

PATRICK TREMBLAY SIMARD

**Modélisation paramétrique multi-échelle et
multi-dimensionnelle des textures visuelles et son
application à l'imagerie géophysique et biomédicale**

Thèse présentée
à l'Institut National de la Recherche Scientifique,
Centre Eau - Terre & Environnement
dans le cadre du programme de doctorat en Sciences de la Terre,
programme géré conjointement par l'INRS et l'Université Laval,
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

INRS - ETE
UNIVERSITÉ du QUÉBEC
QUÉBEC

juin, 2013

Institut National de la Recherche Scientifique
Centre Eau, Terre, Environnement

Cette thèse intitulée

**Modélisation paramétrique multi-échelle et
multi-dimensionnelle des textures visuelles et son
application à l'imagerie géophysique et biomédicale**

présentée par **TREMBLAY SIMARD Patrick**

en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat ès sciences

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. **DUCHESNE Mathieu**, Ph. D., Président et évaluateur interne

M. **GLOAGUEN Erwan**, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. **MARCOTTE Denis**, Ph. D., membre et co-directeur de recherche

M. **BOUCHER Alexandre**, Ph. D., membre et co-directeur de recherche

M. **PETIT Yvan**, Ph. D., membre et évaluateur externe

M. **BOGAERT Patrick**, Ph. D., membre et évaluateur externe

Remerciements

Ce projet de recherche n'eût été possible sans le soutien financier du Fond du Québec pour la Recherche - Nature et Technologies (FQRNT) ainsi que celui du Conseil de Recherches en Sciences et en Génie du Canada (CRNSG). Je tiens à remercier toute l'équipe du Laboratoire d'Imagerie et Acquisition des Mesures Géophysiques (LIAMG) et tout spécialement mon directeur de recherche, le professeur Erwan Gloaguen, pour les quatre dernières années de formation en classe, sur le terrain, en groupe de lecture, en congrès, ainsi que lors de plusieurs pauses café à la brûlerie du coin. Je tiens à remercier mes co-directeurs, à la Polytechnique de Montréal, ainsi qu'à l'université Stanford de Palo Alto, nommément les professeurs Denis Marcotte et Alexandre Boucher, pour m'avoir insufflé une part de leur passion et pour m'avoir suivi tout au long de mon cheminement.

Je me dois de souligner la contribution plus directe d'une de mes collègues, Mlle Camille Dubreuil-Boisclair, pour ce qui est des données qui sont utilisées à l'intérieur de l'étude de cas « géophysique » présentée à l'intérieur de cette thèse, ainsi que pour les codes sources de simulation séquentielle bayésienne, qui m'ont inspiré dans la conception de mes lignes de codes. Je remercie mes collaborateurs du Laboratoire d'Imagerie Orthopédique de l'Hôpital Sacré-Cœur de Montréal (LIO-HSCM) et plus particulièrement le professeur Yvan Petit pour son accueil dans ses laboratoires, ainsi qu'aux étudiants Michèle Touzin et Alexandre Vachon pour leur participation à l'introduction

des développements de cette thèse à leur travaux de projet de fin d'étude ainsi que de maîtrise. Merci aussi à Annie Levasseur avec qui nous avons préparé une affiche scientifique. Les données utilisées dans le cadre de l'étude de cas « biomédical », ainsi que l'analyse morphométrique contenues à l'intérieur de ce document, proviennent toutes du LIO-HSCM. Leur provenance spécifique respectives sont identifiées à l'intérieur du texte.

Un merci tout spécial va droit à M. Guy Simard pour la traduction vers l'anglais du résumé ainsi qu'à Mlle Hélène Plé pour une révision de l'orthographe du présent document. Merci aussi à M. Charles Brouard pour le support informatique, notamment en ce qui attrait à l'utilisation de l'éditeur de texte \LaTeX . À mes parents, ma famille et mes amis, merci du fond du cœur.

Patrick Tr. Simard, entre Québec et Chicoutimi, septembre 2012

Résumé

Nous développons une approche novatrice de modélisation conditionnelle d'hydrofaciès hétérogènes et de leur porosité intrinsèque. Notre démarche consiste à étalonner les mesures géophysiques de larges échelles telles qu'obtenues d'un modèle pétro-physique analogue à l'aide d'un modèle paramétrique de textures visuelles. Pour ce faire, nous modélisons par simulation séquentielle bayésienne les coefficients d'approximation d'ondelette des hydrofaciès synthétiques à partir des densités de probabilité conjointes entre les coefficients d'approximation des images du modèle analogue d'une part, et de la variabilité spatiale des coefficients d'approximation d'un modèle synthétique de terrain, d'autre part. Ensuite, les coefficients d'approximation simulés servent à synthétiser les textures de porosité des hydrofaciès en tenant compte des données conditionnantes en forages. Nous développons l'approche pour un dépôt sédimentaire hétérogène bidimensionnelle et l'appliquons à une étude de cas en imagerie biomédical homogène. Tel qu'attendu, les modèles de porosité réalisés reproduisent les structures de larges échelles du modèle synthétique ainsi que les textures de courtes échelles connues du modèle analogue. La méthode proposée est facile d'utilisation, flexible et efficace. Cette approche est néanmoins limitée par le modèle analogue, qui réduit l'existence de toutes textures de courtes échelles, à l'expression de son unique contenu.

Mots clefs : Porosité des hydrofaciès ; Morphométrie osseuse ; Transformée d'ondelette ; Modèle de texture paramétrique ; Simulation séquentielle bayésienne

Abstract

We develop a novel conditioning approach to modelize heterogeneous hydrofacies and their intrinsic porosity. Our method consists to calibrate large-scale geophysical measurements as obtained from a petro-physical analogue model, using a parametric texture model. To do so, we simulate using Bayesian sequential approach wavelet approximation coefficients of synthetic hydrofacies from joint probability density function between approximation coefficients of the analogue model images on one hand, and from spatial variability of the approximation coefficients of a geophysical synthetic model on the other hand. Simulated approximation coefficients are used to synthetize hydrofacies porosity textures taking into account borehole conditioning hard data. We develop the approach for a heterogeneous sedimentary deposit and apply it to a homogeneous biomedical case study. As expected, simulated porosity models reproduce large-scale structures of the synthetic geophysical model as well as small-scale textures of the analogue porosity model. The proposed approach is easy to use, flexible, and efficient. This approach is however limited by the analogue model, which reduces the existence of all small-scale textures, to the expression of its own content.

