

Francis Moore

**Application de la scanographie R. X. à l'étude de la
sédimentation-consolidation : modélisation physique et
théorique**

Mémoire présenté
à l'Institut National de la Recherche Scientifique
dans le cadre du programme de maîtrise Maîtrise en sciences de la terre
pour l'obtention du grade de Maître es science appliqué

Eau, Terre et Environnement
INSTITUT NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

5 2005

©Francis Moore, 2005

Résumé

En géologie pétrolière, l'étude de la porosité est un facteur clé dans la caractérisation des réservoirs. Depuis la fin des années 1980, la scanographie est utilisée pour quantifier le volume de pores dans le roc. Par contre, cette technologie n'a jamais été appliquée pour mesurer l'effet du taux de sédimentation sur la porosité de sédiment en cours de consolidation. Ce projet a pour objectif d'améliorer la compréhension du processus de déposition-consolidation des sédiments et de déterminer le faciès densimétrique des couches sédimentaires. Une modélisation physique sous scanographe et une modélisation théorique ont été réalisées.

Le modèle théorique est basé sur le modèle de Gallois pour la consolidation, qui est une adaptation du modèle de Gibson. Le modèle prend en compte la phase de déposition. La perméabilité et la contrainte dans le sédiment sont des fonctions de la porosité. L'équation différentielle non-linéaire résultante est résolue numériquement par la méthode des éléments finis.

La modélisation physique consistait à observer au scanographe la déposition de couches sédimentaires synthétiques. Le scanographe a permis d'observer l'évolution temporelle de la porosité des différentes couches avec une résolution de l'ordre du quart de millimètre. Vingt-huit essais ont été réalisés en variant la granulométrie, le taux de sédimentation et la viscosité du fluide. Du sable d'Ottawa, de l'argile-silteuse et de l'argile ont été utilisés. Des essais mono couches et multicouches ont été effectués. La durée du suivi a été d'un mois. Les essais mono couches permettent d'observer la phase de sédimentation et servent de comparatifs aux essais multicouches. Les essais multicouches sont des empilements de dix couches sédimentaires de granulométries similaires ou différentes avec des périodes de déposition de 2h et 24h.

L'analyse des résultats a permis de déterminer le profil densimétrique des couches sédimentaires. Dans le cas des sables, le tri granulométrique était le mode dominant. Les couches étaient clairement visibles sur les profils densimétriques lorsque la taille minimale des grains

de la couche ne correspondait pas à la taille maximale de la couche supérieure. Dans le cas d'alternance de couches de sable et de silt-argileux, la signature finale correspond à une succession de lits de sable et de silt surmontés par un lit d'argile-silteuse. Les événements qui correspondent à chaque déposition ne sont donc pas enregistrés lorsque la période de déposition est plus courte que la durée de la phase de sédimentation. De plus, l'ordre de déposition n'est plus respecté, confirmant que le principe de superposition n'est applicable que sous conditions pour les petites échelles. Les essais, correspondant à des succession de couches d'argile-silteuses, montrent des couches de silt, correspondant aux premiers dépôts, surmontées par une couche hétérogène de nodules de silt incorporés à une matrice d'argile-silteuse. Dans les deux cas, l'argile-silteuse ralentit la vitesse de consolidation en diminuant considérablement la perméabilité.

Étudiant

Directeur de recherche

Avant propos

"Everything should be made as simple as possible, but not any simpler."

Albert Einstein

Pour la géologie, cette citation d'Einstein est bien difficile à réaliser. Le nombre de degré de liberté des problèmes géologiques est immense et résulte en des systèmes mathématiques complexes. La puissance des ordinateurs actuels permet de résoudre certains de ces systèmes.

Ce mémoire est une tentative de créer un modèle plus précis et plus près de la réalité pour le problème de la déposition et de la consolidation des sols. Le lecteur désireux de comprendre la modélisation théorique doit être familier avec les équations différentielles aux dérivées partielles.

Pour bien comprendre la méthode de résolution numérique employée dans ce mémoire, le lecteur doit avoir des connaissances sur la méthode des éléments finis et en analyse numérique. Le livre de Reddy [Reddy, 1993] est une excellente introduction aux éléments finis et le livre de M. André Fortin [Fortin, 1995] fournit les outils d'analyse numérique nécessaires. Ce mémoire comporte des explications sur la méthode des éléments finis, mais elles sont minimales et trop compactes pour aider à la compréhension du lecteur néophyte.

Tous ceux que les équations différentielles rebutent peuvent directement passer au chapitre 5. Aucune notion préalable n'est requise.

Remerciements

À mon directeur de mémoire, Bernard Long pour m'avoir fait découvrir que la géologie est une science beaucoup plus complexe et passionnante que le simple cassage de caillou. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a portée, pour sa patience et ses conseils et surtout pour ses histoires divertissantes.

À Mathieu Duchesne pour son aide et son support durant toute ma maîtrise. Sans ses conseils en géologie et son aide logistique, ce travail n'aurait pu être mener à terme.

À Jacques Labrie pour sa précieuse amitié et pour ses conseils en programmation et le support en informatique.

À ma soeur Véronique Moore pour m'avoir fournit le silt-argileux qu'elle a ramassé à Portneuf et pour ses conseils sur la conception des expériences.

À André Lévesque et le Musée de géologie René-Bureau de l'Université Laval pour nous avoir gracieusement prêté des échantillons de leur collection.

À André Chagnon pour ses explications sur le comportement des argiles et pour son agréable compagnie dans l'inhospitalier complexe scientifique.

Table des matières

Résumé	iii
Avant propos	v
Remerciements	vii
Table des matières	ix
Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xvii
Liste des Algorithmes	xix
Notation	xxi
1 Introduction	1
1.1 Organisation du mémoire	3
2 Formulation mathématique du phénomène de sédimentation-consolidation	5
2.1 Notions de base de mécanique des sols	6
2.1.1 Notation	6
2.1.2 Volume et masse totale	7
2.1.3 La porosité	7
2.1.4 L'indice des vides	9
2.1.5 Connectivité des pores	9
2.1.6 Fraction volumétrique	9
2.1.7 Degré de saturation	10
2.1.8 Suppression intersticielle	10
2.1.9 Densité	11
2.2 Loi d'écoulement	11

2.2.1	La loi de Darcy	13
2.2.2	La loi de Darcy-Gersevanov	13
2.2.3	La perméabilité et la conductivité hydraulique	14
2.2.3.1	Équation de Kozeny-Carman	14
2.2.3.2	Loi de puissance	16
2.3	Contrainte dans le sol	17
2.3.1	Équations pour la contrainte effective	17
2.4	Consolidation	18
2.5	Théorie de Terzaghi	19
2.5.1	Hypothèses de départ	20
2.5.2	Équation de Terzaghi	20
2.5.3	Solution analytique	21
2.6	Théorie de la consolidation de Gibson	21
2.6.1	Équation de Gibson	22
2.6.2	Linéarisation de l'équation	23
2.7	Équation de consolidation en 3D	23
2.7.1	Conservation de la masse	24
2.7.2	Conservation des masses solide et liquide	25
2.7.3	Équations d'équilibre des forces	25
2.7.4	Le modèle 3D	27
2.7.5	Conditions aux limites et condition initiale	29
3	Rappel de la méthode des éléments finis	31
3.1	Discrétisation du domaine	32
3.2	Méthode des résidus pondérés	33
3.3	Les éléments finis	33
3.4	Système de coordonnées naturelle	35
3.5	Fonctions d'interpolation	35
3.6	Résolution numérique des équations différentielles	37
3.6.1	Résolution des systèmes linéaires	37
3.6.2	Résolution des systèmes non-linéaires	38
3.6.2.1	Méthode de Pickard	38
3.6.2.2	Méthode de Newton-Raphson	38
3.6.3	Résolution des systèmes non-stationnaires	40
3.6.4	Résolution des systèmes non-stationnaires et non-linéaires	42
4	Simulation	45

5	Principe de la scanographie	47
5.1	Le scanographe du LMSQ	48
5.2	Atténuation des rayons X et gammas	49
5.3	Le coefficient d'absorption	50
5.4	Interactions des rayons X avec la matière	51
5.4.1	Effet photoélectrique	51
5.4.2	L'effet Compton	53
5.4.3	Production de paire	55
5.4.4	Importance relative des diverses interactions	56
5.4.5	Atténuation pour les composés	57
5.4.6	Le numéro atomique effectif	58
5.5	Analyse de sédiments sous scanographe	58
6	Protocoles expérimentaux	61
6.1	Les matériaux constituant les sédiments	61
6.2	Relation entre les HU et la densité des grains d'un milieu granulaire	63
6.3	Sédimentation et consolidation sous le tomodynamomètre	65
6.3.1	Préparations des échantillons monocouches	66
6.3.2	Préparations des échantillons multicouches	66
6.3.3	Sédimentation dans l'huile de canola	67
6.4	Liste des essais	68
6.4.1	Traitement des images DICOM	70
6.4.1.1	Vitesse de déposition	70
7	Résultats expérimentaux	71
7.1	Monocouches de sable	71
7.1.1	Monocouches de kaolinite	75
7.1.2	Monocouches de silt-argileux	79
7.1.3	Essais multicouches de silt-argileux	81
7.1.4	Essais multicouches de silt-argileux et de sable	83
7.1.5	Essais multicouches de sable de même granulométrie	85
7.1.6	Essais multicouches de sable de granulométrie différente	86
8	Discussion	93
9	Conclusion	99
	Bibliographie	101

A	Fonctionnement d'un scanographe	105
A.1	Introduction	105
A.2	Production d'un faisceau de rayons X	106
A.3	Projection et transformée de Radon continue	108
A.4	Transformée de Radon discrète	111
A.4.1	Algorithme de projection arrière (<i>back projection</i>)	111
A.4.2	Reconstruction directe	112
A.4.3	Projection arrière filtrée	112
A.5	Les artefacts	114
B	Résolution des équations par la méthode des éléments finis	117
B.1	Dérivation des fonctions d'approximations	117
B.2	Matrice K et M	118
B.3	Résolution par Newton-Raphson	119
B.3.1	Matrice tangente	119
B.3.2	Dérivée des fonctions α , β et γ	120
B.4	Dérivées des fonctions de perméabilité et de contrainte effective	121
B.5	Conductivité hydraulique	121
B.6	Contrainte effective	122
C	Groupes d'analyses expérimentaux	125
D	Mesure du coefficient d'absorption pour divers minéraux de caractéristiques connues	127
D.1	Calculs	129
D.1.1	Traitement des images	129
D.1.2	Calcul du coefficient d'absorption théorique	131
D.2	Résultats	131
Index		138

Table des figures

1.1	Diagramme du projet.	3
2.1	Structure et composition du sol.	6
2.2	Empilement parfait de sphère. Les différentes structures sont : (a) : cubique face centrée, (b) : cubique centrée, (c) : hexagonal compact.	8
2.3	Écoulement dans un sol. Le fluide circule dans le sol à travers les interstices et entre les grains qui sont connectés.	12
2.4	Graphique de la conductivité hydraulique en fonction de l'indice des vides selon l'équation de Kozeny-Carman pour différentes granulométries dans de l'huile de canola ($S = 1$, $\gamma_f = 910$, $\mu = 0,70$ et $C_S = 0,2$).	16
2.5	Graphique de la contrainte effective en fonction de l'indice des vides selon l'équation de Gibson ($e_0 = 20$ et $e_\infty = 0,49$) et de Gallois ($b = 0,49$ et $c = 2$).	17
2.6	Représentation mécanique du problème de consolidation.	19
2.7	Système de coordonnées lagrangien utilisé dans le modèle de Gibson.	21
2.8	Système de coordonnées utilisé.	26
2.9	(a) : Condition initiale (b) : Conditions aux limites.	30
3.1	Exemple de discrétisation du domaine en éléments carrés et triangulaires.	31
3.2	Discrétisation d'un domaine unidimensionnel. (a) Représentation du maillage du domaine ; x = coordonnée globale, \bar{x} = coordonnée locale. (b) Un élément à deux noeuds avec la définition des variables primaires u et des variables secondaires Q	34
3.3	Organigramme de résolution pour un problème non-linéaire et non-stationnaire.	44
5.1	Le scanographe du LMSQ.	48
5.2	Principe de l'effet photoélectrique. (a) : Un photon incident éjecte un électron (photoélectron) (b). (c) : L'électron se désexcite. (d) : Réémission d'un photon ou de plusieurs photons de fréquences plus faible.	52

5.3	Coefficient d'absorption massique du plomb pour les effets photoélectrique, Rayleigh et Compton en fonction de l'énergie du faisceau de photons incidents [Hubbell and Seltzer, 2001].	54
5.4	Principe de l'effet Compton. Un photon incident frappe un électron faiblement lié. L'électron est éjecté et diffuse un photon de plus faible énergie à un angle θ afin de conserver la quantité de mouvement.	55
5.5	Processus de production de paire. Un photon incident interagit avec un noyau et crée une paire électron-positron.	55
5.6	Plage de dominance pour les effets Compton et photoélectrique.	57
6.1	Courbes granulométriques pour : (a) : la kaolinite, (b) : le silt-argileux et (c) : le sable d'Ottawa.	62
6.2	Des colonnes de sédimentation en ABS et le matériel pour générer les dépôts.	65
7.1	Essais de déposition monocouches de sable d'Ottawa dans l'huile. Le graphique (a) présentent les courbes de porosité isochrones en fonction de la hauteur pour une couche de granulométrie de 63 à 90 μm . En (b) : vitesse de déposition en fonction du temps pour la couche de 63 à 90 μm	72
7.2	Essais de déposition monocouches de sable d'Ottawa dans l'huile. Les graphiques présentent les courbes de porosité isochrones en fonction de la hauteur pour une couche de granulométrie : (a) : 90 à 125 μm (b) : 125 à 250 μm	73
7.3	Comparaison entre la consolidation dans (a) : l'huile et (b) : l'eau.	76
7.4	Essais de déposition monocouches de kaolinite. En (a) : les courbes isochrones de variation du coefficient d'absorption en fonction de la hauteur et en (b) : la vitesse de déposition en fonction du temps.	77
7.5	Essais de déposition monocouches de kaolinite. En (a) : les courbes isochrones de variation du coefficient d'absorption en fonction de la hauteur et en (b) : la vitesse de déposition en fonction du temps.	78
7.6	Formation du bulbe lors de l'essai de déposition avec la kaolinite. En (a) : les grains en surface chutent plus rapidement en raison de la facilité à expulser le fluide et rattrapent les grains des couches inférieures. La concentration des grains augmentent et il y a formation d'un bulbe. En (b) : le bulbe formé chute et agglomère les particules sous-jacentes. Le bulbe réduit l'expulsion du fluide et la consolidation du système entier.	79

7.7	Essais de déposition monocouches avec de l'argile bleue. Les graphiques (a) et (b) présentent les courbes isochrones de la variation du coefficient d'absorption en fonction de la hauteur.	80
7.8	Déposition et consolidation de dix couches de silt-argileux. Les coupes (a) à (j) ont été prises juste avant le dépôt de la couche suivante. Le temps est (a) : 24 h (b) : 48 h (c) : 72 h (d) : 96 h (e) : 168 h (f) : 192 h (g) : 216 h (h) : 240 h (i) 264 h (j) 336 h (k) 360 h.	82
7.9	Déposition en alternance de dix couches d'argile et de sable. Le temps est : (a) : 48 h (b) : 335 h (c) : 329 h (d) : 383 h (e) : 407 h (f) : 479 h (g) : 503 h (h) : 527 h (i) : 551 h (j) : 575 h.	83
7.10	Empilement alterné de couche de silt-argileux et de sable à une fréquence de 2 h après 671 h de déposition.	85
7.11	Essais de déposition multicouches de sable de même granulométrie. Courbe isochrone de porosité en fonction de l'épaisseur pour du sable de (a) : 63 à 125 μm 2 h (b) : 63-125 μm 24 h.	87
7.12	Essais de déposition multicouches de sable de même granulométrie. Courbe isochrone de porosité en fonction de l'épaisseur pour du sable de (a) : 90-125 μm 2 h (b) : 90-125 μm 24 h.	88
7.13	Essais de déposition multicouches de sable de même granulométrie. Courbe isochrone de porosité en fonction de l'épaisseur pour du sable de (a) : 125-250 μm 2 h (b) : 125-250 μm 24 h.	89
7.14	Essais de déposition multicouches de granulométrie différente. Alternances de couches de : (a) : 63-125 et 125-250 μm 2 h (b) : 63-125 et 125-250 μm 24 h.	90
7.15	Essais de déposition multicouches de granulométrie différente. Alternances de couches de : (a) : 90-125 et 125-250 μm 2 h (b) : 90-125 et 125-250 μm 24 h.	91
7.16	Essais de déposition multicouches de granulométrie différente. (a) : 63-125, 90-125 et 125-250 μm 2 h (b) : 63-125, 90-125 et 125-250 μm 24 h.	92
8.1	Explication du profil de porosité pour les couches de granulométries similaires et différentes.	98
A.1	Obtention d'une projection d'un objet en l'éclairant avec des rayons X.	106
A.2	Le fonctionnement d'un tube à rayons X (tiré de [Wolbarst, 1993]).	107
A.3	Spectre du tungstène pour une différence de potentiel de 140 kVp.	108
A.4	Sinogramme résultant de la transformée de Radon d'une carotte de sédiment.	110

A.5	Durcissement du faisceau de photon. (a) Spectre initial du tungstène. (b) Le spectre est déformé après le passage du faisceau dans de l'almandin. Les basses énergies sont préférentiellement absorbées, laissant un faisceau dont l'énergie moyenne est supérieure à celle du spectre initial.	115
D.1	Coupe d'un minéral de quartz : (a) : avant l'application du filtre (b) : après l'application du filtre. (c) : Histogramme de la coupe.	130
D.2	Coefficient d'absorption en fonction du numéro atomique effectif pour des différences de potentiel du tube de 80, 120 et 140 kVp.	134
D.3	Coefficient d'absorption massique théorique en fonction du numéro atomique effectif pour diverses différences de potentiel du tube.	135
D.4	Comparaison entre le coefficient d'absorption massique expérimental et théorique.	136
D.5	Énergie moyenne du faisceau en fonction du numéro atomique effectif pour une différence de potentiel de 80, 120 et 140 kVp.	137

Liste des tableaux

6.1	Densité, absorption et relation densité-HU pour le sable d'Ottawa et le silt-argileux.	64
6.2	Protocole utilisé dans les protocoles de la série <i>argile</i> et <i>argile-zoom</i>	67
6.3	Liste des essais.	69
C.1	Le groupe de colonnes sédimentaires FMSerie.	125
C.2	Le groupe de colonnes sédimentaires FM2h.	126
C.3	Le groupe de colonnes sédimentaires FM24h.	126
C.4	Le groupe de colonnes sédimentaires SOE-300gpl.	126
D.1	Liste des caractéristiques des minéraux utilisés, composition, densité et numéro atomique moyen.	128
D.2	Paramètres du scanographe lors de l'analyse des minéraux.	129
D.3	Coefficient d'absorption linéaire moyen des minéraux pour des différences de potentiels à la source de 140, 120 et 80 keV.	133

Liste des Algorithmes

1	Algorithme de Newton-Raphson.	40
2	La fonction CalculeMu.m.	132

Notation

Notation pour les indices	
Symbole	Description
C	Effet Compton
PE	Effet photoélectrique
$Paire$	Création de paires électron-positron
t	Composante totale
s	Phase solide
l	Phase liquide
g	Phase gazeuse
v	Vide intergranulaire
n	Solution au temps présent
$n + 1$	Solution au temps futur
i	i ième itération par la méthode de Newton-Raphson

Mécanique des sols		
Symbole	Unité	Description
a_v	m^2/N	Coefficient de compressibilité
\vec{a}	m/s^2	Vecteur d'accélération
$\frac{D(\)}{Dt}$	\emptyset	Dérivée matérielle
C_s	\emptyset	Facteur de forme
D_s	m	Facteur de forme
c_v	m^2/s	Coefficient de consolidation
e	\emptyset	Indice des vides
e_{00}	\emptyset	Indice des vides initial
e_{∞}	\emptyset	Indice des vides minimal
g	m/s^2	Accélération gravitationnelle

Mécanique des sols		
Symbole	Unité	Description
h	m	Hauteur de la colonne d'eau (pression)
k	m/s	Conductivité hydraulique
K	m^2	Perméabilité intrinsèque
K_r	m^2	Perméabilité réduite
m	kg	Masse
n	\emptyset	Porosité
P	Pa	Pression
P_0	Pa	Pression hydrostatique
Q	kg/s	Débit massique
R_H	m	Rayon hydraulique
S	\emptyset	Degré de saturation en eau
V	m^3	Volume
\vec{v}	m/s	Vecteur vitesse
\vec{v}_m	m/s	Vitesse de filtration
u	Pa	Surpression interstitielle
γ	N/m^3	Poids spécifique
ϵ	\emptyset	Coordonnée lagrangienne
μ	$N \cdot s/m^2$	Viscosité dynamique
σ'	Pa	Contrainte effective
σ	Pa	Contrainte totale
ρ	kg/m^3	Masse volumique
ϕ	\emptyset	Fraction volumétrique

Méthode des éléments finis		
Symbole	Unité	Description
\vec{F}	\emptyset	Vecteur des forces
$\vec{F}_{n,n+1}$	\emptyset	Force globale au temps n et $n + 1$
h_e	m	Longueur de l'élément
\mathcal{J}_e	\emptyset	Jacobien
$[K]$	\emptyset	Matrice des coefficients
$[\hat{K}]_{n+1}$	\emptyset	Matrice des coefficients au temps $n + 1$
$[M]$	\emptyset	Matrice de masse

Méthode des éléments finis		
Symbole	Unité	Description
$[\hat{M}]_n$	\emptyset	Matrice des coefficients au temps n
R	\emptyset	Résidu
\vec{u}_{n+1}	\emptyset	Vecteur solution présent
\vec{u}_n	\emptyset	Vecteur solution passé
t_{n+1}	s	Temps à l'itération $n+1$
t_n	s	Temps à l'itération n
α	\emptyset	Paramètre contrôlant le schéma d'intégration dans le temps
α	m/s	Coefficients de l'équation non-linéaire
β	m^2/s	Coefficients de l'équation de Gibson non-linéaire
γ	m^2/s	Coefficients de l'équation de Gibson non-linéaire
Δt_{n+1}		Pas d'incrémentation
Δt_{cr}	s	Pas d'incrémentation critique
λ	\emptyset	Valeur propre
ψ	\emptyset	Fonction forme

Scanographie		
Symbole	Unité	Description
A	\emptyset	Masse atomique relative
c	m/s	Vitesse de la lumière
E	J	Énergie
e	C	Charge de l'électron
\mathcal{F}	\emptyset	Transformée de Fourier
\mathcal{F}^{-1}	\emptyset	Transformée de Fourier inverse
h	$J s$	Constante de Plank
HU	\emptyset	Unité de Hounsfield
I	W/m^2	Intensité
k	m^{-1}	Fréquence spatiale
M	g/mol	Masse molaire
N_i	<i>photons</i>	Nombre de photon initial
N_d	<i>photons</i>	Nombre de photon détecté
p_θ	\emptyset	Projection
Q	\emptyset	Quantité stochiométrique

Scanographie		
Symbole	Unité	Description
r_0^2	m	Rayon classique de l'électron
R_T	W/m^2	Radiance émise
u	g	Unité de masse atomique relative
w	\emptyset	Fraction massique
w_0	eV	Travail d'extraction
Z	\emptyset	Numéro atomique
Z_c	\emptyset	Numéro atomique effectif
ϵ_0	F/m	Permittivité électrique du vide
λ	m	Longueur d'onde
Λ	cm	Épaisseur d'atténuation
μ	cm^{-1}	Coefficient d'absorption
(μ/ρ)	cm^2/g	Coefficient d'absorption massique
σ	m^2	Section efficace
σ_{SB}	$W K^4/m^2$	Constante de Stephan-Boltzmann
Ω	<i>strad</i>	Angle solide

Chapitre 1

Introduction

Les roches sédimentaires représentent la mémoire géologique des conditions de formation des sédiments. Elles enregistrent les événements du passé dans leurs stratifications. Elles enregistrent : les variations du niveau marin, les variations d'apport sédimentaire, l'évolution des espèces, etc. Les couches sédimentaires sont un livre sur le passé de la Terre. Pour le lire, il faut être capable d'en comprendre les symboles et leurs significations. C'est l'objectif de la stratigraphie. Cette science est basée sur l'observation visuelle de l'empilement des strates, que ce soit à partir de carottages ou d'observations *in-situ* et d'analyses physico-chimiques. Ces méthodes ont été éprouvées lors de nombreuses études. Leur précision est cependant limitée. L'observation visuelle est souvent insuffisante pour discerner des détails très fins et se limite à la surface de l'échantillon. La structure interne de la carotte de sédiment reste cachée. L'hypothèse d'une couche sédimentaire de composition et de granulométrie homogène est alors appliquée. Ceci peut entraîner de graves erreurs, notamment en milieu bioturbé et dans les turbidites. Pour obtenir la composition, la densité et la granulométrie, il faut détruire la carotte, ce qui est long et coûteux. Les valeurs obtenues sont des moyennes sur les couches. Avec ces techniques, il n'est possible d'obtenir que des profils avec une résolution de l'ordre du centimètre.

La scanographie est une nouvelle technique d'analyse prometteuse dans le domaine géologique et industriel. La scanographie consiste à exposer un corps à des rayons X et à mesurer l'absorption des radiations sous des milliers d'angles. Un ordinateur permet de reconstruire la coupe interne du corps à partir de ces projections [Kak and Slaney, 1999, Knestel, 1990, Wolbarst, 1993, Suentens, 2002]. Cette image peut avoir une résolution du demi-millimètre.

Une reconstruction tridimensionnelle du corps est obtenue par l'interpolation de plusieurs coupes successives. La durée du processus d'acquisition et de reconstruction de l'image est de quelques secondes pour une coupe et de l'ordre de la minute pour une spirale d'un mètre. Cette rapidité permet d'étudier des phénomènes dynamiques comme la sédimentation, la consolidation, la déformation d'un corps, etc. L'excellente résolution spatiale de l'appareil permet de voir des détails très fins dans les roches et les carottes sédimentaires et ouvrent la voie à de nouvelles études. L'étude sous scanographe des stratifications fines en est un exemple.

L'analyse stratigraphique sous scanographe (appelé aussi tomodynamomètre) a pour objectif de reconnaître des stratifications fines déposées à des intervalles de quelques jours ou même en deçà. Pour identifier ces strates, il faut connaître le profil densimétrique. Ce profil dépend de deux processus fondamentaux : la sédimentation et la consolidation. La sédimentation contrôle l'agencement spatial des grains ou des groupements de grains (granoclassement, microfabric) et conditionne l'évolution future du sédiment (perméabilité, résistance à la compression). La consolidation contrôle l'évolution de la porosité dans le temps. Ces deux processus sont étudiés de manière théorique et expérimentale. La figure 1.1 présente un diagramme résumant l'ensemble du projet.

Le modèle théorique s'appuie sur les modèles unidimensionnels de Gibson [Gibson et al., 1967] et Gallois [Gallois et al., 1999] pour simuler la consolidation. La sédimentation et la consolidation sont unis en un seul et même processus par une équation différentielle non-linéaire en coordonnées eulériennes. La perméabilité et la contrainte effective sont considérées comme des fonctions de l'indice des vides. Cette approche permet de simuler la consolidation d'un sédiment en cours d'accrétion, ce que ne peuvent faire les modèles classiques. Deux méthodes de résolutions sont disponibles pour résoudre le modèle. La méthode des éléments finis (MEF) et la méthode des différences finies (MDF). Les deux méthodes sont similaires du point de vue de la stabilité et de la précision. La MDF est beaucoup plus simple à implémenter pour des problèmes à géométrie simple. Il est possible de l'utiliser pour des problèmes à géométrie complexe, mais la MEF est alors plus avantageuse. La MDF aurait été plus avantageuse pour ce travail. La MEF a été retenue en raison de la possibilités d'étendre la résolution à des problèmes de dimensions supérieures avec des géométries complexes. Une extension de cette théorie, notamment en deux dimensions, permettrait de simuler l'érosion d'un dépôt, la formation des rides de sables, etc.

La partie expérimentale consiste à créer des stratifications synthétiques dans des colonnes

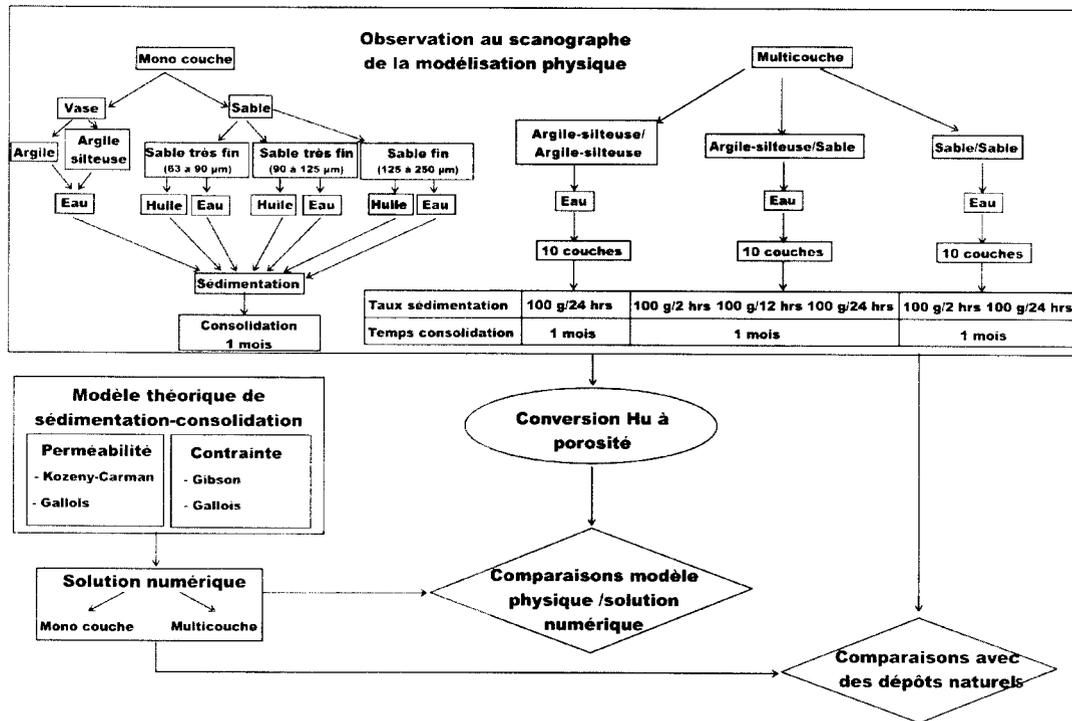


FIG. 1.1 – Diagramme du projet.

de sédimentation en milieu contrôlé. Les colonnes de sédimentation sont analysées à des intervalles de temps déterminés. Du sable d'Ottawa et de l'argile sont utilisés. Leurs densités réelles ont été corrélées avec les valeurs d'absorption du scanographe, ce qui permet de calculer la porosité en tout point du dépôt. Des dépôts monocouches et multicouches sont simulés. Les dépôts monocouches ont été créés dans l'eau et dans l'huile et ont permis de mesurer la phase de sédimentation et de consolidation. L'utilisation de l'huile ralentit la chute et permet de capter la phase de sédimentation. Les essais multicouches ont pour objectif de mesurer l'effet des couches subséquentes sur la consolidation des couches précédentes. L'effet de la granulométrie et du temps de déposition sur le profil de porosité ont été mesurés.

1.1 Organisation du mémoire

Il y a trois aspects majeurs dans ce mémoire : la modélisation théorique de la sédimentation-consolidation, la méthode des éléments finis et la modélisation physique sous le scanographe. Le premier chapitre présente d'abord les notions de base de la mécanique des sols :

l'indice des vides, la densité d'un milieu granulaire, la perméabilité, la contrainte effective etc. Ces deux paramètres fonctionnels sont d'une importance centrale dans les processus de sédimentation et de consolidation. Puis, les modèles de consolidation de Terzaghi et de Gibson sont présentés. Finalement, le modèle unificateur de sédimentation-consolidation est construit en trois dimensions à partir du modèle de Gallois [Gallois et al., 1999]. Ce modèle est réduit à une dimension spatiale à fin de permettre sa résolution.

La seconde partie présente rapidement la méthode des éléments finis. La méthode des éléments finis consiste à discrétiser le domaine d'intégration en éléments de taille finie. Cette approximation transforme l'équation différentielle en un système d'équation matriciel, résolu numériquement par un ordinateur. Tous les outils mathématiques et algorithmiques nécessaires à cette méthode sont présentés dans ce chapitre. Les fonctions formes, la méthode de Newton-Raphson, l'intégration numérique de Gauss-Legendre sont présentées. Le troisième chapitre résout le modèle non-linéaire de sédimentation-consolidation.

Le chapitre 5 présente brièvement le scanographe du Laboratoire Multidisciplinaire de Scanographie du Québec (LMSQ) et traite de l'aspect théorique de la tomographie. L'emphase est mise sur la théorie de l'atténuation des rayons X. Cette théorie est nécessaire pour bien interpréter les mesures faites avec le tomographe. L'appareil mesure l'absorption des rayons X, et non la densité. La relation entre ces deux valeurs est complexe et nécessite la connaissance de la composition des matériaux.

Le chapitre 6 contient les protocoles expérimentaux. Il est séparé en deux grandes sections. Les protocoles pour la calibration du scanner avec des minéraux et les protocoles pour les essais de sédimentation-consolidation. Dans le chapitre suivant les résultats sont présentés pour être finalement discutés au chapitre 8.

Chapitre 2

Formulation mathématique du phénomène de sédimentation-consolidation

L'objectif de ce chapitre est de construire un modèle pour prédire la sédimentation et la consolidation des sédiments. Pour y arriver, des rudiments de la mécanique des sols sont utilisés. Deux approches sont utilisées pour résoudre les problèmes de mécanique des sols : l'approche par milieu continu et l'approche par milieu discret. L'approche continue sous-entend l'hypothèse suivante : le sol est un continuum et peut être modélisé par des équations différentielles. Cette méthode est la plus populaire et est très prolifique. Les modélisations de ce type demandent un certain degré d'abstraction. Par exemple, la perméabilité n'est pas une propriété physique du sol, comme la densité ou la composition minérale et granulométrique. Elle représente un coefficient de diffusion créé pour rendre compte de l'écoulement de l'eau à travers les grains. Cette loi statistique fonctionne pour un milieu constitué d'un grand nombre de grains. L'approche discrète consiste à modéliser la micro-mécanique entre les grains ou groupe de grains. Les méthodes des éléments discrets et de Monte-Carlo sont des exemples d'approche discrète. La modélisation physique est plus simple et plus près de la réalité. Par contre, pour obtenir une solution, l'interaction de millions de grains est nécessaire. La simulation calcule les forces entre chaque grain en contact. Cette méthode demande une grande puissance de calcul. Un exemple de cette approche est le programme *Particle Flow Code* de la société Itasca [Cundall and Strack, 1979, Itasca Consulting Group, 1999].

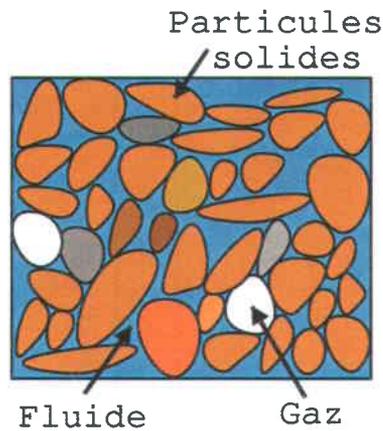


FIG. 2.1 – Structure et composition du sol.

Dans ce mémoire, l'approche par milieu continu est utilisée. Les lois de perméabilités et de contraintes remplacent les forces de contacts et les écoulements. Ce chapitre présente d'abord les concepts de base de la mécanique des sols, puis les lois d'écoulements. Les modèles antérieurs de consolidation sont présentés et, finalement, le modèle de sédimentation-consolidation en trois dimensions est dérivé.

2.1 Notions de base de mécanique des sols

Le sol est un milieu granulaire. Il est constitué de particules solides baignant dans un fluide et/ou un gaz (figure 2.1). La proportion et la composition de chacune des phases influencent le comportement mécanique en modifiant la nature et le nombre des contacts entre les grains. Plus le nombre de contacts entre les grains est élevé, plus le sol est en mesure de résister à une contrainte mécanique forte. Le comportement mécanique du sol dépend aussi de la nature des contacts entre les grains (simple contact, contact avec cimentation, etc).

2.1.1 Notation

Le sol est constitué de trois phases : solide, liquide et gazeuse. La dénomination de ces phases se fera à l'aide d'indices. Les indices t , s , f , g , v et p seront employés. L'indice t repré-

sente la somme de toutes les phases. L'indice s est la phase solide, f la phase liquide (le f signifie fluide), g la phase gazeuse et v le vide intergranulaire. L'indice p est employé dans la forme compacte des équations. Dans ce cas, l'indice p prend les valeurs de 1 à 3, représentant les phases solide, liquide et gazeuse.

2.1.2 Volume et masse totale

Le volume total V_t d'un sol est la somme des volumes de chaque phase :

$$V_t = \sum_p V_p = V_s + V_f + V_g. \quad (2.1)$$

La relation pour la masse totale est similaire à celle pour le volume. Elle correspond simplement à la somme des masses de chacune des phases :

$$m_t = \sum_p m_p = m_s + m_f + m_g. \quad (2.2)$$

Le volume de vide intergranulaire est l'espace entre les grains. Il correspond au volume total moins le volume de solide :

$$V_v = V_t - V_s = V_f + V_g. \quad (2.3)$$

Il correspond donc au volume de liquide et de gaz. En l'absence de gaz, le volume intergranulaire est le volume de liquide.

2.1.3 La porosité

La porosité du sol est la fraction du volume de sol qui n'est pas occupée par des particules solides. La porosité est un paramètre clé dans l'étude des sols. Elle influence l'écoulement des fluides dans le sols et la contrainte effective entre les grains. L'eau s'écoulera facilement dans un sable, dont la porosité est grande et difficilement ou pas du tout dans une argile.

