CALCUL DE PROBABILITÉS CONJOINTES DE DEUX VARIABLES PROVENANT DE DEUX LOIS DE PROBABLITÉ DIFFÉRENTES.

CALCUL DE PROBABILITÉS CONJOINTES
DE DEUX VARIABLES PROVENANT
DE DEUX LOIS DE PROBABILITÉ DIFFÉRENTES

par

Fahim ASHKAR

Bernard BOBÉE

Sylvie BOUCHER

Marco LAVOIE

Décembre 1988

CALCUL DE PROBABILITÉS CONJOINTES DE DEUX VARIABLES PROVENANT DE DEUX LOIS DE PROBABILITÉ DIFFÉRENTES

Le but de cette étude consiste à établir une méthodologie pour calculer la loi de probabilité jointe de deux variables X et Y quand ces deux variables ne suivent pas la même loi de probabilité marginale. En d'autres mots, il s'agit de calculer la probabilité au non-dépassement:

$$P[X \leq x, Y \leq y] \tag{1}$$

pour x et y quelconques, quand X et Y proviennent de deux lois de probabilité différentes.

En raison du très grand nombre de lois de probabilité que les variables X et Y peuvent suivre, il n'est évidemment ni réaliste, ni possible de calculer la probabilité conjointe pour tous les couples de lois possibles de X et Y. Pour cette raison, nous avons délimité le problème pour qu'il soit à la fois abordable mathématiquement et utile pour des fins pratiques.

Étant donné que:

- la loi normale bivariée est une loi très bien étudiée et documentée dans la littérature;
- plusieurs études traitent du problème de transformation d'une variable X vers une loi normale U,

nous avons décidé de nous limiter au problème où l'on peut supposer qu'il existe une fonction f(X,Y) qui transforme le couple de variables (X,Y) (variables qui nous intéressent) en un couple qui suit une loi normale bivariée (U,V).

Nous avons donc commencé par faire une revue de littérature sur ce sujet de transformations vers la normalité en passant, en particulier, par les transformations "SMEMAX" et "SMEMAX modifiée" proposées par Loganathan et al., (1985), la transformation Box-Cox introduite par Box et Cox (1964) et utilisée, entre autres, par Hernandez et Johnson (1980), Loganathan et al., (1985, 1987) et

Linnet (1988), et plusieurs autres transformations étudiées par Skees et Shenton (1971).

Après avoir examiné toutes ces approches, la méthode jugée la plus utile pour des fins pratiques a été retenue. Il s'agit de la transformation Box-Cox donnée par l'équation:

$$u = f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \log x & \lambda = 0 \end{cases} \tag{2}$$

où x est la variable transformée vers une loi normale u de moyenne μ et de, variance σ^2. Cette méthode est la plus étudiée et la plus appliquée parmi les méthodes que nous venons de mentionner.

Donc, si on considère X comme le débit maximum annuel d'une rivière, par exemple, le but de la transformation Box-Cox sera de transformer la variable X en une variable U qui suit une loi $N(\mu,\sigma^2)$. Nous voyons tout de suite que cette transformation agit comme une loi à 3 paramètres (λ, μ et σ^2) qu'on ajuste à la variable X.

Supposons que nous avons à notre disposition les données suivantes:

- premier échantillon : $X_1, X_2, \ldots, X_{N_1}$ de taille N_1 (3)
- deuxième échantillon : $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_2}$ de taille N_2 (4)
- N couples $(X_1^*, Y_1^*), (X_2^*, Y_2^*), \ldots, (X_N^*, Y_N^*)$ (5)
  formés des valeurs concomitantes entre le premier échantillon X et le deuxième échantillon Y (notons qu'en général N peut être différent de N_1 et N_2).

Pour transformer chacun des échantillons X_i, i=1, ..., N_1; Y_i, i=1, ..., N_2 à une distribution normale, nous avons procédé en réalisant les étapes suivantes:

(1) nous avons placé l'échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_{N_1}$ en ordre croissant:

$$X_1 \leq X_2 \; \ldots \leq X_{N_1} \tag{6}$$

(2) nous avons calculé la valeur optimale λ_1 de λ, qui transforme la variable X en une variable U suivant une loi $N(\mu,\sigma^2)$ par l'équation (2). Cette valeur optimale λ_1, a été calculée par la méthode du maximum de vraisemblance (M.V.), une méthode dans laquelle il faut résoudre (Linnet, 1988) l'équation suivante:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{N_1} \ln X_i - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N_1} (u_i - \mu) \frac{\partial u_i}{\partial \lambda} = 0 \tag{7}$$

où

$$\frac{\partial u_i}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda^2} \left[(1+\lambda u_i) \ln (1+\lambda u_i) - \lambda u_i\right] \tag{8}$$

$$u_i = f_\lambda(x_i) \tag{9}$$

$$\mu = (1/N_1) \sum_{i=1}^{N_1} u_i \tag{10}$$

$$\sigma^2 = (1/N_1) \sum_{i=1}^{N_1} (u_i - \mu)^2 \tag{11}$$

La résolution de l'équation (7) pour déterminer λ, a été réalisée en utilisant la méthode de la sécante (Burden <u>et al</u>., 1978). Suite aux calculs des équations 7 à 11 le logiciel "SMPLNORM" qu'on a préparé, imprime la valeur de λ_1 et les valeurs de l'échantillon u_1, u_2, ..., u_{N_1} calculées à l'aide de l'équation (9) en remplaçant λ par λ_1. D'après la théorie utilisée (Box-Cox), cet échantillon devra suivre approximativement une loi normale (μ,σ^2) où μ et σ^2 sont donnés par les équations (10) et (11).

(3) Nous avons testé si l'échantillon u_i, $i=1,\ldots, N_1$ obtenu à l'étape précédente suit réellement une loi normale. Pour se faire, nous avons choisi le test statistique d'Anderson-Darling (Linnet, 1988) pour les deux raisons suivantes:

(i) c'est un test relativement sensible aux valeurs extrêmes de l'échantillon (ce qui est important pour un phénomène comme les crues);

(ii) les valeurs critiques nécessaires pour appliquer ce test sont disponibles (Linnet, 1988) dans le cas où λ n'est pas connu, mais plutôt estimé à partir des données (ce qui est le cas dans le problème actuel).

