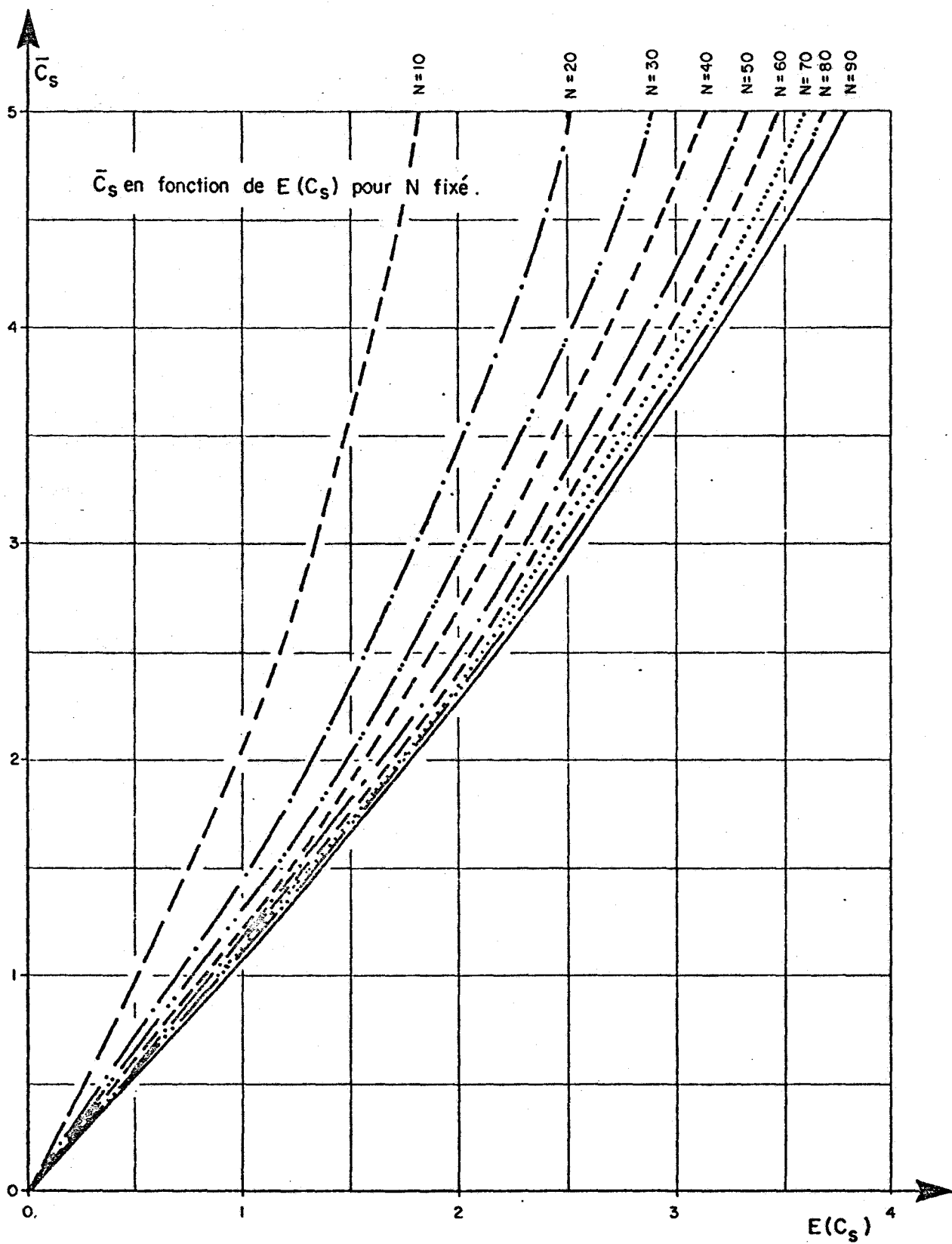


Fig. 4 : Distribution de  $\bar{C}_S$  en fonction de  $E(C_S)$  pour  $N$  fixé. (Loi Pearson III)

veut, connaissant  $N$  et  $C_s$ , en déduire l'asymétrie théorique  $\bar{C}_s$ .

Pour cela, on suppose que  $C_s$  est une estimation de  $E(C_s)$ , et l'on détermine  $\bar{C}_s = f(C_s, N)$ .

A partir des résultats de Wallis et al. (1974), nous avons recherché la fonction  $f(C_s, N)$ . Pour cet ajustement, nous avons, compte tenu de la forme des courbes de la figure 4, retenu après plusieurs essais, la fonction suivante:

$$\bar{C}_s = C_s [A + B C_s^2] \quad (18)$$

où  $A$  et  $B$  sont des fonctions de  $N$ .