Mots clefs : Hydrofacies porosity ; Bone morphometry ; Wavelet transform ;
Parametric texture model ; Bayesian sequential simulation

à Mathéo

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Abstract	vi
1 Introduction	1
2 Théorie	4
2.1 Revue de lecture	5
2.2 Modèle analogue	12
2.3 La transformée d'ondelette	13
2.3.1 Historique	13
2.3.2 Notation	15
2.3.3 Définition	16
2.3.4 Propriétés	19
2.3.5 Transformée d'ondelette discrète	21
2.3.6 Extension bi-dimensionnelle	23
2.3.7 Base linéaire	26
2.3.8 Pyramide télescopique	28
2.4 Modèle paramétrique de textures visuelles	31
2.4.1 Historique	31
2.4.2 Vue d'ensemble	32
2.4.3 Ergodicité pratique	33

2.4.4	Champs aléatoires générés de fonctions de contrainte	35
2.4.5	Échantillonnage par projection	36
2.4.6	Projection sur les surfaces de contraintes	37
2.4.7	Gradient de projection	38
2.4.8	Projection séquentielle, convergence, efficacité	39
2.4.9	Contraintes statistiques du modèle paramétrique	41
2.5	Métriques de validation	59
2.6	Objectifs de recherche	60
3	Méthodologie	63
3.1	Les données utilisées	63
3.1.1	Imagerie hydrogéologique	64
3.1.2	Imagerie médicale	70
3.2	L'approche proposée	75
3.2.1	Analyse des textures	75
3.2.2	Simulation séquentielle bayésienne	76
3.2.3	Synthèse des textures visuelles	80
3.2.4	Données conditionnantes	81
3.2.5	Métriques de validation	82
4	Résultats	83
4.1	Échelle de travail	83
4.2	Simulation séquentielle bayésienne	89
4.2.1	Distribution de <i>vraisemblance</i>	89
4.2.2	Distribution <i>a priori</i>	96
4.2.3	Distribution <i>a posteriori</i>	99
4.3	Synthèse des textures visuelles	102
4.4	Métriques de validation	105
4.4.1	Corrélation pixel-à-pixel	105
4.4.2	Histogrammes des réalisations	106
4.4.3	Cartes statistiques	111

4.4.4	Cartes de différences	114
4.4.5	Analyse morphométrique	117
5	Discussion	118
5.1	Le modèle analogue	119
5.2	Échelle de travail	120
5.3	Données conditionnantes	121
5.4	Erreur relative des réalisations	122
5.4.1	Corrélation pixel-à-pixel	122
5.4.2	Histogrammes des réalisations	123
5.4.3	Cartes statistiques	123
5.4.4	Cartes de différence	124
5.4.5	Analyse morphométrique	125
6	Conclusion	126
	Bibliographie	128
	Annexe	134
A	Éléments de géostatistique	135
A.1	Description univariée	135
A.2	Description bivariée	138
A.3	Description spatiale univariée	139
A.4	Description spatiale bivariée	140
A.5	Modèle de fonction aléatoire	142
A.5.1	Variable aléatoire	142
A.5.2	Fonction aléatoire	144
A.5.3	Décision de stationnarité	145
A.6	Modélisation de la variabilité spatiale	147
A.6.1	Modèles admissibles	147
A.6.2	Modèles anisotropiques	148

A.6.3	Modèle linéaire de régionalisation	151
A.7	Krigeage	153
A.7.1	Paradigme du krigeage	153
A.7.2	Krigeage simple	154
A.7.3	Krigeage ordinaire	156
A.8	Simulation séquentielle bayésienne	158
A.8.1	Simulation séquentielle	158
A.8.2	Simulation séquentielle bayésienne	160
B	Transformée de Fourier par fenêtre d'intégration	164
B.1	Définition	164
B.2	Propriétés	167
C	Analyse morphométrique	170
D	Codes Matlab	172
D.1	Boucle de simulation séquentielle bayésienne (boucleseq.m)	172

Liste des figures

2.1	Représentation de la résolution de la transformée d'ondelette dans l'espace de phase de Fourier	18
2.2	Exemple de décomposition par ondelette dans le domaine spectral	25
2.3	Pyramide extensible de décomposition	29
2.4	Représentation de la transformée d'ondelette discrète sur trois échelles	30
2.5	Diagramme de l'algorithme récursif	39
2.6	Imposition des statistiques aux sous-bandes	40
2.7	Contraintes sur les statistiques marginales	42
2.8	Nécessité des contraintes sur l'auto-correlation	50
2.9	Nécessité des contraintes sur la corrélation entre les sous-bandes	53
2.10	Nécessité des contraintes sur les corrélations croisées avec des sous-bandes fixes	57
3.1	Modèles analogues et synthétiques	67
3.2	Histogrammes des modèles analogues et synthétiques	69
3.3	Modèles biomédicaux analogues et synthétiques	73
3.4	Histogrammes des modèles biomédicaux analogues et synthétiques	74
4.1	Quatre premières échelles de décomposition du modèle analogue de haute-résolution obtenues à l'aide du modèle de Portilla & Simoncelli (2000)	85
4.2	Régression linéaire des coefficients d'approximation du modèle analogue hydrogéologique	86
4.3	Coefficients d'approximation de la quatrième échelle de décomposition obtenus à l'aide du modèle de Portilla & Simoncelli (2000)	87

4.4	Coefficients d'approximation de la quatrième échelle de décomposition obtenus à l'aide du modèle de Portilla & Simoncelli (2000)	88
4.5	Comparaison entre les nuages de points des coefficients de quatrième échelle des modèles hydrogéologiques analogues et synthétiques	91
4.6	Comparaison entre les nuages de points des coefficients de quatrième échelle des modèles biomédicaux analogues et synthétiques	92
4.7	Noyaux d'interpolation des coefficients du modèle analogue géologique pour différentes fenêtres d'interpolation	93
4.8	Noyaux d'interpolation des coefficients du modèle biomédical à différentes fenêtres d'interpolation	94
4.9	Sélection d'une distribution de <i>vraisemblance</i>	95
4.10	Semi-variogrammes expérimentaux et théoriques des coefficients d'ap- proximation du modèle géophysique synthétique	97
4.11	Semi-variogrammes expérimentaux et théoriques des coefficients d'ap- proximation du modèle de tomodesitométrie macroscopique synthétique	98
4.12	Distribution <i>a posteriori</i>	99
4.13	Simulations des coefficients d'approximation de porosité synthétique . . .	101
4.14	Simulations des coefficients d'approximation de porosité osseuse synthé- tique	102
4.15	Simulations de champs de porosité du modèle synthétique	103
4.16	Simulations de la porosité osseuse synthétique	104
4.17	Corrélation entre les réalisations de porosité synthétique et leur cible . .	106
4.18	Histogrammes des réalisations de porosité hydrogéologique	109
4.19	Histogramme des réalisations de porosité biomédicale	110
4.20	Cartes statistiques des réalisations du modèle de porosité synthétique hydrogéologique	112
4.21	Cartes statistiques des réalisations du modèle de porosité biomédical . . .	113
4.22	Cartes de différence du modèle hydrogéologique	115
4.23	Cartes de différence du modèle biomédical	116
4.24	Histogramme des carte de différence	116

B.1 Représentation de l'espace de phase de Fourier	167
--	-----

Liste des tableaux

3.1	Statistiques sur les histogrammes (géologie)	68
3.2	Valeur en unité de Hounsfield pour différents milieu diélectriques	71
3.3	Statistiques sur les histogrammes (biomédical)	72
4.1	Corrélation entre les coefficients d'approximation des modèles analogues à différentes échelles	84
4.2	Statistiques sur les histogrammes des réalisations du modèle hydrogéolo- gique	108
4.3	Statistiques sur les histogrammes des réalisations biomédicales	108
4.4	Analyse morphométrique	117
A.1	Exemples de noyaux d'interpolation de densité	163

Liste des abréviations, des acronymes et des symboles

B.Ar Surface osseuse.