Pour appliquer le test d'Anderson-Darling, nous avons procédé selon les étapes suivantes (Linnet, 1988):

(a) standardisation des valeurs u_i, $(i=1, \ldots, N_1)$ en utilisant l'équation:

$$u_i^* = (u_i - \mu) / \sigma \tag{12}$$

où μ et σ sont donnés par les équations (10) et (11) respectivement.

(b) calcul de la statistique A^* d'Anderson-Darling donnée (Linnet, 1988) par:

$$A^* = A^2(1 + 4.2 /N_1 - 43/N_1^2) \tag{13}$$

où

$$A^2 = -N_1 - \frac{1}{N_1} \{\sum_{i=1}^{N_1} (2i-1)[\ln z_i + \ln(1-z_{N_1+1-i})]\} \tag{14}$$

z_i est la probabilité cumulative correspondant à la ième variable normale standardisée u_i^* . Pour calculer z_i, on utilise la formule suivante:

$$z_i = 0,5 \cdot \mathrm{ERFC}\left(\frac{-u_i^*}{\sqrt{2}}\right) \tag{15}$$

où ERFC : fonction d'erreur complémentaire calculée à partir de fonctions rationelles de degré k au numérateur et m au dénominateur (Cody, 1969 et Abramowitz et Stegun, 1970)

Le logiciel SmplNorm imprime la valeur de A* et spécifie si cette valeur est statistiquement significative ou non en se basant sur la Table 2 donnée par Linnet (1988).

De plus, le logiciel montre de façon graphique les valeurs normalisées standardisées u_i^* sur du papier de probabilité normale. Une droite sur ce graphique signifie que les valeurs u_i^*, i=1, ..., N_1 (donc les valeurs u_i, i=1, ..., N_1) suivent une loi normale et que la transformation Box-Cox (2) est adéquate pour la variable X.

(4) Nous avons répété les étapes (1), (2) et (3) pour le deuxième échantillon Y_i, i=1, ..., N_2 (4) en remplaçant X par Y et N_1 par N_2 dans (6), u par v dans (2), (7)-(12), u* par v* dans (12) et λ_1 par λ_2 dans (2), (7).

(5) Nous avons considéré les couples (X_i^*, Y_i^*) , i=1, ..., N des valeurs concomitantes de X et Y (5), sur lesquelles les transformations suivantes ont été appliquées:

$$\left.\begin{array}{l} x_i^* \xrightarrow{f_\lambda(\text{Eq.2}),\ \lambda=\lambda_1} u_i \xrightarrow{\text{Eq.(12)}} u_i^* \\ y_i^* \xrightarrow{f_\lambda(\text{Eq.2}),\ \lambda=\lambda_2} v_i \xrightarrow{\text{Eq.(12)}} v_i^* \end{array}\right\} \twoheadrightarrow (u_i^*, v_i^*) \tag{16}$$

Nous avons calculé une estimation du coefficient de corrélation ρ entre les couples de valeurs normalisées standardisées (u_i^*, v_i^*) et nous avons testé si ce coefficient est significativement différent de 0 selon une procédure décrite en appendice (Appendice A). (Notons que du point de vue théorique ce test n'est pas nécessaire, mais du point de vue pratique, il peut l'être).

(6) Les variables (u^*, v^*) peuvent ne pas suivre conjointement une loi normale bivariée même si de façon marginale u^* et v^* suivent une loi normale.

C'est pourquoi nous avons testé si les couples (u_i^*, v_i^*), i=1, ..., N suivent une loi normale bivariée selon une procédure décrite en appendice (Appendice B).

(7) Nous avons calculé les probabilités

$$P[U^* \leq u, \quad V^* \leq v] \tag{17}$$

en se basant sur une loi normale bivariée standardisée pour des valeurs fixes de u et v en utilisant la routine "MDBNOR" du logiciel "SMPLNORM" (Owen, 1962). Dans le logiciel SmplNorm que nous avons développé, l'utilisateur peut choisir jusqu'à six valeurs différentes de période de retour T pour U^* (les mêmes valeurs sont prises pour V^*) et le programme calcule la valeur de u (v) satisfaisant la relation:

$$P(U^* \leq u) \ [= P(V^* \leq v)] = p = 1/T$$

Les probabilités (17) sont aisément transformées à des probabilités de la forme:

$$P[X^* \leq x, Y^* \leq y] \tag{18}$$

en utilisant la transformation inverse de (16), qui donne x^* et y^* en fonction de u^* et v^*, respectivement.

Notons que la transformation inverse de (2) est donnée par

$$x = f_\lambda^{-1}(u) = \begin{cases} (\lambda u+1)^{1/\lambda} & \lambda \neq 0 \\ e^u & \lambda = 0 \end{cases} \tag{19}$$

À partir de l'équation (18), nous avons calculé les probabilités:

$$P[X^* \geq x,\ Y^* \geq y] \tag{20}$$

en utilisant la relation suivante:

$$P[X^* \geq x,\ Y^* \geq y\ ] = P[X^* \geq x] + P[Y^* \geq y] + P[X^* \leq x,\ Y^* \leq y] - 1 \tag{21}$$

où $P[X^* \geq x]$ et $P[Y^* \geq y]$ sont les probabilités marginales au dépassement, connues en fonction de la période de retour T qu'on a fixée pour X^* et Y^*.

(*) Note sur la précision du calcul des probabilités (20) et (18).

L'application du logiciel SmplNorm nous a montré que la routine "MDBNOR" utilisée pour calculer les probabilités (17) et (18) (Owen, 1962) peut donner des résultats imprécis lorsque des périodes de retour T supérieures à 1,000 ans sont utilisées. Lorsque cela arrive, nous avons prévu que la valeur imprécise soit identifiée dans la sortie du programme en l'indiquant par une lettre "E" (par exemple E.900020 veut dire que la valeur .900020 manque de précision). Dans ce cas, une valeur corrigée est donnée dans le programme. Cette valeur corrigée est basée sur le fait que log $P[X \geq X_{P_1},\ Y \geq Y_{P_2}]$ devient une fonction presque linéaire avec log $P[X \geq X_{P_1}]$ lorsque P_2 devient très faible, ou $T = 1/P_2$ devient très élevé ($T > 1000$, par exemple).