La porosité n est défini par le rapport du volume de vide intergranulaire V_v sur le volume total V_t :

$$n = \frac{V_v}{V_t}. \quad (2.4)$$

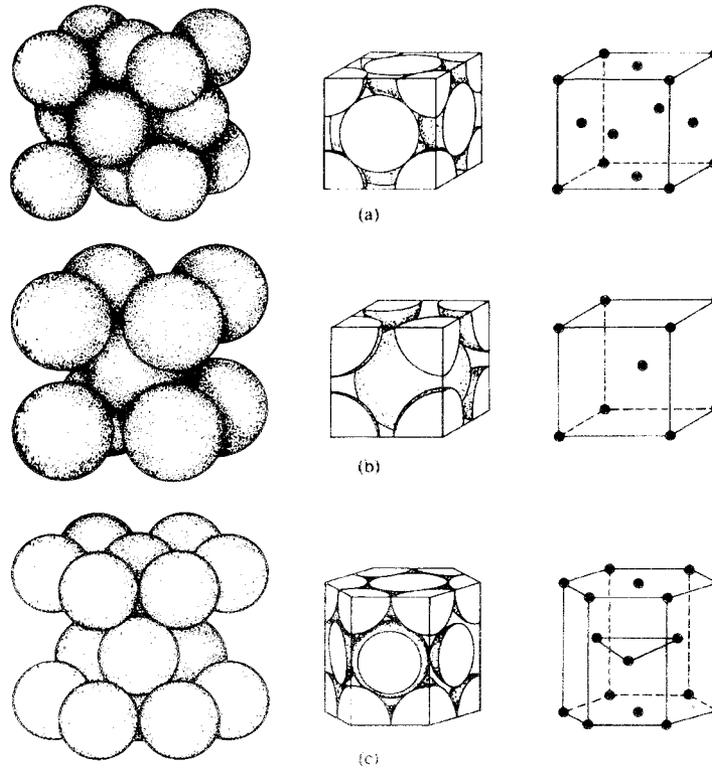


FIG. 2.2 – Empilement parfait de sphère. Les différentes structures sont : (a) : cubique face centrée, (b) : cubique centrée, (c) : hexagonal compact.

Chaque type de sol possède une porosité minimale. La porosité minimale ne se calcule que pour des géométries de grains très simples, comme des sphères ou des cubes. Pour des sphères, la porosité minimale est obtenue en créant un empilement formant une structure cubique à face centrée ou une structure hexagonale [Dorlot et al., 1986] (figure 2.2a et 2.2c). La porosité est alors de 26% dans les deux cas. Pour un empilement à structure cubique centrée (figure 2.2b), où un grain est inséré entre quatre autres, la porosité est de 32%. Dans le cas d'un empilement cubique de sphères, la porosité monte à 47,6%. Un sable est habituellement constitué de quartz ou de silicates. Les grains ont une forme conchoïdale qui sont considérés approximativement comme des sphères. La porosité minimale pour des grains de sable de même dimension varie donc entre 26% et 50%. Les argiles sont plus complexe. Leurs formes sont extrêmement diverses et la porosité maximale variera d'une espèce à l'autre. Les argiles dont la structure cristalline est en feuillet ont une porosité presque nulle lorsqu'elles sont complètement consolidées.

2.1.4 L'indice des vides

En géotechnique, la porosité est remplacée par l'indice des vides e . Il se définit par le rapport du volume de vide V_v sur le volume de solide V_s :

$$e = \frac{V_v}{V_s}. \quad (2.5)$$

L'indice des vides est égal à zéro pour un solide cristallisé où il n'y a pas de vide intergranulaire. Il tend vers l'infini avec l'augmentation du volume de vide. La porosité et l'indice des vides sont reliés comme suit :

$$n = \frac{e}{1 + e} \Leftrightarrow e = \frac{n}{1 - n}. \quad (2.6)$$

2.1.5 Connectivité des pores

La structure spatiale des pores affecte l'écoulement du fluide. Une roche poreuse n'est pas perméable si des canaux ne traversent pas le volume de part en part. Donc, les pores doivent être connectés de telles sortes que des conduits soient présent permettant le passage du fluide. Le nombre de ces conduits et leur tortuosité déterminent la résistance aux passages du fluide.

2.1.6 Fraction volumétrique

La fraction volumétrique ϕ est le ratio du volume de la phase sur le volume total :

$$\phi_p = \frac{V_p}{V_t}. \quad (2.7)$$

La somme de toutes les fractions volumétriques égale 1 :

$$\sum_p \phi_p = \phi_s + \phi_f + \phi_g = 1. \quad (2.8)$$

Dans certains ouvrages, le terme porosité est utilisé pour la fraction volumétrique [Mitchell, 1993]. Pour éviter les confusions dans le mémoire, le terme porosité est réservé pour désigner la proportion de vide intergranulaire. La porosité du sol n est donc la somme

des fractions volumétriques de liquide et de gaz :

$$n = \phi_f + \phi_g. \quad (2.9)$$

La fraction volumétrique de solide est le complément de la porosité :

$$\phi_s = 1 - n. \quad (2.10)$$

2.1.7 Degré de saturation

Le pourcentage des vides qui contient de l'eau est nommé le degré de saturation S . Il correspond au rapport entre le volume de liquide et le volume de vide intergranulaire :

$$S = \frac{V_l}{V_v}. \quad (2.11)$$

Pour un sol sec, le degré de saturation est 0. Le sol est dit saturé lorsque $S = 1$. Dans la réalité, une saturation parfaite est quasi impossible. Il y a toujours une fraction de gaz qui reste dissoute dans le fluide ou entre les interstices du sol.

2.1.8 Surpression intersticielle

La surpression intersticielle est égale à la différence entre la pression totale P et la pression hydrostatique P_0 :

$$u = P - P_0. \quad (2.12)$$

La pression hydrostatique P_0 décroît linéairement avec la profondeur :

$$P_0 = -\gamma_f z, \quad (2.13)$$

où z est la profondeur et γ_f est le poids spécifique du fluide (N/m^3). Le poids spécifique correspond à la densité du fluide multiplié par l'accélération gravitationnelle. La dérivée de P_0 par rapport à la profondeur z représente le poids spécifique du fluide :

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = -\gamma_f = -g\rho_f, \quad (2.14)$$

où g est l'accélération gravitationnelle (m/s^2).

2.1.9 Densité

La densité totale du sol est obtenue en divisant la masse totale (éq. 2.2) par le volume total (éq. 2.1). La masse est le volume multiplié par la densité. Le volume de chaque phase est obtenu en multipliant la porosité par le volume total (éq. 2.7). La relation entre la densité totale et les densités de chaque phase est

$$\rho_t = \frac{m_t}{V_t} = \frac{\sum_i m_i}{V_t} = \frac{\sum_i V_i \rho_i}{V_t} = \frac{V_t \sum_i \phi_i \rho_i}{V_t} = \sum_i \phi_i \rho_i. \quad (2.15)$$

La densité totale correspond à la somme de la densité de chacune des phases multipliée par sa fraction volumétrique. La relation entre la densité et la porosité s'obtient en remplaçant 2.9 dans 2.15 :

$$\rho_t = (1 - n)\rho_s + n\rho_v. \quad (2.16)$$

En terme d'indice des vides, la densité totale (éq. 2.16) devient

$$\rho_t = \frac{\rho_s + e\rho_v}{1 + e}. \quad (2.17)$$

La densité du vide intergranulaire, ρ_v , combine la densité du fluide et du gaz et dépend du degré de saturation comme suit :

$$\rho_v = \frac{m_f + m_g}{V_f + V_g} = \frac{\phi_f \rho_f + \phi_g \rho_g}{n} = S\rho_f + (1 - S)\rho_g. \quad (2.18)$$

Dans le cas d'un milieu saturé ($S = 1$), la densité du fluide intergranulaire devient égale à la densité du fluide. Dans ce cas, la relation 2.16 pour la densité totale reste la même. Dans le présent ouvrage, le milieu sera toujours considéré comme saturé.

2.2 Loi d'écoulement

Les sols laissent s'écouler plus ou moins facilement les fluides qu'ils contiennent. La capacité d'un sol à permettre l'écoulement de l'eau modifiera les propriétés mécaniques de ce

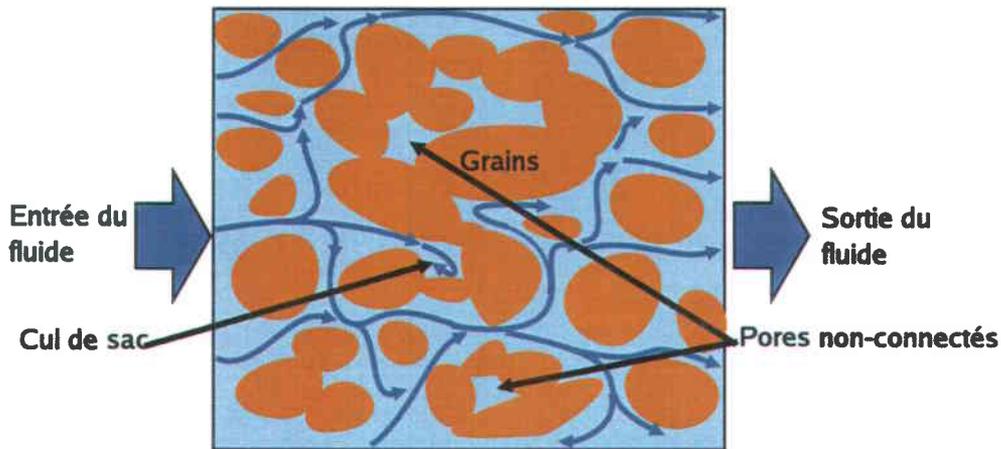


FIG. 2.3 – Écoulement dans un sol. Le fluide circule dans le sol à travers les interstices et entre les grains qui sont connectés.

sol. La porosité est un facteur déterminant dans le calcul de l'écoulement. Mais la connaissance de la porosité n'est pas suffisante. Il faut aussi connaître la proportion de pores interconnectés pour déterminer la perméabilité. La figure 2.3 montre un exemple d'écoulement dans un sol. Le fluide circule à travers les grains dont les pores sont connectés. Dans la figure 2.3, deux poches de fluide sont piégées et ne contribuent pas à l'écoulement, mais augmentent la porosité. Le piégeage résulte de la cimentation des grains entre eux sous l'effet de la pression, de la température ou de la précipitation de minéraux dissous [Civan, 2001]. Les voies sans issue augmentent aussi la résistance à l'écoulement.

Plusieurs autres facteurs influencent l'écoulement : la forme et la rugosité des grains, la structure de l'empilement et la composition du sol. La forme des grains et la structure de l'empilement influencent la taille, la forme et la direction des conduits par où s'écoule le fluide et la traînée [Incropera and DeWitt, 1996]. La traînée est une résistance aérodynamique à l'écoulement. La traînée oppose une force contraire à l'écoulement du fluide, dissipant son énergie. La rugosité des grains influence l'écoulement du fluide en influençant la force de friction à l'interface, augmentant ou réduisant la traînée [Munson et al., 1998]. L'augmentation de la rugosité ne résulte pas nécessairement en une réduction de la vitesse de l'écoulement. Par exemple, une balle de golf a une traînée moindre qu'une balle lisse, malgré sa surface bosselée. La composition peut modifier l'écoulement à l'interface fluide-grain. Par exemple, les grains d'argile sont électronégatifs et attirent les molécules chargées ou polarisées positivement. Les grains d'argile vont s'entourer de fluide pour neutraliser leurs charges. Cette couche fluide, fixée à l'argile, ne contribue plus à l'écoulement et crée un revêtement qui a

une viscosité différente du fluide circulant librement.

La plupart des paramètres qui ont été nommés ci-dessus sont difficile à mesurer, notamment la structure de l'empilement et la forme des grains. La plupart des modèles d'écoulement dans les sols utilisent un coefficient de diffusion hydraulique qui englobe tout ces paramètres : la perméabilité. Les modèles de Darcy et de Darcy-Gersevanov utilisent ce coefficient.

2.2.1 La loi de Darcy

En 1856, H. Darcy établit une loi qui décrit la charge de fluide s'écoulant à travers un milieu poreux. Cette loi empirique stipule que la vitesse du fluide est proportionnelle à une constante multipliée par le gradient de surpression interstitielle u . En notation vectorielle, la loi de Darcy [Mitchell, 1993] est :

$$\rho_f g \vec{v}_f = -[k] \vec{\nabla} u, \quad (2.19)$$

où $[k]$ est le tenseur de conductivité hydraulique (m/s), v_f la vitesse de l'écoulement (m/s) et u la pression (Pa).

2.2.2 La loi de Darcy-Gersevanov

La loi de Darcy ne tient compte que de la vitesse du fluide. Cette hypothèse est valide pour un milieu granulaire dont la structure est rigide et ne se déforme pas avec la variation du volume de fluide. Un exemple est un roc poreux. Dans le cas d'un milieu déformable, le squelette du sol se déplace à une vitesse v_s qui dépend de la variation du volume de fluide. Le volume de fluide est déterminée par l'indice des vides e dans un milieu saturé. La vitesse de filtration fluide v_m est égale à la différence entre la vitesse du fluide et du solide multipliée par la porosité [Gallois et al., 1999] :

$$\vec{v}_m = \left(\frac{e}{1+e} \right) (\vec{v}_f - \vec{v}_s). \quad (2.20)$$

La loi de Darcy-Gersevanov [Gersevanov, 1934, Gibson et al., 1967, Toorman, 1999], où loi de Darcy généralisée est obtenue en remplaçant v_f par v_m dans 2.19 :

$$\rho_f g \left(\frac{e}{1+e} \right) (\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -[k] \vec{\nabla} u, \quad (2.21)$$

où $[k]$ est le tenseur de conductivité hydraulique, v_f est la vitesse du fluide, v_s est la vitesse de la phase solide, et u est la pression interstitielle.

2.2.3 La perméabilité et la conductivité hydraulique

La conductivité hydraulique k est une vitesse de diffusion qui indique la résistance d'un sol à l'écoulement d'un fluide. Ce coefficient dépend de la structure et de la composition du sol et des propriétés du fluide. La perméabilité intrinsèque K , simplement appelé perméabilité, ne dépend que des propriétés du sol. La conductivité hydraulique de l'eau exprimée à partir de la perméabilité est

$$k = \frac{\rho_f g}{\mu} K, \quad (2.22)$$

où k est la conductivité hydraulique (m/s), K est la perméabilité intrinsèque (m^2), ρ_f est la densité du fluide (kg/m^3) et μ est la viscosité dynamique du fluide (Ns/m^2).

La perméabilité est considérée comme constante pour un sol dont le squelette ne subit pas ou peu de changement. La perméabilité est alors mesurée empiriquement par un essai de drainage. Dans le cas de grandes déformations, la perméabilité n'est plus constante et dépend de l'indice des vides. Plusieurs modèles ont été développés. En particulier, l'équation analytique de Kozeny-Carman [Kozeny, 1927, Carman, 1937] et les lois de puissance de Civan [Civan, 2001] et de Gallois [Gallois et al., 1999].

2.2.3.1 Équation de Kozeny-Carman

Un écoulement dans un sol peut être considéré approximativement comme un écoulement dans plusieurs capillaires de forme tubulaire. L'équation d'écoulement dans un capillaire est

constitué par l'équation de Poiseuille [Mitchell, 1993] :

$$Q = A \frac{\gamma_f R^2}{8\mu} \frac{du}{dh}, \quad (2.23)$$

où μ est la viscosité du fluide ($N \cdot s/m^2$), γ_f est le poids spécifique (kN/m^3), R est le rayon du capillaire (m), A est l'aire (m^2) et Q est le débit volumétrique (m^3/s). Pour plusieurs tubes parallèles, l'aire d'écoulement est l'aire A multipliée par la porosité n et la saturation en eau S :

$$A_f = AnS = \frac{ASe}{1+e}. \quad (2.24)$$

Dans un sol, les parcours que l'eau emprunte n'ont pas un rayon constant. Il faut définir un rayon caractéristique de l'écoulement : le rayon hydraulique. Le rayon hydraulique est la section efficace d'écoulement divisé par le périmètre. Dans ces conditions, le rayon hydraulique est

$$R_H = \frac{A_f}{P} = \frac{A_f L}{PL} = \frac{V_f}{V_s S_0}, \quad (2.25)$$

où $S_0 = \frac{LP}{V_s}$ est la surface de contact par unité de volume solide, soit le rapport du périmètre sur le volume. Pour un écoulement dans un capillaire de forme quelconque, un facteur de forme C_s intervient. Le volume d'eau V_f est

$$V_f = eV_s S. \quad (2.26)$$

L'équation de Kozeny-Carman s'obtient en entrant la valeur de V_f , R_H et en ajoutant C_s dans l'écoulement de Poiseuille (éq. 2.23) et divisant par l'aire. La vitesse de filtration est

$$v_f = C_s \left(\frac{1}{S_0^2} \right) \left(\frac{\gamma_f}{\mu} \right) S^3 \left(\frac{e^3}{1+e} \right) \frac{du}{dh}. \quad (2.27)$$

En comparant avec la loi de Darcy (éq. : 2.19), et en posant comme hypothèse que $C_s = 1/(k_0 T^2)$ où k_0 est un facteur de forme et T est un facteur de tortuosité, la conductivité hydraulique devient alors :

$$k = \frac{1}{k_0 T^2} \left(\frac{1}{S_0^2} \right) \left(\frac{\gamma_f}{\mu} \right) \left(\frac{e^3}{1+e} \right) S^3. \quad (2.28)$$

Il est possible d'exprimer cette relation en fonction du diamètre des grains [Mitchell, 1993]. La conductivité hydraulique est alors

$$k = C_s D_s^2 \left(\frac{\gamma_f}{\mu} \right) \left(\frac{e^3}{1+e} \right) S^3, \quad (2.29)$$

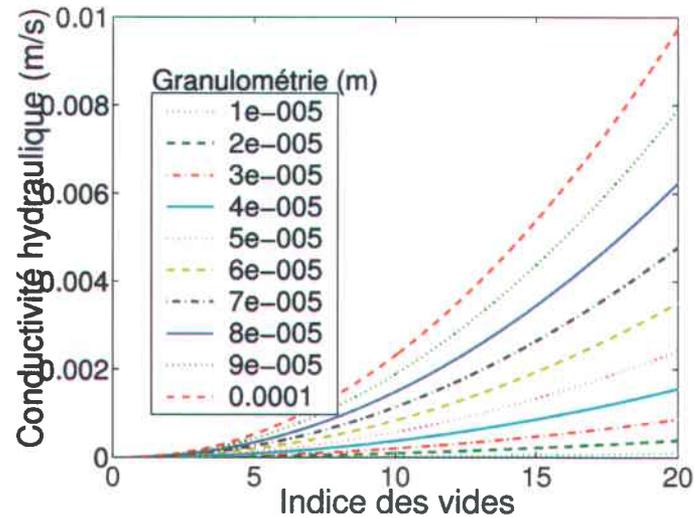


FIG. 2.4 – Graphique de la conductivité hydraulique en fonction de l'indice des vides selon l'équation de Kozeny-Carman pour différentes granulométries dans de l'huile de canola ($S = 1$, $\gamma_f = 910$, $\mu = 0,70$ et $C_S = 0,2$).

où C_s est un facteur de forme et D_s le diamètre moyen des grains.

2.2.3.2 Loi de puissance

Les lois de puissance sont des équations ayant un exposant paramétrique qui est déterminé expérimentalement. Quand l'indice des vides augmente, les lois de puissance décroissent plus rapidement que l'équation de Kozeny-Carman. Ainsi, Gallois et al. (1999) propose la loi de puissance suivante :

$$K_r = a \left(\frac{e}{1+e} \right)^b, \quad (2.30)$$

où a et b sont des paramètres empiriques et $K_r = \frac{k}{1+e}$ est la perméabilité réduite. Par la suite, Civan (2001) propose le modèle suivant :

$$\sqrt{\frac{K}{n}} = \gamma n^D \left(\frac{n}{1-n} \right)^\beta, \quad (2.31)$$

où γ , D et β sont des fonctions contenant des dimensions fractales. Pour plus d'informations, se référer à [Civan, 2001].

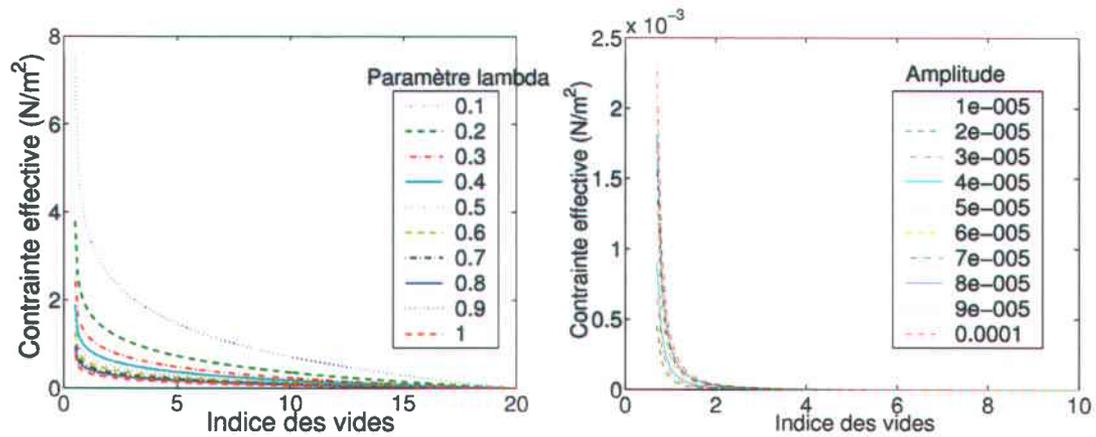


FIG. 2.5 – Graphique de la contrainte effective en fonction de l'indice des vides selon l'équation de Gibson ($e_0 = 20$ et $e_\infty = 0,49$) et de Gallois ($b = 0,49$ et $c = 2$).

2.3 Contrainte dans le sol

Terzaghi [Terzaghi, 1948] postule que la contrainte totale dans le sol se répartit en une contrainte sur le squelette solide, la contrainte effective σ' , et en une contrainte sur le fluide P . La contrainte totale est égale à :

$$\sigma = \sigma' + P, \tag{2.32}$$

où σ' est la contrainte effective et P la pression interstitielle totale.

2.3.1 Équations pour la contrainte effective

La porosité varie en fonction de la contrainte effective appliquée sur un élément de sol. Lors de la phase de décantation, la porosité est grande et les grains ne sont pas en contact les uns avec les autres. La contrainte effective est alors nulle. Avec la diminution de la porosité, le nombre de contacts entre les grains augmente et la contrainte effective grandit. Lors de la phase de consolidation, les grains sont en contact les uns avec les autres. Le squelette du sol va progressivement supporter le poids total de la couche et des contraintes qui lui sont appliquées :

$$\sigma' \rightarrow \sigma_{max} \quad \text{lorsque } e \rightarrow 0. \tag{2.33}$$

Les équations de contraintes doivent respecter ce comportement.

Gibson et al. (1981) et Foriero et Ladanyi (1998) utilisent la relation de contrainte logarithmique suivante :

$$\sigma' = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{e - e_{\infty}}{e_{00} - e_{\infty}} \right), \quad (2.34)$$

où e_{00} est l'indice des vides initial, e_{∞} est l'indice des vides minimal et λ est un paramètre constant. Dans cette équation, la contrainte tend vers l'infini lorsque $e \rightarrow 0$. En réalité, ce n'est pas possible, car le sol atteint une porosité minimale et ne peut aller au delà. L'augmentation de la contrainte provoque tout d'abord un écrasement du squelette formé par l'assemblage des grains, ce qui se traduit par une baisse de l'indice des vides. La relation de Gibson est valable pour de faible contrainte n'impliquant pas la déformation des grains. Cependant, la relation de Gibson ne permet pas de modéliser correctement le comportement d'un sédiment en accrétion.

Gallois propose une formule paramétrique pour la contrainte qui est

$$\sigma' = a (e - b)^{-c}. \quad (2.35)$$

Cette relation varie beaucoup plus rapidement que la relation de Gibson. Dans toutes ces relations, la contrainte effective est indépendante du temps et ne dépend que de l'indice des vides. Les équations ne tiennent pas en compte des phénomènes non-linéaires comme la plasticité ou le fluage, comme c'est le cas en dépôt *in situ*.

2.4 Consolidation

Le sol se comprime lorsque la contrainte appliquée dépasse la résistance du sol à la compression. Cette compression du sol est occasionnée par la dissipation de l'eau à travers le réseau de pores du sol. Ce processus de dissipation de l'eau est nommé consolidation.

Il y a deux phases de consolidation [Schiffman et al., 1988]. Dans la première phase, dites de consolidation hydraulique, l'eau est dissipée à travers les pores. Dans la seconde phase, plus complexe, les grains sont comprimés et réorientés. Des réactions chimiques peuvent se produire, accélérant ou ralentissant la consolidation du sol. Les plus grandes déformations sont observées lors de la phase de consolidation hydraulique.

Ce chapitre traitera seulement des modèles décrivant la première phase de consolidation. Les modèles de Terzaghi [Terzaghi, 1948], puis de Gibson [Gibson et al., 1967] sont présentés. Puis le modèle de sédimentation-consolidation, basé en grande partie sur le modèle de Gallois [Gallois et al., 1999], en trois dimensions est présenté.

2.5 Théorie de Terzaghi

Terzaghi (1948) fut le premier à modéliser le processus de consolidation des sols. Il simplifia le problème en considérant le sol comme un assemblage de plaques trouées avec des ressorts insérés entre elles (fig 2.6). Le tout est immergée dans un fluide. Lorsque qu'une charge est ajoutée sur l'assemblage, la contrainte est distribuée sur les ressorts et sur le fluide. Au départ, la contrainte est absorbée par le fluide, car il est incompressible. Le fluide s'écoule à travers les pores des plaques et les ressorts se compriment sous l'effet de la charge. Les ressorts du haut de l'assemblage se compriment en premier, en raison de la perte de fluide. Les ressorts se compriment et atteignent un nouvel état d'équilibre. À ce stade, les ressorts supportent entièrement le poids des plaques.

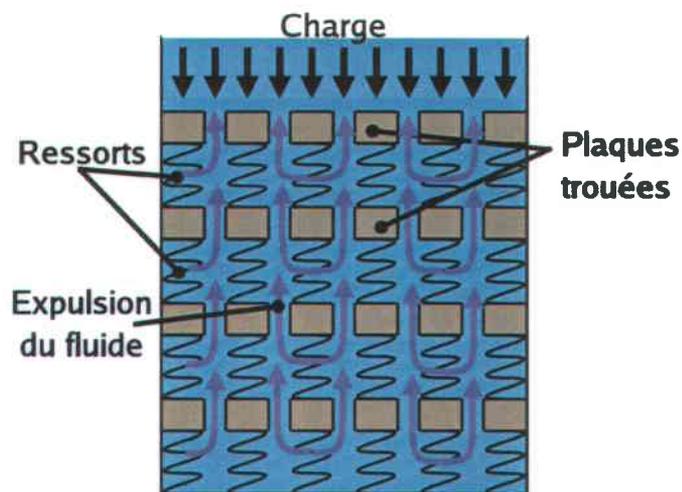


FIG. 2.6 – Représentation mécanique du problème de consolidation.

2.5.1 Hypothèses de départ

Le modèle de Terzaghi (1948) est une approximation de la réalité et est valide sous les hypothèses suivantes : le sol est homogène et saturé, la compressibilité des grains et du fluide est négligeable, l'action des masses infinitésimale n'est pas différentes des plus larges, la consolidation et l'écoulement sont unidimensionnels, la loi de Darcy est valide, certaines propriétés des sols qui varient avec la pression sont considérées constantes et la relation entre la pression et l'indice des vides est linéaire. Ces hypothèses sont vérifiées pour une couche de sédiments de l'ordre de la dizaine de centimètres et moins. Lorsque la couche devient plus épaisse, il y a de grandes déformations et le modèle ne s'applique plus.

2.5.2 Équation de Terzaghi

L'équation de Terzaghi est similaire à l'équation de diffusion de la chaleur [Terzaghi, 1948] :

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (2.36)$$

où c_v est le coefficient de consolidation (m^2/s) :

$$c_v = \left[\frac{k(1+e)}{a_v \gamma_f} \right], \quad (2.37)$$

où k est la conductivité hydraulique (m/s), γ_f est le poids spécifique (N/m^3) de l'eau et a_v est la compressibilité du sol (m^2/N). Le coefficient de consolidation est considéré comme constant. Cette hypothèse n'est pas toujours valide. En effet, le coefficient de consolidation dépend de l'indice des vides et de la perméabilité. Lorsque l'indice des vides varie beaucoup, le coefficient de consolidation ne peut être tenu constant. De même, la perméabilité varie lors du processus de consolidation. La perméabilité est grande lorsque la consolidation est faible, en raison de la grande porosité et de l'interconnectivité des pores. Lorsque le sédiment se consolide, l'écoulement de l'eau devient plus difficile, le taux de consolidation ralentit. Ce qui s'exprime par un plus faible coefficient de consolidation. Aussi, le modèle de Terzaghi est trop simpliste pour représenter un dépôt en phase de sédimentation-consolidation.

2.5.3 Solution analytique

Il est possible d'obtenir une solution analytique de l'équation 2.36 [Taylor, 1955]. Soit les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$u(0, t) = 0 \quad u(2H, t) = 0 \quad u(z, 0) = u_i$$

la solution de cette équation est

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h} \int_0^{2H} u_0 \sin \left(\frac{n\pi z}{2H} \right) dz \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{2H} \right) \exp \left(\frac{-n^2 \pi^2 c_v t}{4H^2} \right). \quad (2.38)$$

En utilisant un temps caractéristique $T = \frac{c_v t}{H^2}$ et $u_0 = cte$, la solution devient

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin \left(\frac{n\pi z}{2H} \right) \exp \left((-1/4)n^2 \pi^2 c_v t \right). \quad (2.39)$$

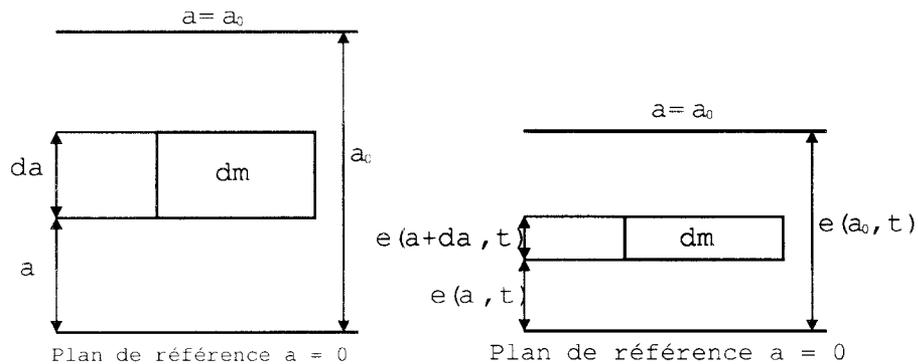


FIG. 2.7 – Système de coordonnées lagrangien utilisé dans le modèle de Gibson.

2.6 Théorie de la consolidation de Gibson

La théorie de Gibson [Gibson et al., 1967, Gibson et al., 1981] est plus générale que celle de Terzaghi et pose moins d'hypothèses de départ. Le modèle requiert que le sol soit considéré comme homogène. La compressibilité des grains et du fluide est prise en compte en posant la densité variable. La perméabilité et la contrainte effective peuvent être variables. La loi de

Darcy-Gersevanov est utilisée pour décrire l'écoulement. Le modèle de Gibson est souple et permet de simuler les grandes déformations.

Le système de coordonnées lagrangien est utilisé par Gibson (fig 2.7). Le système de coordonnées se déforme avec le sédiment. L'avantage de ce système est que les conditions aux frontières sont toujours au même endroit dans le repère lagrangien. La coordonnée lagrangienne est définie par la variable ϵ .

Le système d'équations de Gibson est composé de quatre équations :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} \pm \left(\frac{e\rho_f + \rho_s}{1+e} \right) g \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0, \quad (2.40a)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} - (1+e) \frac{\rho_s(a,0)}{\rho_s(a,t)} = 0, \quad (2.40b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e\rho_f}{1+e} (v_f - v_s) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{e\rho_f}{1+e} \frac{\partial \xi}{\partial a} \right] = 0, \quad (2.40c)$$

$$\left[\frac{e(v_f - v_s)}{k(1+e)} \pm 1 \right] \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} = 0. \quad (2.40d)$$

L'équation 2.40a provient de l'application de la seconde loi de Newton. Les équations 2.40b et 2.40c proviennent de la conservation de la masse solide et liquide et la dernière équation décrit la compression du volume des pores. Le postulat de Terzaghi (éq. 2.32) fournit la cinquième équation qui est nécessaire pour résoudre l'ensemble. La coordonnée z est une coordonnée matérielle qui est reliée au système de coordonnées fixe a par :

$$z(a) = \int_0^a [1 - n(a,0)] da. \quad (2.41)$$

Cette équation stipule que la masse est conservée à l'intérieur d'une cellule. Le système de référence se déplace à la même vitesse que le milieu.

2.6.1 Équation de Gibson

Pour obtenir l'équation de Gibson, il faut émettre certaines hypothèses. Premièrement, les phases solide et liquide sont considérées incompressibles. Les densités sont donc considérées

constantes. Il résulte de ces hypothèses que l'équation 2.40b devient :

$$\frac{\partial e}{\partial z} = (1 + e). \quad (2.42)$$

En remplaçant l'équation 2.42 dans les équations 2.40a à 2.40d, l'équation de Gibson est obtenue :

$$\pm \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial e} \left[\frac{k}{1 + e} \right] \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{1 + e} \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \sigma'}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial z} \right] + \frac{\partial e}{\partial t} = 0, \quad (2.43)$$

où la contrainte effective σ' et la perméabilité k sont des fonctions de l'indice des vides.

2.6.2 Linéarisation de l'équation

Il est possible de linéariser cette équation en considérant les termes suivant constants [Gibson et al., 1981] :

$$g(e) = -\frac{k}{\rho_f(1 + e)} \frac{\partial \sigma'}{\partial e} \equiv cte, \quad (2.44)$$

$$\lambda(e) = -\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial e}{\partial \sigma'} \right) \equiv cte. \quad (2.45)$$

Insérant 2.44 et 2.45 dans 2.43, l'équation linéaire de Gibson devient

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} \mp \lambda (\rho_s - \rho_f) \frac{\partial e}{\partial z} = 0. \quad (2.46)$$

Foriero et Ladanyi (1998) fournissent une solution numérique de cette équation à partir de la méthode des éléments finis. Un programme en Matlab, basé sur les équations de Foriero et Ladanyi, a été développé dans ce travail et permet de simuler des empilements de couches sédimentaires. Le programme se nomme *consolidation.m* et se trouve sur le CD-ROM.

2.7 Équation de consolidation en 3D

Une équation unidimensionnelle ne permet pas de décrire la variation latérale de la porosité. Un modèle mathématique en trois dimensions est donc nécessaire. Le présent modèle

considère un milieu saturé en eau et ne cherche pas à considérer les milieux partiellement saturé décrits par Fredlund [Fredlund, 1993]. Le modèle en trois dimensions comporte une équation de conservation de la masse pour chaque phase, une équation d'équilibre des forces, l'équation de diffusion de Darcy-Gersevanov (éq. 2.19) et le postulat de Terzaghi (éq. 2.32).

2.7.1 Conservation de la masse

Soit un volume de contrôle contenant un volume de sol. La masse totale de sédiment dans le volume est donnée par l'intégrale de la densité sur le volume de contrôle :

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho_t dV. \quad (2.47)$$

La conservation de la masse stipule que la variation de la masse est nulle :

$$\frac{\partial M_{sys}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{sys} \rho_t dV = 0. \quad (2.48)$$

Par le théorème de transport de Reynolds [Munson et al., 1998], la variation de la masse (éq. 2.48) devient

$$\frac{\partial M_{sys}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA = 0, \quad (2.49)$$

où VC est le volume de contrôle, SC est la surface de contrôle, \vec{v} est la vitesse d'écoulement à travers la surface, \hat{n} est le vecteur normal à la surface et A est la surface.

Du théorème de Gauss, il est possible d'écrire l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA = \int_{VC} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV. \quad (2.50)$$

En remplaçant 2.50 dans 2.49, l'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0. \quad (2.51)$$

En interchangeant l'ordre de la dérivée et de l'intégrale et en enlevant l'intégrale, on obtient l'expression générale pour la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.52)$$

Cette équation est dans un référentiel Eulérien. En Lagrangien, l'équation s'obtient en posant les bornes d'intégration variable dans 2.51. À l'aide du théorème de Leibniz, et en posant la vitesse du référentiel égale à la vitesse du fluide, l'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} \rho d\Omega = 0 \quad (2.53)$$

qui stipule que la masse est conservée dans le domaine $d\Omega$. Les équations suivantes sont écrites dans le référentiel Eulérien.

2.7.2 Conservation des masses solide et liquide

La masse totale contient les masses de solide et de liquide. Il n'y a pas de transfert de masse entre l'état solide et l'état liquide. Les masses de liquide et de solide sont conservées, ce qui implique que

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} = \int_{sys} (1 - n)\rho_s dV = 0, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial t} = \int_{sys} n\rho_f dV = 0. \quad (2.55)$$

À partir de l'équation de la conservation de la masse (éq. 2.52), les équations de conservation pour chacune des phases deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - n)\rho_s] + \nabla \cdot ((1 - n)\rho_s \vec{v}_s) = 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [n\rho_f] + \nabla \cdot (n\rho_f \vec{v}_f) = 0. \quad (2.57)$$

2.7.3 Équations d'équilibre des forces

Soit un élément infinitésimal de sol de masse ∂m , la force infinitésimale $\partial \vec{F}$ est obtenu par l'application de la seconde loi de Newton :

$$\partial \vec{F} = \partial m \vec{a}, \quad (2.58)$$

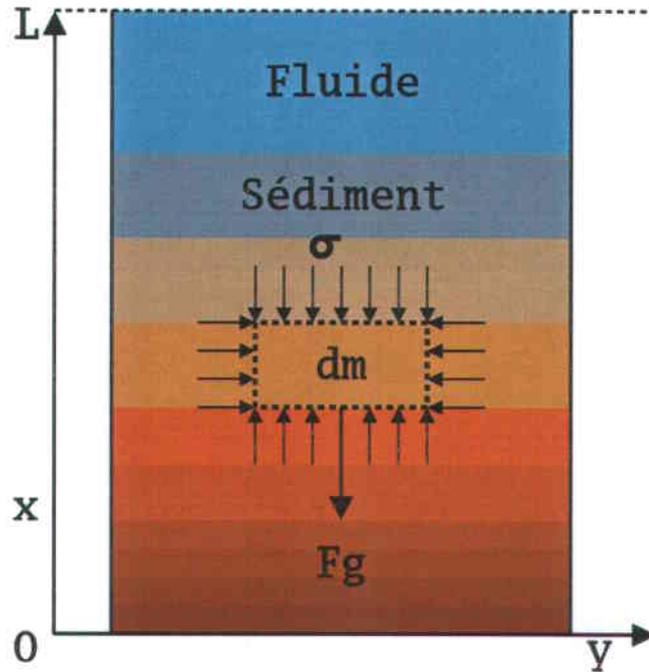


FIG. 2.8 – Système de coordonnées utilisé.

où le vecteur accélération \vec{a} , en terme de vitesse, est [Munson et al., 1998] :

$$\vec{a} = \frac{D(\vec{v})}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (2.59)$$

En divisant par l'aire ∂A et ajoutant la gravité, qui est $\vec{g} = (0, 0, -g)$ selon le référentiel choisi (fig. 2.8), l'équation vectorielle du mouvement est

$$\rho \vec{g} + \nabla[\sigma] = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}, \quad (2.60)$$

où

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)(\cdot) \quad (2.61)$$

est la dérivée matérielle et $[\sigma]$ est le tenseur de contrainte :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Les σ_{jj} sont les contraintes normales et les τ_{ij} sont les contraintes de cisaillement.