B.Pm Périmètre osseux.

BV Volume de tissu osseux.

C.A. Champ Aléatoire.

F.A. Fonction Aléatoire.

F.D.P. Fonction de Densité de Probabilité.

F.D.C. Fonction de Densité Cumulative.

R.C.M. Racine des Carrés Moyens (*Root Mean Square*).

T.A.C.O. Tomodensitométrie Axiale Calculée par Ordinateur.

Tb.Dm Diamètre trabéculaire.

Tb.N Nombre trabéculaire.

Tb.Th Épaisseur trabéculaire.

TV Volume de tissu spongieux.

T.F.D. Transformée de Fourier Discrète

T.O.D. Transformée d'Ondelette Discrète.

V.A. Variable Aléatoire.

- mS/m Mili-Siemens par mètre.
- mg/L Miligramme par litre.
- ns/m Nanoseconde par mètre.
- \mathcal{A} Domaine de simulation.
- $\mathcal{E}\{\cdot\}$ Moment mathématique.
- L Espace bidimensionnel fini.
- $L(\mathbf{u})$ Lagrangien.
- N, M Dimensions d'une image.
- $\mathcal{I}^2(\mathcal{Z}^2)$ Espace vectoriel représentant le domaine de Fourier.
- $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ Espace vectoriel qui inclut toutes fonctions $f(x)$, mesurables et intégrables au carré.
- \mathcal{N} Voisinage de pixels.
- \mathcal{P} Probabilité.
- \mathcal{R} Ensemble des réels.
- \mathcal{T} Ensemble d'images.
- $\mathcal{T}_{\vec{\phi}, \vec{c}}$ Ensemble d'images qui contiennent les mêmes estimations de contraintes.
- $\mathcal{W}\{\cdot\}$ Transformée d'ondelette.
- \mathcal{Z} Ensemble des entiers.
- a Portée.
- $C(\mathbf{h})$ Covariance spatial.
- c Constante, vitesse de la lumière (3×10^8 m/s).
- c_k Valeur de la contrainte correspondant à la fonction de contrainte ϕ_k .
- $f, g(x)$ Toute fonction de x , mesurable et intégrable au carré.

\hat{f}	Transformée de Fourier de la fonction f .
f^*	Conjugué complexe de $f(x)$.
$\tilde{f}(x)$	Réflexion de $f(x)$ autour de l'origine.
g	Semi-variogramme théorique.
h	Distance inter-station.
h_f	Largeur de fenêtre d'interpolation.
I	Radiance.
K	Fonction noyau.
m	Moyenne arithmétique.
n_I	Indice de réfraction.
p	Probabilité.
$Q(\cdot)$	Expression quadratique.
S	V.A. catégorique.
s	Facteur d'échelle.
s_k	État k de la valeur s .
u	Position. Translation par rapport à x .
x, y	Variable aléatoire. Coordonnée spatiale.
$X(n, m)$	Champ homogène, aléatoire, réel et bi-dimensionnel.
\mathbf{x}, \vec{x}	Vecteur de x .
\mathbf{X}	Matrice.
\mathbf{X}^T	Matrice transposée.
\mathbf{X}^{-1}	Matrice inverse.
Z^*	Estimateur de krigeage.

Z	V.A..
z	Valeur de V.A..
α	Dilatation élémentaire (<i>elementary dilation step</i>).
β	Coefficient d'absorption.
γ	Semi-variogramme expérimental.
δ	Delta de kronecker.
ϵ	Tolérance
$\eta(\vec{x})$	Coefficients d'asymétrie.
$\kappa(\vec{x})$	Coefficients d'aplatissement (vecteur).
λ_a	Facteur d'anisotropie.
λ_k	Multiplicateur de Lagrange.
μ	Paramètre de Lagrange.
ν	Déplacement.
ω	Fréquence angulaire.
ρ	Corrélation.
σ	Écart-type.
σ^2	Variance.
σ_E^2	Variance de krigeage.
φ	Coefficient d'aplatissement (scalaire).
$\phi_k(X)$	Fonction de contraintes.
$\psi(x)$	Fonction d'ondelette.
$\psi_s(x)$	Fonction d'ondelette $\psi(x)$ sur un support s fois plus petit.
$\Psi(x, y)$	Fonction d'ondelette bidimensionnelle.

- \forall Pour tout.
- $[\cdot]_N$ Indique que la valeur est modulée sur le nombre de pixels qui forment N .
- \in Est inclus dans.
- $*, \otimes$ Convolution, convolution circulaire.
- \odot Produit vectoriel.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Produit scalaire.
- ∇ Gradient. Opérateur de dérivée partielle spatiale.
- \subset Est un sous-ensemble de.
- $\overline{f(x)}$ Moyenne arithmétique de la fonction $f(x)$
- ∞ Infinie.

La terre nous en apprend plus long
sur nous que tous les livres.

Antoine de St-Exupéry

Chapitre 1

Introduction

Le sous-sol contient la majeure partie des ressources en eau potable dans le monde. Cependant, les développements industriels et civils soumettent les systèmes aquifères à d'énormes pressions. L'eau étant source de vie, il est primordial de s'assurer de la durabilité ainsi que de la qualité des ressources en eau potable. Pour ce faire, il apparaît clairement nécessaire de caractériser adéquatement la dynamique de l'eau souterraine, donc la porosité de la matrice géologique à travers laquelle elle s'écoule. La construction de modèles hydrogéologiques s'effectue usuellement des échelles les plus fines aux échelles les plus larges (Renard & Marsily, 1997). C'est à dire que les modèles hydrostratigraphiques utilisés dans l'estimation des ressources hydriques sont construits à l'échelle régionale, à partir de l'information obtenue à l'échelle locale en forage (Chapuis, 2007). Lorsque les milieux aquifères sont homogènes, il existe peu d'écart entre l'estimation moyenne de conductivité hydraulique et le réel essai de pompage ; il en va tout autrement lorsque la granulométrie des hydrofaciès varie de façon hétérogène (Chilès & Delfiner, 1999, voir chap. 8, p. 593).