Basé sur cette linéarité, nous avons utilisé une interpolation linéaire simple pour corriger la valeur imprécise (20) et nous avons ensuite utilisé la relation inverse de (21) pour corriger la valeur imprécise correspondante (18) (pour chaque valeur imprécise (20) il y a une valeur imprécise correspondante (18)).

Exemple:

	Probabilité conjointe au dépassement	Probabilité marginale X	
	$P[X \geq X_{p_1}, Y \geq Y_{p_2}]$	$P_1 = P(X \geq X_{p_1}]$	$T = 1/P_1$
	.000100	.5	2
	E.000120	.1	10
	.000083	.02	50
$P_2 = P[Y \geq Y_{p_2}]$	.0001	← Probabilités marginales Y	
$T = 1/P_2$	10000		

Valeur imprécise : .000120 (la valeur exacte doit être inférieure à .000100 mais supérieure à .000083)

$$\log(\text{valeur corrigée}): = \frac{\log\ .000100\ (\log.02 - \log.1) + \log.000083(\log.1 - \log.5)}{\log.02 - \log.5}$$

→ valeur corrigée = .000091.

Notes générales

(1) si on ne réussi pas à obtenir une loi normale avec la transformation (2), il sera probablement utile de considérer d'autres transformations en remplaçant x par
- $\log x$
- $\exp(x)$
- $(x-m)$ où m est un quatrième paramètre choisi tel que $(0 \leq m < x_{min})$ où x_{min} est le plus petit élément de l'échantillon
- $\log(x - m)$; $0 \leq m < (x_{min}-1)$
- $(\log x - m)$; $0 \leq m < \log x_{min}$

(2) si la valeur de λ calculée par M.V. (Eq. 2) est proche de 0, la loi log-normale sera une bonne loi pour représenter la variable X.

RÉFÉRENCES

Abramowitz, M. et I.A. Stegun (Ed.) (1970). Handbook of Mathematical Functions, Applied Mathematics Series n° 55, Natl. Bur. Stand. (U.S.), Washington, D.C.

Box, G.E.P. et D.R. Cox (1964). An analysis of transformation, Journal of the Royal Statistical Society, Vol. B26: 211-252.

Burden, R.L., Faires, D.J. et A.C. Reynolds (1978). Numerical Analysis. Second Edition, Prindle, Weber et Schmidt Publishers, 598 p.

Cody, W.J. (1969). "Rational Chebyshev approximations for the error function". Mathematics of Computation, 23(107): 631-638.

Hernandez, F. et R.A. Johnson (1980). The large-sample behavior of transformations to normality. Journal of the American Statistical Association, Vol. 75(372): 855-861, Theory and Methods Section.

Linnet, K. (1988). Testing normality of transformed data. Applied Statistics 37(2): 180-186.

Loganathan, G.V., Kuo, C.Y. et J.C. McCormick (1985). Frequency Analysis of low flows. Nordic Hydrology, 16: 105-128.

Loganathan, G.V., Kuo, C.Y. et J. Yannaccone (1987). Joint probability distribution of streamflow and tides in estuaries. Nordic Hydrology, 18: 237-246.

Owen, D.B. (1962). Handbook of statistical tables, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Massachussets, Chapter 8.

Skees, P.M. et L.R. Shenton (1971). Comments on: The statistical distribution of rainfall per period under various transformations. Proceedings, Symposium on Statistical Hydrology, Tucson, Arizona, août 31- sept. 2. Agricultural Research Service, Dept. of Agriculture (U.S.), Washington, D.C.

APPENDICE A

TEST SUR LE COEFFICIENT DE CORRÉLATION : $\rho = 0$

Pour un échantillon (u_i, v_i) $i=1, \ldots, N$, de taille N, où les variables u et v sont normalement distribuées, nous calculons r le coefficient de corrélation:

$$r = \frac{\sum(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sqrt{[\sum(u_i-\bar{u})^2 \bullet \sum(v_i-\bar{v})^2]}} \tag{A1}$$

Pour des variables normalisées standardisées, l'équation de r est donnée par:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i^* \cdot v_i^*}{N - 1}$$

Si $\rho = 0$, la quantité

$$t = \frac{r}{\sqrt{[(1-r^2) / (n-2)]}} \tag{A2}$$

suit une loi de Student à $\nu = (N-2)$ degrés de liberté (d.l.). Pour tester l'hypothèse $\rho = 0$, nous calculons t par l'équation (A2) et nous comparons sa valeur avec la valeur critique t_p calculée selon une loi de Student à $\nu = (N-2)$ d.l. au niveau de signification $p = 0{,}05$, $p = 0{,}01$.

Pour calculer t_p, nous avons utilisé l'approximation 26.7.5 d'Abramowitz et Stegun (1970):

$$t_p \sim x_p + \frac{g_1(x_p)}{\nu} + \frac{g_2(x_p)}{\nu^2} + \frac{g_3(x_p)}{\nu^3} + \ldots$$

$$g_1(x) = \frac{1}{4}\,(x^3 + x)$$

$$g_2(x) = \frac{1}{96}\,(5x^5 + 16x^3 + 3x)$$

$$g_3(x) = \frac{1}{384}\,(3x^7 + 19x^5 + 17x^3 - 15x)$$

$$g_4(x) = \frac{1}{92160}\,(79x^9 + 776x^7 + 1482x^5 - 1920x^3 - 945x)$$

où x_p est la variate normale standard donnée par l'équation 26.2.23 d'Abramowitz et Stegun:

$$x_p = t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3} + \epsilon(p), \qquad t = \sqrt{(\ln 1/p^2)}$$

$$|\epsilon(p)| < 4.5 \times 10^{-4}$$

$c_0 = 2.515517$ $\qquad$ $d_1 = 1.432788$

$c_1 = .802853$ $\qquad$ $d_2 = .189269$

$c_2 = .010328$ $\qquad$ $d_3 = .001308$

Le logiciel SmplNorm qu'on a développé spécifie si l'hypothèse $\rho = 0$ est acceptée (ou rejetée) au niveau p = 0,05, p = 0,01.

APPENDICE B

VÉRIFICATION DE LA NORMALITÉ D'UNE DISTRIBUTION JOINTE

Comme on a mentionné auparavant, il peut être nécessaire dans l'analyse de données pairées de s'assurer que la distribution bivariée que l'on considère est normale.