2.7.4 Le modèle 3D

Le système d'équation final devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho_s}{1+e} \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_s}{1+e} \vec{v}_s \right) = 0, \quad (2.63a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{e\rho_f}{1+e} \right] + \nabla \cdot \left(\frac{e\rho_f}{1+e} \vec{v}_f \right) = 0, \quad (2.63b)$$

$$\rho \vec{g} + \nabla[\sigma] - \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = 0, \quad (2.63c)$$

$$\left(\frac{e\rho_f g}{1+e} \right) (\vec{v}_f - \vec{v}_s) + [k] \vec{\nabla} u = 0, \quad (2.63d)$$

où les équations 2.56 et 2.57 ont été réécrites en terme de l'indice des vides. En appliquant le postulat de Terzaghi sous forme différentielle :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2.64)$$

ce modèle permet une description complète du processus de sédimentation et de consolidation. Les densités ρ_s et ρ_f peuvent être variables. La compressibilité des grains peut être tenue en compte dans le modèle.

Les paramètres cruciaux du modèle sont les tenseurs de contrainte et de perméabilité. Malheureusement, la connaissance de ces deux paramètres est très limitée. De plus, le modèle ne peut être résolu que de manière numérique. Il sera nécessaire d'attendre des travaux plus poussés sur ces sujets pour permettre d'exploiter correctement ce modèle.

Le système d'équation 2.63a à 2.63d est général et il est tridimensionnel. Il ne peut être résolu en raison de la méconnaissance du tenseur de contrainte. Pour le déterminer, des expériences plus poussées sont requises. Du point de vue théorique, il faut se tourner vers la mécanique statistique.

Le modèle sera simplifié. D'abord, le modèle est réduit à une dimension spatiale. Les accélérations dans l'équation 2.63c sont négligées. Les grains sont considérés incompressibles. Les densités ρ_s et ρ_f sont alors constantes.

Le modèle comporte sept variables : l'indice des vides e , le vecteur vitesse de la phase solide \vec{v}_s , le vecteur vitesse de la phase liquide \vec{v}_f , la conductivité hydraulique k , la pres-

sion intergranulaire u , la contrainte totale σ et la pression totale P . et cinq équations. Deux relations supplémentaires sont nécessaires pour la résolution.

Les deux relations restantes sont obtenues en utilisant des équations reliant la contrainte et la conductivité hydraulique à l'indice des vides. L'équation de Kozeny-Carman (éq. 2.29) est un exemple de relation pour la conductivité hydraulique. De manière générale, la conductivité hydraulique et la contrainte sur le squelette sont posé comme des fonctions de l'indice des vides :

$$k \equiv f(e) \quad \text{et} \quad \sigma' \equiv g(e). \quad (2.65)$$

La dépendance de k et σ' par rapport au temps est négligée.

Le système d'équation du modèle (éq. 2.63a à 2.63d) pour une dimension se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_s}{1+e} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_s v_s}{1+e} \right) = 0, \quad (2.66a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e \rho_f}{1+e} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e \rho_f v_s}{1+e} \right) = 0, \quad (2.66b)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + g \left(\frac{\rho_s + e \rho_f}{1+e} \right) = 0, \quad (2.66c)$$

$$g \rho_f \left(\frac{e}{1+e} \right) (v_f - v_s) + k \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.66d)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \sigma'}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (2.66e)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} + g \rho_f = 0. \quad (2.66f)$$

Ce système peut être réduit à une équation différentielle fonction de l'indice des vides e . L'équation pour l'évolution de l'indice des vides en coordonnée Eulérienne est donc :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) (1+e)^2 \frac{\partial}{\partial e} \left[\frac{k}{(1+e)^2} \right] \frac{\partial e}{\partial x} + (1+e)^2 \frac{1}{g \rho_f} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k}{(1+e)} \frac{\partial \sigma'}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial x} \right] = 0. \quad (2.67)$$

Cette équation, réécrite pour faire apparaître explicitement les dérivées de e par x , devient

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \alpha(e) \frac{\partial e}{\partial x} + \beta(e) \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right)^2 + \gamma(e) \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = 0, \quad (2.68)$$

où

$$\alpha(e) = \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) \left[\frac{\partial k}{\partial e} - \frac{2k}{(1+e)} \right], \quad (2.69)$$

$$\beta(e) = \frac{(1+e)}{g\rho_f} \left[\frac{\partial k}{\partial e} \frac{\partial \sigma'}{\partial e} - \frac{k}{1+e} \frac{\partial \sigma'}{\partial e} + k \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial e^2} \right], \quad (2.70)$$

$$\gamma(e) = \frac{k(1+e)}{g\rho_f} \frac{\partial \sigma'}{\partial e}. \quad (2.71)$$

Cette équation est fortement non-linéaire et ne possède pas de solution analytique. Un schéma numérique doit être utilisé pour la résolution. La méthode des éléments finis est utilisée pour le résoudre. Cette méthode est brièvement présentée au chapitre suivant.

2.7.5 Conditions aux limites et condition initiale

Il y a deux types de conditions aux limites : le cas perméable et le cas imperméable. Dans le cas d'une limite perméable, il est possible de définir directement l'indice des vides e à l'interface. Dans le cas d'une limite imperméable, la vitesse du fluide et du solide est nulle :

$$v_f = v_s = 0. \quad (2.72)$$

Après insertion de cette condition dans les équations 2.66a à 2.66f l'équation simplifiée devient :

$$\frac{\partial e}{\partial x} + g \left(\frac{\rho_s - \rho_f}{1+e} \right) \frac{\partial e}{\partial \sigma'} = 0. \quad (2.73)$$

Le gradient de l'indice des vides e est donc une fonction de la contrainte effective pour une interface imperméable.

La condition initiale consiste à définir la valeur de l'indice des vides e au temps initial. Dans le présent ouvrage, l'indice des vides est posé constant initialement (figure 2.9).

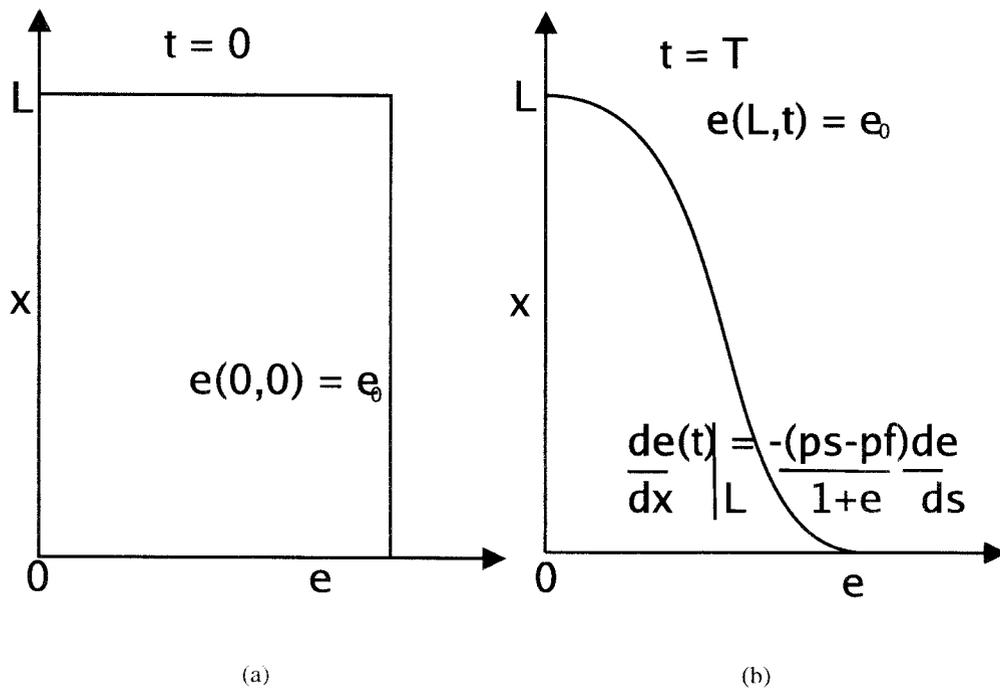


FIG. 2.9 – (a) : Condition initiale (b) : Conditions aux limites.

Chapitre 3

Rappel de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est un outil puissant pour la résolution de problèmes possédant une géométrie complexe. Elle est utilisée aujourd'hui dans beaucoup de domaines de la science. La méthode des éléments finis consiste en trois grandes étapes : la discrétisation du domaine en partie, la dérivation de fonctions approximatives sur chaque élément et l'assemblage des éléments.

La discrétisation du problème consiste à diviser le domaine en une collection de figures géométriques simples : les éléments. La géométrie des éléments doit être suffisamment simple pour dériver des fonctions approximatives. La figure 3.1 montre la discrétisation du domaine d'une pièce mécanique à l'aide de carrés et de triangles. Les fonctions approximatives sont habituellement des polynômes obtenus par l'application de la théorie de l'interpolation. L'assemblage des éléments s'effectue en utilisant la continuité de la solution et la balance des forces. Le système d'équation résultant couvre tous le domaine du problème et représente un

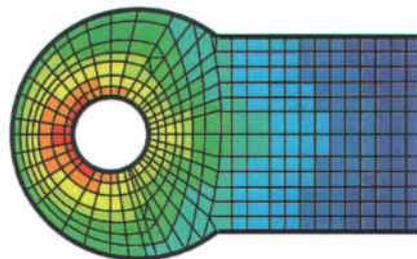


FIG. 3.1 – Exemple de discrétisation du domaine en éléments carrés et triangulaires.

analogue numérique du problème mathématique étudié.

3.1 Discrétisation du domaine

Prenons une équation différentielle de la forme

$$\mathcal{A}(u) = f, \quad (3.1)$$

où \mathcal{A} est un opérateur différentiel, linéaire ou non-linéaire, agissant sur la solution u et f est une fonction connue de la variable indépendante. Un exemple d'opérateur différentiel est

$$\mathcal{A}(u) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + cu. \quad (3.2)$$

La discrétisation du problème consiste à approximer la solution u de l'équation différentielle 3.1 par une série finie de polynômes ψ_j multipliés par des coefficients u_j :

$$u \approx \sum_{j=1}^n u_j \psi_j + \psi_0. \quad (3.3)$$

Les fonctions d'approximations ψ_i doivent respecter les critères suivants :

1. ψ_i doit être suffisamment différentiable de telle sorte que l'opérateur \mathcal{A} soit non-nul ;
2. ψ_i doit satisfaire toutes les conditions aux limites ;
3. pour tous n , l'ensemble des $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ doit être linéairement indépendant ;
4. $\{\psi_i\}$ doit être complet, c'est-à-dire que tous les termes d'une suite de fonctions doivent être présents.

La substitution de 3.3 dans une équation différentielle ne résulte pas toujours en un système d'équation linéairement indépendant. La différence $\mathcal{A}(u) - f$, appelée le résidu, n'est pas égale à zéro :

$$R \equiv \mathcal{A}(u_n) - f = \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^n u_j \psi_j + \psi_0 \right) \neq 0. \quad (3.4)$$

Pour y parvenir, il faut imposer que l'intégrale pondérée de l'erreur de l'équation soit zéro. Il y a plusieurs méthodes pour y parvenir [Reddy, 1993]. La plus générale est la méthode des résidus pondérés.

3.2 Méthode des résidus pondérés

La méthode des résidus pondérés consiste à multiplier le résidu par des fonctions de poids ϕ_i et à intégrer sur tout le domaine Ω :

$$\int_{\Omega} \phi(\Omega)_i R(\Omega, u_j) d\Omega = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.5)$$

L'ensemble $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ des fonctions de poids doit être linéairement indépendant. Si cette condition est respectée, le système d'équation 3.5 fournit n équations indépendantes et permet de résoudre les n coefficients u_j .

Plusieurs méthodes de résidus existent en fonction du choix des fonctions de poids. Ces méthodes sont décrites et expliquées par Reddy [Reddy, 1993]. La méthode utilisée dans cet ouvrage sera la méthode de Galerkin. Dans ce cas, les fonctions de poids ϕ_i sont égales aux fonctions d'approximations ψ_i . Le système d'équation 3.5 s'écrit alors sous forme matricielle :

$$[K] \vec{u} = \vec{F}, \quad (3.6)$$

où

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i \mathcal{A}(\psi_j) d\Omega \quad F_i = \int_{\Omega} [F - \mathcal{A}(\psi_0)] d\Omega \quad (3.7)$$

et \vec{u} est le vecteur solution et K et F sont respectivement la matrice des coefficients ou matrice de rigidité et le vecteur des termes sources.

3.3 Les éléments finis

La discrétisation du domaine se fait à l'aide d'éléments de base géométriquement simples. Pour une dimension, ce sont des segments de droite et pour deux dimensions ce sont des triangles, des carrés, des hexagones, etc. La simplicité de la géométrie permet d'obtenir l'ap-

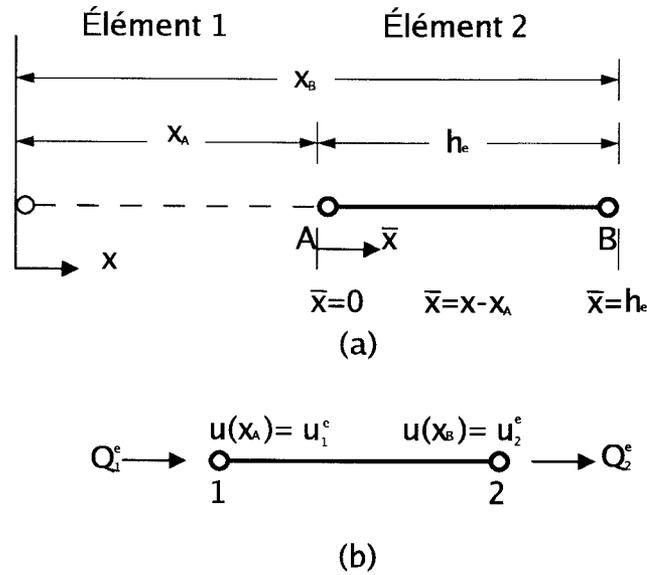


FIG. 3.2 – Discrétisation d'un domaine unidimensionnel. (a) Représentation du maillage du domaine; x = coordonnée globale, \bar{x} = coordonnée locale. (b) Un élément à deux noeuds avec la définition des variables primaires u et des variables secondaires Q .

proximation de la solution. Un élément est constitué de *noeuds* qui servent de points d'interpolations (figure 3.2). Le nombre de noeuds dépend de l'ordre des fonctions d'interpolation utilisées. Par exemple, pour des fonctions linéaires, deux points par élément sont suffisants, alors que pour des fonctions quadratiques, il faut trois noeuds par élément.

Les fonctions d'interpolation doivent être construites pour chaque type d'élément. Il existe une panoplie de fonctions d'interpolations [Reddy, 1993] dans la littérature et leurs dérivations ne sont pas présentées ici. Dans le présent travail, les familles de fonctions d'interpolation lagrangienne et hermitienne sont utilisées. Ces fonctions et leur dérivés sont présentées à la section suivante.

Les équations algébriques sur chaque élément, qui relient les variables primaires au variables secondaires, s'obtiennent en formulant l'équation différentielle du problème sous forme de résidus pondérés (éq. 3.5). L'intégrale s'effectue sur le domaine de l'élément Ω_e . Pour un élément linéaire, l'intégrale varie de x_A à x_B . Cette intégrale est généralement complexe et fastidieuse à intégrer manuellement. La méthode de Gauss-Legendre [Fortin, 1995, Reddy, 1993] est donc utilisée. Cette méthode requiert que l'intégrale soit sur le domaine $[-1, 1]$. Ce système de coordonnée est dit naturel.

3.4 Système de coordonnées naturelle

La transformation des coordonnées x du problème aux coordonnées naturelles ϵ consiste à appliquer la transformation linéaire suivante :

$$x = x_A + \frac{1}{2}h_e(1 + \epsilon). \quad (3.8)$$

où x_A est la coordonnée du point de départ de l'élément, et $h_e = x_B - x_A$ est la longueur totale de l'élément.

L'élément différentiel ∂x doit aussi être transformé. La transformation s'effectue par la dérivée en chaîne :

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial \epsilon} \partial \epsilon = \mathcal{J}_e \partial \epsilon, \quad (3.9)$$

où

$$\mathcal{J}_e = \frac{\partial x}{\partial \epsilon} = \sum_{i=1}^n x_i^e \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \epsilon} \quad (3.10)$$

est le jacobien de la transformation. Dans le cas d'élément linéaire, le jacobien est simplement la moitié de la longueur de l'élément :

$$\mathcal{J}_e = \frac{1}{2}h_e, \quad (3.11)$$

où h_e est la longueur totale de l'élément.

3.5 Fonctions d'interpolation

Les fonctions d'interpolations hermitiennes pour un élément linéaire à deux noeuds en coordonnées locale \bar{x} où $\bar{x} = x - x_1^e$ sont :

$$\begin{aligned} \psi_1^e &= 1 - 3 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^3, & \psi_2^e &= -\bar{x} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2, \\ \psi_3^e &= 3 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 - 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^3, & \psi_4^e &= -\bar{x} \left[\left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

En coordonné locale ϵ , elles sont :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1^\epsilon &= \frac{1}{4}(1-\epsilon)^2(2+\epsilon), & \hat{\psi}_2^\epsilon &= -\frac{h_e}{8}(1-\epsilon)^2(1+c), \\ \hat{\psi}_3^\epsilon &= \frac{1}{4}(1+\epsilon)^2(2-\epsilon), & \hat{\psi}_4^\epsilon &= \frac{h_e}{8}(1+\epsilon)^2(\epsilon-1).\end{aligned}\quad (3.13a)$$

Les dérivées premières sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\psi}_1^\epsilon}{\partial c} &= -\frac{3}{4}(1-c)(1+c), & \frac{\partial \hat{\psi}_2^\epsilon}{\partial \epsilon} &= \frac{h_e}{8}(1+2\epsilon-3\epsilon^2), \\ \frac{\partial \hat{\psi}_3^\epsilon}{\partial c} &= \frac{3}{4}(1-\epsilon)(1+\epsilon), & \frac{\partial \hat{\psi}_4^\epsilon}{\partial \epsilon} &= \frac{h_e}{8}(1-2\epsilon-3\epsilon^2),\end{aligned}\quad (3.13b)$$

et les dérivées secondes sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{\psi}_1^\epsilon}{\partial c^2} &= \frac{3}{2}\epsilon, & \frac{\partial^2 \hat{\psi}_2^\epsilon}{\partial \epsilon^2} &= \frac{h_e}{4}(1-3\epsilon), \\ \frac{\partial^2 \hat{\psi}_3^\epsilon}{\partial c^2} &= -\frac{3}{2}\epsilon, & \frac{\partial^2 \hat{\psi}_4^\epsilon}{\partial \epsilon^2} &= -\frac{h_e}{4}(1+3\epsilon)\epsilon.\end{aligned}\quad (3.13c)$$

Les fonctions d'interpolation en coordonnée naturelle sont souvent nommées fonctions de formes. Les dérivées par rapport à x des fonctions de formes sont divisées par le jacobien :

$$\frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x} = \frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\partial \hat{\psi}_i(\epsilon)}{\partial \epsilon}.\quad (3.14)$$

La solution u s'obtient par :

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \hat{\psi}_j(\epsilon) = u_1 \hat{\psi}_1(\epsilon) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_1 \hat{\psi}_2(\epsilon) + u_2 \hat{\psi}_3(\epsilon) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_2 \hat{\psi}_4(\epsilon).\quad (3.15)$$

Les fonction d'interpolations lagrangiennes en coordonnée locale sont :

pour un élément à deux noeuds :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1^\epsilon &= \frac{1}{2}(1-\epsilon), \\ \hat{\psi}_2^\epsilon &= \frac{1}{2}(1+\epsilon),\end{aligned}\quad (3.16a)$$

pour un éléments à trois noeuds :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1^\epsilon &= -\frac{1}{2}\epsilon(1 - \epsilon), \\ \hat{\psi}_2^\epsilon &= (1 + \epsilon)(1 - \epsilon), \\ \hat{\psi}_3^\epsilon &= \frac{1}{2}\epsilon(1 + \epsilon),\end{aligned}\tag{3.16b}$$

et pour un éléments à quatre noeuds :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1^\epsilon &= -\frac{9}{16}(1 - \epsilon)\left(\frac{1}{3} + \epsilon\right)\left(\frac{1}{3} - \epsilon\right), \\ \hat{\psi}_2^\epsilon &= \frac{27}{16}(1 + \epsilon)(1 - \epsilon)\left(\frac{1}{3} - \epsilon\right), \\ \hat{\psi}_3^\epsilon &= \frac{27}{16}(1 + \epsilon)(1 - \epsilon)\left(\frac{1}{3} + \epsilon\right), \\ \hat{\psi}_4^\epsilon &= -\frac{9}{16}(1 + \epsilon)\left(\frac{1}{3} - \epsilon\right)\left(\frac{1}{3} + \epsilon\right).\end{aligned}\tag{3.16c}$$

3.6 Résolution numérique des équations différentielles

3.6.1 Résolution des systèmes linéaires

Un système d'équation linéaire est de la forme

$$[K] \vec{u} = \vec{F}.\tag{3.17}$$

La matrice des coefficients $[K]$ et le vecteur des sources \vec{F} ne dépendent pas du vecteur solution \vec{u} . Les systèmes d'équations linéaires se résolvent directement ou de manière itérative. Dans ce travail, la méthode directe de résolution est utilisée. Le système est résolu par une décomposition LU ou de Cholesky [Fortin, 1995]. Le type de décomposition optimale dépend de la structure de la matrice $[K]$. Pour des matrices pluri diagonales, la méthode de Cholesky est plus rapide que la décomposition LU.

3.6.2 Résolution des systèmes non-linéaires

Un système non-linéaire est un système de la forme

$$[K(u)] \vec{u} = \vec{F}. \quad (3.18)$$

où $[K]$ dépend du vecteur solution \vec{u} . La résolution des systèmes non-linéaires se fait itérativement. Dans les schémas itératifs, la méthode de Pickard et de Newton-Raphson sont les plus utilisées [Reddy, 1993].

3.6.2.1 Méthode de Pickard

La méthode de Pickard consiste à résoudre itérativement l'équation :

$$[K(u_i)] \vec{u}_{i+1} = \vec{F}. \quad (3.19)$$

où \vec{u}_i est la solution à l'itération i . Dans cette méthode, les coefficients K_{ij} sont évalués en utilisant la solution \vec{u}_i de l'itération précédente. La solution \vec{u}_{i+1} s'obtient en résolvant le système matriciel résultant par décomposition. À l'itération $i = 0$, une solution approximative basée sur le comportement de la solution est utilisée. L'itération continue tant que l'erreur entre \vec{u}_i et \vec{u}_{i+1} n'est pas en deçà du critère d'erreur ϵ . Le critère d'erreur est calculé en prenant la norme de l'erreur sur la norme de la solution \vec{u}_i :

$$\frac{\|\vec{u}_{i+1} - \vec{u}_i\|}{\|\vec{u}_{i+1}\|} < \epsilon \quad (3.20)$$

3.6.2.2 Méthode de Newton-Raphson

Cette méthode se base sur le développement en série de Taylor du résidu du système d'équation [Fortin, 1995]. Le système est linéarisé et la solution est déterminée récursivement en ajoutant une correction à chaque itération :

$$\vec{u}_i = \vec{u}_i + \delta \vec{u}_{i+1}. \quad (3.21)$$

L'indice i représente la solution à l'itération précédente. L'objectif de la méthode de Newton-Raphson est de déterminer la correction $\vec{\delta u}_i$ qui annulera le déterminant.

Soit le système d'équation

$$\vec{R}(u) = [K(u)] \vec{u} - \vec{F}. \quad (3.22)$$

À l'itération $i - 1$ on cherche un vecteur de correction $\vec{\delta u}_i$ tel que

$$\vec{R}(u_i + \delta u) = [K(u_i + \delta u)] (\vec{u}_i + \vec{\delta u}_i) - \vec{F} = 0. \quad (3.23)$$

En effectuant le développement en série de Taylor de 3.23 autour de $\vec{u} = \vec{u}_i$, on obtient :

$$\vec{R}(u_i) + \frac{\partial \vec{R}(u_i)}{\partial \vec{u}} \vec{\delta u}_i + \frac{\partial^2 \vec{R}(u_i)}{\partial \vec{u}^2} \frac{(\vec{\delta u}_i)^2}{2!} + \frac{\partial^3 \vec{R}(u_i)}{\partial \vec{u}^3} \frac{(\vec{\delta u}_i)^3}{3!} + \dots = 0 \quad (3.24)$$

Les termes d'ordres supérieurs ou égal à 2 en $\vec{\delta u}_i$ sont négligés et l'équation 3.24 devient :

$$\vec{R}(u_i) + \frac{\partial \vec{R}(u_i)}{\partial \vec{u}} \vec{\delta u}_i = 0. \quad (3.25)$$

La correction est trouvée en résolvant le système linéaire

$$\frac{\partial \vec{R}(u_i)}{\partial \vec{u}} \vec{\delta u}_i = -\vec{R}(u_i), \quad (3.26)$$

qui étendue devient :

$$- [Kt(u_i)] \vec{\delta u}_i = \vec{R}(u_i), \quad (3.27)$$

où

$$[Kt(u_i)] = \left[\frac{\partial [K(u_i)]}{\partial \vec{u}} \vec{u}_i \right] + [K(u_i)], \quad (3.28)$$

est nommé la matrice tangente. La dérivée par rapport à un vecteur $\frac{\partial}{\partial \vec{u}}$ consiste à dériver la fonction par rapport à chaque composante u_j du vecteur \vec{u} :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{u}} = \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_k}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} \right\}. \quad (3.29)$$

Un vecteur est ainsi obtenu. La dérivée de la matrice $[K(u_i)]$ par \vec{u} résulte donc en un vecteur de matrices. La multiplication par \vec{u}_i résulte en une matrice. La matrice tangente est plus simple à comprendre sous sa forme indicielle :

$$kt_{ij} = k_{ij} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial k_{ik}}{\partial u_i} u_k. \quad (3.30)$$

L'algorithme de Newton-Raphson [Fortin, 1995] est le suivant :

Algorithme 1 Algorithme de Newton-Raphson.

Soit ϵ , un critère d'arrêt

1. Soit N , le nombre maximal d'itérations
 2. Calculer un vecteur solution initial \vec{u}_0
 3. Calculer la matrice tangente au temps i
 4. Résoudre le système 3.27 pour les $\vec{\delta}u_i$
 5. Incrémenter le vecteur solution : $\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \vec{\delta}u_i$
 6. Si $\frac{\|\vec{u}_{i+1} - \vec{u}_i\|}{\|\vec{u}_{i+1}\|} < \epsilon$ et $\|R(u_i)\| < \epsilon$
 - convergence atteinte
 - écrire la solution \vec{u}_{i+1}
 - arrêt
 7. Si le nombre d'itérations N est atteint :
 - convergence non atteinte
 - arrêt
 8. Retour à l'étape 4
-

3.6.3 Résolution des systèmes non-stationnaires

Un système est dit non-stationnaire lorsqu'il dépend du temps. La solution u est approximée par des fonctions d'approximations. Par contre, les coefficients u_j dépendent du temps. L'approximation de la solution u est

$$u \approx \sum_{j=1}^n u_j(t) \psi_j(x) + \psi_0. \quad (3.31)$$

Les dérivées temporelles s'effectuent sur les coefficients u_j et les dérivées spatiales sur les ψ_j . Le système matriciel avec une dérivée temporelle devient

$$[M] \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [K] \vec{u} = \vec{F}, \quad (3.32)$$

où $[M]$ est nommé la matrice de masse et $[K]$ la matrice des coefficients ou de rigidité. Pour résoudre dans le temps, la méthode des différences finies est utilisée. La progression du temps est approximée par l'utilisation de la famille α d'approximations [Reddy, 1993] :

$$\alpha \vec{u}_{n+1} + (1 - \alpha) \vec{u}_n = \frac{1}{\Delta t_{n+1}} \left(\frac{\partial \vec{u}_{n+1}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t} \right). \quad (3.33)$$

L'indice n représente les matrices et vecteur au temps présent et $n + 1$ ceux aux temps futur. Δt_{n+1} est le pas de temps du schémas d'intégration :

$$\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n. \quad (3.34)$$

Le pas de temps doit être suffisamment petit pour que la solution soit stable. Le paramètre α contrôle le schéma d'intégration. Pour diverses valeurs de α , les schémas d'intégration suivant sont obtenus [Reddy, 1993] :

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{La différence avale ou schéma d'Euler (conditionnellement stable) } O(\Delta t), \\ \frac{1}{2} & \text{Schéma de Crank-Nicholson (stable) } O((\Delta t)^2), \\ \frac{2}{3} & \text{Méthode de Galerkin (stable) } O((\Delta t)^2), \\ 1 & \text{Différence amont (stable) } O(\Delta t). \end{cases}$$

Si $\alpha = 0$, le schéma est totalement explicite. La solution au temps présent ne dépend que de terme au temps passé. Par contre, si $\alpha = 1$, le schéma est totalement implicite, et le système est résolu pour tous les noeuds. Les équations prennent la forme d'un système matriciel. Pour les autres valeurs de α , le système est partiellement implicite.

Le schéma de Crank-Nicholson et la méthode de Galerkin sont meilleures en raison de l'ordre de précision supérieure et de leur stabilité sans condition. La stabilité indique que l'équation convergera, mais cela ne garantit pas qu'elle convergera vers une solution viable. Dans le cas où $\alpha < \frac{1}{2}$, il y a une restriction sur le pas de temps Δt [Reddy, 1993]. Il faut que :

$$\Delta t < \Delta t_{cr} \equiv \frac{2}{(1 - 2\alpha)\lambda}, \quad (3.35)$$

où λ est la plus grande valeur propre associée aux équations d'éléments finis.

Au temps t_n , l'équation 3.32 devient

$$[K]_n \vec{u}_n + [M] \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t} = \vec{F}_n. \quad (3.36)$$

La matrice $[M]$ est considérée indépendante du temps, d'où l'absence d'indice. Au temps t_{n+1} , l'équation 3.32 est

$$[K]_{n+1} \vec{u}_{n+1} + [M] \frac{\partial \vec{u}_{n+1}}{\partial t} = \vec{F}_{n+1}. \quad (3.37)$$

L'équation 3.33 est multipliée par Δt_{n+1} et $[M]$ et devient :

$$\Delta t_{n+1} \alpha [M] \vec{u}_{n+1} + \Delta t_{n+1} (1 - \alpha) [M] \vec{u}_n = [M] \left(\frac{\partial \vec{u}_{n+1}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t} \right). \quad (3.38)$$

En isolant $[M] \frac{\partial \vec{u}_{n+1}}{\partial t}$ et $[M] \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t}$ des équations 3.36 et 3.37 et en les substituant dans 3.38, le système matriciel suivant est obtenu :

$$[\hat{K}]_{n+1} \vec{u}_{n+1} = [\hat{M}]_n \vec{u}_n + \vec{F}_{n,n+1}, \quad (3.39)$$

où

$$[\hat{K}]_{n+1} = [M] + \alpha \Delta t_{n+1} [K]_{n+1}, \quad (3.40)$$

$$[\hat{M}]_n = [M] - (1 - \alpha) \Delta t_{n+1} [K]_n, \quad (3.41)$$

$$\vec{F}_{n,n+1} = \Delta t_{n+1} \left[\alpha \vec{F}_{n+1} + (1 - \alpha) \vec{F}_n \right]. \quad (3.42)$$

3.6.4 Résolution des systèmes non-stationnaires et non-linéaires

Un système est non-linéaire et non-stationnaire lorsqu'il dépend du temps et que la matrice $[K]$ dépend du vecteur solution. Un système non-linéaire du type

$$[M] \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [K(u)] \vec{u} = \vec{F} \quad (3.43)$$

se résout itérativement par la méthode de Pickard et de Newton-Raphson. L'intégration dans le temps s'effectue par l'équation 3.38. En utilisant méthode de Newton-Raphson (3.27), le système prend la forme :

$$[Kt(u_{n+1}^i)] \delta \vec{u}_{n+1}^i = -\vec{\mathcal{R}}(u^i), \quad (3.44)$$

où

$$[Kt(u_{n+1}^i)] = \frac{\partial \vec{\mathcal{R}}(u^i)}{\partial \vec{u}_{n+1}} = \alpha \Delta t_{n+1} \left(\frac{\partial [K(u_{n+1}^i)]}{\partial \vec{u}_{n+1}} \vec{u}_{n+1}^i + [K(u_{n+1}^i)] \right) + [M], \quad (3.45)$$

$$\vec{\mathcal{R}}(u^i) = [\mathcal{K}(u_{n+1})] \vec{u}_{n+1}^i - [\mathcal{M}(u_n)] \vec{u}_n^i - \vec{F}_{n,n+1}^i, \quad (3.46)$$

avec :

$$[\mathcal{K}(u_{n+1})] = [M] + \alpha \Delta t_{n+1} [K(u_{n+1}^i)], \quad (3.47)$$

$$[\mathcal{M}(u_n)] = [M] - (1 - \alpha) \Delta t_{n+1} [K(u_n^i)], \quad (3.48)$$

$$\vec{F}_{n,n+1}^i = \Delta t_{n+1} [\alpha \vec{F}_{n+1}^i + (1 - \alpha) \vec{F}_n^i]. \quad (3.49)$$

Le résidu est dérivé par rapport au vecteur solution présent \vec{u}_{n+1} . La dérivée des matrices qui dépendent du vecteur solution passé \vec{u}_n est donc nulle.

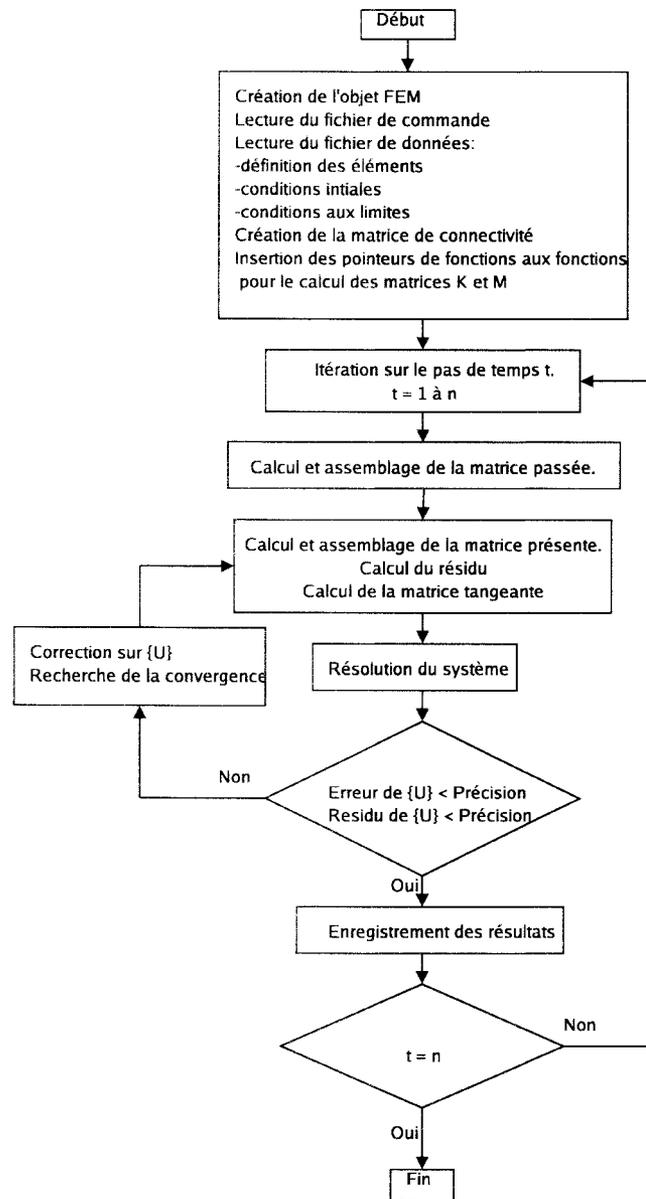


FIG. 3.3 – Organigramme de résolution pour un problème non-linéaire et non-stationnaire.

Chapitre 4

Simulation

En appliquant la méthode des éléments finis, l'équation 2.68 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[M] \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [K(u)] \vec{u} = 0, \quad (4.1)$$

où

$$M_{ij}^e = \int_{-1}^1 \hat{\psi}_i^e \hat{\psi}_j^e \mathcal{J}_e d\epsilon, \quad (4.2)$$

$$K_{ij}^e(e) = \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\mathcal{J}_e} \hat{\psi}_i^e \frac{\partial^2 \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon^2} + \hat{\psi}_i^e \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \left(\alpha + \frac{\beta}{\mathcal{J}_e} \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \right) d\epsilon, \quad (4.3)$$

où les fonctions hermitienne $\hat{\psi}$ sont données par les équations 3.13a. Le système matriciel est résolu par la méthode de Newton-Raphson. Les détails de la dérivation de ce système d'équations sont présentés à l'annexe B.

Un programme orienté objet en C++, nommé *femnonlin*, a été créé pour résoudre ce problème. Le programme est constitué de deux parties : le module de résolution par élément fini et le module de définition du problème. Les deux modules sont totalement disjoint, c'est à dire qu'il n'est pas nécessaire d'adapter le moteur d'éléments à chaque nouveau problème. Les différentes composantes du programme ont été vérifiées à partir de routine de test basé sur des problèmes d'éléments finis résolus. Pour plus d'information sur le programme, consulter la documentation et consulter les diagrammes UML fournis avec le code sur le CD-ROM.

Il n'a pas été possible d'obtenir de solution à partir du code *femnonlin*. Les solutions deviennent rapidement instables. Des oscillations apparaissent dans la solution et s'amplifient avec le temps jusqu'à ce que le programme se termine en raison d'un pas de temps trop faible. La cause de ce problème est une instabilité numérique dont la cause n'a pas été identifiée faute de temps et de compétence suffisamment poussé sur ce type de problème. Une hypothèse est que les gradients de la solution sont trop important.

Le type de schéma numérique employé est trop simpliste. La positivité de la densité n'est pas renforcé. La diffusion numérique n'a pas été limitée. Il est fort probable que cette diffusion numérique soit la cause des instabilités numériques. Une méthode de correction du flux aurait été surement préférable.