Un essai a été effectué avec la fonction  $\bar{C}_s = (A + DC_s + BC_s^2)C_s$  mais le coefficient  $D$  est voisin de 0, ce qui nous a conduit à la relation (18).

La relation  $\bar{C}_s = AC_s$  ne présente pas d'intérêt car comme nous l'avons vu précédemment,  $\alpha = \frac{\bar{C}_s}{C_s}$  doit dépendre de  $C_s$ .

La table 3 donne les valeurs de  $A$  et  $B$  pour différents  $N$ :

N	A	B
20	1.3749	.0915
30	1.2402	.0561
40	1.1758	.0408
50	1.1388	.0320
60	1.1141	.0264
70	1.0976	.0224
80	1.0849	.0195
90	1.0749	.0174

Table 3 : Coefficients  $A$  et  $B$  en fonction de  $N$ .

Dans l'ajustement de A et B, nous n'avons pas considéré  $N = 10$ , qui présente peu d'intérêt en pratique.

Compte tenu des valeurs obtenues pour A, nous avons essayé d'ajuster les fonctions:

$$A = 1 + \frac{a_0}{N} + \frac{a_1}{N^2} \quad (\text{Forme 1})$$

$$A = 1 + \frac{a_0}{N} + \frac{a_1}{N^2} + \frac{a_2}{N^3} \quad (\text{Forme 2})$$

Pour B nous avons considéré:

$$B = \frac{b_0}{N} + \frac{b_1}{N^2} \quad (\text{Forme 1})$$

$$B = \frac{b_0}{N} + \frac{b_1}{N^2} + \frac{b_2}{N^3} \quad (\text{Forme 2})$$

L'ajustement conduit pour la forme 1 à:

$$A = 1 + \frac{6.55}{N} + \frac{19.28}{N^2} \quad (19)$$

$$B = \frac{1.47}{N} + \frac{6.89}{N^2} \quad (20)$$

Pour la forme (2) on obtient:

$$A = 1 + \frac{6.51}{N} + \frac{22.37}{N^2} - \frac{51.30}{N^3} \quad (21)$$

$$B = \frac{1.52}{N} + \frac{2.32}{N^2} + \frac{76.02}{N^3} \quad (22)$$

La table 4 donne pour les différentes valeurs de N les valeurs simulées de fonctions A et B et permet d'évaluer l'erreur relative commise. Ces résultats montrent que pour A la forme 1 est suffisante et que pour B la forme 2 n'apporte pas une très grande amélioration.

Les tables 5 et 6 donnent en fonction de N et du coefficient d'asymétrie de la population  $\bar{C}_s$ , le rapport

$$100 * \frac{\Delta \bar{C}_s}{\bar{C}_s} = \frac{\bar{C}_s - (\bar{C}_s)_{\text{simulé}}}{\bar{C}_s} * 100$$

La table 5 est relative à la simulation de  $(\bar{C}_s)_{\text{simulé}}$  à partir de N et de  $C_s$  (table 2) par la relation (18), A et B étant donnés par les relations (19) et (20) d'ordre 2 en  $\frac{1}{N}$  (forme 1).

La table 6 donne le même rapport que la table 5 mais dans la relation (18) on utilise pour A et B les relations (21) et (22) d'ordre 3 en  $\frac{1}{N}$  (forme 2).

Les résultats obtenus dans ces 2 tables confirment qu'il est suffisant d'utiliser un développement à l'ordre 2 en  $\frac{1}{N}$  et que le terme en  $\frac{1}{N^3}$  n'apporte

N		20	30	40	50	60	70	80	90
A	Valeur exacte	1.3749	1.2402	1.1758	1.1388	1.1141	1.0976	1.0849	1.0749
	Forme 1	1.3757	1.2398	1.1758	1.1387	1.1145	1.0975	1.0849	1.0752
	$\frac{\Delta A}{A} \%$	$-5.5 * 10^{-2}$	$3.8 * 10^{-2}$	0	$10^{-2}$	$-3.9 * 10^{-2}$	$1 * 10^{-2}$	$.3 * 10^{-2}$	$-1.9 * 10^{-2}$
	Forme 2	1.3750	1.2400	1.1759	1.1387	1.1145	1.0974	1.0848	1.0750
	$\frac{\Delta A}{A} \%$	$-.5 * 10^{-2}$	$2.2 * 10^{-2}$	$-1.1 * 10^{-2}$	$+.8 * 10^{-2}$	$-3.5 * 10^{-2}$	$1.9 * 10^{-2}$	$1.4 * 10^{-2}$	$-.7 * 10^{-2}$
B	Valeur exacte	.0915	.0561	.0408	.0320	.0264	.0224	.0195	.0174
	Forme 1	.0907	.0567	.0410	.0322	.0264	.0224	.0195	.0172
	$\frac{\Delta B}{B} \%$	.81	-.91	-.62	-.55	-.14	.02	.22	1.16
	Forme 2	.0913	.0561	.0406	.0319	.0263	.0224	.0195	.0173
	$\frac{\Delta B}{B} \%$	.17	.15	.41	.14	.18	.00	-.08	.61

Table 4 : Erreur dans l'ajustement de A et B.