On dispose généralement de N paires d'observations (u_i, v_i) pour $i = 1, \ldots, N$.

On examine préalablement les distributions marginales de U et V comme on l'a fait auparavant.

On peut montrer qu'une loi normale bivariée (NB) a des distributions marginales normales alors que la réciproque est fausse, donc :

- si les distributions marginales de U et de V ne sont pas normales, la loi jointe n'est pas normale;

- si la normalité des distributions marginales est acceptable, la loi jointe peut être normale, mais cela n'est pas certain; on doit effectuer un examen plus approfondi. La procédure est la suivante :

· on estime à partir des données les moyennes $\bar{u}$, $\bar{v}$, les écarts types s_1, s_2 et le coefficient de corrélation r.

· on calcule B_i tel que:

$$B_i = \frac{1}{(1 - r^2)} \left[\frac{(u_i - \bar{u})^2}{s_1^2} - 2r \frac{(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{s_1 s_2} + \frac{(v_i - \bar{v})^2}{s_2^2} \right]$$

· On examine si les B_i suivent une loi khi-2 à $\nu = 2$ degrés de liberté, on a pour la fonction de densité cumulée (FDC) de cette loi:

$$F(\chi_0^2) = 1 - e^{-\chi_0^2/2}$$

on en déduit :

$$\chi_0^2 = -2 \text{ Log } [1 - F(\chi_0^2)]$$

ou encore en logarithme à base 10:

$$\chi_0^2 = -(2 \times 2{,}303) \log [1 - F(\chi_0^2)] = -4{,}605 \log [1 - F(\chi_0^2)]$$

En posant $G(\chi_0^2) = 1 - F(\chi_0^2)$ qui représente une probabilité au dépassement, on a la relation théorique :

$$\log G(\chi_0^2) = -0{,}217\ \chi_0^2$$

Cette relation théorique dans un diagramme $(G(\chi_0^2), \chi_0^2)$ avec une échelle logarithmique apparaît comme une droite de pente négative.

Pour comparer les valeurs expérimentales avec la droite théorique, on classe les B_i par ordre croissant et on leur affecte la probabilité empirique F_i, on en déduit $G_i = 1 - F_i$ et on peut alors comparer les points $(\log G_i, B_i)$ avec la droite théorique.

APPENDICE C

VÉRIFICATION DES HYPOTHÈSES DE BASE NÉCESSAIRES À UNE ANALYSE DE FRÉQUENCE ET APPLICATION DE QUELQUES LOIS STATISTIQUES INCLUSE DANS LE LOGICIEL AJUST (INRS-Eau)

Avant de faire une analyse statistique de fréquence à partir d'une série de données (échantillon), il faut montrer que:

- les observations de l'échantillon sont indépendantes;
- les observations de l'échantillon sont homogènes, c'est-à-dire qu'elles proviennent d'une même population statistique;
- l'échantillon ne comporte pas d'observations aberrantes.

Chaque hypothèse peut être vérifiée par différents tests statistiques appropriés. Dans AJUST (logiciel développé et utilisé à l'INRS-Eau), trois tests sont utilisés, chacun vérifiant une des trois hypothèses ci-dessus:

- le test d'indépendance de Wald-Wolfiwitz;
- le test d'homogénéité de Mann-Whitney;
- le test de détection des valeurs aberrantes de Grubbs & Beck.

En appliquant ces tests aux données des deux stations Mauricie et Gentilly, on a constaté que la première station passe les 3 tests au niveau de 5% mais la deuxième station ne passe pas deux de ces test (indépendance et homogénéité) même au niveau de 1%. Un examen visuel des données de cette dernière station nous a revélé un certain changement dans les débits commençant vers l'année 1971 et allant jusqu'à l'année 1985 (dernière année de données). En effet, en regardant les données de Gentilly, il est très facile de voir que les débits de la période 1971-1985 sont, en moyenne, sensiblement plus élevés que les débits de la période précédente (1922-1970).

Pour cette raison, il nous a été nécessaire de reprendre les 3 tests statistiques ci-haut mentionnés sur une partie des données de Gentilly qu'on a jugé plus homogène. En prenant la période de 1922-1973, nous avons obtenu d'après les 3 tests un échantillon de valeurs homogènes, indépendantes et qui ne contient pas de valeurs aberrantes (voir les résultats numériques qui suivent). Nous n'allons donc considérer que cette période dans nos analyses subséquentes pour la station de Gentilly.

Dans le présent appendice, nous trouvons l'application de quelques lois statistiques du logiciel AJUST (INRS-Eau) aux deux stations qui nous concernent. Le but de ces ajustements est de compléter, d'une certaine manière, les ajustements déjà effectués par l'équipe d'Hydro-Québec en considérant une série de données plus homogènes pour la station Gentilly et en incluant l'ajustement de la loi gamma généralisée (GG) qui peut porter un certain intérêt à cause de sa flexibilité.

APPENDICE D

RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET GRAPHIQUES DU LOGICIEL SMPLNORM APPLIQUÉ AUX STATIONS MAURICIE ET GENTILLY

Résultats D.1. : Données des stations
de Mauricie: (période de 1922-1985) et
de Gentilly: (période de 1922-1973).

Résultats D.2. : Données des stations
de Mauricie: (période de 1922-1985) et
de Gentilly: (période de 1922-1985).

SmplNorm [Version 1.0]. Decembre 1988.