Chapitre 5

Principe de la scanographie

La tomодensitométrie ou scanographie est une technique non-destructive permettant d'obtenir une représentation 3D d'un corps. En médecine, cette technique permet d'observer les organes internes avec une précision inégalée. La scanographie industrielle existe et diffère de son application médicale. Les scanographes industriels sont habituellement plus lents, mais plus précis.

La tomographie par rayon X consiste à reconstruire l'image interne d'un corps à partir de ses projections. Les rayons X et gammas ont un grand pouvoir de pénétration et possèdent une grande résolution spatiale. Les projections sont obtenues par la transmission du signal émis qui est partiellement absorbé. L'image résultante de la reconstruction des projections est une carte de l'absorption des rayons X à l'intérieur du corps.

La section suivante traite de l'absorption des rayons X en général, des mécanismes d'absorption, comme l'effet photoélectrique, et des artefacts présents dans les images. Mais tout d'abord, une description du Laboratoire Multidisciplinaire de Scanographie du Québec (LMSQ) et de ses équipements est présentée.



FIG. 5.1 – Le scanographe du LMSQ.

5.1 Le scanographe du LMSQ

Le scanographe du LMSQ est un tomodensitomètre de marque Somatom Volume Access de la compagnie Siemens. Sa résolution spatiale maximale est de 0,1 mm. Cette précision est atteinte pour des analyses sur des objets de 5 cm de diamètre et moins. Le scanographe peut analyser des objets d'un diamètre maximal de 50 cm et de 2,5 mètres de long. La particularité du Volume Access est que le portique se déplace pour l'analyse. La table n'est pas en porte-à-faux et permet de supporter de lourde charge. Il est donc possible d'analyser facilement des carottes de sédiments ou des billes de bois. Le principal avantage du Somatom est sa vitesse d'analyse. Il analyse une carotte d'un mètre de long et en restitue les coupes internes en moins d'une minute. Cette vitesse permet d'effectuer des études dynamiques inusitées jusqu'à ce jour.

L'appareil est fourni avec deux stations de travail Siemens permettant la saisie, la recons-

truction et la visualisation des données. Le logiciel Syngo utilisé est conçu pour l'application médicale. Il est inadapté pour les présentes études sédimentologiques. Le traitement des images a été automatisé par des routines en MatLab. Le laboratoire possède deux stations Windows et deux tours Silicon Graphic de 800 Go de capacité de stockage.

Les images scanographiques sont enregistrées dans un format médical standard : le DICOM 3.0 [ACR-NEMA, 2004]. Le DICOM spécifique de Siemens est très contraignant. L'image est limitée à 12 bits, soit 4096 valeurs d'intensités. Le scanographe peut cependant réaliser une image en 16 bits, dix fois plus précise. La taille des images est limitée à 512 x 512 pixels. MatLab permet d'ouvrir les images DICOM avec la fonction *dicomread* et lire l'entête avec la fonction *dicominfo*. L'image est transformée en une matrice indexée qu'il est possible de traiter. Sinon, le logiciel *Osiris* [Ligier, 2004] peut être utilisé pour la visualisation seulement.

Les principaux désavantages du scanographe sont d'ordre logiciel. Le logiciel de base est adapté pour les applications médicales. Il est généralement inapproprié pour les études géologiques. Il n'est pas possible de modifier ce logiciel selon nos besoins.

5.2 Atténuation des rayons X et gammas

Les rayons X et gammas sont des radiations électromagnétiques très énergétiques. L'énergie des rayons X est de l'ordre d'une dizaine à une centaine de keV. L'énergie des rayons gammas est supérieure à la centaine de keV.

Dans le cas d'un milieu homogène, l'atténuation dans un milieu d'un faisceau monochromatique de rayons X suit la loi de Lambert-Beer :

$$N_d = N_i e^{-\mu x}, \quad (5.1)$$

où N_d est le nombre de photons détectés, N_i est le nombre de photons initiaux, μ est le coefficient d'absorption linéaire (cm^{-1}) et x est l'épaisseur traversée dans le matériel (cm).

Pour un milieu hétérogène et un faisceau polychromatique, la relation 5.1 doit être modifiée. Les différences de compositions et de densités sur le parcours du rayon sont prises

en compte. L'atténuation totale dépend de l'énergie des photons incidents. Le coefficient d'absorption linéaire est variable en fonction de la position et de l'énergie. Pour obtenir l'atténuation totale, le coefficient d'absorption est intégré sur tout le parcours du rayon S pour chaque énergie :

$$N_d(E) = N_i(E) e^{-\int_{\text{Rayon}} \mu(x,y,E) dS}, \quad (5.2)$$

où $N_i(E)$ est la densité spectrale initiale et $N_d(E)$ est la densité spectrale finale. La densité spectrale est une fonction qui indique le nombre de photons dans chaque gamme d'énergie. L'atténuation totale s'obtient en intégrant l'équation précédente sur tout le spectre d'énergie. Dans la plupart des applications médicales, le faisceau de rayon X est considéré comme monochromatique. Cette approximation apporte des artefacts comme le durcissement du faisceau (*beam hardening* en anglais) qui est discuté à l'annexe A.5.

5.3 Le coefficient d'absorption

Le coefficient d'absorption linéaire indique la capacité d'un matériaux à absorber des radiations. Il s'obtient à partir de l'équation de Beer-Lambert (éq. 5.1) et est l'inverse de l'épaisseur nécessaire pour atténuer le faisceau par un facteur de e (e est le logarithme népérien) :

$$\Lambda = \frac{1}{\mu}. \quad (5.3)$$

Le coefficient d'absorption linéaire dépend de l'énergie du faisceau ainsi que de la composition du matériel traversé. La composition comprend : les éléments le composant et la densité.

Le coefficient d'absorption massique est souvent préféré au coefficient d'absorption linéaire. Il est obtenu en enlevant la dépendance par rapport à la densité du coefficient d'absorption linéaire. La relation les unissant est :

$$\mu = \rho (\mu/\rho), \quad (5.4)$$

où (μ/ρ) est le coefficient d'absorption massique (cm^2/g) et ρ est la densité (g/cm^3). Le coefficient d'absorption massique permet de comparer facilement des matériaux de densité différente et ainsi mettre en évidence la dépendance par rapport à la composition.

En physique atomique, la section efficace est utilisée au lieu du coefficient d'absorption.

La relation entre le coefficient d'absorption massique et la section efficace est :

$$(\mu/\rho) = \frac{\sigma}{uA}, \quad (5.5)$$

où σ est la section efficace en cm^2 ou en *barn* ($10^{-24}cm^2$), u est l'unité de masse atomique (g) et A est la masse atomique relative.

Le tomodynamomètre ne donne pas les coefficients d'absorption linéaire en unité absolue, mais en unité Hounsfield. L'unité Hounsfield est relative. Elle correspond à une normalisation du coefficient d'absorption linéaire par rapport à celui de l'eau :

$$HU = 1000 \left(\frac{\mu - \mu_{eau}}{\mu_{eau}} \right), \quad (5.6)$$

où μ_{eau} est le coefficient d'absorption linéaire de l'eau.

5.4 Interactions des rayons X avec la matière

Les rayons X sont des ondes électromagnétiques comme la lumière visible et se comportent comme toutes autres ondes. La particularité des rayons X est que leur longueur d'onde est de l'ordre de la taille de l'atome. La théorie classique de l'électromagnétique ne suffit plus pour expliquer l'interaction entre les rayons X et la matière. Il faut recourir à la physique quantique.

Les rayons X interagissent avec la matière par des processus d'absorption et de diffusion. Il y a deux principaux types d'interactions aux énergies considérés dans ce travail : l'effet photoélectrique, l'effet Compton et la production de paires. Dans cette section, ces deux processus sont brièvement présentés.

5.4.1 Effet photoélectrique

L'effet photoélectrique se produit lorsque qu'un photon éjecte un électron lié de l'atome en lui donnant son énergie. Cet effet a été mis en évidence par Hertz en 1886 [Eisberg and Resnick, 1985, Fowler, 1997] et expliqué par Einstein [Einstein, 1905], qui posa

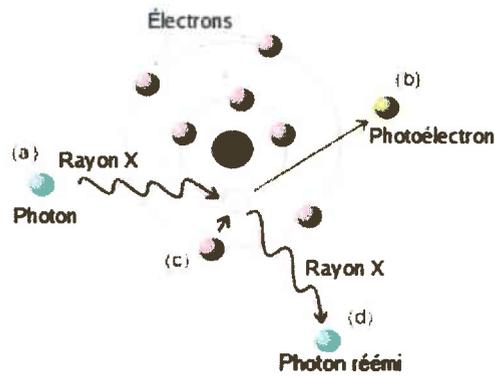


FIG. 5.2 – Principe de l'effet photoélectrique. (a) : Un photon incident éjecte un électron (photoélectron) (b). (c) : L'électron se désexcite. (d) : Réémission d'un photon ou de plusieurs photons de fréquences plus faible.

que la lumière transporte des quanta d'énergie égale à la fréquence multipliée par la constante de Planck :

$$E = hf, \quad (5.7)$$

où h est la constante de Planck et f est la fréquence.

L'effet photoélectrique ne peut se produire en deçà d'une certaine énergie du photon. Les électrons sont liés à l'atome par la force électromagnétique. L'énergie du photon incident doit être plus grande que l'énergie de liaison de l'électron pour l'éjecter :

$$\frac{hc}{\lambda} \geq w_0, \quad (5.8)$$

où w_0 est le travail d'extraction, c est la vitesse de la lumière, h est la constante de Planck et λ est la longueur d'onde. Si l'énergie du photon est plus grande que w_0 , un électron, nommé un photoélectron, est éjecté. L'énergie résiduelle du photon est transférée à l'électron sous forme d'énergie cinétique.

La probabilité d'absorption d'un photon dépend de son énergie et de la composition atomique du matériel. Un atome lourd absorbera des photons de plus grandes énergies qu'un atome léger en raison des électrons fortement liés près du noyau. L'absorption diminue avec l'augmentation de l'énergie des photons (figure 5.3). Les augmentations soudaines de l'absorption correspondent à l'énergie nécessaire pour extraire les électrons d'une couche électronique plus près du noyau. Les atomes sont composés de couches électroniques. Chaque couche possède une énergie de base spécifique. En deçà de cette énergie, aucun électron ne

peut être éjecté. Lorsque l'énergie des photons incidents atteint l'énergie de libération de la couche, les électrons de la couche peuvent être éjectés. Cette augmentation du nombre d'électron sensible au rayonnement augmente la probabilité d'absorption. Il y a des pics d'absorption pour chaque couches électroniques de l'atome [Hubbell and Seltzer, 2001]. Ils sont plus nombreux et importants pour les atomes lourds. Chaque atome possède un spectre d'absorption unique reflétant sa structure atomique. Lorsque l'énergie du photon dépasse l'énergie de la couche électronique la plus près du noyau, la couche K, il n'y a plus de pics et l'atténuation photoélectrique décroît avec l'énergie.

La probabilité d'interaction est proportionnelle à une puissance du numéro atomique Z et inversement proportionnelle à une puissance de l'énergie E :

$$P \sim cte \frac{Z^n}{E^m}, \quad (5.9)$$

où :

- $n = 4$ à 0,1 MeV et croît graduellement jusqu'à 4,6 à 3 MeV ;
- $m = 3$ à 0,1 MeV et décroît graduellement jusqu'à 1 à 5MeV .

Boespflug [Boespflug et al., 1994] utilise la relation avec $n = 3,8$ et $m = 3,2$.

5.4.2 L'effet Compton

L'effet Compton se produit lorsque la longueur d'onde de la lumière est de l'ordre de l'espace entre les électrons et que les électrons sont libres ou faiblement liés. Le photon frappe l'électron qui absorbe une partie de l'énergie sous forme cinétique et réémet un photon de fréquence plus faible dans une direction θ . La section efficace différentielle d'absorption Compton à un angle θ est donnée par la formule de Klein-Nishina :

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \Omega} = r_0^2 \left[\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right]^3 \left[1 + \frac{\alpha^2 (1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta) [1 + \alpha (1 - \cos \theta)]} \right]. \quad (5.10)$$

Le rayon classique de l'électron r_0^2 et α sont :

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \approx 2,818 \times 10^{-15} m \quad , \quad \alpha = \frac{E_\gamma}{mc^2}.$$

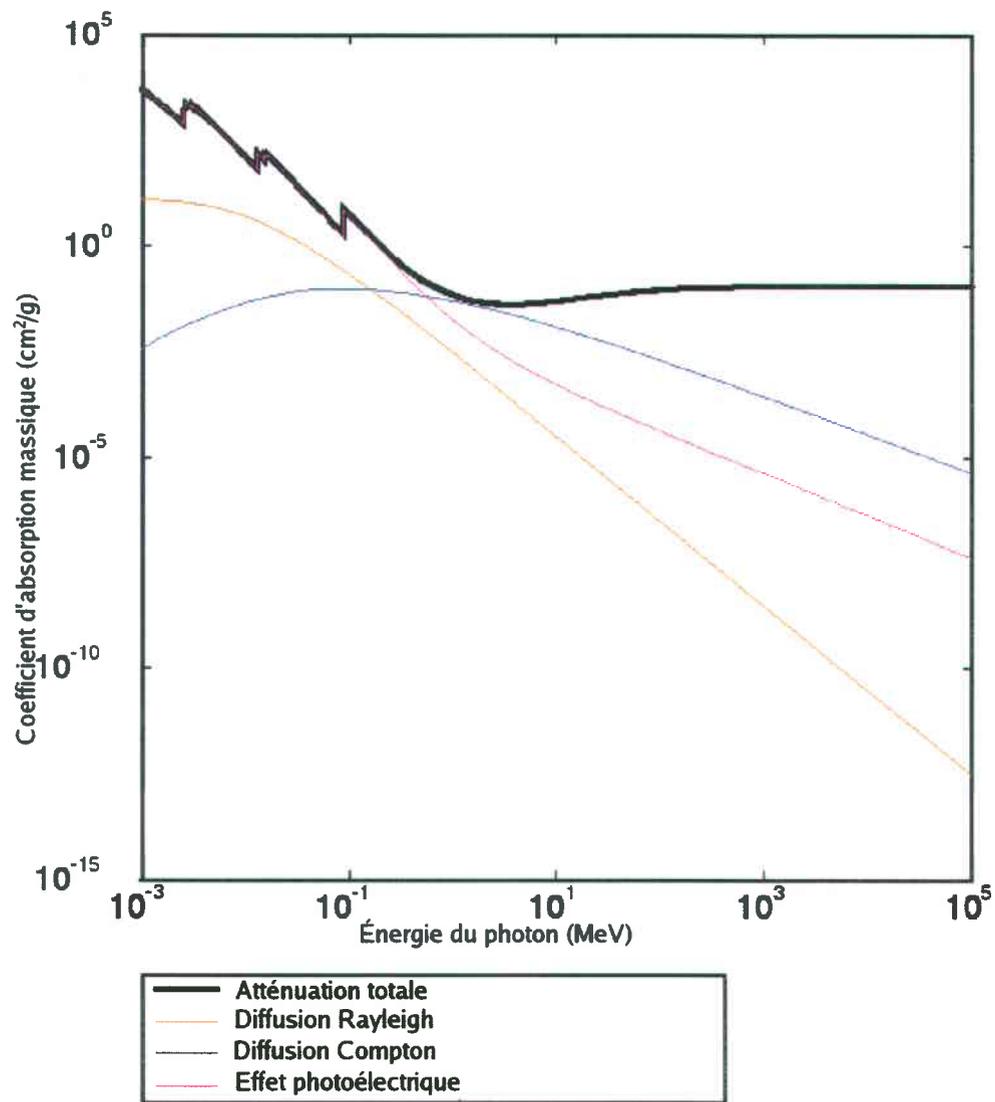


FIG. 5.3 – Coefficient d’absorption massique du plomb pour les effets photoélectrique, Rayleigh et Compton en fonction de l’énergie du faisceau de photons incidents [Hubbell and Seltzer, 2001].

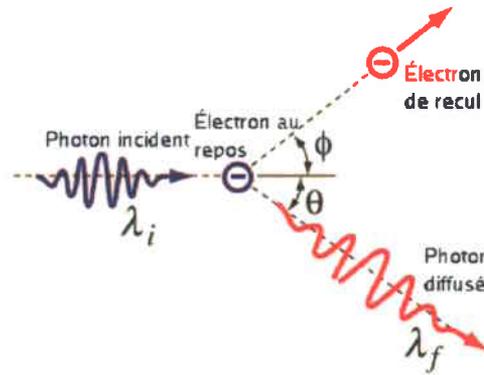


FIG. 5.4 – Principe de l'effet Compton. Un photon incident frappe un électron faiblement lié. L'électron est éjecté et diffuse un photon de plus faible énergie à un angle θ afin de conserver la quantité de mouvement.

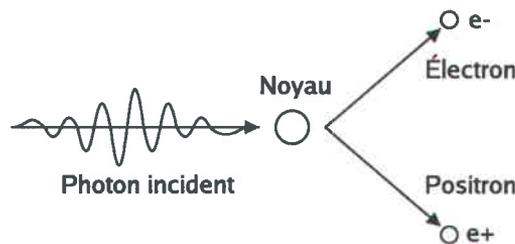


FIG. 5.5 – Processus de production de paire. Un photon incident interagit avec un noyau et crée une paire électron-positron.

En intégrant sur l'angle solide $d\Omega$ qui vaut $2\pi \sin \theta d\theta$ [Krane, 1988] :

$$\sigma_c = \frac{\pi r_0^2}{\alpha} \left\{ \left[1 - \frac{2(\alpha + 1)}{\alpha^2} \right] \ln(2\alpha + 1) + \frac{1}{2} + \frac{4}{\alpha} - \frac{1}{2(2\alpha + 1)^2} \right\}. \quad (5.11)$$

La section efficace d'absorption par effet Compton est indépendante du numéro atomique. Cette équation dépend de l'énergie du photon et de l'angle de diffusion du photon.

5.4.3 Production de paire

Lorsqu'un photon de plus de 1,02 MeV passe près d'un atome, il y a une probabilité qu'il génère une paire électron-positron [Eisberg and Resnick, 1985]. Durant le processus, le

photon perd toute son énergie dans la création d'un positron et d'un électron (figure 5.5). L'énergie de recul du noyau est négligeable en raison de sa masse importante. Un positron est une antiparticule qui possède les mêmes propriétés que l'électron, mais avec une charge inverse. L'excédant d'énergie du photon est transféré en énergie cinétique à l'électron et au positron. Le noyau atomique est nécessaire pour permettre la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

5.4.4 Importance relative des diverses interactions

Le coefficient d'absorption total s'obtient en sommant toutes les contributions de chaque processus d'absorption :

$$(\mu/\rho)_t = (\mu/\rho)_{PE} + (\mu/\rho)_c + (\mu/\rho)_{PP}, \quad (5.12)$$

où $(\mu/\rho)_{PE}$, $(\mu/\rho)_c$ et $(\mu/\rho)_{PP}$ sont les coefficients d'absorption massique pour l'effet photoélectrique, Compton et la production de paire.

Dans le domaine médical, l'énergie des photons est comprise entre 0 et 150 keV. Il n'y a donc pas de production de paire. L'effet Compton est dominant aux hautes énergies et pour des éléments avec un numéro atomique faible ($Z < 20$) (figure 5.6). L'effet photoélectrique se fait sentir davantage pour des éléments lourds ou pour de faibles énergies. Plus le numéro atomique est élevé et plus l'énergie du photon devra être grande pour que l'effet photoélectrique soit négligeable par rapport à la diffusion Compton.

Le corps humain est composé d'éléments de faible numéro atomique ($Z < 20$). L'effet Compton est dominant dans cette gamme d'énergie. Le coefficient d'absorption massique pour la diffusion Compton est presque constant pour les éléments légers. Il est donc facile d'extraire la densité des tissus.

Cette assertion n'est plus vraie pour l'analyse de matériaux géologiques. Les roches et les sédiments sont constitués d'éléments plus lourds que ceux contenus dans le corps humain et leur densité est généralement plus grande. L'effet photoélectrique est presque toujours dominant. Il n'est alors plus possible d'extraire la densité de manière linéaire. L'annexe D présente une corrélation préliminaire du coefficient d'absorption théorique avec les coefficients expérimentaux d'une trentaine de minéraux analysés sous le scanographe. Le modèle utilise des

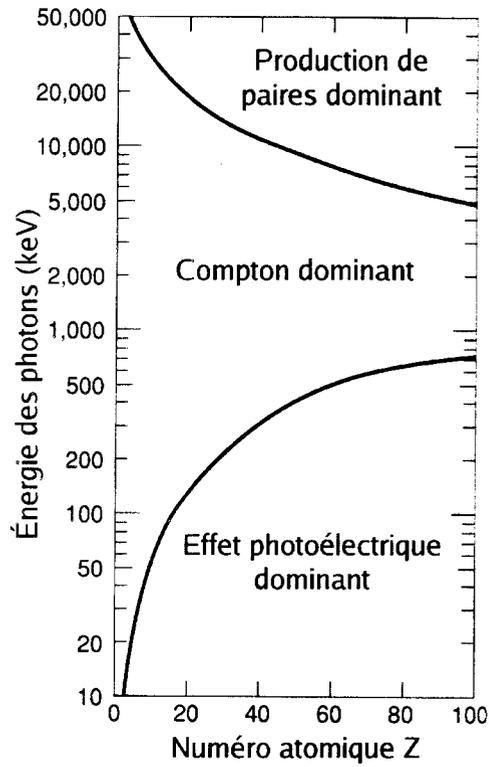


FIG. 5.6 – Plage de dominance pour les effets Compton et photoélectrique.

tables de coefficients d'absorption massique [Hubbell and Seltzer, 2001] de chaque élément pour calculer celui d'un composé. L'effet du spectre polychromatique a été pris en compte. Le résultat de cette expérience est médiocre : 50 % d'erreur même après correction avec une courbe exponentielle.

5.4.5 Atténuation pour les composés

Pour des composés, le coefficient d'absorption massique est simplement la somme du coefficient de chaque atome multiplié par sa fraction massique :

$$(\mu/\rho) = \sum_i^n w_i (\mu/\rho)_i . \tag{5.13}$$

La fraction massique w_i est :

$$w_i = \frac{Q_i M_i}{\sum_i^n Q_i M_i}, \quad (5.14)$$

où M_i est la masse molaire de l'élément i et Q_i est la quantité d'atome dans le composé.

5.4.6 Le numéro atomique effectif

Le numéro atomique Z est connu pour les éléments. Lorsque l'échantillon est un composé, le numéro atomique effectif Z_e est utilisé. Le numéro atomique effectif est donné par la relation suivante [Boespflug et al., 1994] :

$$Z_e = \left(\sum_{i=1}^n (w_i Z_i)^{3,5} \right)^{-3,5}, \quad (5.15)$$

où w_i et Z_i sont la fraction massique et le numéro atomique de l'espèce atomique i . Le numéro atomique effectif est une moyenne pondérée du numéro atomique. Le calcul de Z_e tient compte de l'augmentation de la probabilité d'interaction par effet photo-électrique avec le numéro atomique (voir la section 5.4.1). Le Z_e accorde un plus grand poids aux espèces atomiques avec un numéro atomique élevé que celles avec un numéro atomique faible.

5.5 Analyse de sédiments sous scanographe

Le scanographe possède une résolution finie. La mesure résultante est une intégration de tout les éléments contenus dans un cube de volume $V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Les variables Δx , Δy , Δz représentent la précision du tomodynamètre en x , y et z . L'absorption de rayons X à l'intérieur de ce cube est une fonction de la position. Notons $\mu(x, y, z)$ cette fonction. Le coefficient d'absorption total μ_{tot} est l'intégrale de $\mu(x, y, z)$ sur le volume :

$$\mu_{tot} = \frac{\int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \int_{\Delta x} \mu(x, y, z) dx dy}{\Delta x \Delta y \Delta z} dz. \quad (5.16)$$

Si $\mu(x, y, z) = cte$, alors $\mu_{tot} = \mu = cte$. Ce cas particulier survient si l'échantillon est de composition, de densité et de structure cristalline homogènes. Ce cas particulier survient

aussi lorsque le volume $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ est très petit par rapport aux variations de $\mu(x, y, z)$. Les sédiments sont composées de grains ayant une taille moyenne D . Si $\Delta x \Delta y \Delta z \ll D$, alors $\mu(x, y, z) \approx cte \approx \mu_{tot}$. La résolution du scanographe de Siemens, bien qu'elle soit importante, est trop faible et cette approximation ne s'applique pas pour les éléments que nous cherchons à analyser.

Un sol est habituellement non homogène et non saturé. Il contient donc des particules solides de composition différentes, de l'eau ou un fluide et du gaz. Le coefficient d'absorption est le reflet de ce mélange. Heureusement, les rayons X sont peu affectés par les liens moléculaires. Il est donc possible de décomposer le coefficient d'absorption total μ_t en ses composantes. Le coefficient d'absorption massique μ_t s'obtient à partir des fractions volumétriques des diverses phases du sol :

$$\mu_t = \sum_i^n \phi_i \mu_i \quad (5.17)$$

Dans le cas saturé ($S = 1$), μ_t devient :

$$\mu_t = (1 - n)\mu_s + n\mu_l = \frac{\mu_s + e\mu_l}{1 + e} \quad (5.18)$$

où μ_s et μ_l sont les coefficients d'absorption linéaire de la phase solide et liquide. De même, le coefficient d'absorption massique deviendra :

$$(\mu/\rho)_t = \frac{\rho_s (\mu/\rho)_s + e\rho_l (\mu/\rho)_l}{\rho_s + e\rho_l} \quad (5.19)$$

Dans le cas où le solide et le liquide sont des composés, la relation 5.13 est appliquée pour déterminer les coefficients d'absorption massique. Dans le cas où l'énergie du faisceau n'est pas constante, la relation 5.19 n'est plus valide en raison de la dépendance de $(\mu/\rho)_t$ en fonction de l'énergie. Il faut sommer tous les coefficients d'absorption massique pour chaque énergie :

$$(\mu/\rho)_t = \frac{\int (\mu/\rho)(E) E dE}{\int E dE} \quad (5.20)$$

Pour prédire théoriquement $(\mu/\rho)_t$, la connaissance de la densité de chacune des phases, la composition chimique et les coefficients d'absorption massique pour chaque élément en fonction de l'énergie sont requis.

Chapitre 6

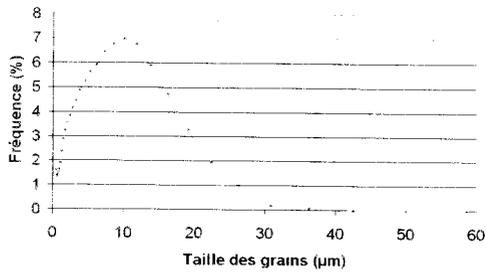
Protocoles expérimentaux

6.1 Les matériaux constituant les sédiments

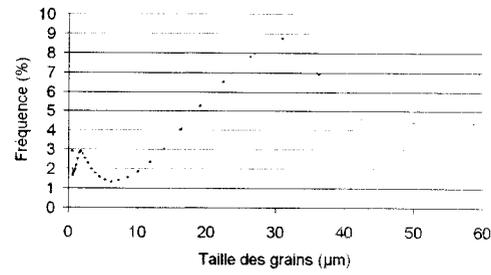
Trois types de matériaux ont été utilisés pour générer les colonnes sédimentaires synthétiques : le sable d'Ottawa (Illinois), la kaolinite et l'argile de Portneuf. Le sable d'Ottawa est essentiellement composé de SiO_2 . Ce sable a été choisi en raison de sa pureté, ce qui facilite le calcul de la porosité à partir des valeurs HU. La courbe granulométrique du sable d'Ottawa (figure 6.1c) est centrée entre 60 et 250 μm . Ce sable a été trié à travers deux colonnes de tamis. La première série de tamis est : 500, 250, 125 et 63 μm et la seconde est : 500, 250, 125, 90 et 63 μm . Les fractions plus grandes que 500 μm et plus petites que 63 μm n'ont pas été utilisées dans les expériences.

Le silt-argileux a été prélevé à Portneuf. Ce sédiment est constitué en grande partie de silt d'environ 30 μm de diamètre équivalent (figure 6.1b) avec une fraction d'argile fine de 3 μm de diamètre équivalent. Le silt-argileux provient d'un dépôt non-consolidé de la mer post-glaciaire de Laflamme mis en place durant l'holocène [Vincent, 1989].

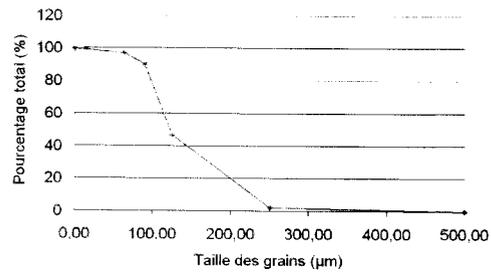
La kaolinite utilisée provient de la compagnie *Argiletz*. La taille moyenne des grains d'argile est de 10 μm . La composition chimique de la kaolinite est : $49 \pm 3\%$ de SiO_2 , $37 \pm 2\%$ de Al_2O_3 et $1,6\%$ de K_2O . Le reste étant complété par des traces de calcium, de fer, de sodium et de magnésium.



(a)



(b)



(c)

FIG. 6.1 – Courbes granulométriques pour : (a) : la kaolinite, (b) : le silt-argileux et (c) : le sable d'Ottawa.

6.2 Relation entre les HU et la densité des grains d'un milieu granulaire

Corréler théoriquement l'absorption et la densité est complexe (voir section 5.5). Cette méthode est aussi imprécise (50 % d'erreur. Voir section D.2). Il est préférable d'étalonner expérimentalement chaque type de matériel pour relier les valeurs d'absorption à des densités réelles. Le désavantage de cette méthode est que le matériel à analyser doit être homogène ou que les différents matériaux soient identifiables dans l'image pour appliquer les corrections localement. La procédure utilisée pour l'étalonnage consiste à analyser un sédiment sec de porosité connu au scanographe. Tout d'abord, il faut connaître la densité des grains de solide.

La densité des grains ρ_s de l'échantillon est mesurée. Le volume du sédiment est mesuré par déplacement d'un volume d'eau. La densité s'obtient en divisant la masse à sec par le volume de solide :

$$\rho_s = \frac{m}{V_s}. \quad (6.1)$$

L'étape suivante consiste à mesurer la densité totale. La densité totale est une moyenne de la densité des grains et de l'air. Une masse de matériel sec est versée dans un cylindre gradué et le volume est mesuré. Il n'est pas nécessaire de tasser le matériel dans le cylindre. La porosité est prise en compte dans le calcul. La densité totale ρ_t est calculée en divisant la masse de matériel sur le volume à sec :

$$\rho_t = \frac{m}{V_{sec}}. \quad (6.2)$$

Le cylindre gradué contenant l'échantillon est analysé au tomodynamomètre. Le protocole d'analyse doit être le même que celui utilisé dans les analyses scanographiques faites sur ces matériaux. L'absorption moyenne (en HU) est calculée en moyennant les valeurs Hounsfield de l'image de l'échantillon. Le contour des échantillons ne sont pas considérés dans les moyennes. Ces zones contiennent des artefacts.

L'indice des vides de l'échantillon est calculé à partir de la densité totale et de la densité de chaque partie constituant le mélange : dans le cas présent, la densité du matériel et de l'air. La densité de l'air doit être calculée à partir de la loi des gaz parfaits.

$$\rho_{air} = \frac{P}{RT} \quad (6.3)$$

où P est la pression en Pa , R la constante des gaz parfait (287, 05 pour l'air) et T est la tem-

pérature en Kelvin. L'indice des vides s'obtient à partir de l'expression 2.17 pour la densité totale d'un milieu granulaire en fonction des densités des constituants. L'indice des vides est :

$$e = \frac{\rho_s - \rho_t}{\rho_t - \rho_{air}} \quad (6.4)$$

Le coefficient d'absorption correspondant aux grains seulement est calculé à partir de l'HU moyen mesuré. L'absorption moyenne s'obtient de la même manière que la densité. Elle est une moyenne de l'absorption par les grains et par l'air (éq. 5.18). Le coefficient d'absorption des grains est :

$$HU_s = (1 + e)HU_{moy} - eHU_{air} \quad (6.5)$$

La fraction volumétrique de chaque constituant est donnée par l'indice des vides. Le facteur de conversion HU/ρ est finalement calculé. Il s'obtient en divisant la densité des grains par l'absorption des grains seuls.

$$C_\rho = HU/\rho_s \quad (6.6)$$

Cette procédure a été appliquée pour le silt-argileux et pour le sable d'Ottawa. Les résultats

Matériel	Sable Ottawa	Silt-argileux
$HU_{moyen} (HU)$	723,8	803,7
Écart-type	54,4	108,1
Densités matériel + air (g/cm^3)	$1,55 \pm 0,02$	$1,37 \pm 0,03$
Densités des grains (g/cm^3)	$2,6 \pm 0,1$	$2,4 \pm 0,2$
Indice des vides	$0,71 \pm 0,06$	$0,7 \pm 0,1$
HU des grains (HU)	1964,738	2083,09
$C_\rho (g/(cm^3 - HU))$	$1,31 \times 10^{-3}$	$1,1665 \times 10^{-3}$

TAB. 6.1 – Densité, absorption et relation densité-HU pour le sable d'Ottawa et le silt-argileux.

sont présentés dans le tableau 6.1. La densité du sable (2,6) est plus importante que celle du silt-argileux (2,4), mais l'absorption est moindre, car la teneur en éléments lourds du silt-argileux est plus élevée.

6.3 Sédimentation et consolidation sous le tomodynamètre

Cette section présente la méthodologie utilisée pour générer les colonnes sédimentaires synthétiques et présente les essais générés. Brièvement, l'expérience consiste à analyser des colonnes de sédimentation synthétiques au scanographe.



FIG. 6.2 – Des colonnes de sédimentation en ABS et le matériel pour générer les dépôts.

Les colonnes de sédimentation actuelle sont constituées de tube d'ABS (figure 6.2) de 7,62 cm de diamètre intérieur. La base est une sellette de toilette en ABS de 17,8 cm de diamètre à la base. La hauteur des colonnes est de 48 à 56 cm. Un volume maximal de 1800 ml est utilisé pour les expériences. Ce volume correspond à la hauteur de la colonne d'eau admissible au tomodynamètre.

Le scanographe est étalonné tous les 48 heures. L'étalonnage s'effectue à partir du logiciel Syngo après avoir enlevé la table. Les échantillons sont replacés sur la table au même endroit et à la même hauteur. Cette procédure permet de minimiser le traitement informatique lors de la comparaison de plusieurs images du même essais. Sinon, il faut corriger de manière informatique. L'inclinaison de la table est vérifiée avec un niveau.

Des marques sont apposées sur la table pour indiquer la position des colonnes. Pour aligner plusieurs colonnes sur la table, la première colonne est positionnée à l'aide des marques et des pointeurs lasers du tomodynamètre. Les colonnes subséquentes sont placées en collant bien la base avec la précédente. Le centre des colonnes de sédimentation est placé aux positions suivantes : -89 mm, -267 mm, -445 mm, -623 mm, -801 mm, -979 mm, -1157 mm, -1335 mm, -1523 mm.

6.3.1 Préparations des échantillons monocouches

La préparation des couches sédimentaires consiste à verser 600 g de sédiment dans 1000 ml de fluide. Le volume de fluide est complété jusqu'à 2000 ml. Une concentration de 300 g/l est obtenue. La solution est homogénéisée à l'aide d'un mélangeur. Un volume de 1800 ml de cette solution est rapidement versé dans la colonne de sédimentation. Cette quantité est le volume des colonnes maximal visible au scanographe. La colonne de sédimentation est alors placée sur la table du tomodynamomètre et l'analyse débute immédiatement.

Le protocole d'analyse utilisé est *argile-série*. Les paramètres de ce protocole sont indiqués au tableau 6.2. Ce protocole ne possède pas de reconstruction avec agrandissement. Ce protocole consiste en 30 *control scan* préprogrammés. Il n'est pas possible d'en ajouter d'avantage en raison d'une limitation logicielle. Les essais monocouches ont été analysés à des temps variables. En début d'acquisition, le temps entre chaque analyse est de 10 à 15 secondes, selon l'habileté de l'opérateur. Ce temps est ensuite augmenté de manière exponentielle afin de suivre correctement l'évolution de la consolidation en minimisant le nombre de mesures.

6.3.2 Préparations des échantillons multicouches

Le premier dépôt est généré de la même manière que pour les essais monocouches. Par contre, la quantité de sédiments ajoutée est de 100 g. Cette quantité est utilisée pour tous les essais multicouches sans exception. L'analyse s'effectue juste avant le dépôt de la couche suivante. Deux fréquences de déposition sont utilisées : 2 et 24 heures. Ces deux types d'essais sont menés en parallèle dans des séries indépendantes de colonnes sédimentaires.

L'ajout d'une couche consiste d'abord à enlever 300 ml de fluide de la colonne sédimentaire avec une grosse pipette pour ne pas perturber le dépôt. Dans un bécher, 100 g de sédiment est mélangé dans 150 ml de fluide. Le volume est complété jusqu'à 300 ml, dispersé au mélangeur et versé très rapidement dans la colonne de sédimentation. Le mélange est versé rapidement pour éviter que les grains ne se déposent dans le fond du bécher. Le mode de versement influence le dépôt.

L'étape suivante consiste à analyser la colonne au tomodynamomètre. Deux types de pro-

Protocole	Sans agrandissement	Avec agrandissement
Type d'étude	Control scan	Control scan
Taille des pixels	0,80	0,36
Épaisseur de la couche	1	1
Diamètre de la reconstruction	410	186
Position de l'image	-204,6;-359,6	-92,82;-137,82
Différence de potentiel (kVp)	140	140
Courant du tube à rayon X (mAs)	107	107
Point focal	0,7	0,7
Filtre	B45s	B45s
Échelle étendue	non	non

TAB. 6.2 – Protocole utilisé dans les protocoles de la série *argile* et *argile-zoom*.

tocoles ont été utilisés, *argile-Xtubes* et *argile-Xtubes-zoom*. Le X remplace le nombre de colonnes présentes sur la table. Par exemple, pour sept colonnes, le protocole *argile-7tubes* est utilisé. Les paramètres de ces protocoles sont présentés au tableau 6.2. Les protocoles avec agrandissement effectuent une reconstruction supplémentaire en plus de la reconstruction avec une fenêtre normale.

Les essais ne sont pas analysés individuellement au tomodensitomètre. Une série de colonnes est analysée en même temps pour diminuer les manipulations et gagner du temps. L'appendice C présente les différents groupements de colonnes et leurs positions sur la table d'analyse.