Tel que le préconise de plus en plus la communauté scientifique, il est beaucoup plus efficace de modéliser les différentes échelles d'un aquifère en optant pour une approche combinée qui tire profit des méthodes d'exploration géophysique (Robinson *et al.*, 2008). Ces méthodes sont moins coûteuses que la mesure directe en forage et peuvent franchir de grandes distances entre les forages. Cependant, les mesures géophysiques nécessitent un étalonnage vers la variable principale d'intérêt, c'est à dire qu'elles ne mesurent par directement la porosité du sous-sol mais d'autres caractéristiques de celui-ci, comme par exemple sa résistivité électrique ou encore la vitesse de propagation l'onde radar (Butler, 2005, voir chap. 3, p. 31). De plus, le support d'échelle de la mesure géophysique diffère généralement du support d'échelle de la variable principale, ce qui en pratique se traduit par une mesure géophysique continue à une résolution plus grossière que celle étudiée directement en forage (Marcotte, 2010, voir chap. 9). Ainsi, afin de caractériser adéquatement les contextes hydrostratigraphiques, il est d'intérêt d'être apte à modéliser simultanément plus d'une variables, qui peuvent toutes être rerésentées sur autant de supports d'échelle.

Il existe différentes façon d'aborder la problématique multi-dimensionnelle et multi-échelle. Dans le cadre de ce projet de recherche, l'accent est porté sur l'approche proposée par Gloaguen *et al.* (2010), qui étalonne la mesure géophysique à l'aide d'un modèle conceptuel analogue. Ce dernier consiste en une série d'images géologiques et géophysiques représentatives du contexte étudié. Avec un tel modèle analogue, les auteurs utilisent ensuite un outil de décomposition des images afin d'obtenir leur contenu spectral. Cet outil, la transformée d'ondelette, permet de visualiser les coefficients d'approximation des bandes spectrales composant les images initiales et donc de comparer les images issues de supports différents sur un même support d'échelle. Ainsi, tel que le proposent Gloaguen *et al.* (2010), il est ultimement possible de reconstruire des images de porosité par transformation inverse des réalisations de coefficients d'approximation spectraux d'une image géologique.

Spécifiquement, dans le cadre de ce projet de recherche, les contextes hydrostratigraphiques sont considérés tels des ensembles de textures visuelles ; c'est à dire qu'à chaque unité hydrostratigraphique correspond une texture visuelle. L'outil mathématique préconisé pour étudier les textures visuelles est celui développé par Portilla & Simoncelli (2000). Cet outil permet en outre d'obtenir les coefficients d'approximation spectraux ainsi qu'une série de contraintes statistiques permettant la reconstruction des textures visuelles à partir des coefficients d'approximation seuls. Pouvant être réversible et conditionnel aux valeurs de forage, cet outil possède un énorme potentiel et constitue la pièce maîtresse de l'approche proposée.

De plus, la présente étude propose de simuler les coefficients d'approximation géologiques à l'aide d'une approche de simulation séquentielle bayésienne tel que développée dans le cadre des travaux de Doyen & Den Boer (1996). Cette approche tire son efficacité d'une conjonction entre deux aspects complémentaires, d'une part des densités de probabilité croisées entre les coefficients d'approximation du modèle analogue et d'autre part de la variabilité spatiale des coefficients d'approximation du modèle géophysique synthétique.

Finalement, l'outil présenté dans le cadre de ce projet est développé en réutilisant des images provenant d'études précédentes en hydrogéologie (Boisclair *et al.*, 2008; Gloaguen *et al.*, 2010). Étant fonctionnel et comparable aux études antérieures, cet outil est ensuite testé avec une autre série d'images, cette fois-ci biomédicales (Vachon, 2010). Pour tous les cas d'étude présentés, les résultats obtenus sont validés à l'aide d'outils de diagnostic usuels. C'est à cette étape qu'il est possible de constater que le modèle développé dans le cadre de cette étude est efficace, flexible et peu coûteux en ressources informatiques.

La mathématique est la science du
désordre, du flou et de
l'approximation.

Serge Bouchard

Chapitre 2

Théorie

Le présent chapitre est une revue de littérature permettant d'établir le cadre théorique de la présente étude. Ce compte rendu de lecture aborde ensuite la transformée d'ondelette, son historique, sa définition, ainsi que ses propriétés en une et en deux dimensions. Les notions de pyramide de décomposition télescopique sont aussi détaillées. Cette seconde partie est pour l'essentiel tirée des travaux de Mallat (1989a,b). En troisième lieu, ce chapitre aborde la notion de texture visuelle paramétrique, telle que développée dans le cadre des travaux de Portilla & Simoncelli (2000). À l'intérieur de cette section sont abordées les notions d'ergodicité pratique, de champs aléatoires, d'échantillonnage par projection, de projection sur des surfaces de contraintes ainsi que de gradient de projection, en plus d'exposer le détail des contraintes statistiques qui constituent le modèle paramétrique de textures visuelles. Finalement, ce chapitre renferme les objectifs de recherche du présent projet de thèse.

2.1 Revue de lecture

La géostatistique est une branche des mathématiques qui a pour but de fournir une description quantitative des variables naturelles en tenant compte de la variabilité spatiale et/ou temporelle de l'échantillonnage, sur un domaine d'intérêt (Goovaerts, 1997; Chilès & Delfiner, 1999; Marcotte, 2010). La variable naturelle peut par exemple être la densité de fractures à l'intérieur d'une unité géologique perméable (Tavchandjian *et al.*, 1995), la saturation d'un aquifère (Lyon *et al.*, 2006), les courants de température d'un cours d'eau (Guillemette *et al.*, 2009), voire même la distribution de différentes espèces de la flore (Meng *et al.*, 2009) et de la faune (Moura & Fernandes, 2009).

La première étape d'une étude géostatistique consiste à modéliser la variabilité spatiale de la variable à reproduire à partir d'un échantillonnage connu, dont la population est usuellement peu dense comparativement à l'étendue du domaine d'intérêt. Les distributions de valeurs d'une variable quelconque peuvent être continues, catégoriques ou booléennes (indicatrice de Bernouilli). De plus, ces distributions peuvent dépendre d'un ou plusieurs paramètres complémentaires simultanés, alors que leur échantillonnage peut provenir de différents supports d'échelle.

La seconde étape consiste à inférer la distribution de la valeur de la variable aléatoire ainsi que la distribution de son incertitude à l'ensemble du domaine spatial d'intérêt. Pour ce faire, il est possible d'opter pour une approche déterministe qui définisse un scénario optimal, ou une approche stochastique qui propose une série de scénarios équiprobables. La première approche postule que le modèle théorique ne peut fournir qu'une seule solution définie dont la barre d'erreur dépend des qualités de l'échantillonnage, alors que la seconde propose la définition de densités de probabilité relatives aux valeurs admises pour la variable aléatoire. Maintenant, bien que l'approche déterministe tente

de fournir un seul et unique modèle optimal de simulation sur lequel peut reposer une interprétation du domaine d'intérêt, cette approche ne permet pas de simuler les valeurs marginales moins probables des distributions statistiques. C'est pour répondre à cette négligence que les modèles probabilistes ont été développés.