==

Fichier : MAURI.ECH

Titre de l'echantillon : BASSIN MAURICIE DEBIT MAXIMUM ANNUEL

Taille de l'echantillon : 64

Echantillon	Echant. Normalise (Lambda= -.0721)	Echant. Normalise Standardise	Prob. Cumulees (Normale)
1266.60	5.5841	-2.0627	.0097
1287.20	5.5937	-2.0131	.0253
1338.70	5.6171	-1.8927	.0409
1369.60	5.6307	-1.8228	.0564
1400.50	5.6439	-1.7546	.0720
1493.20	5.6819	-1.5592	.0875
1493.20	5.6819	-1.5592	.1031
1760.90	5.7787	-1.0606	.1187
1791.80	5.7888	-1.0083	.1342
1802.10	5.7922	-.9911	.1498
1833.00	5.8021	-.9401	.1654
1925.70	5.8307	-.7925	.1809
1966.80	5.8430	-.7295	.1965
1966.80	5.8430	-.7295	.2121
2028.60	5.8609	-.6374	.2276
2069.80	5.8725	-.5776	.2432
2080.10	5.8753	-.5629	.2588
2141.90	5.8922	-.4760	.2743
2152.20	5.8949	-.4618	.2899
2152.20	5.8949	-.4618	.3054
2162.50	5.8977	-.4477	.3210
2162.50	5.8977	-.4477	.3366
2172.80	5.9004	-.4336	.3521
2214.00	5.9112	-.3780	.3677
2255.20	5.9218	-.3235	.3833
2265.50	5.9244	-.3101	.3988
2327.30	5.9398	-.2307	.4144
2358.20	5.9474	-.1919	.4300
2389.00	5.9548	-.1537	.4455
2389.00	5.9548	-.1537	.4611
2450.80	5.9693	-.0787	.4767
2450.80	5.9693	-.0787	.4922
2481.70	5.9765	-.0419	.5078
2512.60	5.9835	-.0057	.5233
2512.60	5.9835	-.0057	.5389
2543.50	5.9905	.0301	.5545
2605.30	6.0041	.1003	.5700
2625.90	6.0086	.1233	.5856
2677.40	6.0196	.1800	.6012

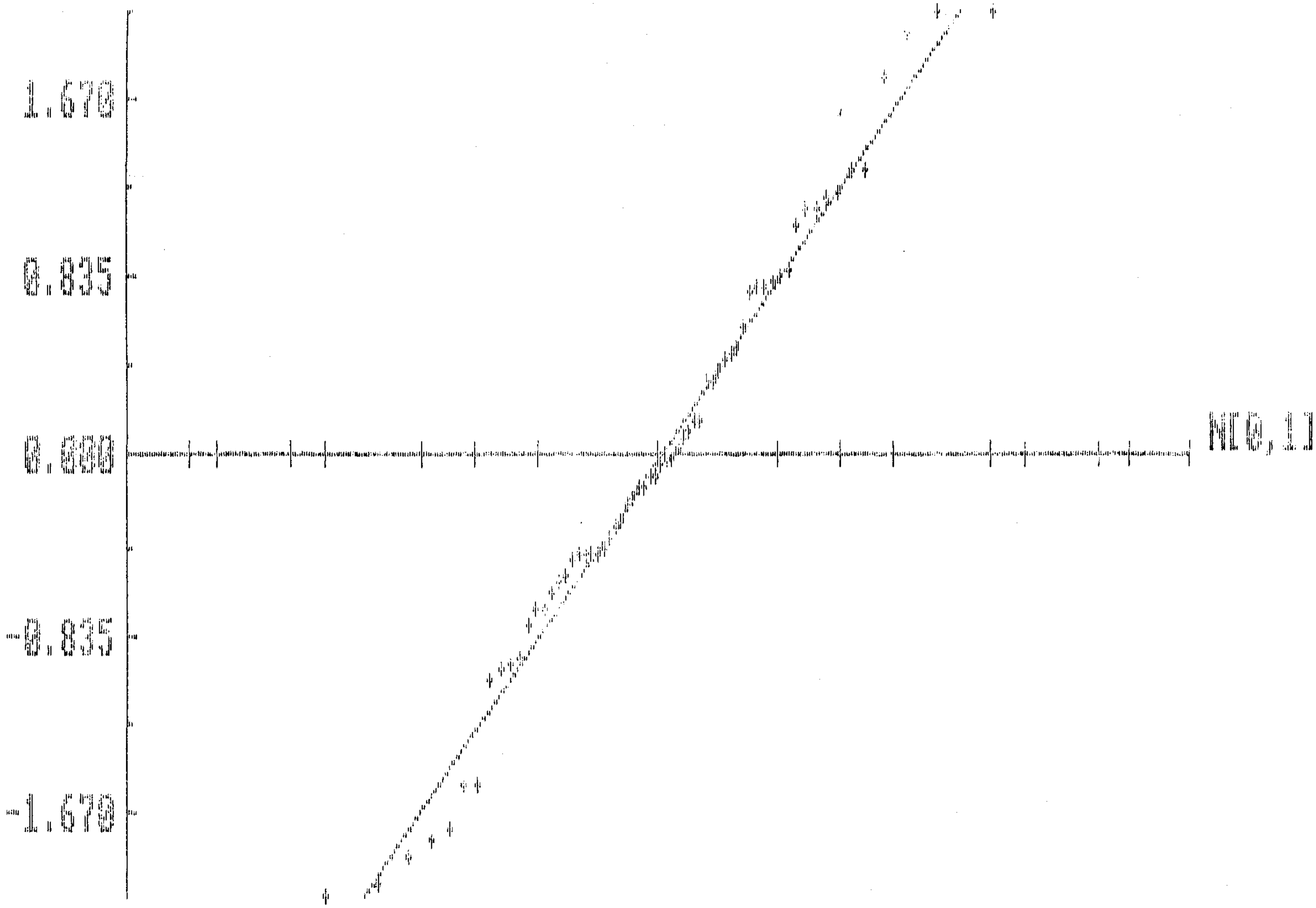
2677.40	6.0196	.1800	.6167
2842.10	6.0533	.3537	.6323
2852.40	6.0553	.3642	.6479
2903.90	6.0654	.4161	.6634
2945.10	6.0734	.4570	.6790
2976.00	6.0792	.4872	.6946
3006.90	6.0850	.5171	.7101
3120.20	6.1058	.6239	.7257
3295.20	6.1363	.7810	.7412
3326.10	6.1415	.8078	.7568
3326.10	6.1415	.8078	.7724
3357.00	6.1466	.8343	.7879
3377.60	6.1500	.8519	.8035
3408.50	6.1551	.8780	.8191
3676.20	6.1971	1.0941	.8346
3758.60	6.2093	1.1572	.8502
3779.20	6.2123	1.1727	.8658
3841.00	6.2213	1.2189	.8813
3882.20	6.2272	1.2492	.8969
4026.40	6.2473	1.3526	.9125
4026.40	6.2473	1.3526	.9280
4695.70	6.3313	1.7856	.9436
5045.80	6.3703	1.9865	.9591
5251.80	6.3920	2.0978	.9747
5282.70	6.3951	2.1141	.9903

Test d´Anderson-Darling (A*) = .291

Distribution normale acceptee au niveau de signification 20%

==

BASSIN MAURICIE DEBIT MAXIMUM ANNUEL



Pressez une touche pour continuer...