6.3.3 Sédimentation dans l'huile de canola

La viscosité de l'eau est faible. Aussi, les particules de sable chutent rapidement et se déposent au fond du bécher en moins de trente secondes. Il est alors impossible d'observer la phase de sédimentation au tomodensitomètre. La procédure de mesure est trop longue par rapport au temps de chute. Une manière de résoudre ce problème est d'augmenter la hauteur de la colonne d'eau. Cette solution n'est pas possible en raison de l'ouverture permise par le scanographe. Il ne faut pas que l'objet dépasse 50 cm. Cette contrainte entraîne une restriction sur le temps de chute et sur la formation de turbulences.

La turbulence est, en effet, le second problème majeur de l'expérience. Or, il faut la mini-

miser le plus possible. Il est difficile de maintenir en suspension du sable sans créer des courants. Ces courants modifient l'état final de déposition et créent de la turbulence. La couche formée n'est plus uniforme. Les courants initiaux doivent être minimisés.

L'utilisation de l'huile de canola minimise ces problèmes. La viscosité de l'huile de canola est de $0,07 \text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ et sa densité est de $910 \text{kg}/\text{m}^3$ [Simecek-Beatty et al., 2001]. La viscosité augmente le nombre de Reynolds et repousse la limite de formation des turbulences. Elle diminue aussi la vitesse de chute qui passe de 30 secondes à 30 minutes.

6.4 Liste des essais

Les essais portent tous un identifiant unique qui permet de les différencier et de connaître rapidement la nature de l'essai. Le nom des images DICOM rattachées à chaque essais porte le même préfixe que l'essai. Chaque essai porte aussi un numéro unique allant de 1 à 28. Le nom des essais est présenté au tableau 6.3.

Le nom commence par des lettres exprimant si l'échantillon utilisé est du sable ou de l'argile. La lettre *A* est utilisée pour l'argile et les lettres *SO* pour le sable d'Ottawa. La seconde lettre indique le fluide utilisé : *E* pour l'eau et *H* pour l'huile. La nomenclature diffère ensuite entre les sables et les argiles. Pour les essais monocouches d'argile, les acronymes qui suivent indique le type d'argile : *Por* pour le silt-argileux de la mer de Champlain prélevé à Portneuf et *Kao* pour la kaolinite. Le dernier chiffre, pour ce cas, sert à différencier deux essais identiques. Par exemple, *AEKao-1* signifie l'essai monocouche numéro un de kaolinite dans l'eau. Pour les sables, une parenthèse suit la définition du fluide et contient la plage de granulométrie de la couche sédimentaire. Par exemple, *SOH(125-250)* signifie sable d'Ottawa dans l'huile dont la taille des grains est comprise entre 125 et 250 μm .

Pour les essais monocouches de sable, la concentration de la suspension est ajoutée à l'identifiant. Par exemple, *SOH(125-250)-300gpl* signifie une concentration de 300 grammes par litre de sable dans de l'huile. Les noms des essais multicouches sont obtenus simplement en faisant la liste des couches utilisées par ordre d'empilement. La concentration de la couche est indiquée à la fin de la liste de couches. La période de déposition est ajoutée à la toute fin du nom. Pour les sables, le suffixe *S* et le type de fluide sont omis. Seule la plage granulométrique est indiquée. Pour bien synthétiser ces notions, prenons deux exemples. *SOH(90-125)(125-*

250)-100g-2h signifie une alternance de couches de sable d'Ottawa dans de l'eau de 90 à 125 μm et 125 à 250 μm . La masse de chaque couches est de 100 g et la période de déposition est de 2 heures. De même, AEPor-AEpor-100g-24h-1 signifie la déposition de 100 g de silt-argileux tout les 24 heures.

TAB. 6.3: Liste des essais.

Liste des essais	
Numéro	Nom
1	AEPor-1
2	AEPor-2
3	AEKao-1
4	AEKao-2
6	AEPor-SE(125-250)-AEPor-2h
7	AEPor-SE(125-250)-AEPor-12h
8	AEPor-SE(125-250)-AEPor-24h
9	AEPor-AEpor-100g-24h-1
10	AEPor-AEpor-100g-24h-2
11	SOH(63-90)-300gpl
12	SOH(90-125)-300gpl
13	SOH(125-250)-300gpl
14	SOE(63-90)-300gpl
15	SOE(90-125)-300gpl
16	SOE(125-250)-300gpl
17	SOH(90-125)(90-125)-100g-2h
18	SOH(90-125)(90-125)-100g-24h
19	SOH(63-125)(63-125)-100g-2h
20	SOH(63-125)(63-125)-100g-24h
21	SOH(125-250)(125-250)-100g-2h
22	SOH(125-250)(125-250)-100g-24h
23	SOH(90-125)(125-250)-100g-2h
24	SOH(90-125)(125-250)-100g-24h
25	SOH(63-125)(90-125)(125-250)-100g-2h
26	SOH(63-125)(90-125)(125-250)-100g-24h
27	SOH(63-125)(125-250)-100g-2h
28	SOH(63-125)(125-250)-100g-24h

6.4.1 Traitement des images DICOM

Le traitement des images consiste à prendre une bande centrale dans chaque image et de moyenniser cette bande pour obtenir un profil. Les profils de chaque essai sont superposés sur un même graphique afin de montrer l'évolution temporelle de la porosité avec le temps. La position des colonnes sédimentaires est corrigée en raison des fluctuations de la position lors des manipulations. Cette correction permet une meilleure comparaison des profils. Ces opérations sont exécutées automatiquement par la fonction *TraiteColonneSediment.m* écrite en MatLab.

6.4.1.1 Vitesse de déposition

La vitesse de déposition a été mesurée à partir des images prélevées. La méthode consiste à mesurer la position de l'interface entre le sédiment en déposition et l'eau pour chaque image. La vitesse est calculée en divisant le déplacement de cette interface par le pas de temps :

$$v = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P_1 - P_2}{t_2 - t_1} \quad (6.7)$$

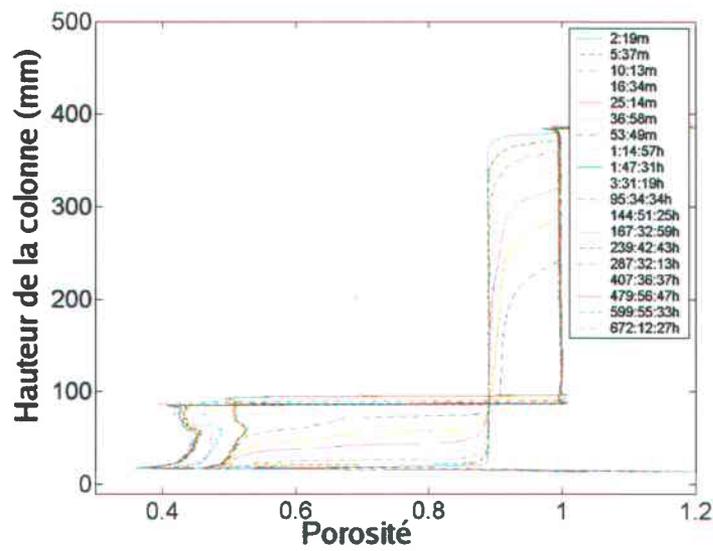
Chapitre 7

Résultats expérimentaux

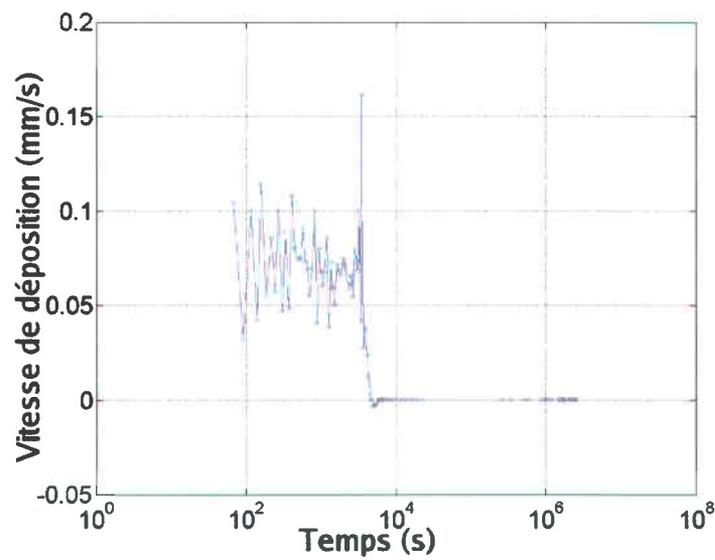
7.1 Monocouches de sable

Les essais de déposition monocouches de sable d'Ottawa dans l'huile montre l'évolution des phases de sédimentation et de consolidation d'une couche. Les figures 7.1a, 7.2a et 7.2b présentent l'évolution des profils de porosité en fonction du temps pour des sables d'Ottawa de granulométrie respective de 63 à 90 μm , 90 à 125 μm et 125 à 250 μm . Le graphique 7.1b présente la vitesse de déposition pour l'essai de 63 à 90 μm . Le profil est relativement constant entre 10^2 et 8×10^4 s et chute brusquement vers zéro. La chute correspond à la fin de la phase de sédimentation et au début de la phase de consolidation. Ce comportement est identique pour les deux autres essais.

La rapidité de la transition met en évidence que le couplage entre la phase de sédimentation et de consolidation est faible. L'expulsion de fluide de la portion de sédiment en compression ne modifie pas de manière significative la phase de sédimentation. La vitesse moyenne de déposition mesurée est de 0,075mm/s, ce qui correspond au calcul effectué d'après la loi de Stokes [Munson et al., 1998] (0,076mm/s), et ce malgré la concentration élevée de la suspension. Ce type de consolidation est dites de déposition libre de particules isolées et a été bien décrite par Imai (1980). L'interactions entre les grains lors de la phase de déposition est négligeable. Les grains chutent en suivant la loi de Stokes, ce que nos résultats montrent bien.

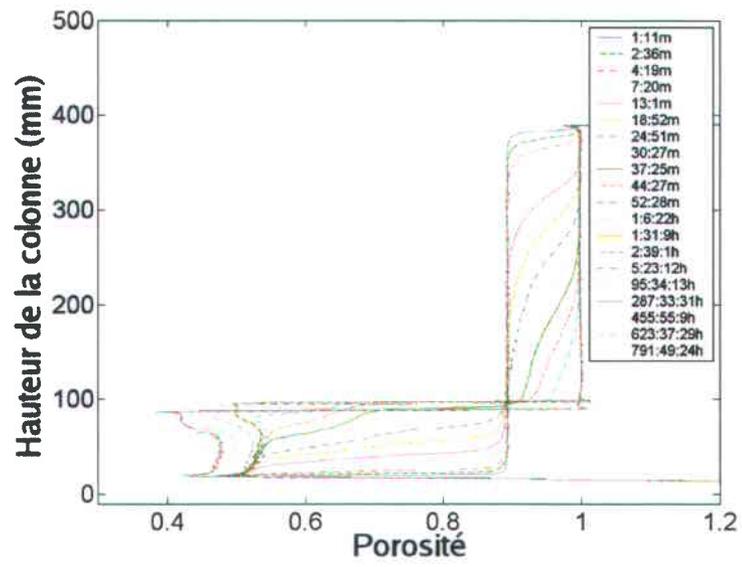


(a)

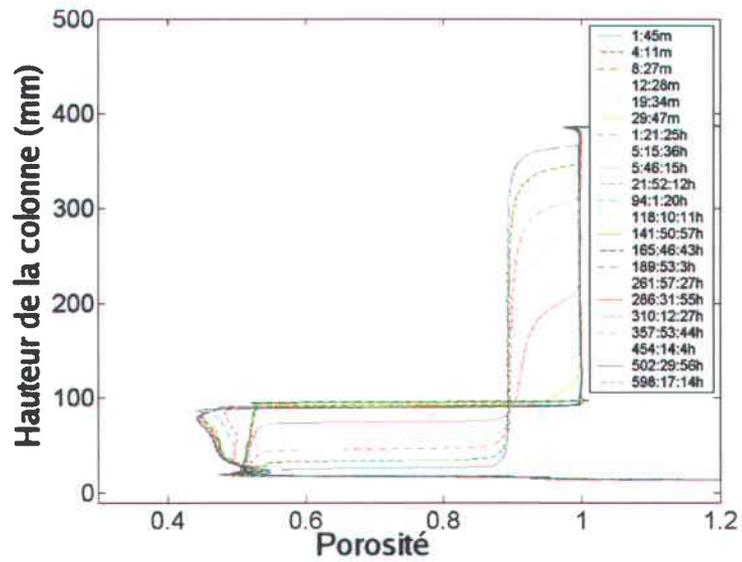


(b)

FIG. 7.1 – Essais de déposition monocouches de sable d’Ottawa dans l’huile. Le graphique (a) présentent les courbes de porosité isochrones en fonction de la hauteur pour une couche de granulométrie de 63 à 90 μm . En (b) : vitesse de déposition en fonction du temps pour la couche de 63 à 90 μm .



(a)



(b)

FIG. 7.2 – Essais de déposition monocouches de sable d’Ottawa dans l’huile. Les graphiques présentent les courbes de porosité isochrones en fonction de la hauteur pour une couche de granulométrie : (a) : 90 à 125 μm (b) : 125 à 250 μm.

Les sédiments chutent dans la colonne et les grains subissent un tri granulométrique. La vitesse de chute des grains dépend de la force de gravité et de la traînée. La force de gravité dépend de la masse des grains et la traînée de leurs volumes. Plus un grain est gros, plus son rapport masse sur volume est grand. La force de gravité augmente plus rapidement que la traînée avec la taille des grains. Il en résulte que les gros grains ont une plus grande vitesse de chute que les grains fins.

Ce tri granulométrique génère la structure du squelette solide de la couche. Cette structure affecte la consolidation de la couche. Les profils pour les sables fins (figure 7.1a) et moyens (figure 7.2a) diffèrent des profils pour le sable grossier (figure 7.2b). Durant la phase de déposition des sables fins et grossiers, la consolidation commence lorsque les premiers grains grossiers se déposent au fond. Les premiers grains tombent au hasard sur le fond et le couvrent, puis les autres s'empilent par dessus. À ce moment, le réarrangement des grains commence réellement. À ce stade, l'expulsion du fluide n'est pas le facteur déterminant, le réarrangement des grains domine. La porosité est élevée en raison du faible poids exercé sur la couche naissante. La déposition progressive du sable fait augmenter l'épaisseur de la couche et l'expulsion du fluide commence à devenir le facteur dominant de la densification de l'ensemble. La porosité augmente avec l'épaisseur de la couche jusqu'à un point d'inflexion très net correspondant à environ 75% de la hauteur. À ce point, la porosité décroît avec l'épaisseur de la couche pour atteindre une limite. Ce phénomène est dû à un changement dans la taille des grains en cours de sédimentation. Les grains plus fins se déposent à la fin de la phase de déposition. Le profil est maintenu durant la phase de consolidation excepté pour la phase supérieure du dépôt, qui se consolide plus rapidement. Globalement, la porosité diminue de 0,54 à 0,45 en 7,9 jours.

Le profil de porosité est le même tant pour le sable grossier que pour les sables fins et moyens. Dans le cas du sable grossier, le point d'inflexion de la courbe se situe plus bas à approximativement 10% de l'épaisseur du dépôt. Durant la progression de la consolidation, la base de la couche reste stable. Il n'y a pas de densification importante en deçà du point d'inflexion. Les grains grossiers se sont tassés et ont atteint leur porosité maximale dès le début. Par contre, la partie supérieure au point d'inflexion subit une chute rapide de la porosité (4 % en 0,6 jours) et lentement une limite asymptotique est atteinte (2 % en 4 jours et 1% en 12 jours). La forme de la courbe de porosité est maintenue durant la phase de consolidation, quel que soit la plage granulométrique du matériel utilisé.

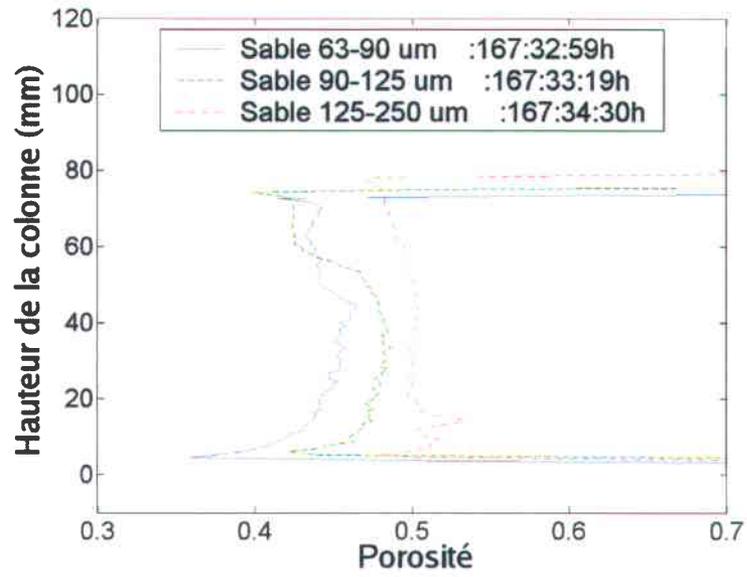
Dans l'eau, la consolidation du sable présente le même profil général que pour les ex-

périences dans l'huile (figure 7.3a et 7.3b). Par contre, la porosité est plus élevée dans le centre de la couche. La porosité est moins élevée pour les dépôt dans l'huile que ceux dans l'eau pour les couches mise en place avec une granulométrie fine (63-90 μm) et moyenne (90-125 μm). Elle est similaire pour les couches constituées de grains grossiers (125-250 μm). La différence entre les profils de porosité est très faible pour les expériences dans l'eau, comparativement à celles dans l'huile. Cette différence s'explique probablement par la durée de la chute et de la viscosité du fluide. L'huile ralentit la chute et permet un tri granulométrique plus complet. De plus, la viscosité de l'huile entraîne une force de tension supérieure et une force de liaison entre les grains plus grande. Par contre, la vitesse de consolidation dans l'huile devrait être beaucoup moins importante que dans l'eau, mais les résultats suggèrent le contraire. La relation entre la perméabilité et la viscosité est peut-être à revoir. Il est possible que la mouillabilité des grains ait une importance sur la consolidation.

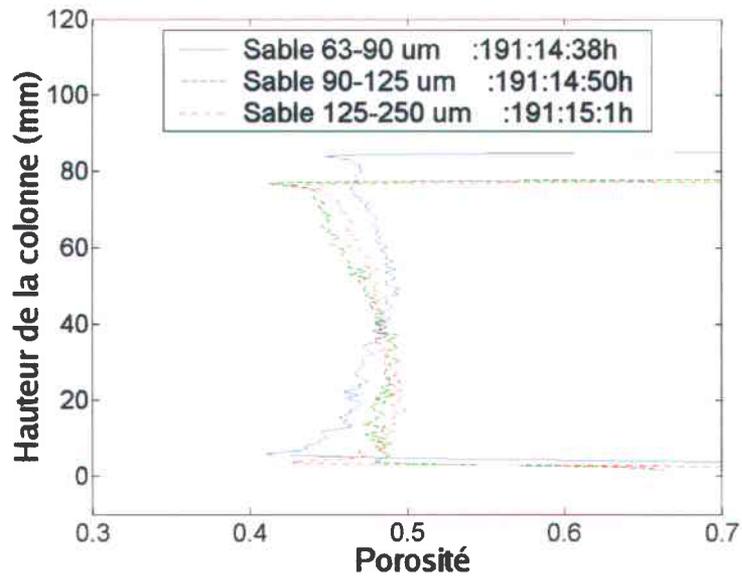
7.1.1 Monocouches de kaolinite

La kaolinite met en évidence un comportement fort différent de celui du sable. Le type de déposition de la kaolinite observée dans les colonnes est dites de déposition de zone [Imai, 1980]. Les graphiques 7.4a et 7.5a présentent deux essais dupliqués avec de la kaolinite. Au cours de la phase de déposition, la densité de la suspension est plus importante en haut de la colonne qu'en bas. La kaolinite floccule en formant des agrégats qui piègent de l'eau. La densité des agrégats est faible, proche de celle de l'eau. La grande concentration de la suspension (300 g/l) occasionne un grand nombre de collisions entre les grains, la suspension se comporte alors comme un fluide non-newtonien. Un bulbe se forme en raison de la différence de vitesse de chute des grains (figure 7.6). Les grains situés à proximité de la surface chutent plus rapidement en raison de la facilité à expulser le fluide. Il en résulte une augmentation de la concentration de particules à la surface. Le processus se prolonge avec le temps et la taille et la densité du bulbe s'accroissent avec sa chute. La perméabilité du bulbe décroît avec sa densification, ce qui a pour conséquence de ralentir le processus global de consolidation.

Le bulbe s'atténue et disparaît entre 6 et 30 h. La phase de consolidation débute et génère une importante augmentation des valeurs HU durant 5 jours. La consolidation continue jusqu'à atteindre un profil d'équilibre au bout de 650 heures. À ce moment, le tassement est terminé. Pour consolider d'avantage, une charge doit être ajoutée.

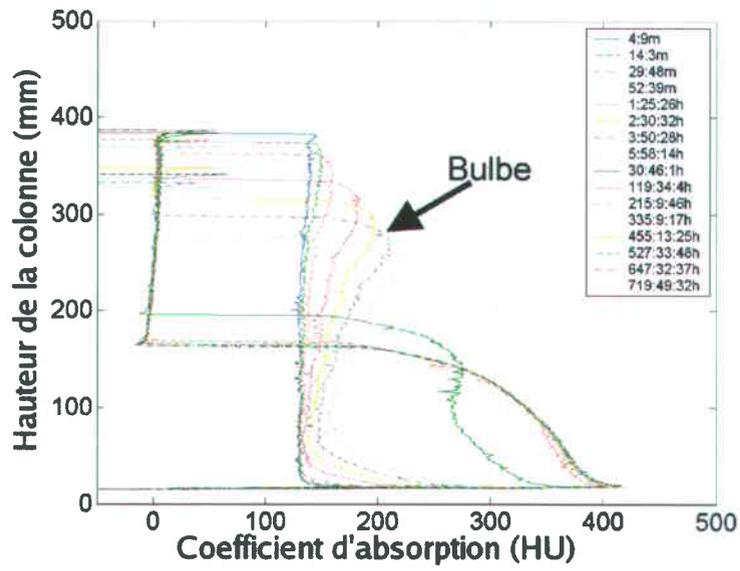


(a)

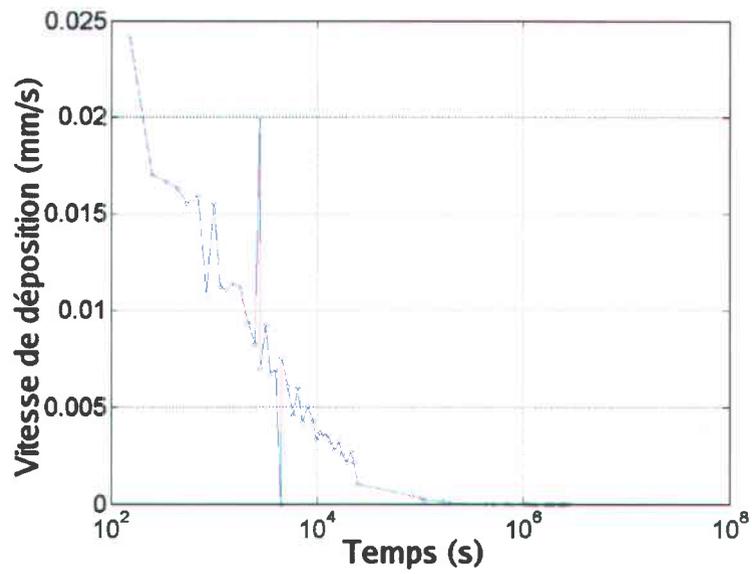


(b)

FIG. 7.3 – Comparaison entre la consolidation dans (a) : l'huile et (b) : l'eau.

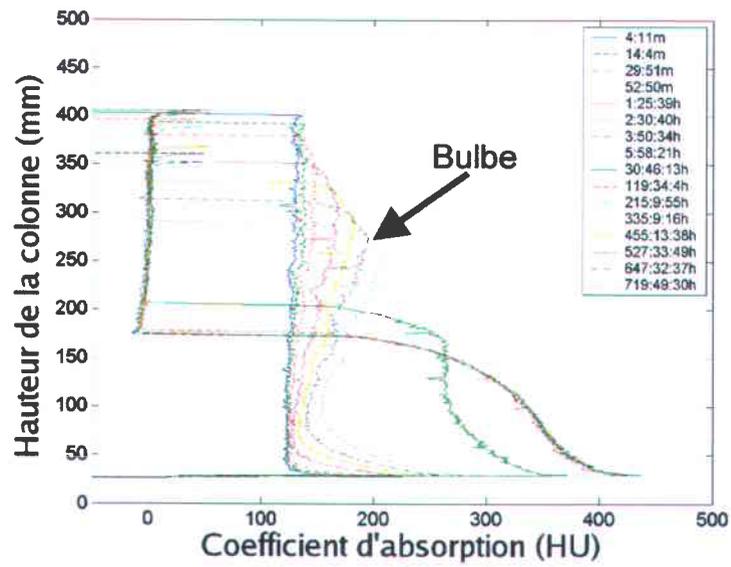


(a)

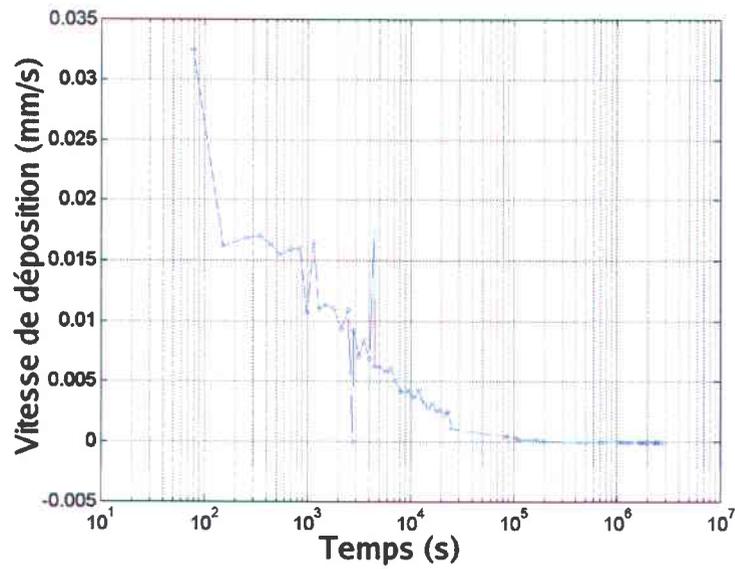


(b)

FIG. 7.4 – Essais de déposition monocouches de kaolinite. En (a) : les courbes isochrones de variation du coefficient d'absorption en fonction de la hauteur et en (b) : la vitesse de déposition en fonction du temps.



(a)



(b)

FIG. 7.5 – Essais de déposition monocouches de kaolinite. En (a) : les courbes isochrones de variation du coefficient d'absorption en fonction de la hauteur et en (b) : la vitesse de déposition en fonction du temps.

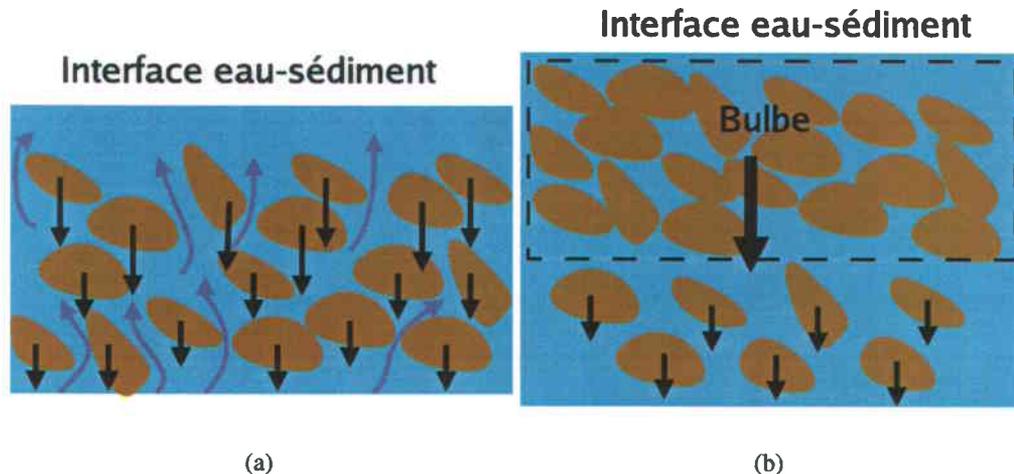


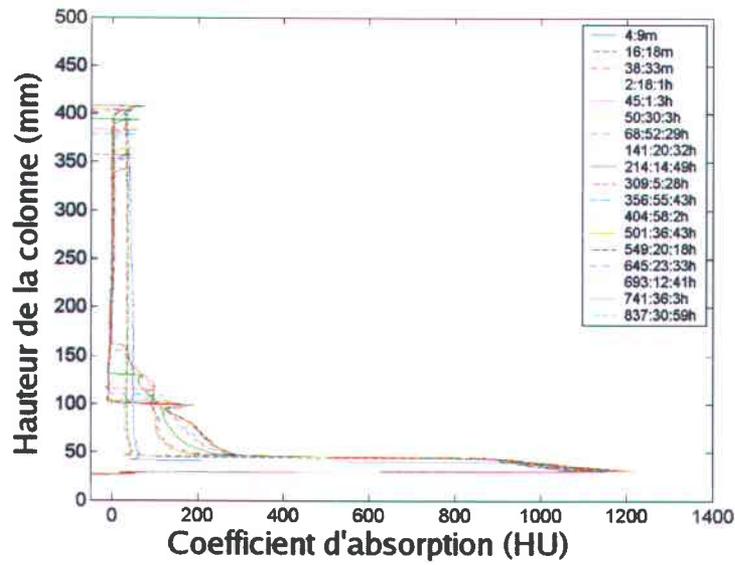
FIG. 7.6 – Formation du bulbe lors de l’essai de déposition avec la kaolinite. En (a) : les grains en surface chutent plus rapidement en raison de la facilité à expulser le fluide et rattrapent les grains des couches inférieures. La concentration des grains augmentent et il y a formation d’un bulbe. En (b) : le bulbe formé chute et agglomère les particules sous-jacentes. Le bulbe réduit l’expulsion du fluide et la consolidation du système entier.

Les figures 7.4b et 7.5b présentent les vitesses de déposition en fonction du temps. Le profil de vitesse est fort différent de celui obtenu pour le sable. En effet, la vitesse décroît progressivement vers zéro au cours du temps. La vitesse de déposition suit une loi inverse ayant un exposant de 2.5. Les pics observés dans les graphiques sont des erreurs occasionnées par un mauvais positionnement latéral de la table. La position verticale a été corrigée numériquement pour chaque image, mais la légère inclinaison des deux colonnes a généré une erreur de positionnement vertical.

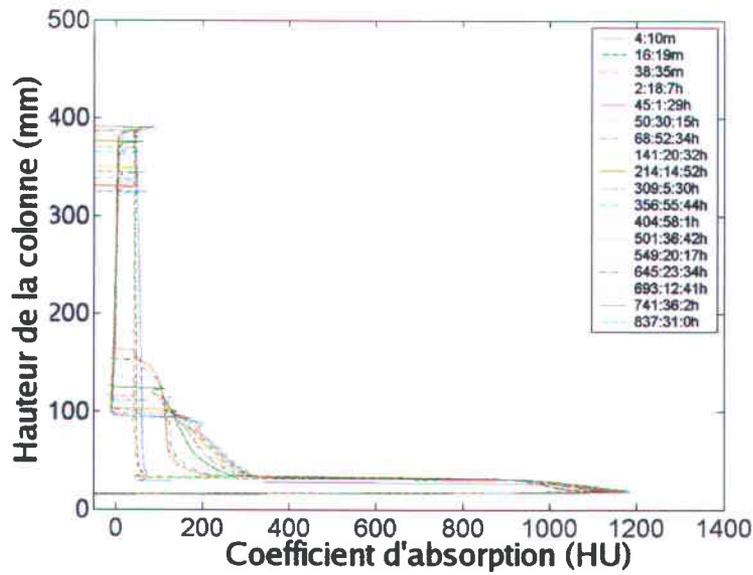
Dans le cas du modèle de la kaolinite, la frontière entre les phases de sédimentation et de consolidation est indiscernable. La transition entre ces phases est progressive. Ce résultat justifie l’utilisation d’un modèle théorique unificateur pour simuler ces processus.

7.1.2 Monocouches de silt-argileux

Les graphiques 7.7a et 7.7b montrent l’évolution du profil du coefficient d’absorption pour le silt-argileux au cours du temps. Le silt se dépose en moins de 4 minutes sur le fond et commence à se consolider. L’argile chute lentement et se dépose après 45 heures. L’argile



(a)



(b)

FIG. 7.7 – Essais de déposition monocouches avec de l'argile bleue. Les graphiques (a) et (b) présentent les courbes isochrones de la variation du coefficient d'absorption en fonction de la hauteur.

commence alors à se consolider. La transition entre la phase de déposition et de consolidation est progressive. Encore ici, il n'est pas possible de considérer ces deux phénomènes comme indépendants. Durant la phase de consolidation, le coefficient d'absorption du silt passe de 1000 à 1120 HU en 35 jours (3.4 HU par jours). Quand à l'argile, le coefficient d'absorption passe de 125 à 325 HU en 33 jours (6 HU/jours).

7.1.3 Essais multicouches de silt-argileux

La séquence de la figure 7.8 montre l'évolution de la colonne de sédimentation lors de l'empilement de couches de silt-argileux dont la période de déposition est de 24 heures. Comme observé à la section précédente, le silt se dépose au fond et l'argile forme une suspension qui se consolide lentement (figure 7.8a). L'ajout d'une couche de silt-argileux provoque la formation d'une nouvelle couche de silt et augmente la concentration de la suspension d'argile (figure 7.8b). Par contre, la couche formée de silt n'est pas uniforme. Le silt forme des nodules surmontés de nuages de silt (en jaune sur les figure 7.8b à 7.8h). L'ajout de la troisième couche (figure 7.8c) montre que les nouveaux nodules de silt flottent dans la suspension d'argile qui est devenu trop dense. La proportion de silt dans le nuage augmente par rapport à celui dans les nodules.

L'addition de nouvelles couches augmente la concentration de l'argile. La suspension devient de plus en plus dense et visqueuse. Il est à remarquer que la hauteur de l'interface entre l'eau et l'argile augmente avec le nombre de couches ajoutées. La chute du silt est donc entravée par la grande viscosité de la suspension d'argile. La séquence d'images montre que la chute du silt n'est guère plus importante que la consolidation de la matrice d'argile. La vitesse de tassement est seulement de 14 mm en 144 heures, soit 0.01 mm/heure.

La figure 7.8f montre une suspension de silt de forme parabolique. Ce profil correspond à la distribution de vitesse d'un fluide s'écoulant dans un tuyau [Munson et al., 1998]. Cette forme est une conséquence de l'interaction entre l'écoulement de silt-argileux avec les parois du tube de la colonne. Ce profil n'est donc pas une formation naturelle. Pour éviter sa formation, des colonnes de sédimentation de plus grand diamètre ou une plus faible concentration de matériel doit être utilisé. Après l'addition de la sixième couche, la concentration atteint 330 g/l et les fractions subséquentes de silt ne forme plus d'agrégat. Le silt reste en suspension dans l'argile.

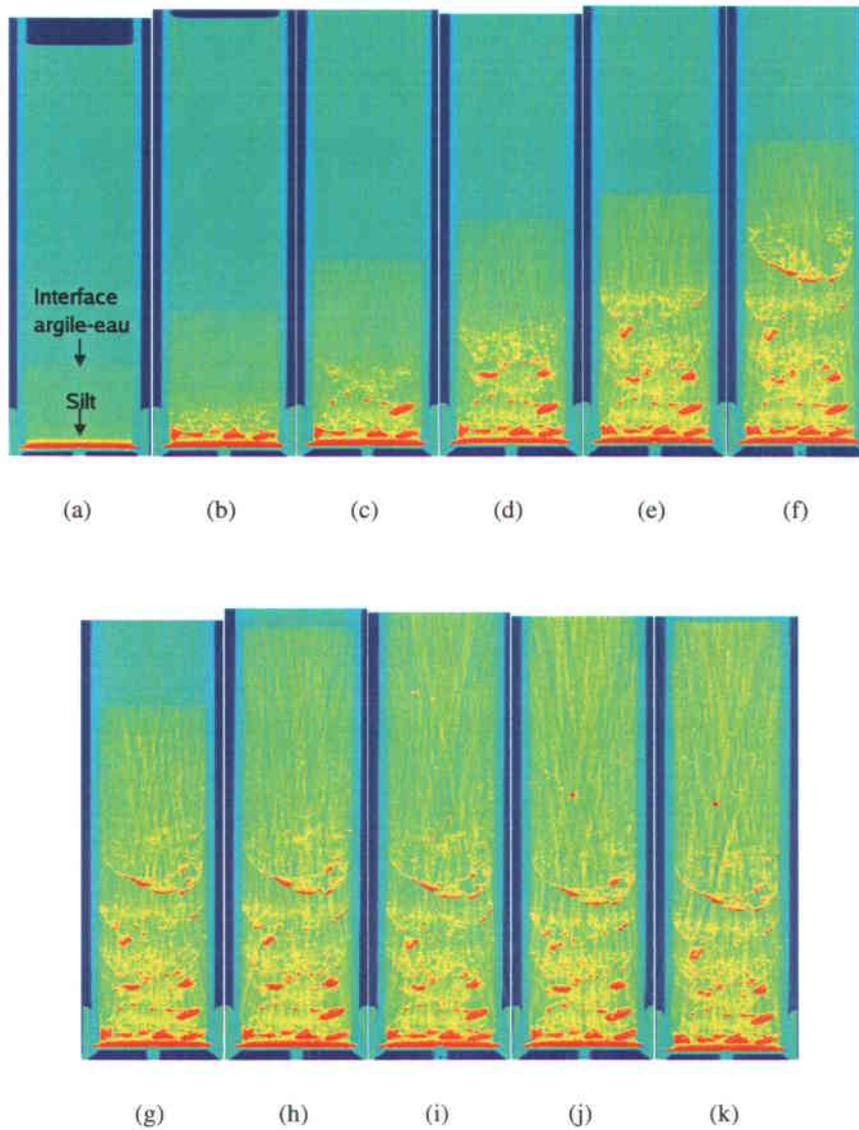


FIG. 7.8 – Déposition et consolidation de dix couches de silt-argileux. Les coupes (a) à (j) ont été prises juste avant le dépôt de la couche suivante. Le temps est (a) : 24 h (b) : 48 h (c) : 72 h (d) : 96 h (e) : 168 h (f) : 192 h (g) : 216 h (h) : 240 h (i) 264 h (j) 336 h (k) 360 h.