Qu'il s'agisse d'une variable catégorique ou continue il existe aujourd'hui une panoplie de méthodes stochastiques qui peuvent être classées, suivant les travaux de Srivastava (1995), en six catégories ;

1. les méthodes séquentielles ;
2. les méthodes orientées objet ;
3. les méthodes d'estimation et de simulation de l'erreur : simulations de fractales et bandes tournantes ;
4. les méthodes de recuit simulé ;
5. les méthodes de simulation de champ de probabilité ;
6. les méthodes par décomposition matricielle ;

Les prochains paragraphes exposent brièvement les différentes méthodes ci-haut mentionnées. Cet exposé se veut un survol des différentes méthodes et non un précis de chacune de celle-ci. Il apparaît néanmoins nécessaire de les présenter puisque ces méthodes sont autant d'avenues possibles pour répondre aux objectifs de recherche proposés dans le cadre de ce projet de thèse.

Méthodes séquentielles

Les méthodes séquentielles partagent une procédure commune qui se présente de façon suivante (Srivastava, 1995) ;

1. Choix aléatoire d'un point sur un domaine dont la valeur est à simuler ;
2. Estimation de la fonction de densité de probabilité (F.D.P.) conditionnelle en ce point ;
3. Sélection aléatoire d'une valeur à l'intérieur de la F.D.P. ;
4. Ajout de la valeur simulée à l'ensemble des données connues ;
5. Répétition des étapes 1 à 4 jusqu'à ce que tous les points aient été visités.

Il existe une variété de d'approches séquentielles. La nuance entre les différentes procédures existantes est dans la manière dont est générée la F.D.P. conditionnelle. Nous retenons par exemple, l'approche séquentielle gaussienne où la F.D.P est une distribution normale classique dont la moyenne et la variance sont évaluées par krigeage multi-gaussien (voir annexe A.8.1). Un autre exemple, l'approche séquentielle bayésien, exploité dans le cadre des travaux de Boisclair *et al.* (2008); Dubreuil Boisclair *et al.* (2011) tient compte de données complémentaires. Dans ce cas, la F.D.P. conditionnelle est construite en multipliant la F.D.P. gaussienne à celle générée par interpolation de la densité de probabilité entre les paramètres pétro-physiques en forage d'un modèle analogue (voir annexe A.8.2).

Ainsi, l'approche séquentielle est une procédure très flexible puisqu'il est possible de générer une F.D.P. à l'aide de techniques variées. Cette méthode est conditionnelle puisqu'elle respecte les données brutes connues (p. ex. de forage). Finalement, cette approche permet d'inclure des distributions complémentaires ce qui la rend très populaire.

Méthodes orientées objets

Les méthodes orientées objet ont été conçues afin de simuler des patrons de pixel plutôt que des pixels élémentaires. Ces patrons de pixels ont des formes représentatives de la réalité, ils doivent représenter une certaine proportion des domaines à modéliser alors que leur paramètres de forme (p. ex. leur grandeur, leur anisotropie, leur orientation, etc) ont aussi une certaine distribution aléatoire. Les algorithmes les plus poussés incluent aussi des règles de positionnement, d'ordre d'apparition voire de recouvrement entre les lithofaciès. Une fois ces distributions de paramètres et ces règles de positionnement mises en place, les différentes méthodes orientées objet suivent essentiellement la procédure suivante ;

1. Création de lithofaciès d'arrière plan ;
2. Sélection aléatoire d'un point dans le domaine ;
3. Sélection aléatoire d'une forme, d'une grandeur, d'une anisotropie et d'une orientation ;
4. Validation de la sélection en fonction des informations de conditionnement ou des autres formes simulées. S'il n'existe pas de conflit, la forme est conservée, sinon, retour à l'étape précédente ;
5. Validation que les proportions globales des formes ont été atteintes. Retour à l'étape 2 dans le cas contraire.

Pour le cas où des données brutes en forage doivent être imposées, elles le sont usuellement en début d'algorithme alors qu'une attention particulière doit être prise afin qu'il n'existe aucun conflit à la simulation. Les différentes méthodes orientées objets diffèrent essentiellement sur la façon dont les conflits sont rejetés, redimensionnés ou déplacés.

Méthodes d'estimation et de simulation de l'erreur : simulations de fractales et bandes tournantes

Les méthodes de simulations stochastiques de fractales et par bandes tournantes sont des méthodes qui en premier lieu estiment un modèle lissé et qui ensuite simulent l'erreur en ajoutant un bruit de fond. Les réalisations finales respectent les données brutes ainsi que les patrons de variabilité spatiale.

Pour la procédure par bandes tournantes (Marcotte, 2010), chaque valeur des simulations non-conditionnelles est une moyenne pondérée de simulations unidimensionnelles (matrice directe ou séquentielle) produites sur un ensemble de bandes radiales. Chaque bandes est simulées indépendamment l'une de l'autre et chacune de celles-ci cherche à exprimer la covariance qui est posée stationnaire. Pour chaque dimension spatiale d'intérêt, les bandes sont ensuite projetées par intégration. Cette méthode requiert peu de ressource informatique. Par contre, la complexité des opérations augmente avec la méthode de simulation unidimensionnelle choisie. Dans le cas où l'utilisateur opte pour la simulation séquentielle, il existe un compromis à faire entre la complexité des opérations et la continuité des structures de courtes échelles.

Pour la procédure par fractales, chaque valeur des simulations non-conditionnelles est obtenue par moyenne pondérée d'un ensemble de fonctions sinusoidales et cosinusoidales, alors que ce sont les dimensions fractales qui décrivent la variabilité spatiale (Srivastava, 1995). Finalement, pour reproduire les données conditionnantes, ces deux méthodes doivent être conjuguées à un traitement de post-conditionnement (Marcotte, 2010, voir chap. 8), ce qui augmente la complexité des opérations.

Méthodes de recuit simulé

Les méthodes de recuit simulé travaillent à partir de champs aléatoires qu'elles comparent à une fonction objectif. Cette dernière est ensuite optimisée par mutation du champ initial. La procédure algorithmique est usuellement construite de la manière suivante (Marcotte, 2010, voir chap. 8) ;

1. Tirage aléatoire simultané de tous les points à simuler sur le domaine à partir d'un histogramme de référence ;
2. Imposition des données conditionnantes ;
3. Évaluation de la fonction objectif ;
4. Tirage aléatoire d'un point sur le domaine, si le point est une donnée de conditionnement, l'étape est réitérée, sinon, tirage aléatoire d'une valeur de la distribution cible en remplacement et ré-évaluation de la fonction objectif ;
5. Pour le cas où l'évaluation de la fonction objectif diminue, on conserve la nouvelle valeur simulée. Dans le cas contraire, la valeur simulée est conservée et une probabilité lui est accordée. Cette probabilité est réduite avec le nombre d'itération afin de prévenir en début de processus que le système ne se positionne en une solution locale.
6. Évaluation de la convergence de la fonction objectif. Dans le cas où la convergence désirée est atteinte, la séquence de simulation est stoppée. Dans le cas contraire, la séquence continue.