Titre de l´echantillon : BASSIN GENTILLY DEBIT MAXIMUM ANNUEL

Taille de l´echantillon : 52

Echantillon	Echant. Normalise (Lambda= .6169)	Echant. Normalise Standardise	Prob. Cumulees (Normale)
11899.20	528.1399	-2.2181	.0120
12017.00	531.3693	-2.1681	.0311
12968.60	557.0266	-1.7709	.0502
13520.20	571.5665	-1.5458	.0694
14258.50	590.6816	-1.2500	.0885
14373.50	593.6242	-1.2044	.1077
15023.80	610.0976	-.9494	.1268
15029.90	610.2508	-.9470	.1459
15054.50	610.8684	-.9375	.1651
15331.90	617.8068	-.8301	.1842
15469.30	621.2256	-.7771	.2033
15624.20	625.0659	-.7177	.2225
15767.00	628.5933	-.6631	.2416
15791.30	629.1924	-.6538	.2608
15897.30	631.8014	-.6134	.2799
15912.80	632.1823	-.6075	.2990
15930.90	632.6270	-.6006	.3182
16042.50	635.3644	-.5583	.3373
16326.70	642.3027	-.4509	.3565
16481.90	646.0721	-.3925	.3756
16618.20	649.3713	-.3414	.3947
16669.40	650.6080	-.3223	.4139
17127.60	661.6109	-.1520	.4330
17158.60	662.3512	-.1405	.4522
17161.70	662.4252	-.1394	.4713
17374.60	667.4954	-.0609	.4904
17799.60	677.5461	.0947	.5096
17848.90	678.7060	.1127	.5287
17863.30	679.0446	.1179	.5478
17863.60	679.0516	.1180	.5670
17984.90	681.8994	.1621	.5861
18010.70	682.5041	.1715	.6053
18188.20	686.6558	.2357	.6244
18385.20	691.2455	.3068	.6435
18462.50	693.0412	.3346	.6627
18575.20	695.6542	.3750	.6818
18677.50	698.0208	.4117	.7010
19299.00	712.2933	.6326	.7201

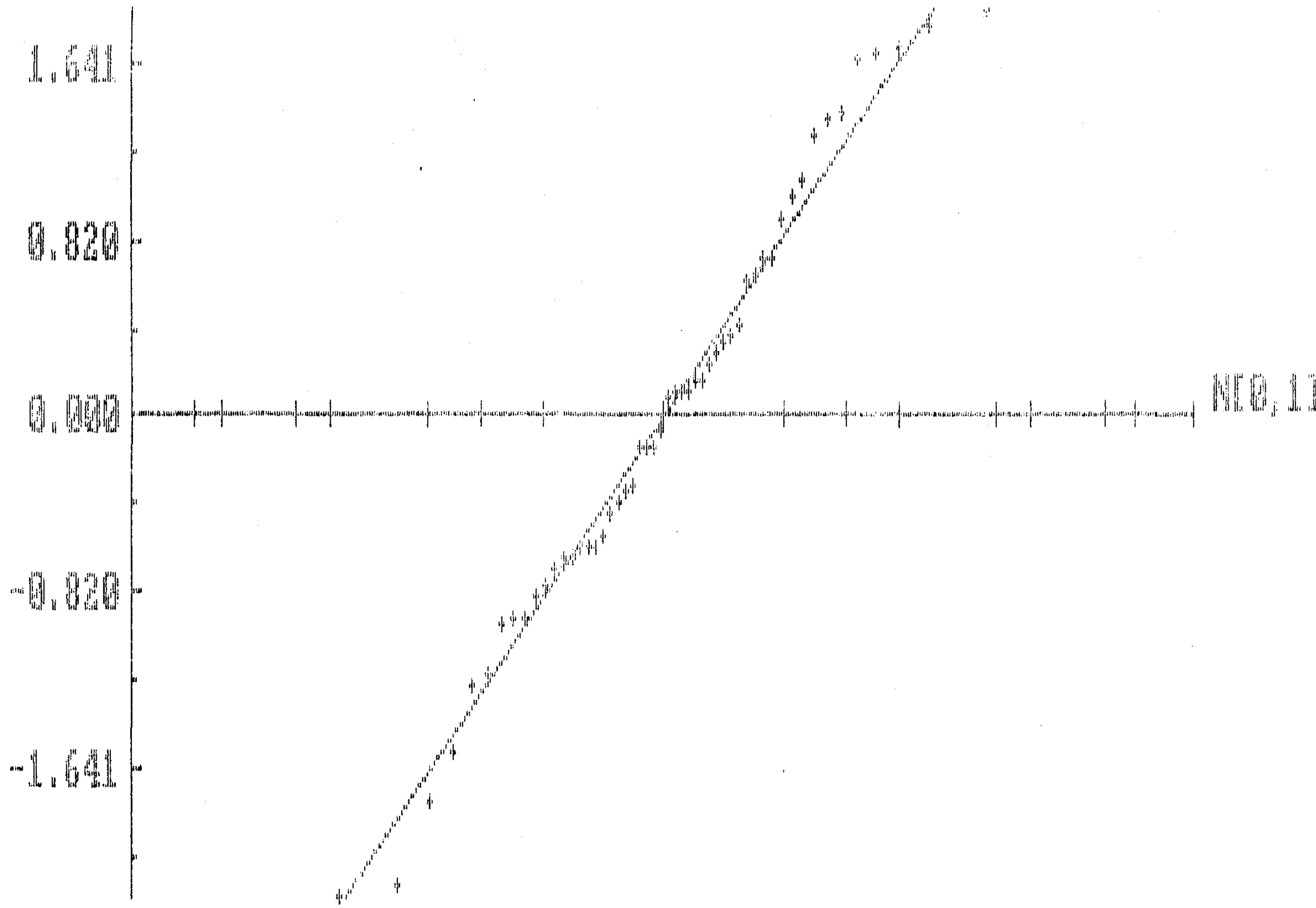
19382.30	714.1928	.6620	.7392
19584.40	718.7883	.7331	.7584
19591.40	718.9472	.7356	.7775
20093.40	730.2826	.9111	.7967
20360.90	736.2786	1.0039	.8158
20642.30	742.5537	1.1010	.8349
21208.20	755.0746	1.2949	.8541
21434.00	760.0347	1.3716	.8732
21542.40	762.4089	1.4084	.8923
22235.90	777.4907	1.6419	.9115
22366.80	780.3170	1.6856	.9306
22387.50	780.7634	1.6925	.9498
22752.00	788.5978	1.8138	.9689
22963.90	793.1301	1.8840	.9880

Test d´Anderson-Darling (A*) = .287

Distribution normale acceptee au niveau de signification 20%

==

BASSIN GENTILLY DEBIT MAXIMUM ANNUEL



Pressez une touche pour continuer...