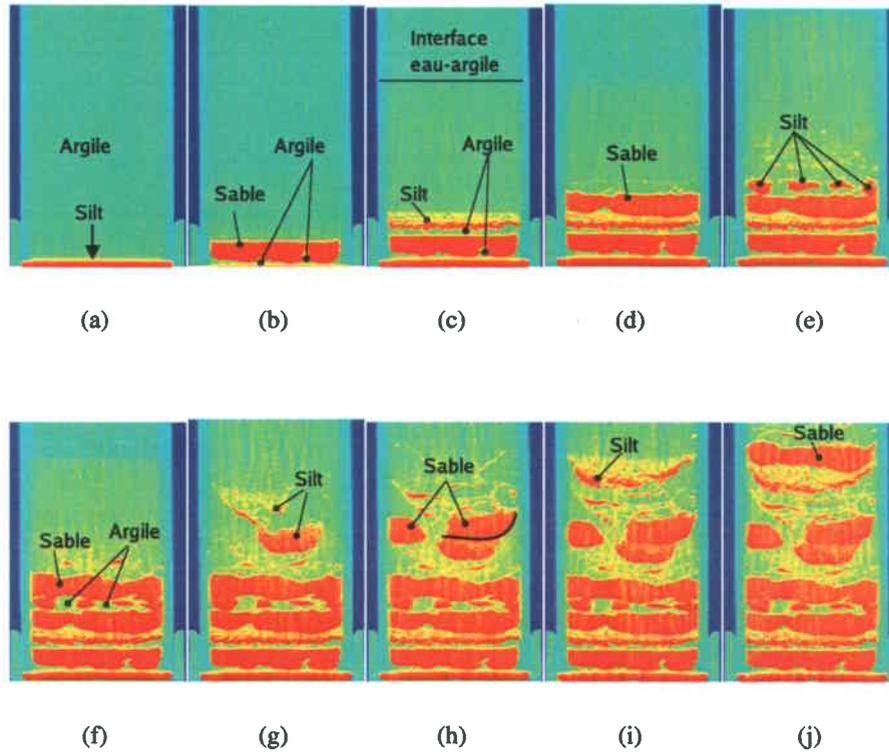


FIG. 7.9 – Déposition en alternance de dix couches d’argile et de sable. Le temps est : (a) : 48 h (b) : 335 h (c) : 329 h (d) : 383 h (e) : 407 h (f) : 479 h (g) : 503 h (h) : 527 h (i) : 551 h (j) : 575 h.

Cette expérience montre que la déposition de couches de silt-argileux espacées de 24 heures ne permet pas de mémoriser les événements de déposition. En effet, si la fréquence de déposition est plus faible que le temps de déposition, les couches n’ont pas le temps de se former avant l’arrivée de la couche suivante. Les parties encore en suspension se mélangent et forment une couche hétérogène qui sera interprétée comme un seul événement de déposition.

7.1.4 Essais multicouches de silt-argileux et de sable

La séquence d’images de la figure 7.9 montre l’évolution de la colonne de sédimentation durant la construction d’un dépôt de couche de sable et d’argile. Les couches de silt-argileux et de sables sont déposées en alternances avec une fréquence de déposition de 24 heures. La première couche de silt-argileux a sédimenté et consolidé pendant une période de 12 jours

(figure 7.9a). Après, les nouvelles couches sont ajoutées aux 24 heures. Comme pour l'essai précédent, le silt descend au fond rapidement et l'argile reste en suspension et sédimente lentement.

Une couche de sable est ajoutée après 12 jours. Il reste encore de l'argile en suspension et la porosité est de 90%. La couche de silt n'est plus visible sur l'image 7.9b, en raison de la position trop basse de la table au moment de la mesure. Elle est visible sur les autres images. La nouvelle couche de sable sédimente en passant au travers de la suspension d'argile et se dépose sur la couche de silt. Le sable emprisonne quelques poches d'argiles sous sa base. Les poches d'argile sont constituées d'un mélange d'eau et d'argile en suspension. Ces poches d'argiles demeurent dans la colonne durant toute la durée des mesures, soient 14 jours. Ces formations sont très stables et semblent indiquer que la couche supérieure est imperméable.

Le sable ne peut être en lui-même imperméable. Le sable est un milieu poreux qui ne peut s'autocolmater. Le sable atteint une porosité maximale de l'ordre de 20 à 50% (voir section 2.1.3). Par contre, l'argile s'écoule à travers le sable et se dépose, colmatant les pores du sable. Une partie de l'argile traverse le sable et s'ajoute au nuage turbide et une autre partie reste emprisonnée entre les grains de sable. La nouvelle couche mixte de sable/argile devient imperméable et l'argile qui n'a pu traverser la couche reste piégée dans des poches.

L'addition d'une nouvelle couche de silt-argileux crée un autre dépôt de silt et une augmentation de la concentration de la suspension d'argile (figure 7.9c). Le dépôt de silt est constitué d'une couche dense (en rouge sur l'image) surmontée par un nuage de silt (en jaune). Le dépôt de silt flotte sur une suspension d'argile. Cette argile a été piégée par le silt de la même manière que la couche de sable précédente. Il est à remarquer que l'épaisseur de la suspension d'argile piégée diminue peu malgré le temps et l'ajout de charges sédimentaires supplémentaires. Par contre, le nuage de silt est comprimé par l'arrivée de la couche de sable subséquente (figure 7.9d). Cette couche de sable est clairement définie et piège encore une fraction d'argile en son sein.

La figure 7.9e montre un changement dans la déposition du silt. Comme observé précédemment, le silt forme des agrégats lorsque la concentration d'argile atteint un certain seuil. Avec une augmentation de la concentration d'argile, le silt flotte dans la suspension et forme des profils d'écoulements paraboliques (figure 7.9i). Le silt flotte en raison de la poussée d'Archimède exercée par le mélange eau-argile. La chute du silt dépend alors de la consolidation de la couche d'argile sous-jacente.

Le même phénomène se produit pour le sable (figure 7.9h), mais à une concentration d'argile plus élevée. La concentration d'argile doit être plus importante pour permettre d'exercer une poussée d'Archimède suffisante pour maintenir les grains de sables en suspension. À ce moment, le sable forme des radeaux. Ces radeaux de silts et de sable sont emprisonnés dans la matrice d'argile et se tassent à une vitesse d'environ 1 mm/jour.

Pour les autres fréquences de déposition (2 et 12 h), les profils montrent approximativement le même comportement. Les principales différences sont observées pour l'expérience dont la fréquence de déposition est de 2 heures (figure 7.10). La fraction d'argile du silt-argileux n'a pas le temps de consolider. Dans ce cas, la succession de lit est constituée d'une alternance de sable et de silt. L'argile reste en suspension jusqu'à la moitié de l'expérience. Par la suite, de l'argile est piégée et des radeaux de sable et de silt sont formés.

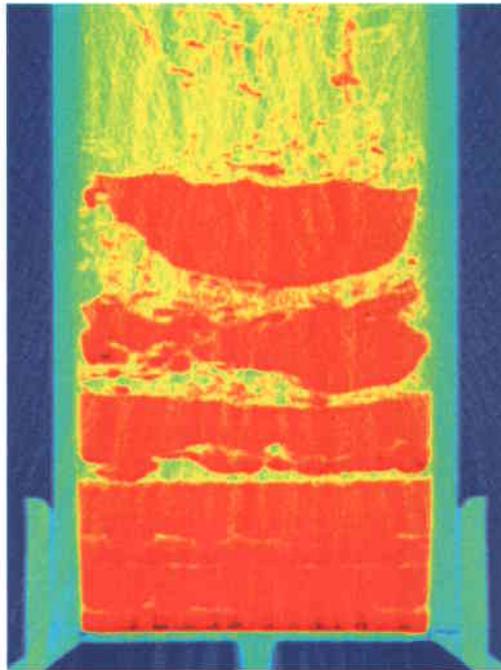


FIG. 7.10 – Empilement alterné de couche de silt-argileux et de sable à une fréquence de 2 h après 671 h de déposition.

7.1.5 Essais multicouches de sable de même granulométrie

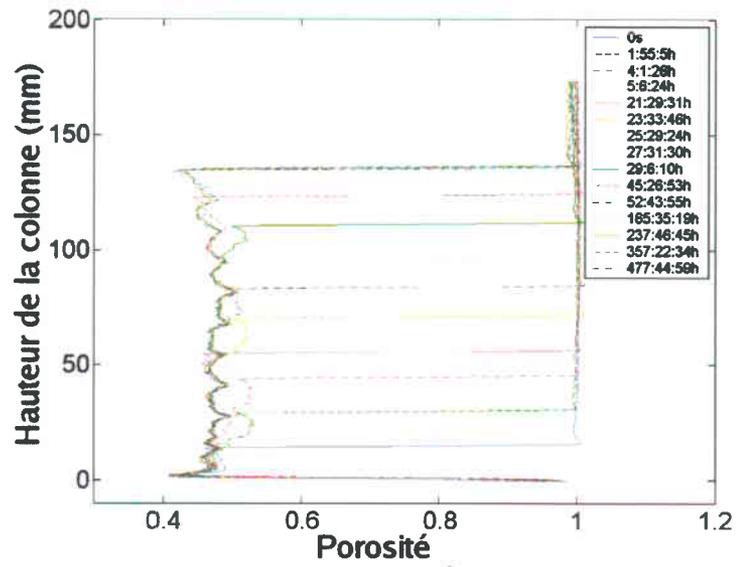
Les essais de multicouches de sable ont pour but de visualiser l'effet de la granulométrie sur l'évolution de la porosité et de la consolidation. Ces essais sont réalisés dans l'eau.

Les figures 7.11, 7.12 et 7.13 présentent la construction des couches de sable de plage granulométrique similaire. Les essais ont été conduits pour deux fréquences de déposition : 2 et 24 heures. Les colonnes de sédimentation sont analysées au scanographe juste avant l'addition de la couche subséquente. Les couches ont le temps de sédimenter et de consolider partiellement.

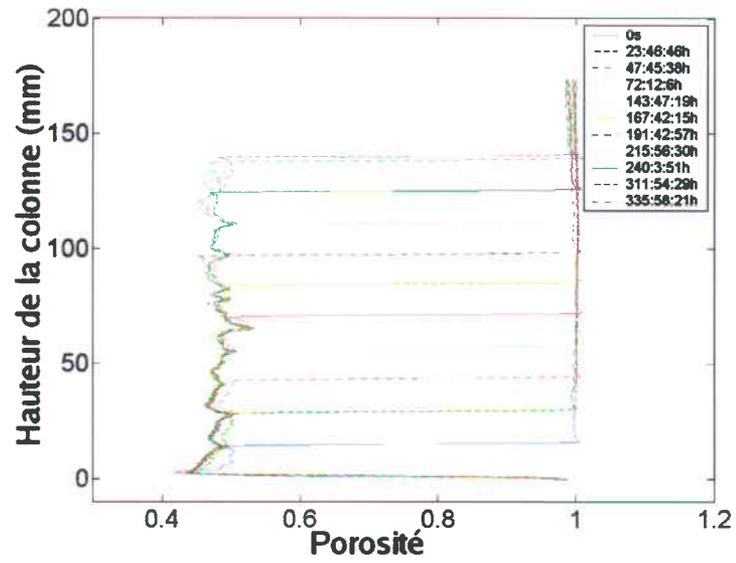
Pour les expériences dont les intervalles de déposition sont de 2 heures (figure 7.11a, 7.12a et 7.13a), la porosité est initialement plus élevée au centre de la couche. L'addition d'une couche inverse le profil de la couche subséquente. La porosité devient plus faible au centre qu'aux extrémités, en concordance avec les essais monocouches (voir section 7.1). L'ajout de la couche supérieure crée une discontinuité à la frontière entre les couches. Cette discontinuité est provoquée par la séparation granulométrique du sable lors de sa chute. Les grains grossiers se déposent sur des grains fins et la porosité est réduite par le réarrangement des grains fins à travers les grossiers, si l'espace le permet. Ce processus est plus lent que l'expulsion au travers de la couche. L'interface laisse s'échapper le fluide, en raison de sa grande porosité, et permet au centre de la couche de se consolider à un rythme normal. Le centre de la couche se consolide plus rapidement que l'interface supérieure. Par la suite, la porosité du centre devient plus faible que celle aux limites des couches.

7.1.6 Essais multicouches de sable de granulométrie différente

Pour les essais effectués avec alternance de sable de plages granulométriques différentes, les couches ne sont pas toutes enregistrées clairement. Les figures 7.14, 7.15 et 7.16 montrent l'évolution de la porosité au cours de la construction de la colonne pour ces essais. Lorsqu'il y a un passage entre des grains grossiers à fins (ex. 125-250 μm à 63-125 μm), la discontinuité est moins importante et parfois manquante. Le profil de porosité résultant sera interprété comme un seul événement de déposition de plage granulométrique étendue (ex. 63-250 μm). Les résultats sont similaires pour une fréquence de déposition de 24 heures. La porosité initiale est, par contre, plus élevée que pour une fréquence de 2 heures.

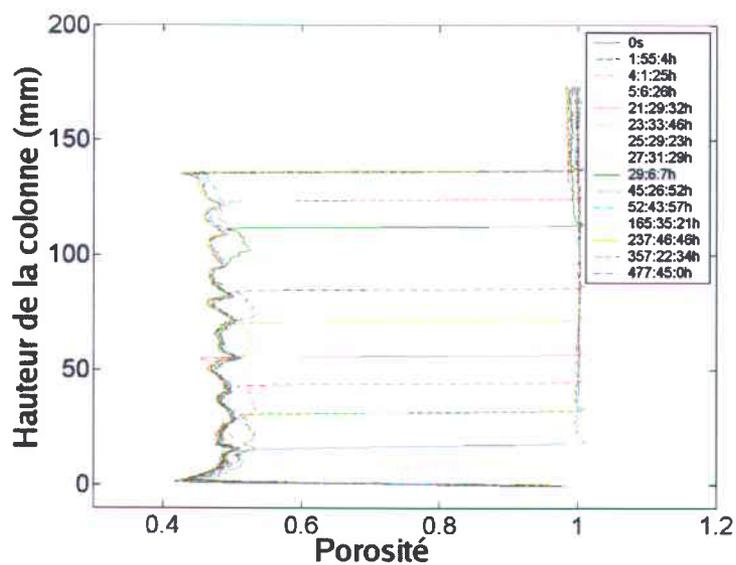


(a)

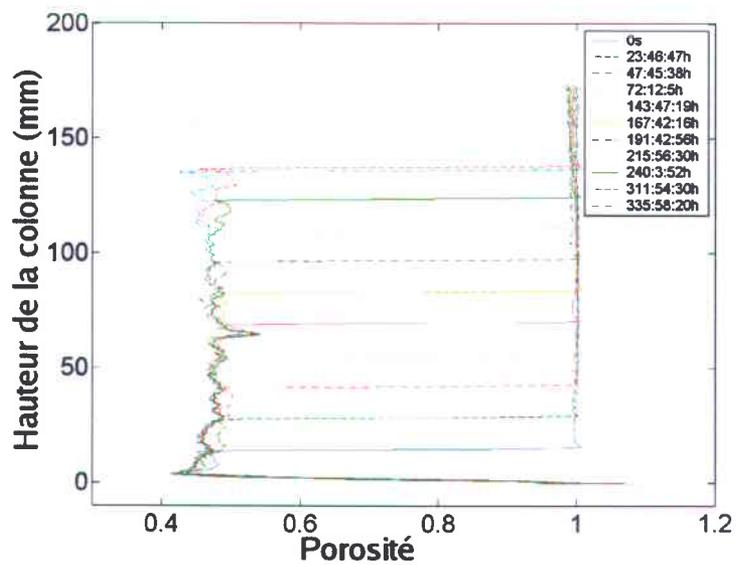


(b)

FIG. 7.11 – Essais de déposition multicouches de sable de même granulométrie. Courbe isochrone de porosité en fonction de l'épaisseur pour du sable de (a) : 63 à 125 μm 2 h (b) : 63-125 μm 24 h.

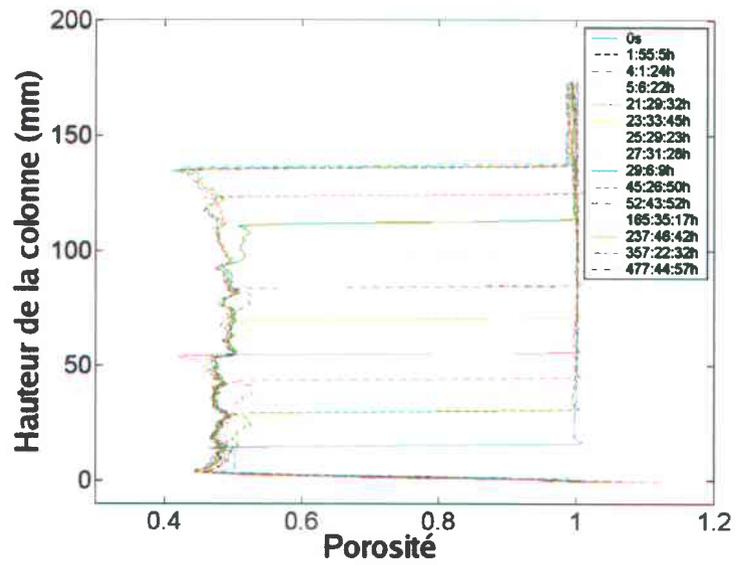


(a)

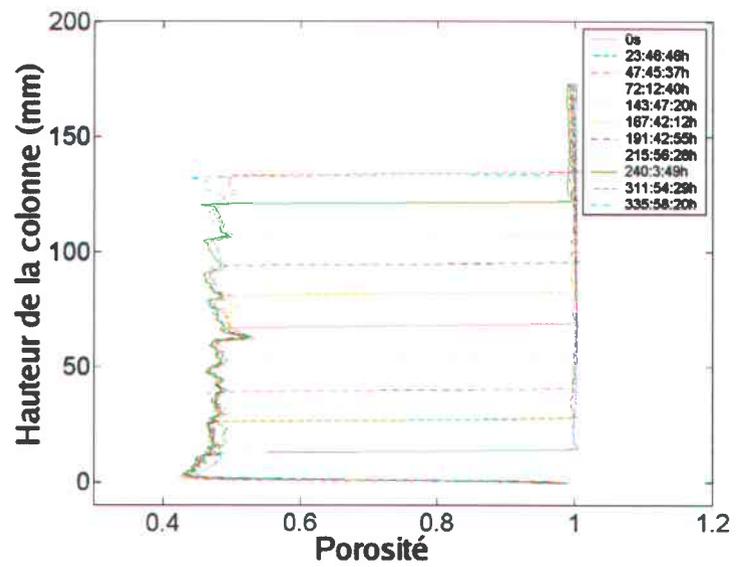


(b)

FIG. 7.12 – Essais de déposition multicouches de sable de même granulométrie. Courbe isochrone de porosité en fonction de l'épaisseur pour du sable de (a) : 90-125 μm 2 h (b) : 90-125 μm 24 h.

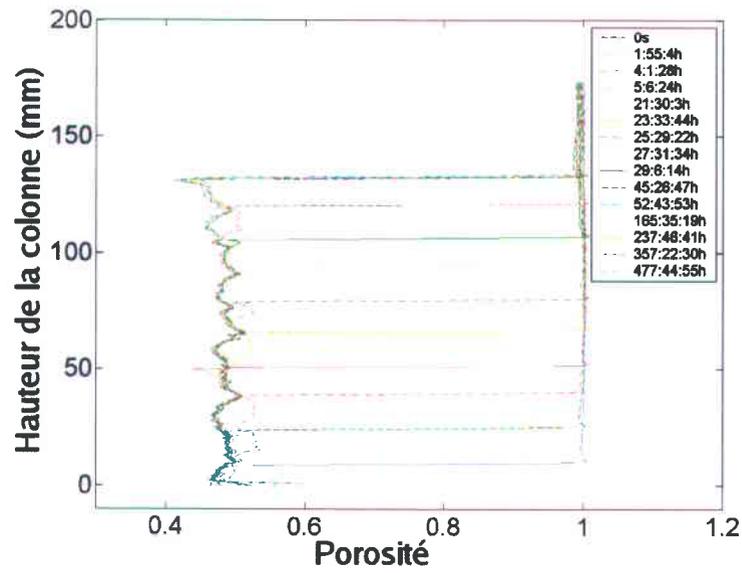


(a)

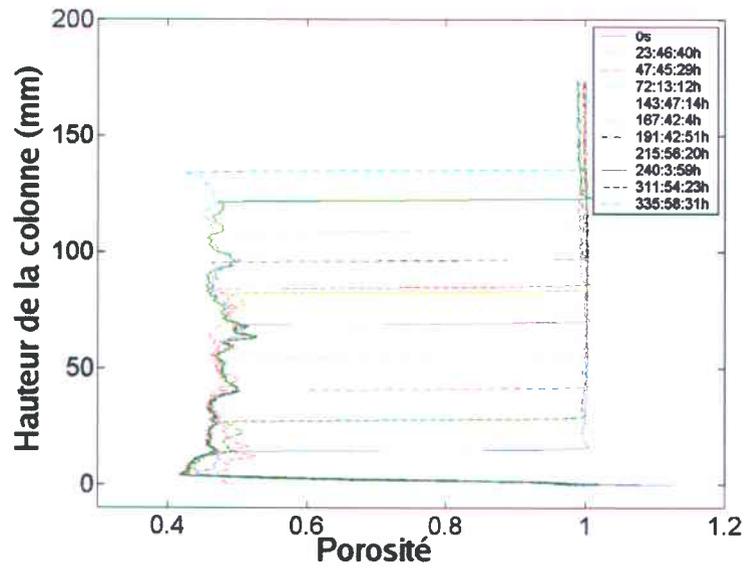


(b)

FIG. 7.13 – Essais de déposition multicouches de sable de même granulométrie. Courbe isochrone de porosité en fonction de l'épaisseur pour du sable de (a) : $125-250\mu m$ 2 h (b) : $125-250\mu m$ 24 h.

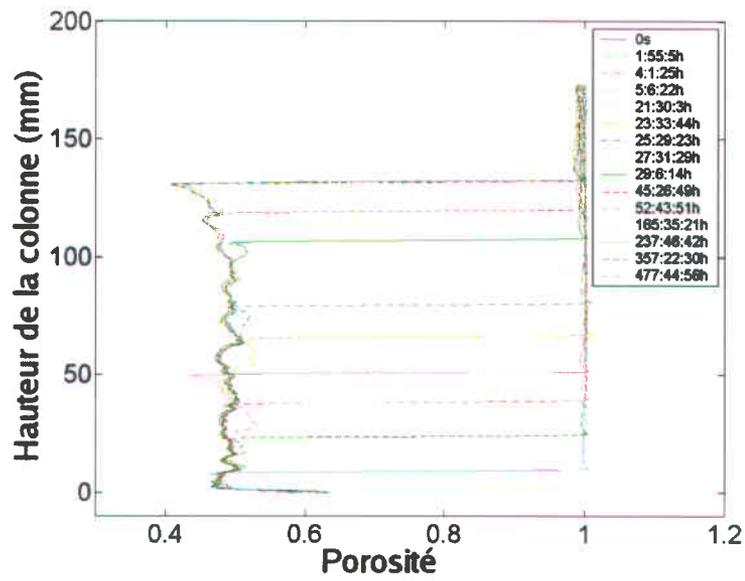


(a)

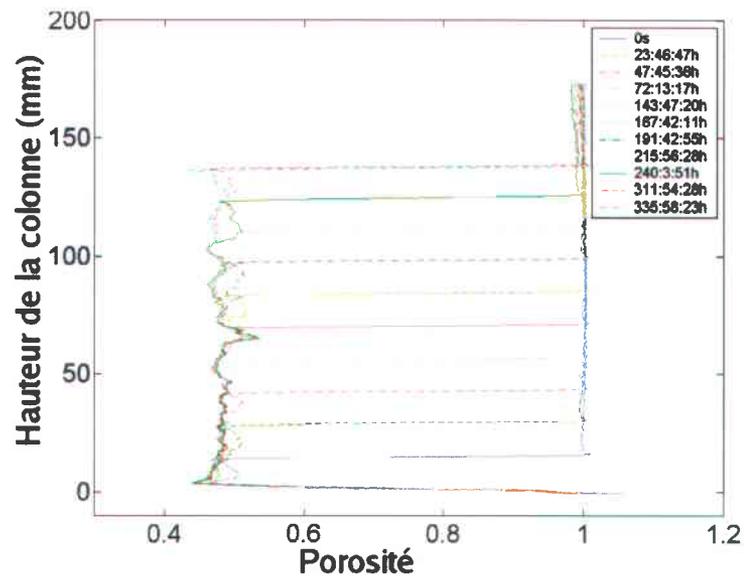


(b)

FIG. 7.14 – Essais de déposition multicouches de granulométrie différente. Alternances de couches de : (a) : 63-125 et 125-250 μm 2 h (b) : 63-125 et 125-250 μm 24 h.

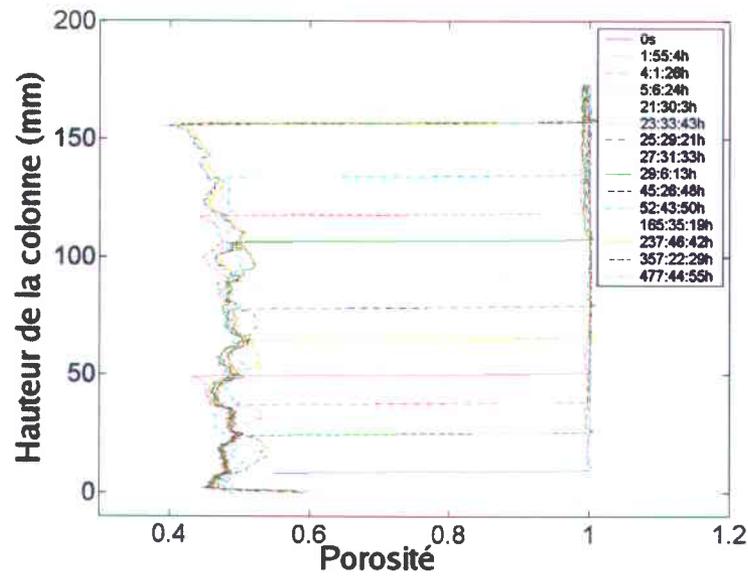


(a)

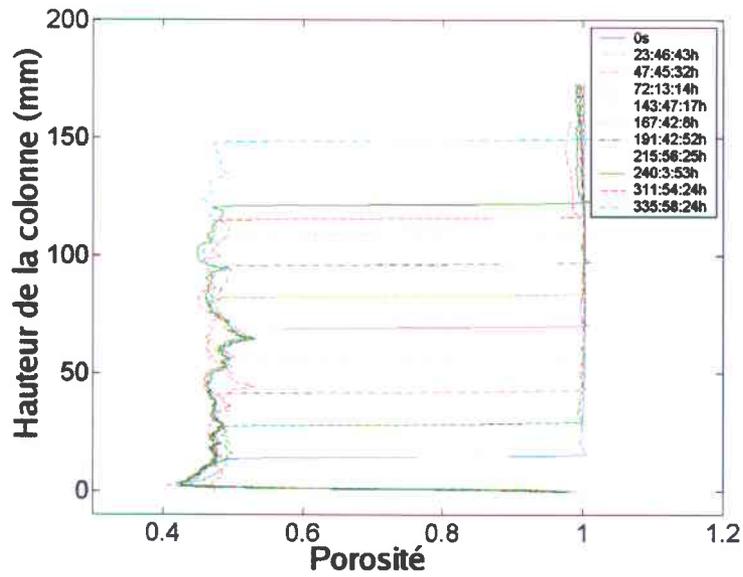


(b)

FIG. 7.15 – Essais de déposition multicouches de granulométrie différente. Alternances de couches de : (a) : 90-125 et 125-250 μm 2 h (b) : 90-125 et 125-250 μm 24 h.



(a)



(b)

FIG. 7.16 – Essais de déposition multicouches de granulométrie différente. (a) : 63-125, 90-125 et 125-250 μm 2 h (b) : 63-125, 90-125 et 125-250 μm 24 h.

Chapitre 8

Discussion

Les essais expérimentaux ont été conduits suivant divers protocoles pour mesurer les effets de la granulométrie, du type de sédiment, de la fréquence de déposition, du type de fluide et de la structure de l'empilement sur la déposition et la consolidation. Les sédiments utilisés sont du sable d'Ottawa dont la granulométrie varie entre $63 \mu m$ à $250 \mu m$, de la kaolinite et du silt-argileux de la mer de Laflamme. Des essais monocouches ont été effectués pour chacun des types de matériaux avec une concentration de 300 g/L. Les essais multicouches consistent en des alternances de couches de granulométrie et de caractéristiques différentes pour évaluer leur effet sur la déposition et la consolidation. Deux fréquences de dépositions ont été utilisées : 2 et 24 heures. La déposition se fait par pulsation pour refléter les apports sédimentaires naturels des crues ou des marées en milieu marin.

Plusieurs techniques existent pour mesurer le profil de porosité en fonction de la profondeur de la colonne de sédimentation. L'hydromètre permet d'obtenir la porosité moyenne de la suspension en fonction du temps. Cet appareil ne fournit pas de profil et ne permet pas d'observer l'évolution de la porosité avec la profondeur. Les études avec des rayons gamma [Been and Sills, 1981] permettent d'observer le profil de porosité au cours du temps. Par contre, la résolution des méthodes utilisant les rayons gammas est de l'ordre du centimètre et elles intègrent la valeur sur la largeur de la colonne [Chaouq, 1998]. Dans ce cas, les effets de bords ne peuvent pas être enlevés de la mesure. Dans le cas présent, la mesure de la porosité sous scanographe permet d'obtenir une représentation 3D de la porosité dans le sédiment, car elle permet d'isoler des valeurs de densités sur chaque voxel du milieu. La précision spatiale maximale de l'appareil est de 0,1 mm et la précision courante atteinte lors de cette étude est

de 0,3 mm, soit 3 à 4 fois plus précis que le gamma en terme d'épaisseur. Par ailleurs, le gamma n'obtient qu'une valeur moyenne sur la largeur de la colonne.

Les essais de déposition monocouche ont permis d'observer les phases de sédimentation et de consolidation de divers matériaux. La nature du matériel influence le couplage entre les phases de sédimentation et de consolidation. La vitesse de déposition montre que ce couplage est faible pour les sables et important pour les argiles. Dans ce dernier cas, la transition entre les phases de sédimentation et de consolidation est continue, alors qu'elle est brusque pour les sables. Le type de matériel et sa concentration influencent aussi la courbe de sédimentation. La kaolinite sédimente avec le comportement d'un fluide non-newtonnien. La densité de la suspension lors de la phase de sédimentation est plus élevée au sommet de la colonne qu'en bas du fait de l'interaction entre les grains.

La présente étude permet déjà de dégager plusieurs comportements des sols. Une plus grande diversité de matériaux et de concentration permettrait une étude exhaustive de l'influence du matériel sur les processus de sédimentation et de consolidation et permettrait d'affiner les résultats. Par exemple, la composition des argiles pourrait être incorporée dans le modèle. La mesure de la taille des grains lors de la déposition serait un atout pour l'analyse des résultats. Particulièrement pour des comportements comme la kaolinite. La mesure dynamique de la granulométrie est difficile : Par exemple, la réflexion d'un faisceau optique à l'aide d'un OBS (optical backscattering sensor), permet de mesurer des concentrations de 100 à 100 000 mg/L pour le sable et de 5 à 5000 mg/L pour l'argile [Downing, 1989]. Plus la concentration est grande et plus la largeur de la colonne doit être faible pour permettre la mesure. Par contre, l'appareil intègre la mesure sur la largeur de la colonne et sa résolution spatiale est limitée, en raison de l'angle d'ouverture du faisceau qui est de 30 à 50 degrés. L'appareil intègre la valeur sur une grande région et fournit une idée générale de la granulométrie et non un profil précis.

Les essais de déposition multicouche ont permis d'observer l'effet de la granulométrie sur la phase de déposition et de consolidation d'un sédiment en formation. L'épaisseur des couches formées est d'un centimètre environ. Lors des essais avec le sable, une discordance apparaît à l'interface entre deux couches. Elle se crée lorsque la fraction fine de la couche inférieure ne correspond pas à la fraction grossière de la couche supérieure (figure 8.1). Les couches sont alors discernables les unes des autres et les événements de déposition peuvent être extraits de la colonne. Dans le cas où les fractions granulométriques des deux couches concordent à l'interface, il n'y a pas de discordance. Le profil de porosité est continu comme

si un seul événement de déposition, dont la concentration de particules est double, se produit. Les essais de déposition avec le silt-argileux et le sable indiquent qu'un temps de déposition minimal est requis pour former des couches nettes. Si la fréquence de déposition est en deçà du temps de déposition minimal, le matériel reste en suspension et se mélange en formant une couche hétérogène. Les limites des événements de déposition sont alors indiscernables sous le scanographe. Ces détails seraient indiscernables avec une mesure par rayon gamma, car la précision spatiale de cette méthode est de 3 à 5 cm [Chaouq, 1998]. Les discordances n'auraient pu être observées sans la précision sub-millimétrique du scanographe.

La durée de l'expérience était d'un mois. Aussi les fréquences de déposition mesurables sont de l'ordre du quart de la période, soit une semaine. Cette période maximale assure qu'un nombre suffisant de couches soit présent dans la colonne analysée. Avec une fréquence de déposition plus longue, l'argile aurait le temps de déposer et de partiellement consolider. Il serait alors possible d'observer des couches bien formées d'argile et d'observer si les limites entre les couches sont bien définies ou non, comme dans l'expérience avec les sables. Cette mesure permettrait aussi de mesurer le temps caractéristique de déposition et de consolidation en fonction de la granulométrie. Les expériences futures devraient être déterminées en fonction de la vitesse de déposition des matériaux.

Les densités des suspensions sont importantes et ne reflètent pas nécessairement la réalité. Des concentrations de sédiments de 100 g/L et 300 g/L [Low6 ; 1982] se retrouvent presque exclusivement dans les turbidites et dans les tempestites. Ces concentrations élevées ont été utilisées pour obtenir des couches suffisamment épaisses pour visualiser la déformation interne des couches et obtenir des courbes de consolidation. Des études sous scanographe de déposition de sédiments à de plus faible concentration représentent plus fidèlement les dépôts marin, car les dépôts annuels sont généralement de l'ordre de quelques millimètres ou du centimètre [Melnik et al., 1994]. La durée du suivi devrait être de plusieurs mois, voire plusieurs années pour bien étudier la consolidation.

Le diamètre des colonnes de sédimentation affecte le profil de déposition. Les essais de déposition multicouches de silt-argileux et de silt-argileux avec sable présentent des profils paraboliques typiques de l'influence de la paroi du tube. Il est possible que le piégeage d'argile dans les couches de silts et de sables résultent de l'effet de la paroi. Dans les dépôts naturels, l'eau peut s'écouler, dans une certaine mesure, de manière latérale et être évacuée. Les poches d'argiles sont alors plus difficiles à former. Dans le cas des essais multicouches avec uniquement du sable, l'influence du bord est limitée à quelques millimètres seulement. Il

est donc possible d'enlever cette zone perturbée des profils en ne considérant que 80 mm de la partie interne du tube. Les effets de bord dépendent aussi de la nature du sédiment utilisé. Une étude sur l'influence du bord sur le dépôt fournirait le diamètre minimal de la colonne pour obtenir une simulation représentative de la réalité en fonction du matériel utilisé. Par contre, le scanographe ne peut accueillir des objets de plus de 50 cm de rayon, ce qui peut être problématique pour certains matériaux comme l'argile. L'augmentation de la taille rend plus complexe les protocoles de déposition et d'homogénéisation de la suspension. Des montages plus sophistiqués seront nécessaires pour y parvenir.

Les expériences actuelles ont mis en évidence des signatures de dépôt. Ces signatures peuvent servir, à identifier des couches sédimentaires à l'intérieur de carottes prélevées *in situ*. L'étude actuelle portait sur un nombre limité de sédiments. Une plus large étude ouvrirait la voie à l'identification précises des strates dans les carottes sédimentaires et permettrait d'étudier les cyclicités sédimentaires fines [Boesflug et al., 1995]. Le modèle théorique n'a pas permis de reproduire les essais expérimentaux. Il est trop général et n'est pas suffisamment encadré par des mesures expérimentales. Le modèle est en grande partie basé sur le modèle de Gallois (1991) qui fournit des solutions numériques décrivant les processus de sédimentation et de consolidation. Les principales différences entre le présent modèle et celui de Gallois sont l'utilisation de la loi de Darcy-Gersevanov au lieu de la loi de Darcy. Les lois de contrainte et de perméabilités peuvent aussi être différentes. Le modèle de Gallois est résolu par la méthode des différences finies alors que ce travail utilise la méthode des éléments finis. Le modèle de Gallois a été codé dans le programme femnonlin pour vérifier son fonctionnement. Les solutions obtenues sont instables.

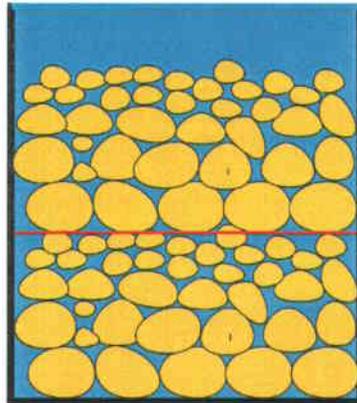
La méthode des éléments finis (MEF) a été préférée à la méthode des différences finis (MDF) en raison de la facilité d'étendre cette méthode en deux et trois dimensions spatiales. La MEF est plus complexe pour les équations unidimensionnelles. Mais il est nécessaire de commencer par ce type d'équation pour valider la code. Par la suite, une extension en deux dimensions est possible. La MEF est une méthode plus avantageuse pour le 2D et le 3D que la MDF. Le prix à payer est une complexité mathématique supplémentaire.

La modélisation théorique, trop globale, aussi souffert du manque de mesures expérimentales. Une approche expérimentale plus large permettrait de mieux borner les équations et de mieux refléter la réalité. Le modèle théorique requièrent la connaissance de l'évolution de la perméabilité et de la contrainte effective en fonction de l'indice des vides et du temps. La conductivité hydraulique peut être mesurée par un essais de drainage classique.