$C_s \backslash N$	20	30	40	50	60	70	80	90
.25	-1.45	-.82	-.74	-1.00	-1.17	-.98	-.74	-.95
.50	1.41	.50	.24	.10	-.07	.08	-.09	.11
$\sqrt{2}/2$	1.25	1.00	.91	.81	.63	.49	.46	.42
1.00	.69	.36	.25	.22	.27	.32	.29	.32
1.14	.59	.55	.34	.42	.38	.40	.32	.21
$\sqrt{2}$	-.83	-.35	-.36	-.23	-.30	-.23	-.30	-.32
2	-.92	-.69	-.33	.05	.26	.22	.26	.28
3	-1.55	-.93	-.76	-.57	-.34	-.26	-.14	.08
4	-.40	-.52	-.38	-.28	-.23	-.03	-.00	.12
5	1.46	.45	.33	.17	.09	.08	.08	.18

Table 5 : Erreur relative  $\frac{\Delta \bar{C}_s}{\bar{C}_s} \%$ , forme 1 (2<sup>e</sup> degré).

$C_s \backslash N$	20	30	40	50	60	70	80	90
.25	-1.41	-.83	-.75	-1.00	-1.16	-.97	-.73	-.94
.50	1.45	.49	.24	.10	-.07	.09	-.08	.11
$\sqrt{2}/2$	1.29	1.00	.91	.81	.64	.50	.47	.43
1.00	.72	.37	.26	.23	.28	.33	.29	.32
1.14	.61	.57	.36	.44	.39	.41	.33	.21
$\sqrt{2}$	-.81	-.31	-.33	-.21	-.28	-.22	-.29	-.33
2	-.94	-.61	-.25	.09	.29	.23	.25	.27
3	-1.63	-.78	-.62	-.48	-.30	-.26	-.16	.03
4	.52	-.30	-.18	-.16	-.17	-.02	-.04	.05
5	1.31	.73	.58	.33	.16	.09	.03	.09

Table 6 : Erreur relative  $\frac{\Delta \bar{C}_s}{\bar{C}_s} \%$ , forme 2 (3<sup>e</sup> degré).

pas d'amélioration significative.

On utilisera donc la relation:

$$\bar{C}_S = C_S \left[ \left( 1 + \frac{6.55}{N} + \frac{19.28}{N^2} \right) + \left( \frac{1.47}{N} + \frac{6.89}{N^2} \right) C_S^2 \right] \quad (23)$$

Connaissant pour un échantillon donné  $N$  et  $C_S$ , on peut alors estimer  $\bar{C}_S$ . La table 5 montre que l'erreur relative sur  $\bar{C}_S$  obtenue par la relation (23) est généralement inférieure à 1%, ce qui est très satisfaisant.

Ces résultats sont applicables pour la loi Pearson III, mais il est naturel de penser que pour d'autres lois à 3 paramètres (loi log Normale par exemple) des relations du même type peuvent être obtenues, les modifications portant sur les valeurs des coefficients.

La relation (23) est en fait une amélioration de la relation (17) dans le cas de la loi Pearson III, en effet la relation (17) donne:

$$\bar{C}_S = \alpha^* C_S$$

et il est possible de montrer que  $\alpha^*$  peut être développé suivant les puissances de  $\frac{1}{N}$ , sous la forme:

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{(N-2)} \left( 1 + \frac{8.5}{N} \right) \approx 1 + \frac{10}{N} + \frac{15.63}{N^2}$$

La relation (23) ajoute en fait un terme supplémentaire fonction de  $N$



et  $C_s$  et permet de déterminer  $\bar{C}_s$ , connaissant  $C_s$  et  $N$  avec une meilleure précision.

Dans les applications pratiques où l'on ne dispose que d'un seul échantillon, on calcule  $C_s$  et l'on suppose que cette valeur est voisine de  $E(C_s)$  que l'on obtiendrait avec un grand nombre d'échantillon. Cette hypothèse implicite est d'ailleurs toujours faite quelque soit la correction de biais effectuée.

REFERENCES

Kirby W. - Algebraic Boundedness of Sample Statistics, Wat.  
Res. Res., vol. 10 No 2, April 1974.

Wallis J.R., N.C. Matalas and J.R. Slack - Just a moment! Wat.  
Res. Res., vol. 10 No 2, April 1974.

-----