Echantillons Joints :

Taille des Echantillons : 52

Identificateur		Echantillon I	Echantillon II
1922-	-	.1800	.1127
1923-	-	.8519	.0947
1924-	-	1.9865	.1179
1925-	-	.1003	-.6538
1926-	-	.7810	.1180
1927-	-	-.6374	-.7177
1928-	-	1.7856	.9111
1929-	-	.8343	1.2949
1930-	-	.8078	-.6075
1931-	-	-.7295	-2.1681
1932-	-	-.1537	.4117
1933-	-	.1800	1.1010
1934-	-	.8780	-.1520
1935-	-	-.7295	-1.2500
1936-	-	1.2492	.7331
1937-	-	-.0057	-.7771
1938-	-	.5171	.2357
1939-	-	1.0941	.6326
1940-	-	-.0787	-.0609
1941-	-	.1233	-.9470
1942-	-	.3642	.1715
1943-	-	1.3526	1.8138
1944-	-	-.4618	-.9375
1945-	-	-.3101	.3346
1946-	-	-.4618	-.9494
1947-	-	2.0978	1.3716
1948-	-	-1.0606	-.3414
1949-	-	-1.5592	-.6134
1950-	-	-1.5592	-.3925
1951-	-	-.2307	1.6925
1952-	-	-.5776	.6620
1953-	-	-.1537	.3068
1954-	-	-.0057	.7356
1955-	-	-.0419	1.4084
1956-	-	-2.0627	-.5583
1957-	-	-1.0083	-1.5458
1958-	-	-.4477	-.3223
1959-	-	-1.8228	-.6631
1960-	-	1.1572	1.0039
1961-	-	-1.8927	-1.2044
1962-	-	-.7925	-.4509
1963-	-	-.9911	-.6006

1964-	-	-.9401	-1.7709
1965-	-	-1.7546	-2.2181
1966-	-	-.3235	-.8301
1967-	-	.8078	-.1405
1968-	-	-.5629	-.1394
1969-	-	.0301	.3750
1970-	-	1.3526	.1621
1971-	-	-.4477	1.6419
1972-	-	.4161	1.6856
1973-	-	.4872	1.8840

Coefficient de Correlation (rho) : .582805

Test du Coefficient de Correlation (t) : 5.0714

Hypothese H0: rho = 0, rejetee au niveau de signification 1.%

==

Test de normalite entre les deux echantillons transformes :

i	B(i)	F(i)	G(i)
1	.01	.96	99.04
2	.03	2.88	97.12
3	.14	4.81	95.19
4	.19	6.73	93.27
5	.21	8.65	91.35
6	.26	10.58	89.42
7	.27	12.50	87.50
8	.37	14.42	85.58
9	.40	16.35	83.65
10	.50	18.27	81.73
11	.59	20.19	79.81
12	.63	22.12	77.88
13	.73	24.04	75.96
14	.78	25.96	74.04
15	.78	27.88	72.12
16	.83	29.81	70.19
17	.89	31.73	68.27
18	.91	33.65	66.35
19	.91	35.58	64.42
20	.97	37.50	62.50
21	.98	39.42	60.58
22	1.20	41.35	58.65
23	1.22	43.27	56.73
24	1.24	45.19	54.81
25	1.44	47.12	52.88