Ces méthodes heuristiques sont très flexibles. Elles permettent de rendre compte des données conditionnantes alors que la fonction objectif peut être définie de façon à répondre à des problématiques très particulières. Les méthodes se différencient notamment sur la manière de modifier les valeurs des pixels à chaque itération (Srivastava, 1995).

Méthodes de simulation de champ de probabilité

Les méthodes de simulation par champ de probabilité sont une variante des méthodes séquentielles (Chilès & Delfiner, 1999, voir chap. 7, § 7.3.3, p. 471). Tel que précédemment mentionné, les méthodes séquentielles tire aléatoirement une valeur à l'intérieur d'une F.D.P. et l'impose telle qu'une donnée conditionnante pour les étapes subséquentes. Les méthodes de simulations de champ de probabilité quant à elles réutilisent à chaque séquence la F.D.P. originale émanant des données conditionnantes réelles et afin d'éviter une trop grande variabilité spatiale de courte échelle (ce qui advient lorsque la simulation séquentielle ne considère plus les nouvelles données simulées), ces méthodes tirent aléatoirement un percentile de probabilité, qui lui correspond à une valeur dans la F.D.P. originale.

Méthodes par décomposition matricielle

La décomposition matricielle directe (ou décomposition de Cholesky) est une méthode de simulation qui décompose la matrice de covariance en produit de matrice triangulaire inférieure et supérieure, d'où le surnom de simulation « LU » (*lower-upper*). Cette méthode peut être conditionnelle, est efficace et rapide, mais coûteuse en ressource informatique (Goovaerts, 1997, voir chap. 8, p. 390).

De toutes ces méthodes stochastiques, la méthode séquentielle bayésienne semble être la plus robuste pour répondre aux objectifs de recherche du présent projet de thèse. En effet, elle permet de respecter la covariance spatiale des coefficients d'approximation de l'image géophysique, en plus de respecter les liens entre coefficients d'approximation des images du modèle analogue sous sa forme bayésienne. Finalement, elle consomme peu de ressources informatique et est facilement codée.

2.2 Modèle analogue

Le modèle analogue est un outil servant à étalonner une réponse géophysique à une réalité géologique. L'idée provient de Doyen (1988) qui utilise un modèle analogue dans le cadre de ses travaux sur les réservoirs pétroliers afin de modéliser les dépendances entre les supports d'échelle d'un attribut sismique ainsi que leur attribut géologique correspondant.

Le modèle analogue décrit géométriquement d'une part les patrons de faciès qui doivent apparaître à l'intérieur d'un contexte géologique d'intérêt et d'autre part la représentation géophysique correspondante à ce contexte géologique. C'est à dire que le modèle analogue est une série d'images superposées qui donnent un aperçu conceptuel de la zone de recherche.

Dans le cadre de cette étude, l'objectif est de modéliser un lien mathématique entre les images du modèle analogue pour le reproduire à d'autres cas synthétiques dans un même contexte. Le modèle analogue choisi est le même que celui utilisé par Boisclair *et al.* (2008); Gloaguen *et al.* (2010); Dubreuil Boisclair *et al.* (2011). Ce modèle est décrit à la section 3.1.1 de ce document. Pour ce qui est de l'imagerie biomédicale, la seconde étude de cas considérée dans le cadre de cette étude, le modèle analogue choisi est contenu à l'intérieur de la même tranche osseuse que le modèle synthétique (voir 3.1.2).

2.3 La transformée d'ondelette

La présente section est un survol de la collection d'articles fondamentaux sur la transformée d'ondelettes tirés de Walnut (2006). En premier lieu, l'historique de la transformée d'ondelette ainsi que sa définition mathématique sont abordés. Ensuite, les propriétés de la transformée d'ondelette continue et discrète sont exposées. Finalement, la transformée d'ondelette discrète en une et en deux dimensions est présentée ainsi que les concepts de base linéaire et de pyramide télescopique.

2.3.1 Historique

Le développement mathématique qui définit la transformée d'ondelette a pour origine l'étude de la convergence des séries infinies, au début du XX^e siècle (Haar, 1910), mais ce n'est qu'au cours des 30 dernières années que la transformée d'ondelette connaît de nombreuses avancées dans plusieurs domaines scientifiques, notamment en physique quantique (Aslaken & Klauder, 1969; Grossmann & Morlet, 1984); en encodage du langage (Crochiere *et al.*, 1976); en géophysique (Morlet *et al.*, 1982), en imagerie médicale (Moss *et al.*, 2005; Krug *et al.*, 2007), en imagerie dynamique (Cui & Zheng, 2007), et en géostatistique (Gloaguen & Dimitrakopoulos, 2009; Bosch *et al.*, 2009; Gloaguen *et al.*, 2010).

En géosciences, Morlet *et al.* (1982) utilise la transformée d'ondelettes pour rehausser la résolution de données de sismiques réflexion. En effet, avec l'idée d'améliorer le modèle de transformée de Fourier par fenêtre glissante (voir annexe B), Morlet propose de remplacer le concept « une fenêtre fixe et un nombre variable d'oscillations » par le concept « un nombre fixe d'oscillations et une largeur de fenêtre d'intégration

variable ». Afin de s'expliquer la réussite du nouveau modèle Grossmann & Morlet (1984); Grossmann *et al.* (1986) élaborent une interprétation se basant sur la théorie des groupes. Leur conclusion ; le modèle de Morlet est la projection d'un signal sur une famille de fonctions qui sont toutes la dilatation ou la translation d'une même fonction d'oscillation initiale.

C'est avec les travaux de Daubechies (1988) et Mallat (1989a,b) que la transformée d'ondelette prendra la forme qu'on lui connaît aujourd'hui. En premier lieu Daubechies (1988); Mallat (1989a) développent les filtres mathématiques de décomposition ainsi que la pyramide de décomposition à l'intérieur de laquelle ces filtres s'emboîtent. Ensuite de toutes les applications découlant du précédent formalisme, nous retenons les travaux de Simoncelli *et al.* (1992); Simoncelli & Freeman (1995) qui définissent une base linéaire invariante sous translation et sous rotation. Par la suite, Portilla & Simoncelli (2000). développent une extension de la base linéaire dans le plan complexe afin de récupérer l'information sur la phase des signaux, ainsi qu'un cadre d'analyse par projections des images.