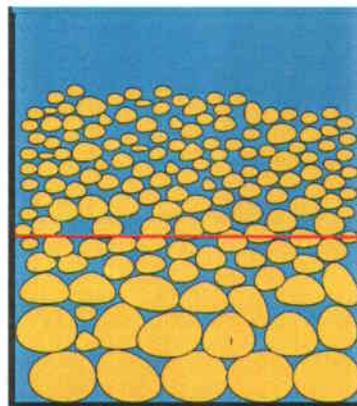
Cette mesure fournit une valeur moyenne sur tout l'échantillon et est valide pour une porosité spécifique. Elle doit être conduite pour un échantillon en partie consolidé. Une corrélation avec une courbe théorique permet d'obtenir une fonction approximative de la conductivité hydraulique en fonction de l'indice des vides. L'idéal, cependant, est de mesurer expérimentalement la conductivité hydraulique pour différentes porosités du milieu. Cet essai pourrait être réalisé avec une grande précision sous le scanographe. Le problème est de marquer le fluide avec un traceur pour être en mesure de suivre son évolution et de mesurer la vitesse de filtration en divers points. La nature du traceur est problématique. S'il est radioactif, l'énergie caractéristique de la radiation émise par le traceur doit se trouver entre 0 et 140 keV, soit la bande de détection du scanographe. Sa radioactivité doit être faible pour respecter les doses permises en laboratoire. Des solutions barytées sont souvent utilisées en médecine comme traceur. Pour la mesure de la perméabilité, ce type de solution modifie la densité du fluide et éventuellement son comportement dans le sédiment. Le développement d'un essai de perméabilité sous scanographe exige donc plusieurs mois de travail et d'étalonnage.

Des expériences permettant de mesurer la contrainte effective sont aussi importantes. La relation de contrainte de Gibson (éq. 2.34) [Gibson et al., 1981] est purement théorique et dépend de la linéarisation de son équation de consolidation (éq. 2.43). Le modèle de Gallois est une courbe semi-empirique où les coefficients doivent être mesurés expérimentalement. La mesure de ces coefficients n'est pas expliquée et un protocole expérimental devrait être développé à cette fin. Un modèle de contrainte effective plus réel reposerait sur la théorie des collisions de Hertz-Mindlin [Mindlin, 1949].

Les essais expérimentaux sont effectués avec des couches contenant plusieurs fractions granulométriques. Par contre, le modèle théorique actuel a été développé avec l'hypothèse de couches homogènes, ce qui limite le potentiel de prédiction du modèle. L'étape suivante consiste à modéliser l'interaction entre les diverses fractions granulométriques. Les expériences avec le sable montrent un tri granulométrique lors de la phase de sédimentation et les essais de silt-argileux et de sable montrent un colmatage des interstices des grains grossiers par les particules fines. Le futur modèle théorique doit tenir compte de ces phénomènes. Une modélisation possible consiste à utiliser n équations de consolidation pour les n fractions granulométriques et d'introduire un coefficient de couplage entre ces fractions. Ces coefficients de couplage seraient déterminés directement de manière expérimentale ou indirectement à partir d'une modélisation des échanges d'énergie entre les fractions granulométriques.



Couches de granulométrie similaire. Les grains de sables dans la couche sont triés par taille en raison des différentes vitesses de chute des grains. Le dépôt résultant est une couche dont la taille des grains augmente de la surface au fond. L'ajout d'une seconde couche reproduit ce phénomène de tri granulométrique. L'interface entre les deux couches présente un passage de grains grossiers à fins, créant des vides importants.



Couches de granulométrie différente. Lorsque la taille minimale des grains de la couche inférieure est similaire à la taille maximale des grains de la couche supérieure, il n'y a pas de discontinuité à l'interface. La taille des grains est similaire à l'interface et produit une variation douce de la porosité. Les deux couches apparaîtront comme un seul événement de déposition.

FIG. 8.1 – Explication du profil de porosité pour les couches de granulométries similaires et différentes.

Chapitre 9

Conclusion

Le modèle mathématique utilisé dans cette étude est une première approche du modèle de sédimentation et de consolidation. Il n'a pas été possible de simuler de dépôt réel en raison du manque de connaissances des paramètres réels et des problèmes de programmation. Les solutions numériques devenaient instables après un certain temps. D'un point de vue mathématique, le modèle est valable et promet énormément. De meilleures connaissances expérimentales des relations de perméabilité et de contrainte effective en fonction de l'indice des vides et du temps permettront d'exploiter la pleine puissance du modèle théorique.

L'étude expérimentale de la sédimentation-consolidation a permis d'améliorer les connaissances sur ces processus. Les essais monocouches ont montré une diversité dans les profils de densité. Cette diversité est occasionnée par un changement de la taille des grains. Dans le cas du sable, le couplage entre la déposition et la consolidation est faible. Pour l'argile, les phénomènes de déposition et de consolidation sont indiscernables et doivent être considérés comme un seul processus.

Les essais multicouches ont montré que les signatures de déposition sont enregistrées dans les sédiments. Par contre, certaines conditions doivent être respectées pour obtenir cette signature :

1. la fréquence de déposition des couches doit être plus grande que le temps caractéristique de déposition et de consolidation du matériel ;
2. la taille maximale des grains de la couche supérieure ne doit pas concorder avec la taille minimale de la couche inférieure.

Dans les autres cas, les séquences de déposition sont moins claires et même indiscernables. Les empilements d'argile sont une preuve de la première condition. Dans cette expérience, la fréquence de déposition est bien inférieure au temps de consolidation. Il en résulte une couche mixte de silt-argileux. Des radeaux de silt flottent dans l'argile. Il n'est pas alors possible d'affirmer le nombre précis d'événements de déposition qui a présidé à la formation de ces couches. Dans le cas des mélanges de sable et de silt-argileux, l'empilement des couches forme une couche hétérogène mixte de sable et silt-argileux. Le sable et le silt flottent dans la matrice d'argile. Des poches d'argiles restent piégées sous les couches de sable et de silt.

Ces deux expériences mettent en évidence que le principe de superposition ne s'applique pas pour tous les types de déposition. Ce principe spécifie que les couches sédimentaires plus récentes se retrouvent sur les couches plus anciennes. Les expériences avec des empilements uniquement constitués de sables sont en accord avec ce principe. Il en est autrement avec les empilements avec des argiles. Dans ce cas l'argile monte sur le dessus de la colonne et sédimente après, bien qu'elle soit plus vieille que les couches sous-jacentes. Si la période de déposition est plus grande que la durée de consolidation, les strates sont bien délimités, sinon il y a un mélange et l'information sur le mode déposition est perdue.

Bibliographie

- [ACR-NEMA, 2004] ACR-NEMA (2004). Dicom : Digital imaging and communication in medicine. En ligne. <http://medical.nema.org/>.
- [Been and Sills, 1981] Been, K. and Sills, G. (1981). Self-weight consolidation of soft soils : an experimental and theoretical study. *Géotechnique*, 31(4) :519–535.
- [Boesflug et al., 1995] Boesflug, X., Long, B., and Ochietti, S. (1995). Cat-scan in marine stratigraphy : a quantitative approach. *Marine Geology*, 122 :281–301.
- [Boespflug et al., 1994] Boespflug, X., Ross, N., Long, B., and Dumais, J. F. (1994). Tomodensitométrie axiale : relation entre l'intensité tomographique et la densité de la matière. *Can. J. Earth Sci.*
- [Carman, 1937] Carman, P. C. (1937). Fluid flow through a granular bed. *Trans. of Instn. of Chem. Engrs.*, 15.
- [Chaouq, 1998] Chaouq, N. (1998). *Caractérisation dynamique des sédiments de surface en zone intertidale*. PhD thesis, Université du Québec à Rimouski.
- [Civan, 2001] Civan, F. (2001). Scale effect on porosity and permeability : kinetics, model, and correlation. *AIChE Journal*, 47(2) :271–287.
- [Cundall and Strack, 1979] Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29 :47–65.
- [Dorlot et al., 1986] Dorlot, J.-M., Bâilon, J.-P., and Masounave, J. (1986). *Des matériaux*. Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, Montréal, deuxième édition.
- [Einstein, 1905] Einstein, A. (1905). On a heuristic viewpoint concerning the production and transformation of light. *Annalen der Physik*, (17) :132–148.
- [Eisberg and Resnick, 1985] Eisberg, R. and Resnick, R. (1985). *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*. John Wiley & Sons, New-York, second edition.

- [Foriero and Ladanyi, 1998] Foriero, A. and Ladanyi, B. (1998). Finite element analysis for large strain consolidation of saturated clay under equilibrium conditions. *Associazione Geotecnica Italiana*.
- [Fortin, 1995] Fortin, A. (1995). *Analyse numérique pour ingénieurs*. Éditions de l'école Polytechnique de Montréal, Montréal.
- [Fowler, 1997] Fowler, M. (1997). The photoelectric effect. En ligne. http://galileo.phys.virginia.edu/classes/252/photoelectric_effect.html.
- [Fredlund, 1993] Fredlund, D. G. (1993). *Soil mechanics for unsaturated soils / D. G. Fredlund, H. Rahardjo*. Wiley, New York.
- [Gallois et al., 1999] Gallois, S., Alexis, A., and Thomas, P. (1999). Modélisation du processus de sédimentation-consolidation des vases estuariennes : approche continue unidimensionnelle. *Bull. Eng. Geol. Env.*, 57(0) :311–318.
- [Gersevanov, 1934] Gersevanov, N. M. (1934). Dinamika mekhaniki grunkov. *Foundations of Soil Mechanics*, 2.
- [Gibson et al., 1981] Gibson, R., Schiffman, R. L., and Cargill, K. W. (1981). The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays. ii. finite nonlinear consolidation of thick homogeneous layers. *Canadian Geotechnical Journal*, 18(0) :280–293.
- [Gibson et al., 1967] Gibson, R. E., England, G. L., and Hussey, M. J. (1967). The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays. i. finite non-linear consolidation for thin homogenous layers. *Géotechnique*, 17(3) :261–273.
- [Hubbell and Seltzer, 2001] Hubbell, J. H. and Seltzer, S. M. (2001). Tables of x-ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients from 1 keV to 20 MeV for elements Z = 1 to 92 and 48 additional substances of dosimetric interest. En ligne. <http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/cover.html>.
- [Imai, 1980] Imai, G. (1980). Settling behavior of clay suspension. *Soils and Foundations*, 20(2) :61–77.
- [Incropera and DeWitt, 1996] Incropera, F. P. and DeWitt, D. P. (1996). *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, New-York, fourth edition.
- [Itasca Consulting Group, 1999] Itasca Consulting Group, I. (1999). *PFC 2D (Particle Flow Code)*. version 2.0.
- [Kak and Slaney, 1999] Kak, A. C. and Slaney, M. (1999). *Principles of computerized tomographic imaging*. IEEE Press, New-York.
- [Knestel, 1990] Knestel, E. (1990). *Imaging Systems for medical diagnostics*. Siemens Aktiengesellschaft, Berlin.

- [Kozeny, 1927] Kozeny, J. (1927). Ueber kapillare leitung des wasser im boden. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien*, 136 :271–306.
- [Krane, 1988] Krane, K. S. (1988). *Introductory nuclear physics*. John Wiley & Sons, New-York.
- [Leblanc, 1984] Leblanc, S. (1984). *Analyses sédimentologiques*. INRS-Océanologie (Éditeur), Rimouski.
- [Ligier, 2004] Ligier, Y. (2004). Osiris imaging software. En ligne. <http://www.expasy.org/www/UIN/html1/projects/osiris/osiris.html>.
- [Melnyk et al., 1994] Melnyk, D. H., Smith, G., and Amiri-Garroussi, K. (1994). Filtering and frequency mapping as tools in subsurface cyclostratigraphy, with examples from the wessex bassin, uk. *Special Publication of the International Association of Sedimentologist*, 19 :35–46.
- [Mindlin, 1949] Mindlin, R. D. (1949). Compliance of elastic bodies in contact. *TRans. ASME*, 71 :A–259.
- [Mitchell, 1993] Mitchell, J. K. (1993). *Fundamentals of soil behavior*. John Wiley & Sons, New York, second edition.
- [Munson et al., 1998] Munson, B. R., Young, D. F., and Okiishi, T. H. (1998). *Fundamentals of fluid mechanics*. John Wiley & Sons, New-York, third edition.
- [Reddy, 1993] Reddy, J. N. (1993). *An introduction to the finite element method*. McGraw Hill, Boston, second edition.
- [Schiffman et al., 1988] Schiffman, R. L., Vick, S. G., and gibson, R. E. (1988). Behavior and properties of hydraulic fills. *ASCE Geotechnical Specialty Conference on Hydraulic Fill Structures*.
- [Simecek-Beatty et al., 2001] Simecek-Beatty, D., Lehr, W. J., and Lankford, J. F. (2001). Leaking tank experiment with orimulsion and canola oil. Technical report, National Oceanic and Atmosphere Administration, Seattle, Washington.
- [Suentens, 2002] Suentens, P. (2002). *Fundamental of medical imaging*. Cambridge University Press.
- [Taylor, 1955] Taylor, D. W. (1955). *Fundamentals of soil mechanics*. John Wiley & Sons, New-York.
- [Terzaghi, 1948] Terzaghi, K. (1948). *Soil mechanics in engineering practice*. John Wiley & Sons, New-York.
- [Toorman, 1999] Toorman, E. A. (1999). Sedimentation and self-weight consolidation : constitutive equations and numerical modeling. *Géotechniques*, 49(6) :709–726.

- [Vincent, 1989] Vincent, J. S. (1989). Quaternary geology of the southern canadian shield. *Quaternary Geology of Canada and Greenlan*, pages 249–275.
- [Wolbarst, 1993] Wolbarst, A. B. (1993). *Physics of radiology*. Appleton & Lange, Norwalk, Connecticut.

Annexe A

Fonctionnement d'un scanographe

A.1 Introduction

La tomodensitométrie ou scanographie a été inventée en 1975 par Robert S. Ledley. Le tomodensitomètre crée des milliers de projections d'un corps à des angles différents en l'exposant à une source de rayons X (figure A.1). Un ordinateur analyse ces projections et reconstruit une représentation 3D du corps à partir des informations contenues dans chaque projection. Dès son entrée en service, cet appareil a révolutionné l'imagerie médicale. Il était désormais possible d'obtenir une représentation 3D d'un corps et non plus des projections.

Quatre générations de scanographe existent. La première génération consiste en une source de rayon X et un détecteur qui se déplace transversalement pour effectuer la projection. Le corps est placé sur un socle tournant. L'objet est tourné d'un angle θ lorsque la projection est terminée. Cet appareil est extrêmement lent. Par contre, la résolution des modèles actuels peut être de l'ordre du micron en raison de l'excellente collimation possible. Ce type de scanographe est principalement utilisé en recherche et dans l'industrie. La seconde génération est fort similaire, mais différente par le nombre de détecteurs de radiations. Au lieu d'un détecteur, il y a un plateau de détecteurs. Cet appareil augmente la vitesse d'analyse. Par contre, la résolution possible est moindre que la génération précédente en raison des limitations associées à la collimation du faisceau de rayons X. La troisième génération, la plus populaire en médecine, consiste en un portique dans lequel la source de rayons X et le berceau de détecteurs tournent autour de l'échantillon ou du patient. Ce type de tomodensitomètre est

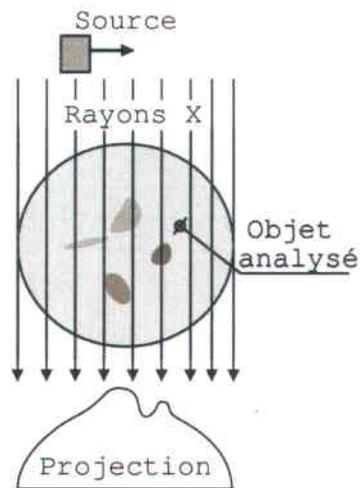


FIG. A.1 – Obtention d’une projection d’un objet en l’éclairant avec des rayons X.

extrêmement rapide et permet des images claires dans le cadre médical. Ce type de scanographe est étudié dans cette section. Le scanographe de quatrième génération est un portique, mais seule la source tourne. Les détecteurs sont positionnés sur tout le pourtour du portique. Cet appareil n’a pas été un succès comme son prédécesseur en raison de son coût et de sa complexité.

Dans ce chapitre, le tomodynamètre de troisième génération est étudié. La production des rayons X et les concepts mathématiques permettant la reconstruction des images à partir des projections sont traités dans cette section.

A.2 Production d’un faisceau de rayons X

Un tube à rayon X est constitué d’une anode et d’une cathode. La cathode est un filament constitué d’un métal résistif, généralement du tungstène, qui sert à générer des électrons. La cathode est chauffée par le passage d’un courant électrique. La chaleur de la cathode agite les électrons. À partir d’une certaine température, les électrons commencent à avoir suffisamment d’énergie pour se libérer de la cathode. La distribution d’énergie des électrons suit la distribution de Boltzmann. Plus la température du tube est élevée et plus d’électrons possèdent l’énergie de libération. Il en résulte que la température de la cathode contrôle le courant d’électron. Le courant sur le scanographe est mesuré en milliampère seconde (mAs).

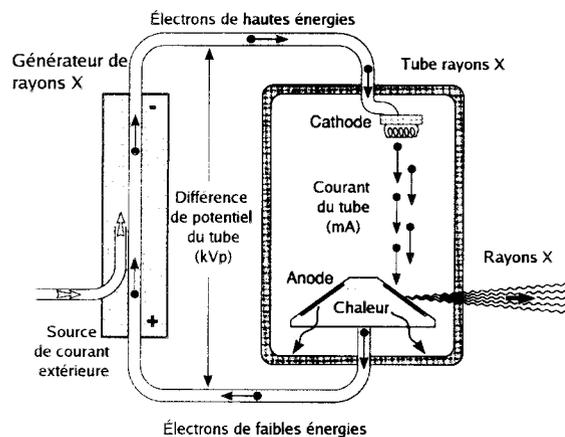


FIG. A.2 – Le fonctionnement d'un tube à rayons X (tiré de [Wolbarst, 1993]).

Plus le courant est élevé, plus le faisceau de rayons X est dense.

Une différence de potentiel est appliquée entre l'anode et la cathode. Cette différence de potentiel accélère les électrons éjectés qui s'écrasent sur l'anode. Ce processus génère 99% de chaleur et 1 % de rayons X. La chaleur de l'anode est dissipée en la faisant tourner (figure A.2). La radiance émise (puissance émise J/s) par l'anode (avec l'hypothèse du corps noir) suit la loi de Stephan :

$$R_T = \sigma_{SB} T^4, \quad (A.1)$$

où

$$\sigma_{SB} = 5,67 \times 10^{-8} W/m^2 - K^4, \quad (A.2)$$

est la constante de Stephan-Boltzmann. Le refroidissement de l'anode se fait par radiation en raison du vide du tube. La différence de potentiel détermine l'énergie moyenne du faisceau ; plus le potentiel est grand, plus les rayons X sont énergétiques.

Les électrons interagissent de deux manières avec les atomes de l'anode : par bremsstrahlung et par désexcitation des électrons. Le bremsstrahlung signifie radiation par ralentissement et se produit lorsqu'une particule chargée change rapidement de vitesse ou de direction. Une partie de l'énergie de mouvement de la particule est transférée en radiations électromagnétiques. Dans un tube à rayons X, les électrons de hautes énergies sont déviés par les noyaux des atomes de l'anode et génèrent un spectre de radiations X. L'intensité du spectre décroît linéairement avec l'énergie des électrons. La forme du spectre est une pente descendante. La figure A.3 présente le spectre d'émission de rayons X du tungstène pour une

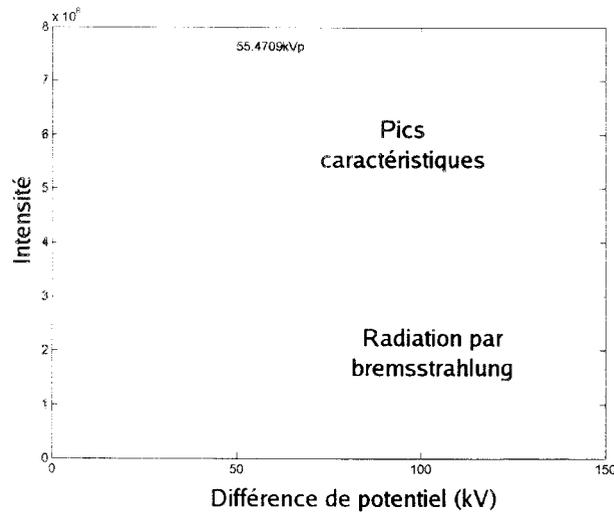


FIG. A.3 – Spectre du tungstène pour une différence de potentiel de 140 kVp.

différence de potentiel de 140 kVp. La forme en triangle du spectre bremsstrahlung est visible. La décroissance d'intensité pour les faibles énergies est causée par l'absorption des radiations par un filtre de cuivre de 0,5 mm et par l'air.

La désexcitation des électrons produit des rayons X caractéristiques. Ces rayons sont produits lorsque des électrons des couches internes de l'atome sont éjectés (couche K, L, M). L'atome se désexcite et produit un rayon X. Ces rayons X sont dit caractéristiques, car ils sont spécifiques à chaque configuration atomique et donc, à chaque type d'atome [Wolbarst, 1993].

A.3 Projection et transformée de Radon continue

Considérant un faisceau de rayons X parallèle arrivant sur un objet ayant un coefficient d'absorption linéaire $\mu(x, y)$ en chaque point (x, y) . Le faisceau de rayon X fait un angle θ avec l'axe y . L'intensité initiale du faisceau est I_0 . Un nouveau système de coordonnées (r, s) est défini en tournant (x, y) d'un angle θ . Les transformations pour passer d'un système à

l'autre sont :

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Pour un angle θ , le profil d'intensité à la sortie est :

$$I_\theta(r) = I_0 e^{-\int_{L_{r,\theta}} \mu(x,y) ds}, \quad (\text{A.5})$$

$$I_\theta(r) = I_0 e^{-\int_{L_{r,\theta}} \mu(r \cos \theta - s \sin \theta, r \sin \theta + s \cos \theta) ds}, \quad (\text{A.6})$$

où $L_{r,\theta}$ est la ligne qui fait un angle θ avec y à une distance r de l'origine. Le spectre d'un tube à rayon X est continu :

$$I_\theta(r) = \int_0^\infty I_0(E) e^{-\int_{L_{r,\theta}} \mu(r \cos \theta - s \sin \theta, r \sin \theta + s \cos \theta) ds} dE. \quad (\text{A.7})$$

En pratique, le faisceau est considéré comme monochromatique. Chaque profil d'intensité est transformé en un profil d'atténuation :

$$p_\theta(r) = -\ln \frac{I_\theta(r)}{I_0} = \int_{L_{r,\theta}} \mu(r \cos \theta - s \sin \theta, r \sin \theta + s \cos \theta) ds, \quad (\text{A.8})$$

où $p_\theta(r)$ est la *projection* de la fonction $\mu(x, y)$ à l'angle θ . La carte des projections en fonction de l'angle θ est un sinogramme (figure A.4).

De manière générale cette transformation s'écrit comme suit :

$$p(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \theta - s \sin \theta, r \sin \theta + s \cos \theta) ds, \quad (\text{A.9})$$

ou :

$$p(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - r) dx dy. \quad (\text{A.10})$$

Cette transformation se nomme la transformée de Radon, en l'honneur de Johann Radon qui découvrit la transformation qui permet de reconstruire une fonction à partir de ces projections en 1917.

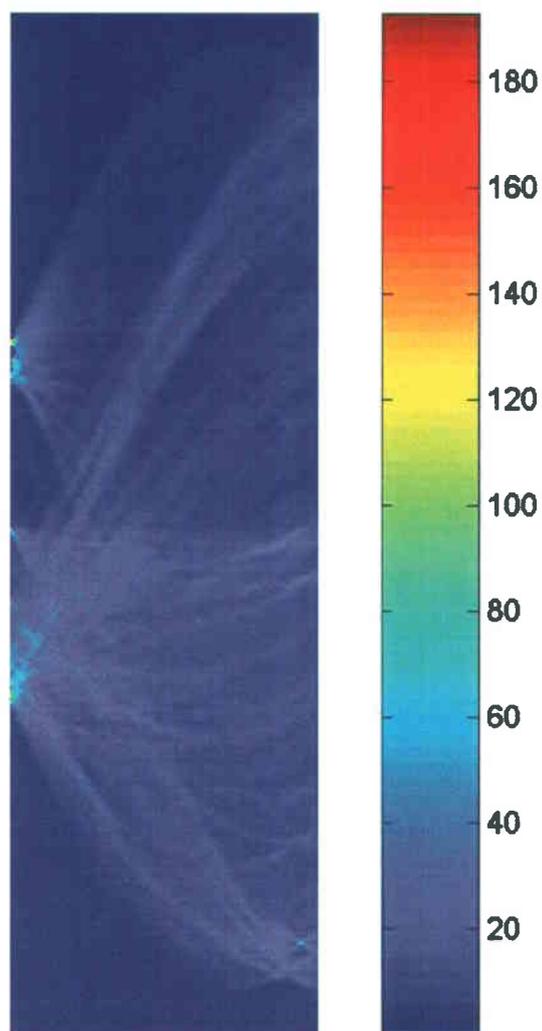


FIG. A.4 – Sinogramme résultant de la transformée de Radon d'une carotte de sédiment.

La transformée de Radon possède les propriétés suivantes :

– $p(r, \theta)$ est périodique en θ sur une période de 2π :

$$p(r, \theta) = p(r, \theta + 2\pi); \quad (\text{A.11})$$

– $p(r, \theta)$ est symétrique en θ avec une période de π :

$$p(r, \theta) = p(-r, \theta \pm \pi). \quad (\text{A.12})$$

Pour un topogramme, n coupes sont prises à des intervalles $\Delta\theta$, créant une fonction dépendant de θ et r . Le paramètre r est la distance entre le point d'origine et la perpendiculaire à la courbe d'équation :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - r. \quad (\text{A.13})$$

A.4 Transformée de Radon discrète

A.4.1 Algorithme de projection arrière (*back projection*)

La procédure pour effectuer la projection inverse consiste à appliquer la procédure inverse [Suentens, 2002], c'est-à-dire :

$$b(x, y) = \int_0^\pi p(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta. \quad (\text{A.14})$$

Or, l'image résultante est floue comparée à l'image originale. Ainsi, la méthode pour effectuer la projection inverse consiste à utiliser le théorème de projection provenant de la théorie des transformées de Fourier en 2D.

Soit $F(k_x, k_y)$, la transformée de Fourier 2D de $f(x, y)$:

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(k_x x + k_y y)} dx dy, \quad (\text{A.15})$$

et $P_\theta(k)$ la transformée 1D de la projection $p_\theta(r)$:

$$P_\theta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(r) e^{-2\pi i(kr)} dr. \quad (\text{A.16})$$

Soit θ variable, la fonction $P_\theta(k)$ devient une fonction 2D $P(k, \theta)$. Le théorème de projection stipule que [Suentens, 2002] :

$$P(k, \theta) = F(k_x, k_y). \quad (\text{A.17})$$

A.4.2 Reconstruction directe

La reconstruction directe consiste à :

1. Calculer la transformée de Fourier des projections $p_\theta(r)$:

$$P_\theta(k) = \mathcal{F}\{p_\theta(r)\}. \quad (\text{A.18})$$

2. Placer les valeurs de $P_\theta(k)$ sur une grille pour obtenir $P(\theta, k)$.
3. Calculer la transformée de Fourier 2D inverse de $F(k_x, k_y)$.

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k_x, k_y)\}. \quad (\text{A.19})$$

Pour calculer \mathcal{F}^{-1} , il est nécessaire d'avoir les points sur une grille cartésienne. Il faut donc interpoler les valeurs de la grille polaire. En raison de cette interpolation, cette méthode est moins populaire que la reconstruction par projection arrière filtrée (*filtered backprojection*).

A.4.3 Projection arrière filtrée

La transformée de Fourier inverse (IFT) peut s'effectuer en coordonnée polaire. Dans ce cas,

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k_x, k_y)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\int_0^\pi p^*(k, \theta) d\theta\right\} \quad (\text{A.20})$$

où $r = x \cos \theta + y \sin \theta$. Par définition

$$p^*(k, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} P^*(k, \theta) e^{i2\pi kr} dk \quad P^*(k, \theta) = P(k, \theta) |k|. \quad (\text{A.21})$$

La fonction $f(x, y)$ peut être reconstruite par projection arrière de $p^*(r, \theta)$. La fonction $P^*(k, \theta)$ est obtenue en multipliant $P(k, \theta)$ par la rampe $|k|$. Cette multiplication a pour effet de filtrer le spectre des projections. Ce filtre explique le nom de projection arrière filtrée (*filtered backprojection*).

La rampe $|k|$ est un filtre passe haut et n'est pas souhaitable. En effet, le bruit et les artefacts se retrouvent habituellement dans les hautes fréquences. La rampe amplifiera donc le bruit et masquera les informations de basses fréquences composant l'image. C'est pourquoi le filtre $|k|$ est limité à une bande de fréquence. Le filtre de Ram-Lak, d'après Ramachandran et Lakshminarayanan, est la différence entre une fonction rectangle et une fonction triangle [Suentens, 2002] :

$$q(r) = \frac{k_{max} \sin(2\pi k_{max} r)}{\pi r} - \frac{1 - \cos(2\pi k_{max} r)}{2\pi^2 r^2}, \quad (\text{A.22})$$

où $k_{max} = 1/\Delta S = 1/2\Delta r$. Souvent, ce filtre est insuffisant, car des fréquences indésirables augmentent en deçà de k_{max} en raison de l'aliasing et du bruit. L'application d'un filtre passe-bas (Hamming, Hanning, Shepp-Logan, Butterworth) enlève ces hautes fréquences et diminue ces artefacts.

L'algorithme de projection arrière consiste à :

1. Filtrer le sinogramme $p(r, \theta)$:

$$\forall \theta : \quad p_{\theta}^*(r) = p_{\theta}(r) * q(r) \quad \text{ou} \quad P_{\theta}^*(k) = P_{\theta}(k) Q(r). \quad (\text{A.23})$$

2. Filtrer le signal avec un filtre passe-bas ;
3. Effectuer la projection inverse.

A.5 Les artefacts

Plusieurs artefacts sont présents dans les images tomographiques. Ces artefacts nuisent à la qualité des images. Les principaux types d'artefact sont [Kak and Slaney, 1999] :

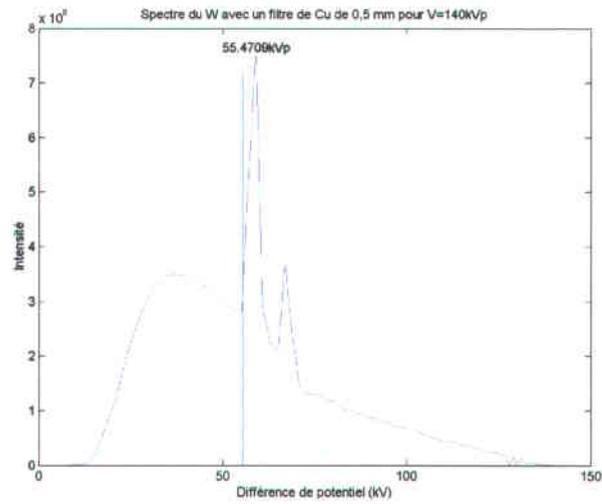
- durcissement du faisceau ;
- effet de volume partiel ;
- insuffisances de photons ;

L'effet de volume partiel résulte de la limite spatiale des détecteurs et de la taille de l'objet. Les détecteurs ont une résolution finie. L'absorption est moyennée sur un voxel (un pixel en 3D). Il en résulte une erreur. Cette erreur est importante pour les bords des objets. À ces endroits, une partie du faisceau est absorbée par l'objet, tandis que l'autre partie ce rend sur le détecteur sans absorption. Le détecteur reçoit une partie du faisceau atténué et l'autre non. La moyenne fournira une absorption plus faible à l'interface qu'elle ne devrait l'être. Le deuxième type d'effet de volume partiel apparaît lorsque l'objet est plus grand que le faisceau de rayon X. Une partie seulement de l'objet est enregistrée dans chaque coupe. Il en résulte des lignes dans l'image.

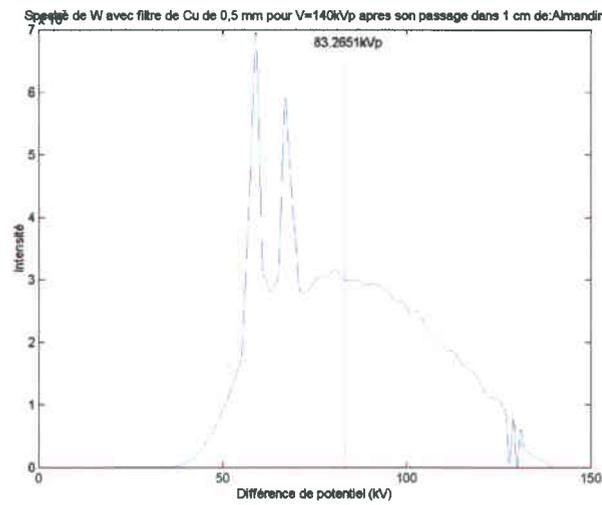
Le durcissement du faisceau (plus connu sous son appellation anglaise de *beam hardening*) est occasionné par la nature polychromatique du faisceau de rayons X. Il a pour conséquence de réduire l'atténuation au centre de l'image par rapport au bord. Pour un objet uniforme, l'objet semble creusé à l'intérieur. L'atténuation dépend de l'énergie du photon incident. Un photon de haute énergie est atténué différemment d'un photon de faible énergie. Le spectre du faisceau est déformé. Pour des énergies de quelques centaines de keV , les photons de basse énergie sont atténués davantage que les photons de hautes énergies. L'énergie moyenne du spectre augmente, d'où le terme de durcissement du faisceau.

La figure A.5a présente le spectre d'émission d'une anode de tungstène avec un filtre de cuivre de 0,5 mm. La figure A.5b présente le spectre après son passage dans 1 cm d'almandin. Les basses énergies sont fortement atténuées et il ne reste que la portion de hautes énergies. L'énergie moyenne du faisceau passe de $55,47keV$ à $83,26keV$.

L'insuffisance de photons survient lorsqu'un objet de grande taille ou très absorbant est analysé au scanographe (exemple : de la galène). Le nombre de photon sur les détecteurs est



(a)



(b)

FIG. A.5 – Durcissement du faisceau de photon. (a) Spectre initial du tungstène. (b) Le spectre est déformé après le passage du faisceau dans de l'almandin. Les basses énergies sont préférentiellement absorbées, laissant un faisceau dont l'énergie moyenne est supérieure à celle du spectre initial.

faible et le rapport signal sur bruit est faible. Les bruits électroniques et quantiques ajoutent du bruit blanc qui rend l'image moins claire. Pour remédier à cet artefact, le courant de la lampe doit être augmenté.

La reconstruction de l'image par transformée de Fourier discrète amène des artefacts. En pratique, la transformée de Fourier discrète calcule un nombre fini de fréquence. Il en résulte le phénomène de Gibbs. C'est-à-dire, qu'il y aura des dépassements aux discontinuités. Ce phénomène peut être amoindri par un filtre, mais ne peut être complètement éliminé.

Annexe B

Résolution des équations par la méthode des éléments finis

B.1 Dérivation des fonctions d'approximations

L'équation 2.68 est fortement non-linéaire. Il est nécessaire de connaître la dépendance de la conductivité hydraulique k et de la contrainte σ en fonction de l'indice des vides e . Le modèle permettra de choisir entre la loi de Kozeny-Carman (éq. 2.29) ou de Gallois (éq. 2.30) pour la perméabilité et entre les équations de Gibson (éq. 2.34) et de Gallois (éq. 2.35) pour la contrainte.

Pour résoudre l'équation 2.68, la méthode des éléments finis est employée. La méthode de Galerkin est utilisée. Les fonctions de poids sont égales aux fonctions d'interpolation. L'intégration dans le temps consiste à appliquer l'équation 3.39.

L'intégrale pondérée de l'équation 2.68 est

$$\sum_{i=0}^n \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \left(\alpha(e) + \beta(e) \frac{\partial e}{\partial x} \right) \frac{\partial e}{\partial x} + \gamma(e) \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) dx = 0, \quad (\text{B.1})$$

où n correspond aux nombres de noeuds de l'élément. La dérivée seconde impose que les fonctions d'interpolations ψ_i soient différentiables deux fois. Le problème possède deux degrés de liberté : la solution e et sa dérivée $\frac{\partial e}{\partial x}$. La solution e est donnée par l'équation 3.15.

La dérivée de la solution $\frac{\partial e}{\partial x}$ est donnée par :

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e(x)}{\partial x}. \quad (\text{B.2})$$

En remplaçant 3.15 et B.2 dans B.1, l'équation devient :

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i^e \gamma(u) \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial^2 \psi_j^e}{\partial x^2} + \psi_i^e dx + \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i^e \left(\alpha(u) + \beta(u) \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \right) u_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} dx \right\} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Les termes $\alpha(u)$, $\beta(u)$ et $\gamma(u)$ dépendent de $u = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \psi_j^e(x)$. Par lisibilité, ils sont notés simplement α , β et γ . Aussi, en sortant la somme de l'équation B.3, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i^e \psi_j^e \frac{\partial u_j^e(t)}{\partial t} + \psi_i^e \gamma u_j^e(t) \frac{\partial^2 \psi_j^e}{\partial x^2} dx + \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i^e \left(\alpha + \beta \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \right) u_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} dx \right\} = 0. \quad (\text{B.4})$$

B.2 Matrice K et M

Le système d'équations intégral-différentielles B.4 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[M] \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [K(u)] \vec{u} = 0, \quad (\text{B.5})$$

où

$$M_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i^e \psi_j^e dx, \\ K_{ij}^e(e) = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \gamma \psi_i^e \frac{\partial^2 \psi_j^e}{\partial x^2} + \psi_i^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \left(\alpha + \beta \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \right) dx. \quad (\text{B.6})$$

La dérivée $\frac{\partial u_j^e(t)}{\partial u_k}$ est nulle si $k \neq j$ et égale à 1 si $k = j$. Il en résulte que :

$$\beta(u) \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j^e(t)}{\partial u_k} \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} = \beta(u) \frac{\partial \psi_k^e(\epsilon)}{\partial \epsilon} \quad (\text{B.12})$$

Finalement, la dérivée de la matrice $[K]$ est :

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial u_k} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\partial \gamma}{\partial u_k} \hat{\psi}_i^e \frac{\partial^2 \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon^2} + \hat{\psi}_i^e \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_k} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} \left(\frac{\partial \beta}{\partial u_k} \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} + \beta \frac{\partial \psi_k^e(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \right) d\epsilon \quad (\text{B.13})$$

Les paramètres α , β et γ dépendent de la solution u qui représente la somme des valeurs aux noeuds u_j multipliés par les fonctions d'interpolations correspondantes. La dérivée par u_j peut être décomposée à l'aide de la dérivée en chaîne pour obtenir une dérivée selon u :

$$\frac{\partial}{\partial u_k} = \frac{\partial u}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\sum_{j=1}^n u_j \hat{\psi}_j^e \right) \frac{\partial}{\partial u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial u_k} \hat{\psi}_j^e \frac{\partial}{\partial u} = \hat{\psi}_k^e \frac{\partial}{\partial u} \quad (\text{B.14})$$

Aussi, l'équation B.13 peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial u_k} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\mathcal{J}_e} \hat{\psi}_k^e \frac{\partial \gamma}{\partial u} \hat{\psi}_i^e \frac{\partial^2 \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon^2} + \hat{\psi}_i^e \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \left(\hat{\psi}_k^e \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} \left(\hat{\psi}_k^e \frac{\partial \beta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \epsilon} + \beta \frac{\partial \psi_k^e}{\partial \epsilon} \right) \right) d\epsilon \quad (\text{B.15})$$

B.3.2 Dérivée des fonctions α , β et γ

La dérivée de α par rapport à e est :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) \left[\frac{\partial^2 k}{\partial e^2} - \frac{2}{1+e} \frac{\partial k}{\partial e} + \frac{2k}{(1+e)^2} \right]$$

La dérivée de β par rapport à e est :

$$\frac{\partial \beta}{\partial e} = \frac{1}{g\rho_f} \left\{ \left(\frac{\partial k}{\partial e} \frac{\partial \sigma'}{\partial e} - \frac{k}{1+e} \frac{\partial \sigma'}{\partial e} + k \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial e^2} \right) + (1+e) \left[k \frac{\partial^3 \sigma'}{\partial e^3} + \left(2 \frac{\partial k}{\partial e} - \frac{k}{1+e} \right) \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial e^2} + \left(\frac{\partial^2 k}{\partial e^2} + \frac{k}{(1+e)^2} - \frac{1}{1+e} \frac{\partial k}{\partial e} \right) \frac{\partial \sigma'}{\partial e} \right] \right\} \quad (\text{B.16})$$

La dérivée de la fonction γ est :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial e} = \frac{1}{\rho_f g} \left\{ (1+e) \left[\frac{\partial k}{\partial e} \frac{\partial \sigma'}{\partial e} + k \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial e^2} \right] + k \frac{\partial \sigma'}{\partial e} \right\} \quad (\text{B.17})$$

B.4 Dérivées des fonctions de perméabilité et de contrainte effective

Dans cette section, les lois de conductivité hydraulique et de contraintes effectives sont fournies ainsi que les dérivées par rapport à l'indice des vides.