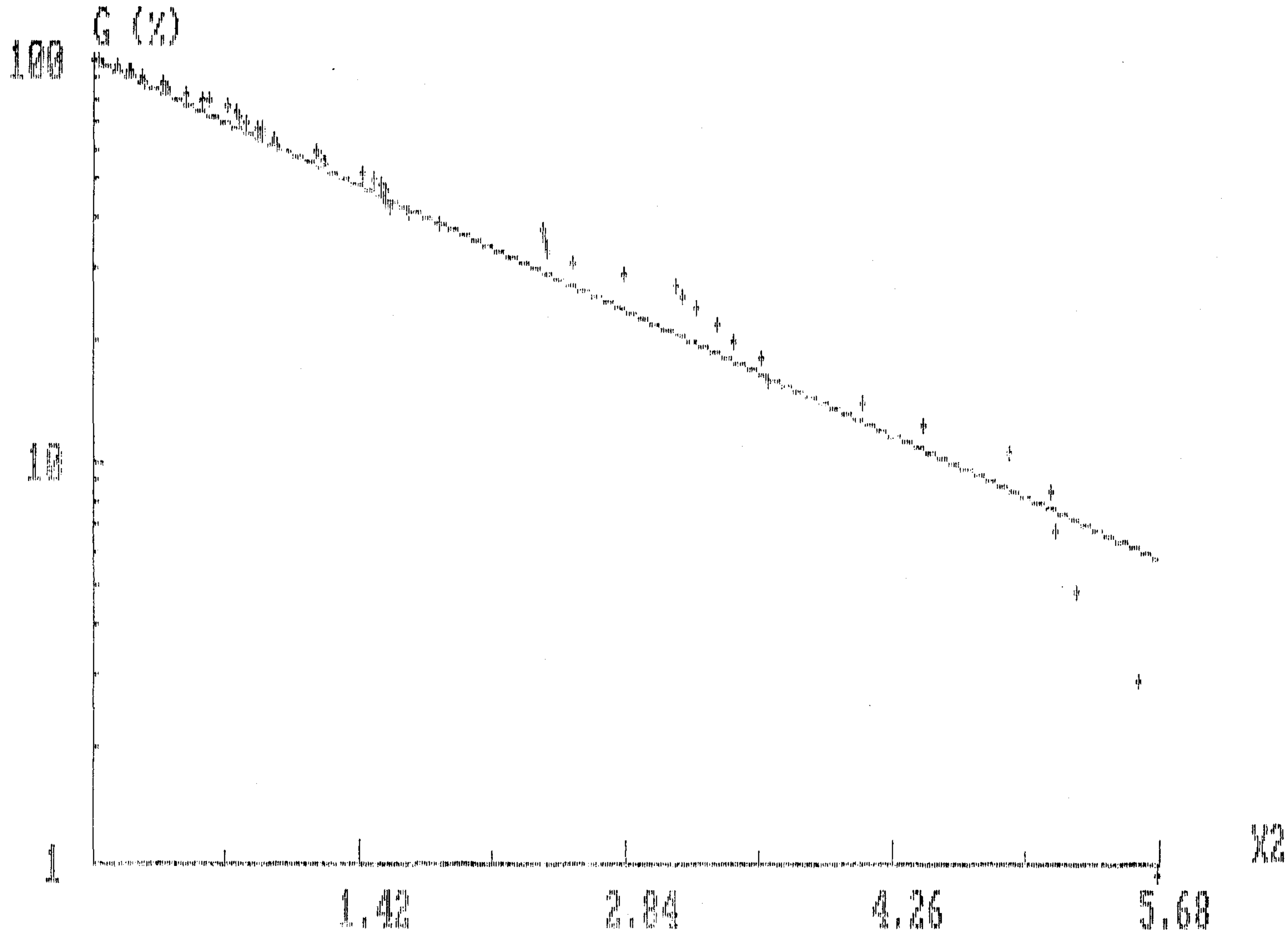
26	1.50	49.04	50.96
27	1.54	50.96	49.04
28	1.56	52.88	47.12
29	1.56	54.81	45.19
30	1.59	56.73	43.27
31	1.69	58.65	41.35
32	1.84	60.58	39.42
33	2.41	62.50	37.50
34	2.41	64.42	35.58
35	2.42	66.35	33.65
36	2.56	68.27	31.73
37	2.83	70.19	29.81
38	3.11	72.12	27.88
39	3.15	74.04	25.96
40	3.21	75.96	24.04
41	3.33	77.88	22.12
42	3.42	79.81	20.19
43	3.56	81.73	18.27
44	3.60	83.65	16.35
45	4.11	85.58	14.42
46	4.43	87.50	12.50
47	4.88	89.42	10.58
48	5.11	91.35	8.65
49	5.13	93.27	6.73
50	5.24	95.19	4.81
51	5.58	97.12	2.88
52	5.68	99.04	.96

Droite theorique du Khi-deux :
----

i	X2(i)
1	99.67
2	98.39
3	93.47
4	90.74
5	90.21
6	87.75
7	87.21
8	83.09

==

Normalite de la Distribution Jointe



Pressez une touche pour continuer...

LOI BIVARIEE

(Base: transformation vers la normalite)

Probabilite conjointe au non-depassement pour
les debits (m3/s) des stations suivantes:

#1 - BASSIN MAURICIE DEBIT MAXIMUM ANNUEL
#2 - BASSIN GENTILLY DEBIT MAXIMUM ANNUEL

DEBIT DE: Station #2	DEBIT DE LA STATION: Station #1						V. MARGINALES: Station #2	
	2517.5	3927.0	5170.0	5704.4	7542.9	9533.6	P(X>XP)	T(ans)
17540.4	.349022	.488703	.499100	.499695	.499991	.500000	.5000	2.
21169.7	.488703	.837855	.891248	.896307	.899826E	.900020	.1000	10.
23481.1	.499100	.891248	.964441	.972761	.979477	.979983	.0200	50.
24318.6	.499695	.896307	.972761	.981784	.989341	.989961	.0100	100.
26724.2	.499991	.899826	.979477	.989341	.998088	.998918	.0010	1000.
28768.8	.500000E	.900020	.979983	.989961	.998918	.999804	.0001	10000.
P(Y>YP)	.5000	.1000	.0200	.0100	.0010	.0001	V. MARGINALES: Station #1	
T (ans)	2.	10.	50.	100.	1000.	10000.		

E = VALEUR IMPRECISE; LA VALEUR CORRIGEE EST: .899991

LOI BIVARIEE

(Base: transformation vers la normalite)

Probabilite conjointe au depassement pour
les debits (m3/s) des stations suivantes:

#1 - BASSIN MAURICIE DEBIT MAXIMUM ANNUEL
#2 - BASSIN GENTILLY DEBIT MAXIMUM ANNUEL

DEBIT DE: Station #2	DEBIT DE LA STATION: Station #1						V. MARGINALES: Station #2	
	2517.5	3927.0	5170.0	5704.4	7542.9	9533.6	P(X>XP)	T(ans)
17540.4	.349022	.088703	.019100	.009695	.000991	.000100	.5000	2.
21169.7	.088703	.037855	.011248	.006307	.000826E	.000120	.1000	10.
23481.1	.019100	.011248	.004441	.002761	.000477	.000083	.0200	50.
24318.6	.009695	.006307	.002761	.001784	.000341	.000061	.0100	100.
26724.2	.000991	.000826	.000477	.000341	.000088	.000018	.0010	1000.
28768.8	.000100E	.000120	.000083	.000061	.000018	.000004	.0001	10000.
P(Y>YP)	.5000	.1000	.0200	.0100	.0010	.0001	V. MARGINALES: Station #1	
T (ans)	2.	10.	50.	100.	1000.	10000.		

E = VALEUR IMPRECISE; LA VALEUR CORRIGEE EST: .000091

APPENDICE E

LISTING DU PROGRAMME SMPLNORM

- Instructions pour la compilation et l'exécution du logiciel "SMPLNORM"

- Listing du programme principal "SMPLNORM" et des programmes annexes:

  SMTEST1, SMTEST2 et SMPLOT

- Exemples de fichiers de données:

  "MAURI.ECH" (période 1922-1985)
  "GENT.ECH" (période 1922-1985)
  "GENT2.ECH" (période 1922-1973)