Au cours des mêmes années, la communauté géostatisticienne cherche à analyser les textures complexes qui composent les modèles géologiques, et ce à partir du contenu spectral des images d'entraînement (Chilès & Delfiner, 1999, voir chap. 7, § 7.5.4, p. 504). L'objectif avoué est de modéliser une variable d'intérêt à la résolution de l'échantillonnage en forage, et de reproduire cet attribut sur un domaine régional. Flandrin (1992); Zeldin & Spanos (1995) s'inspirent du mouvement aléatoire brownien, Crouse *et al.* (1996, 1998) utilisent un arbre d'identification par voisinage de pixels, et Demyanov *et al.* (2001); Bosch *et al.* (2009); Gloaguen *et al.* (2010) conjuguent les ondelettes aux statistiques bi-points.

2.3.2 Notation

Cette section est tirée des travaux de Grossmann & Morlet (1984); Mallat (1989a,b) et présente la notation utilisée pour décrire la transformée d'ondelette.

Soit \mathcal{Z} et \mathcal{R} l'ensemble des entiers et des nombres réels, respectivement. $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ est un espace vectoriel qui inclut toutes fonctions unidimensionnelle¹ $f(x)$, mesurables, bornées et intégrables au carré, étant défini comme le résultat de l'intégrale suivante, soit la norme de $f(x)$,

$$\|f(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty. \quad (2.1)$$

Pour $f(x)$ et $g(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R})$, le produit scalaire s'écrit,

$$\langle g(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f^*(x) dx, \quad (2.2)$$

où $f^*(x)$ est le conjugué complexe de $f(x)$ ². Nous écrivons la convolution entre deux fonctions $f(x), g(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ tel qu'une translation de produit en u ,

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u) du. \quad (2.3)$$

La transformée de Fourier de $f(x)$, notée $\hat{f}(\omega)$, est définie par,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx, \quad (2.4)$$

où ω est la fréquence angulaire, variable indépendante dans le domaine de Fourier. La transformée de Fourier mesure les structures d'un signal dans le domaine des fréquences, mais cette information n'est pas spatialement localisée. En effet, la transformée de Fourier est définie par une intégrale qui couvre tout le domaine spatial (c.-à-d., $x =$

1. L'extension à une deuxième dimension est présentée à la section 2.3.6.

2. Pour $f(x) \in \mathcal{R}$, $|f(x)|^2 = f(x)^2$.

$-\infty, \dots, +\infty$). La dilatation d'une fonction $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ par un facteur s s'écrit ;

$$f_s(x) = \sqrt{s}f(sx). \quad (2.5)$$

On écrit finalement la réflexion de $f(x)$ autour de l'origine,

$$\tilde{f}(x) = f(-x). \quad (2.6)$$

2.3.3 Définition

Cette section est tirée des travaux de Grossmann & Morlet (1984); Mallat (1989a,b) et présente la définition mathématique de la transformée d'ondelette.

Ces travaux sont établis sur la base qu'il existe une fonction d'onde discrète $\psi(x)$ telle que $(\sqrt{2^j}\psi(2^j(x-2^{-j}\nu)))_{(j,\nu) \in \mathbb{Z}^2}$ est une base orthonormée³ de $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$. Ici, j indique l'échelle et ν indique la translation. La transformée d'ondelette est définie comme étant la décomposition d'un signal en une famille de fonctions, telle que la translation et la dilatation d'une fonction d'onde mère unique $\psi(x)$. La famille d'ondelettes correspondante est donnée par $(\sqrt{s}\psi(s(x-u)))_{(s,u) \in \mathcal{R}^2}$ où s est un facteur d'échelle ($s = 2^j$), où u est une translation ($u = 2^{-j}\nu$) et où la transformée d'ondelette d'une fonction $f(x)$ incluse dans un espace vectoriel $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ est définie par,

$$\mathcal{W}\{f(s, u)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sqrt{s}\psi(s(x-u))dx. \quad (2.7)$$

La dilatation de $\psi(x)$ par un facteur s s'écrit,

$$\psi_s(x) = \sqrt{s}\psi(sx). \quad (2.8)$$

3. $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \delta_{mn}$.

La transformée d'ondelette peut s'écrire comme un produit scalaire dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ tel que,

$$\mathcal{W}\{f(s, u)\} = \langle f(x), \psi_s(x - u) \rangle, \quad (2.9)$$

ce qui correspond à la décomposition de $f(x)$ à partir de la famille de fonctions $(\psi_s(x - u))_{(s,u) \in \mathcal{R}^2}$. La fonction $\psi_s(x)$ est du même type que la fonction $\psi(x)$, mais est construite sur un support s fois plus petit. Dans ce qui suit, nous posons que l'ondelette $\psi(x)$ et que le signal $f(x)$ possèdent des valeurs réelles. Pour reconstruire $f(x)$ à partir de sa transformée d'ondelette, la transformée de Fourier $\hat{\psi}_s(\omega)$ de $\psi_s(x)$ doit satisfaire la relation suivante,

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty. \quad (2.10)$$

Cette condition implique que $\hat{\psi}(0) = 0$ et que $\hat{\psi}(\omega)$ est suffisamment petit dans le voisinage de $\omega = 0$. La fonction $\psi(x)$ peut être interprétée comme la résultante d'une onde soumise à un filtre passe-bande. Pour la normalisation, nous posons que l'énergie de $\psi(x)$ égale 1. Pour $\tilde{\psi}_s(x) = \psi_s(-x)$, soit une fonction d'onde symétrique, nous écrivons la transformée d'ondelette en un point u , à une échelle s , telle qu'un produit de convolution avec $\hat{\psi}_s(x)$;

$$\mathcal{W}\{f(s, u)\} = f * \tilde{\psi}_s(u). \quad (2.11)$$

C'est pourquoi la transformée d'ondelette est interprétée comme un filtre de $f(x)$ avec une bande passante correspondante à $\tilde{\psi}_s(x)$. Ainsi, de l'éq. (2.8) est obtenue la transformée de Fourier de $\psi_s(\omega)$, de sorte que,

$$\hat{\psi}_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{s}} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{s}\right). \quad (2.12)$$

En opposition à la transformée de Fourier de résolution spatiale fixe, la résolution de la transformée d'ondelette varie avec le paramètre d'échelle s . Dans le cas où $\psi(x)$ est une fonction réelle, sa transformée de Fourier est aussi symétrique, soit ; $|\hat{\psi}(\omega)| = |\hat{\psi}(-\omega)|$. La largeur de bande du filtre $\hat{\psi}(\omega)$ est centrée en ω_0 et la racine des carrés moyens (R.C.M.) σ_ω^2 de la bande passante autour de ω_0 s'écrit,

$$\sigma_\omega^2 = \int_0^{+\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.13)$$

La R.C.M. de la plage spectrale est $s\sigma_\omega$. Sur une échelle logarithmique, la R.C.M. est la même pour tout $s \in \mathcal{R}^+$. Ainsi, une transformée d'ondelette décompose le signal sur une échelle logarithmique, en un ensemble de bandes de fréquences ayant une dimension constante. La figure 2.1 présente les fenêtres glissante de la transformée d'ondelette dans le domaine de Fourier.