B.5 Conductivité hydraulique

Fonction de Kozeny-Carman :

$$k = CD_s^2 \left(\frac{g\rho_f}{\mu} \right) \left(\frac{e^3}{1+e} \right) S^3. \quad (\text{B.18})$$

Première dérivée de la fonction de Kozeny-Carman :

$$\frac{\partial k}{\partial e} = CD_s^2 \left(\frac{g\rho_f e^2}{\mu} \right) \frac{(3+2e)}{(1+e)^2} S^3. \quad (\text{B.19})$$

Seconde dérivée de la fonction de Kozeny-Carman :

$$\frac{\partial^2 k}{\partial e^2} = 2CD_s^2 \left(\frac{g\rho_f e}{\mu} \right) \frac{(3+3e+e^2)}{(1+e)^3} S^3. \quad (\text{B.20})$$

Fonction de conductivité hydraulique de Gallois :

$$k = a \left(\frac{e}{1+e} \right)^b. \quad (\text{B.21})$$

Première dérivée de la fonction de conductivité hydraulique de Gallois :

$$\frac{\partial k}{\partial e} = \frac{ab}{e(1+e)} \left(\frac{e}{1+e} \right)^b. \quad (\text{B.22})$$

Seconde dérivée de la fonction de conductivité hydraulique de Gallois :

$$\frac{\partial^2 k}{\partial e^2} = ab \left(\frac{e}{1+e} \right)^b \frac{(b-2e-1)}{e^2(1+e)^2}. \quad (\text{B.23})$$

B.6 Contrainte effective

Fonction de contrainte de Gibson :

$$\sigma' = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{e - e_\infty}{e_{00} - e_\infty} \right). \quad (\text{B.24})$$

Première dérivée de la fonction de contrainte de Gibson :

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial e} = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{e - e_\infty} \right). \quad (\text{B.25})$$

Seconde dérivée de la fonction de contrainte de Gibson :

$$\frac{\partial^2 \sigma'}{\partial e^2} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{e - e_\infty} \right)^2. \quad (\text{B.26})$$

Troisième dérivée de la fonction de contrainte de Gibson :

$$\frac{\partial^3 \sigma'}{\partial e^3} = \frac{-2}{\lambda} \left(\frac{1}{e - e_\infty} \right)^3. \quad (\text{B.27})$$

Fonction de contrainte de Gallois :

$$\sigma' = a(e-b)^{-c}. \quad (\text{B.28})$$

Première dérivée de la fonction de contrainte de Gallois :

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial e} = ac \frac{(e-b)^{-c}}{(-e+b)}. \quad (\text{B.29})$$

Seconde dérivée de la fonction de contrainte de Gallois :

$$\frac{\partial^2 \sigma'}{\partial e^2} = ac(c+1) \frac{(e-b)^{-c}}{(-e+b)^2}. \quad (\text{B.30})$$

Troisième dérivée de la fonction de contrainte de Gallois :

$$\frac{\partial^3 \sigma'}{\partial e^3} = ac(c+1)(c+2) \frac{(e-b)^{-c}}{(-e+b)^3}. \quad (\text{B.31})$$

Annexe C

Groupes d'analyses expérimentaux

Cette section présente les divers groupements de colonnes de sédimentation lors de la prise des données. Les colonnes de sédimentation ont été regroupées pour accélérer l'analyse.

FMserie		
	Protocole	Argile-9tubes
#	Nom	Position sur la table (mm)
1	AEPor-1	-89
2	AEPor-2	-267
3	AEKao-1	-445
4	AEKao-2	-623
11	SOH(63-90)-300gpl	-801
12	SOH(90-125)-300gpl	-979
7	AEPor-SOH(90-125)-AEPor-12h	-1157
8	AEPor-SOH(90-125)-AEPor-24h	-1375
13	SOH(125-250)-300gpl	-1513

TAB. C.1 – Le groupe de colonnes sédimentaires FMSerie.

FM2h		
Protocole		Argile-7tubes-zoom
#	Nom	Position sur la table (mm)
6	AEPor-SOH(90-125)-AEPor-2h	-89
17	SOE(90-125)(90-125)-100g-2h	-267
19	SOE(63-125)(63-125)-100g-2h	-445
21	SOE(125-250)(125-250)-100g-2h	-623
23	SOE(90-125)(125-250)-100g-2h	-801
25	SOE(63-125)(90-125)(125-250)-100g-2h	-979
27	SOE(63-125)(125-250)-100g-2h	-1157

TAB. C.2 – Le groupe de colonnes sédimentaires FM2h.

FM24h		
Protocole		Argile-8tubes-zoom
#	Nom	Position sur la table (mm)
9	AEPor-AEPor100g-24h-1	-89
10	AEPor-AEPor100g-24h-2	-267
18	SOE(90-125)(90-125)-100g-24h	-445
20	SOE(63-125)(63-125)-100g-24h	-623
22	SOE(125-250)(125-250)-100g-24h	-801
24	SOE(90-125)(125-250)-100g-24h	-979
26	SOE(63-125)(90-125)(125-250)-100g-24h	-1157
28	SOE(63-125)(125-250)-100g-24h	-1375

TAB. C.3 – Le groupe de colonnes sédimentaires FM24h.

SOE-300gpl		
Protocole		Argile-3tubes-zoom
#	Nom	Position sur la table
14	SOE(63-90)-300gpl	-89
15	SOE(90-125)-300gpl	-267
16	SOE(125-250)-300gpl	-445

TAB. C.4 – Le groupe de colonnes sédimentaires SOE-300gpl.

Annexe D

Mesure du coefficient d'absorption pour divers minéraux de caractéristiques connues

Cette expérience consiste à mesurer le coefficient d'absorption des rayons X pour divers minéraux de composition connue. Le coefficient d'absorption est mesuré à l'aide du tomodynamomètre. L'objectif est de déterminer une relation univoque entre la densité et le coefficient d'absorption. L'échantillon de minéraux doit satisfaire trois exigences :

1. la plage de densité doit être grande ;
2. la plage de numéro atomique doit être grande ;
3. les minéraux doivent être cristallins et purs.

La pureté des minéraux garantit la précision de la calibration. Les échantillons doivent être cristallins pour éviter les erreurs occasionnées par la porosité de l'échantillon et les impuretés. Les minéraux utilisés lors de cette expérience sont énumérés dans le tableau D.1. Ils ont été gracieusement prêtés par le Musée de géologie René-Bureau de l'Université Laval. La densité a été mesurée expérimentalement par la poussée d'Archimède [Leblanc, 1984]. Le numéro atomique effectif a été calculé théoriquement à partir de l'équation 5.15.

TAB. D.1: Liste des caractéristiques des minéraux utilisés, composition, densité et numéro atomique moyen.

Nom	Formule Chimique	Densité	Z effectif
Carnallite	$KMgCl_3 \cdot 6H_2O$	0,9735	14,7317
Halite	$NaCl$	2,1044	15,3074
Graphite	C	2,1803	6,0000
Gypse	$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	2,2727	14,603
Microcline	$KAlSi_3O_8$	2,5018	13,3349
Quartz	SiO_2	2,6087	11,7518
Béryl	$Be_3Al_2(Si_6O_{18})$	2,5213	11,2412
Calcite	$CaCO_3$	2,6522	15,6222
Apatite	$Ca_5(PO_4)_3(F, Cl, OH)$	3,0495	16,2502
Aragonite	$CaCO_3$	2,7952	15,6222
Fluorite	CaF_2	3,1480	16,9056
Hypersthène	$(Mg, Fe)SiO_3$	3,2315	19,7033
Topaze	$Al_2SiO_4(f, OH)_2$	3,4546	11,2916
Azurite	$Cu_3(CO_3)_2(OH)_2$	3,2102	24,2131
Sidérite	$FeCO_3$	3,4808	20,9784
Sphalérite	ZnS	3,9807	26,9902
Corindon	Al_2O_3	3,7468	11,2759
Chalcopyrite	$CuFeS_2$	3,5565	24,8586
Almandin	$Fe_3Al_2Si_3O_{12}$	4,0810	19,3886
Barite	$BaSO_4$	4,3455	46,978
Stibine	Sb_2S_3	3,9011	45,7848
Ilménite	$FeTiO_3$	4,5546	21,1404
Pyrite	FeS_2	4,7841	21,9077
Crystal de pyrite	FeS_2	4,8537	21,9077
Hématite	Fe_2O_3	4,3688	23,378
Arsénopyrite	$FeAsS$	5,1533	28,619
Galène	PbS	6,89597	77,9427
Nickeline	$NiAs$	5,2700	30,9535
Cinabre	HgS	5,6215	75,9549

La procédure expérimentale est simple. L'analyse des images est plus complexe. Les minéraux ont été positionnés sur la table du scanographe et centrés verticalement et horizontalement. Ils ont été scannés en utilisant les paramètres donnés dans le tableau D.2.

Protocole	Spine minéraux
Type d'étude	Control scan
Épaisseur de la couche	5
Diamètre de la reconstruction	82
Différence de potentiel (kVp)	140
Courant du tube à rayon X (mAs)	293
Filtre	B60s
Échelle étendue	oui

TAB. D.2 – Paramètres du scanographe lors de l'analyse des minéraux.

D.1 Calculs

D.1.1 Traitement des images

La mesure scanographique des minéraux fournit sur des coupes des intensités tomographiques dépendant du coefficient d'absorption linéaire (figure D.1a). Ces images présentent des artefacts, notamment sur le bord des échantillons. Ces artefacts sont occasionnés par la reconstruction par transformé de Fourier (phénomène de Gibbs) et par le durcissement du faisceau. Cette section n'est donc pas considérée pour le calcul du coefficient d'absorption.

L'image est traitée de manière automatique par la fonction Matlab *MesureAbsorption.m*. Le code de cette fonction se retrouve sur le CD-ROM joint. Ce programme créé un histogramme de l'image. L'histogramme présente deux pics : un pour l'air et la table et un pour l'échantillon (figure D.1c). Il sert à déterminer les seuils pour le filtre. Le premier seuil détermine la valeur minimale HU_{min} et l'autre la valeur maximale HU_{max} . Le seuil HU_{max} sert à enlever les artefacts se trouvant sur les bords des échantillons. Ces artefacts augmentent de 10 à 25 % l'erreur de la mesure. Il est donc essentiel de les enlever. Le filtre est un passe-bande et garde les valeurs comprises entre HU_{min} et HU_{max} . Les autres valeurs sont mises à zéro. Le résultat est une coupe corrigée des effets dus à la table et aux artefacts (figure D.1b).

Par la suite, en effectuant la transformation dans le système de coordonnées naturelles ϵ , on obtient :

$$M_{ij}^e = \int_{-1}^1 \hat{\psi}_i^e \hat{\psi}_j^e \mathcal{J}_e d\epsilon, \quad (\text{B.7})$$

$$K_{ij}^e(e) = \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\mathcal{J}_e} \hat{\psi}_i^e \frac{\partial^2 \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon^2} + \hat{\psi}_i^e \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \left(\alpha + \frac{\beta}{\mathcal{J}_e} \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \right) d\epsilon, \quad (\text{B.8})$$

où les fonctions $\hat{\psi}$ sont données par les équations 3.13a.

B.3 Résolution par Newton-Raphson

Le système d'équation est non-linéaire, car la matrice $[\hat{K}]_{n+1}$ est une fonction de l'indice des vides e . Le système se résout par la méthode de Pickard ou de Newton-Raphson (éq. 3.44).

B.3.1 Matrice tangente

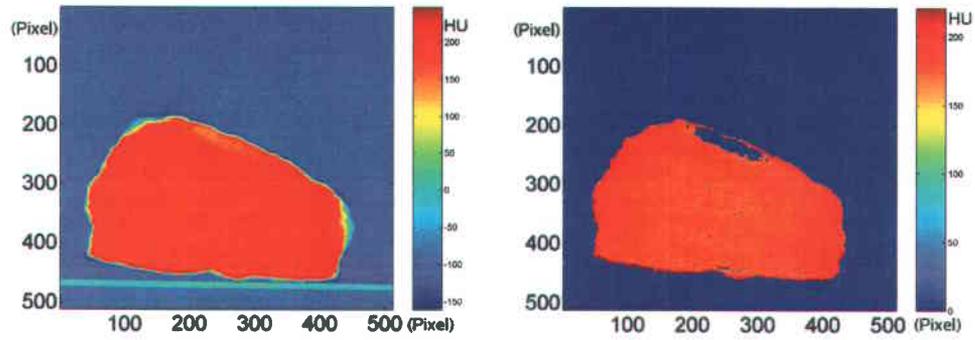
La matrice tangente est obtenue en appliquant l'équation 3.45. La matrice $[K(u)]$ est déjà connue et il reste à calculer la dérivée de cette matrice. La dérivée de $[K]$ est :

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\mathcal{J}_e} \hat{\psi}_i^e \frac{\partial^2 \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon^2} + \hat{\psi}_i^e \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \left(\alpha + \frac{\beta}{\mathcal{J}_e} \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \right) d\epsilon \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial u_k} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\partial \gamma}{\partial u_k} \hat{\psi}_i^e \frac{\partial^2 \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon^2} + \hat{\psi}_i^e(\epsilon) \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_k} + \frac{1}{\mathcal{J}_e} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\beta \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \right) \right) d\epsilon \quad (\text{B.10})$$

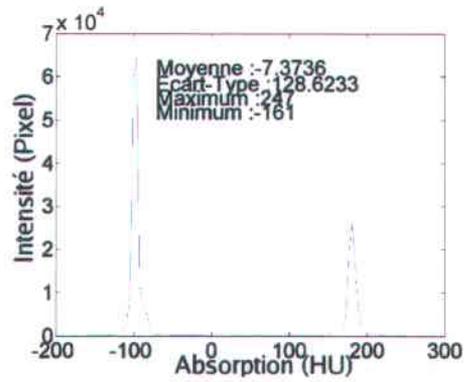
La dérivée du terme contenant β devient :

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \left(\beta \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \right) = \frac{\partial \beta}{\partial u_k} \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} + \beta \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j^e(t)}{\partial u_k} \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \epsilon} \quad (\text{B.11})$$



(a)

(b)



(c)

FIG. D.1 – Coupe d'un minéral de quartz : (a) : avant l'application du filtre (b) : après l'application du filtre. (c) : Histogramme de la coupe.

Le coefficient d'absorption moyen de l'échantillon est calculé en moyennant les valeurs HU non-nulles de toutes les images prises de l'échantillon. Par exemple, si six images ont été prises, les six images sont filtrées, puis les valeurs HU mémorisées dans un vecteur et la moyenne est calculée. L'écart-type est aussi calculé sur toutes les valeurs HU de l'échantillon.

D.1.2 Calcul du coefficient d'absorption théorique

Le coefficient d'absorption théorique a été calculé par le programme MatLab *CalculeMu.m*. Le code du programme est fourni sur le CD-ROM joint. Le fonctionnement général du programme consiste à calculer la fonction du coefficient d'absorption en fonction de l'énergie d'un composé. Cette fonction est ensuite multipliée par le spectre du tungstène. Le coefficient d'absorption total correspond à la moyenne du spectre d'énergie. L'algorithme du programme *CalculeMu.m* est présenté à l'encadré 2.

Le programme utilise les valeurs de coefficient d'absorption fournies par le programme XCOM du National Institute of Standards and Technology (NIST) [Hubbell and Seltzer, 2001]. Ces valeurs sont enregistrées dans des fichiers textes et contiennent les coefficients d'absorption en fonction de l'énergie. Les fichiers sont inclus sur le CD-ROM. Les fichiers sont nommés *mu.001.txt* à *mu.100.txt*. Le numéro représente le numéro atomique de l'élément.

Le spectre du tungstène a été calculé à partir du site web de Siemens. Les spectres ont été enregistrés dans les fichiers *SpectreW30kV.txt* à *SpectreW140kV.txt* situés dans le répertoire X. La première colonne du fichier représente l'énergie en *keV* et la seconde représente l'intensité tomographique (IT).

D.2 Résultats

Le tableau D.3 présente les valeurs moyennes HU et les écarts-types. Les écarts-types augmentent avec la diminution de la différence de potentiel de la lampe. Ils augmentent aussi avec la densification et le numéro effectif des minéraux. L'écart-type est maximal pour le galène en raison des nombreux artefacts présents dans l'image et du durcissement du faisceau. Cet artefact a pour conséquence de réduire les valeurs HU au centre de l'image. Il en résulte

Algorithme 2 La fonction CalculeMu.m.

1. Lire le fichier de formule *formule.txt*.
2. Lire le fichier *Poids Atomique.txt* contenant les masses molaires pour chaque élément (fonction *LitMasseAtomique.m*)
3. Transcrire les formules chimiques en numéro atomique (fonction *lit_formule.m*) et nombre d'atomes et retourner un vecteur de données.
4. Calculer les fractions massiques (éq. 5.14) et le numéro atomique effectif (éq. 5.15) de chaque élément à partir de la formule chimique (fonction *FractionMassique.m*).
5. Calculer le coefficient d'absorption moyen en HU.
 - (a) Calculer (μ/ρ) à partir des fractions massiques de chaque composé pour chaque valeur d'énergie.
 - (b) Lire le spectre d'émission du tungstène pour le potentiel à la lampe spécifié (fonction *lire_spectre.m*)
 - (c) Multiplier le spectre de (μ/ρ) par le spectre d'émission du tungstène filtré par du cuivre et divisé par l'intégrale du spectre d'émission du tungstène :

$$(\mu/\rho)_{moyen} = \frac{\int_{E_{min}}^{E_{max}} (\mu/\rho)(E) I(E)}{\int_{E_{min}}^{E_{max}} I(E)} \quad (D.1)$$

- (d) Multiplier par la densité ρ pour obtenir μ
 - (e) Transformer en unité Hounsfield (HU) par la relation 5.6.
6. Enregistrer les résultats dans le fichier de sortie spécifié par l'utilisateur.
-

un écart-type sensiblement plus grand.

TAB. D.3: Coefficient d'absorption linéaire moyen des minéraux pour des différences de potentiels à la source de 140, 120 et 80 keV.

Nom	Coefficient d'absorption linéaire					
	140 keV		120 keV		80 keV	
	Coefficient	Erreur	Coefficient	Erreur	Coefficient	Erreur
Carnallite	1402	250	1531	276	2159	354
Halite	1 574	99	1 731	107	2 412	137
Graphite	1 009	90	1 010	106	979	191
Gypse	1 848	114	2 006	124	2 683	156
Microcline	1 894	216	2 048	99	2 549	122
Quartz	1 798	68	1 886	74	2 239	95
Béryl	1 871	63	1 969	109	2 394	156
Calcite	2 307	137	2 506	146	3 378	308
Apatite	3 067	173	3 364	186	4 724	276
Aragonite	2 416	210	2 643	219	3 625	342
Fluorite	3 005	158	3 294	160	4 629	350
Hypersthène	3 189	194	3 457	224	4 672	325
Topaze	2 530	85	2 618	91	2 966	144
Azurite	5 182	569	5 852	842	8 407	1 660
Sidérite	3 987	669	4 413	709	6 462	1 404
Sphalérite	6 017	570	6 762	703	8 297	1 284
Corindon	3 076	68	3 212	94	3 734	105
Chalcopryrite	4 857	724	5 505	859	7 913	1 734
Almandin	4 133	297	4 569	338	6 152	1 320
Barite	5 314	927	5 555	951	6 230	1 545
Stibine	5 317	906	5 574	942	6 237	1 133
Ilménite	4 713	1 111	5 619	631	7 055	1 227
Pyrite	4 639	679	5 035	811	5 886	1 199
Crystal de pyrite	5 686	514	6 181	717	7 399	1 420
Hématite	6 038	397	6 807	492	9 089	1 557
Arsénopyrite	7 101	980	7 578	1 085	8 444	1 559
Galène	8 153	1 233	8 433	1 219	9 243	1 808
Nickeline	6 829	1 173	7 487	1 169	8 660	1 354
Cinabre	7 426	1 225	7 717	1 193	8 734	1 661

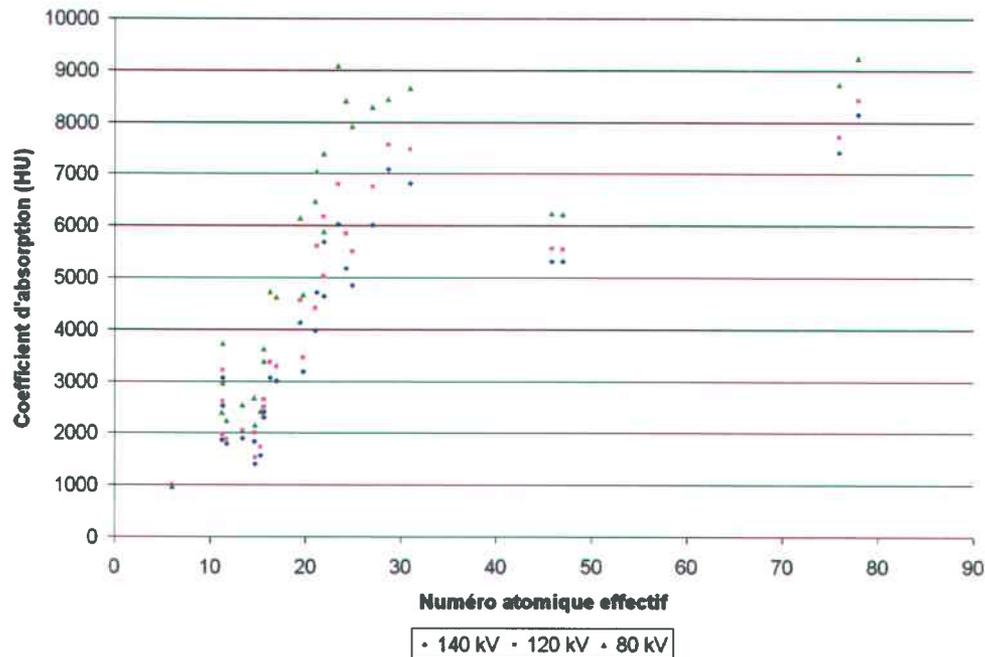


FIG. D.2 – Coefficient d'absorption en fonction du numéro atomique effectif pour des différences de potentiel du tube de 80, 120 et 140 kVp.

La figure D.2 présente le coefficient d'absorption linéaire en HU en fonction du numéro atomique effectif. La courbe est sensiblement linéaire pour les trois énergies du faisceau pour des numéros atomiques effectifs en deçà de 30. Au delà, la courbe devient non-linéaire. Il est à remarquer la chute des HU pour les numéros atomiques effectifs d'environ 45. Les deux minéraux correspondants sont la baryte et la stibine, deux minéraux composés d'éléments lourds. Leur absorption est du même ordre que l'azurite ($Z_{eff} = 24, 21$). Cette chute de l'absorption est causée par les pics d'absorption photoélectrique. L'azurite présente un pic d'absorption pour une énergie correspondant à l'énergie moyenne du faisceau. La baryte présente aussi des pics, mais ils ne sont pas centrés sur l'énergie moyenne. Ce résultat démontre l'importance de tenir compte de l'effet photoélectrique et des pics d'absorption. La formule 5.9 ne permet pas de prédire ce résultat et est à rejeter pour une plage de numéro atomique élevé.

Les résultats théoriques sont sensiblement les mêmes que pour l'expérimental (figure D.3). Les profils présentent une montée linéaire suivi d'une chute et d'une remontée. La figure D.4 présente une comparaison entre les valeurs expérimentales et théoriques pour une

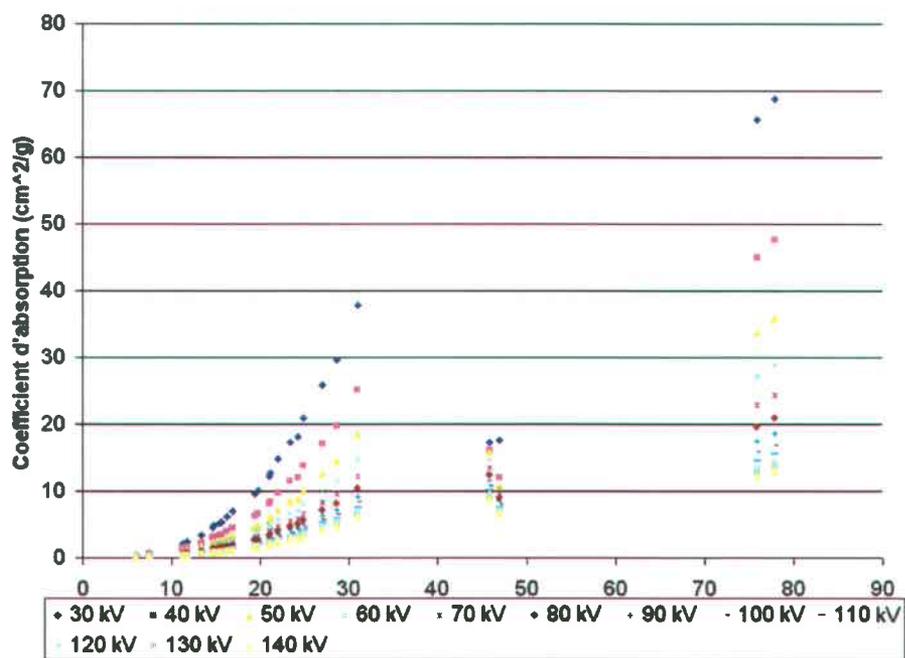


FIG. D.3 – Coefficient d'absorption massique théorique en fonction du numéro atomique effectif pour diverses différences de potentiel du tube.

différence de potentiel de la lampe de 120 kV. La comparaison montre que les données sont corrélées par une courbe exponentielle avec un coefficient de corrélation 0,89. La raison de cette courbe exponentielle est inconnue. Il est possible qu'un filtre informatique en soit la cause. Bien que le coefficient de corrélation est bon, l'erreur est catastrophique. L'erreur entre les valeurs théoriques et expérimentales est calculée après la compensation exponentielle. L'erreur moyenne est d'environ 50%. Le modèle théorique ne peut pas être appliqué à ce stade pour la prédiction de l'absorption. De meilleures informations sur la mécanique et les filtres du scanographe sont requises pour améliorer le modèle. Le spectre du tungstène utilisé était théorique. Un spectre réel, mesuré ou fourni par la compagnie Siemens permettrait d'améliorer la prédiction. De même que la connaissance parfaite de tous les filtres présents dans le scanographe et dans les programmes de reconstruction.

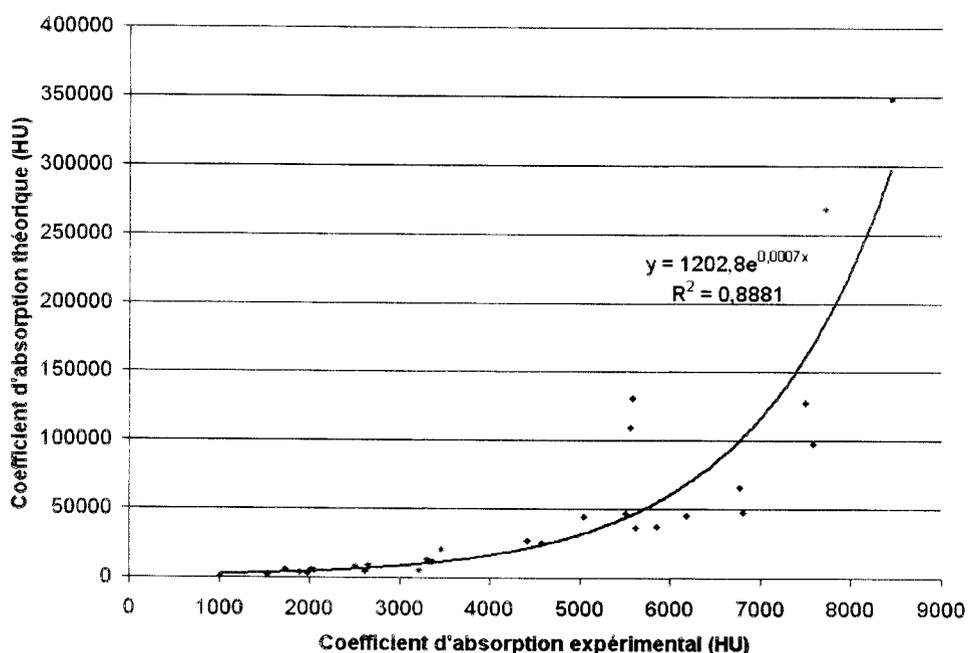


FIG. D.4 – Comparaison entre le coefficient d'absorption massique expérimental et théorique.

Les calculs théoriques ont permis de calculer la courbe de durcissement du faisceau en fonction du numéro atomique effectif (figure D.5). L'énergie augmente linéairement jusqu'à un Z_{eff} de 30 pour 120 et 140 kVp et de 25 pour 80 kVp. Ensuite, l'énergie du faisceau augmente plus lentement pour finalement redescendre. L'énergie redescend en raison du grand pouvoir d'atténuation du galène et du cinabre et possiblement en raison des pics d'absorption présent à plus hautes énergies pour ces minéraux. Ce genre de courbe est utilisé pour

compenser le durcissement du faisceau. Siemens utilise un filtre linéaire pour le compenser. Les présents calculs montrent que ce filtre est valide pour des minéraux composés d'éléments légers, mais que pour les éléments lourds, des erreurs importantes sont présentes.

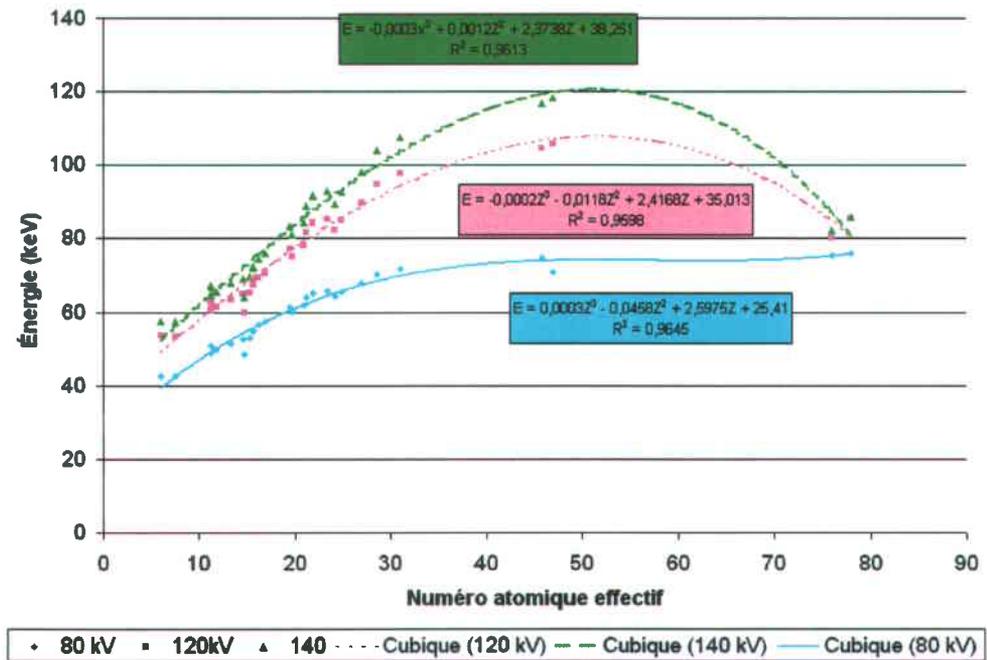


FIG. D.5 – Énergie moyenne du faisceau en fonction du numéro atomique effectif pour une différence de potentiel de 80, 120 et 140 kVp.

Index

- Écoulement
 - influence sur, 12
- Élément fini, 33
- Équilibre des forces, 25
- Artefact, 114
 - Durcissement du faisceau, 114
 - Effet de volume partiel, 114
- Atténuation, 49
 - Loi de Lambert-Beer, 49
 - Milieu homogène, 49
 - Milieu inhomogène, 49
- Bremsstrahlung, 107
- Canola
 - huile de, 67
- Civan
 - Loi de perméabilité, 16
- Coefficient d'absorption
 - Calcul théorique, 131
 - Composé, 57
 - Dominance, 56
 - Linéaire, 50
 - Massique, 50
 - Mesure expérimentale, 127
 - Minéraux, 56
 - Sédiment, 58
 - Total, 56
- Colonne de sédimentation, 65
- Compton
 - Effet, 53
 - Section efficace, 55
- Compton
 - Klein-Nishina, 53
- Conditions initiales, 29
- Conditions limites, 29
- Conductibilité hydraulique, 14
- Conservation de la masse, 24
- Consolidation, 18
 - Équation de Terzaghi, 21
 - Équations de Gibson, 23
 - Équations non-linéaire
 - Coefficients, 29
 - Dérivés des coefficients, 120
 - Coefficient de, 20
 - Condition initiale, 29
 - Conditions aux limites, 29
 - Gibson, 21
 - Modèle 3D, 23, 27
 - Modèle unidimensionnel, 27
 - Terzaghi, 19
- Contrainte
 - Gallois, 122
 - Gibson, 122
- Contrainte effective, 17
 - Gallois, 18
 - Gibson, 17
- Coordonnée naturelle, 35
- Crank-Nicholson, 41
- Dérivée matérielle, 26
- Darcy, loi de, 13

Darcy-Gersevanov, loi de, 13
 Densité, 11
 Diagramme du projet, 2
 DICOM, 49
 Traitement de, 129
 DICOM, traitement de, 70
 Essais
 liste de, 68
 Fonctions d'interpolation, 32, 35
 Forme des grains, 12
 Fraction volumétrique, 9
 Galerkin, méthode de, 33
 Gallois
 Contrainte, 122
 Contrainte effective, 18
 Loi de perméabilité, 16, 122
 Gibson
 Équation de consolidation, 23
 Équation linéaire, 23
 Équations gouvernantes, 22
 Équations non-linéaire, 28
 Consolidation, 21
 Contrainte, 122
 Contrainte effective, 17
 Hernitiennes, fonction, 36
 HU, 51
 Indice des vides, 9
 Jacobien, 35
 Kaolinite, 61
 Klein-Nishina, 53
 Kozeny-Carman, 14, 121
 Laflamme
 mer de, 61
 LMSQ, 48
 Mécanique des sols, 5
 Approche continu, 5
 Approche discrète, 5
 Méthode des éléments finis, 31
 Élément de base, 33
 Coordonnée naturelle, 35
 Crank-Nicholson, 41
 Discrétisation du domaine, 32
 Fonctions d'interpolation, 32, 35
 Galerkin, 33, 41
 Jacobien, 35
 Matrice tangeante, 39, 119
 Pas de temps critique, 41
 Résidu, 32, 39
 Schéma d'intégration temporel, 41
 Système linéaire, 37
 Système non-linéaire, 38
 Systèmes non-stationnaires, 40
 Sytèmes non-linéaires et non-stationnaires,
 42
 Méthode des résidus pondérés, 33
 Masse totale, 7
 Matrice tangeante, 39
 Minéraux
 Liste des, 128
 Newton-Raphson
 Algorithme, 40
 méthode de, 39, 42
 Numéro atomique effectif, 58
 Osiris, 49
 Ottawa, sable, 61
 Perméabilité, 14

Civan, 16
 Gallois, 16, 122
 Kozeny-Carman, 15
 Loi de puissance, 16
 Photoélectrique
 Effet, 51
 Probabilité d'interactions, 52
 Porosité, 7
 minimale, 8
 Portneuf
 Silt-argileux, 61
 Pression
 hydrostatique, 10
 Production de paire, 55
 Projection, 109
 Théorème, 112
 Projection arrière, 111
 Projection arrière filtrée, 112
 Protocol
 Sédimentation et consolidation, 65
 Protocole
 Calibration du scanographe, 65
 HU des grains, 63
 Liste des essais, 68
 Mesure du coefficient d'absorption, 127
 Monocouches, 66
 Multicouches, 66
 Résidu, 32, 39
 Radon, 109
 propriétés, 111
 Transformé de, 108
 Rayon hydraulique, 15
 Rayons X
 Caractéristiques, 108
 Rayonx X
 Production, 106
 Rugosité, 12
 Sable Ottawa, 61
 Saturation
 Degré de, 10
 Scanographie, 47, 105
 Génération, 105
 Section efficace, 50
 Compton, 55
 Siemens, 48
 Silt-argileux, 61
 Sinogramme, 109
 Spectre
 Tungstène, 107, 114
 Stephan-Boltzmann, 107
 Structure de l'empilement, 12
 Surpression intersticielle, 10
 Terzaghi
 Coefficient de consolidation, 20
 Consolidation, 19
 Hypothèses, 20
 Postulat de, 17
 Solution exacte, 21
 Unité Hounsfield, 51
 Vide intergranulaire, 7
 Viscosité, 67
 Vitesse de filtration, 13
 Volume total, 7