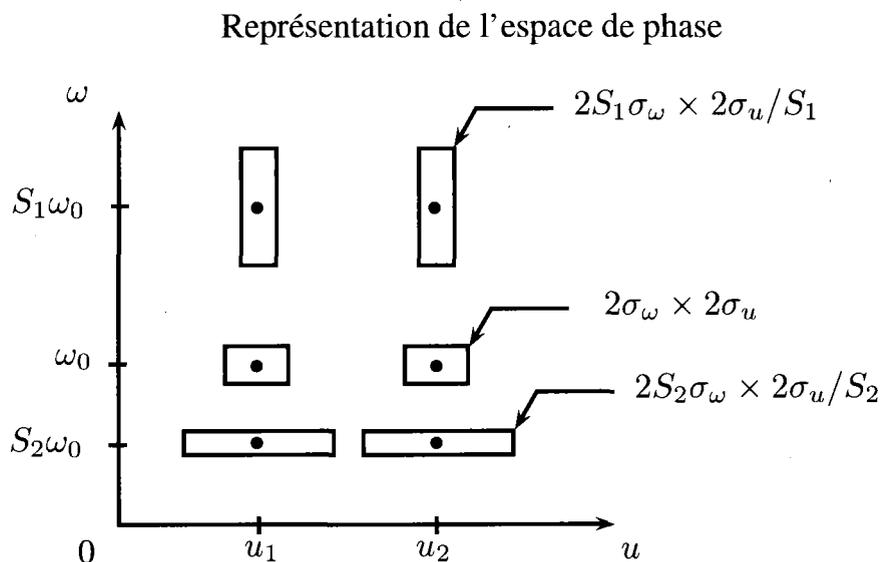


FIGURE 2.1 – Représentation de la résolution de la transformée d'ondelette dans l'espace de phase de Fourier. L'axe vertical donne la fréquence ω alors que l'axe horizontal présente la position spatiale u . La forme de la cellule de résolution d'ondelette dépend de l'échelle. Quand l'échelle augmente, la résolution augmente dans le domaine spatial et décroît dans le domaine des fréquences. Pour chaque résolution, la surface est la même. Inspiré de Mallat (1989b).

2.3.4 Propriétés

Cette section est tirée des travaux de Grossmann & Morlet (1984); Mallat (1989a,b) et présente les propriétés de la transformée d'ondelette.

Grossmann & Morlet (1984) ont démontré que la transformée d'ondelette est une isométrie (à un coefficient de proportionnalité près), c'est à dire que l'énergie est totalement conservée lors de la transformée d'ondelette qui transpose le signal initial d'un espace vectoriel $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ vers un autre espace vectoriel $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R})$. Soit la norme de la transformée d'ondelette,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\mathcal{W}\{f(s, u)\}|^2 ds du = C_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx, \quad (2.14)$$

où la constante C_ψ est définie telle que,

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(s\omega)|^2}{s} ds = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty. \quad (2.15)$$

L'équation (2.15) est prouvée par la relation de Parseval et l'éq.(2.7). La relation de Parseval s'écrit (Arfken & Weber, 2001, voir chap. 15, § 15.5, p. 925),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}^*(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x) dx. \quad (2.16)$$

Ainsi si $f(x) = g(x)$, la relation de Parseval devient une opération de normalisation qui garantit que les fonctions $f(x)$ et $\hat{f}(\omega) \in \mathcal{L}^2$ sont normalisées à l'unité. C'est maintenant qu'il est possible d'écrire la reconstruction de $f(x)$ à partir de $\mathcal{W}\{f(s, u)\}$, soit,

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathcal{W}\{f(s, u)\}\psi_s(x - u) ds du. \quad (2.17)$$

La transformée d'ondelette est redondante, c'est à dire que la valeur de $\mathcal{W}\{f(s', u')\}$, dépend des valeurs de $\mathcal{W}\{f(s, u)\}$ pour $s \neq s'$ et $u \neq u'$. En insérant l'éq. (2.17) dans la

définition de l'éq. (2.7), il est possible de démontrer que la fonction $\mathcal{W}\{f(s, u)\}$ reproduit l'équation du noyau (Grossmann *et al.*, 1986), soit $\forall (s', u') \in (\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R})$,

$$\mathcal{W}\{f(s', u')\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathcal{W}\{f(s, u)\} K(s, s', u, u') ds du, \quad (2.18)$$

où,

$$K(s, s', u, u') = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_s(x - u) \psi_{s'}(x - u') dx. \quad (2.19)$$

$K(s, s', u, u')$ est appelé un « noyau redondant ». Il exprime la redondance entre $\mathcal{W}\{f(s, u)\}$ et $\mathcal{W}\{f(s', u')\}$ pour toutes paires de points (s, u) et (s', u') . L'éq. (2.18) montre qu'*a priori*, n'importe quelle fonction $F(s, u) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R})$ qui n'est pas fonction d'ondelette $f(x) \in \mathcal{L}^2\mathcal{R}$, peut être construite telle que $F(s, u) = \mathcal{W}\{f(s, u)\}$, si et seulement si, $\forall (s', u') \in (\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R})$,

$$F(s', u') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} F(s, u) K(s, s', u, u') ds du. \quad (2.20)$$

L'éq. (2.17) devient alors,

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} F(s, u) \psi_s(x - u) dx du. \quad (2.21)$$

L'équation du noyau redondant est une caractéristique importante de la transformée d'ondelette que nous réutiliserons plus bas, dans le cas bi-dimensionnel.

2.3.5 Transformée d'ondelette discrète

Cette section est tirée des travaux de Grossmann & Morlet (1984); Mallat (1989a,b) et présente la transformée d'ondelette sous sa forme discrète.

La transformée d'ondelette discrète (T.O.D.) est un échantillonnage à la fois du paramètre d'échelle s et du paramètre de translation u (voir fig. 2.1). La fonction d'échantillonnage des paramètres est de type exponentiel. Une première séquence d'échelle est $(\alpha^j)_{j \in \mathbb{Z}}$, où α est une dilatation élémentaire. Tel que montré à l'éq. (2.11), la transformée d'ondelette peut s'écrire,

$$\mathcal{W}\{f(\alpha^j, u)\} = f * \tilde{\psi}_{\alpha^j}(u). \quad (2.22)$$

Pour chaque échelle α^j , la fonction d'ondelette symétrique $\tilde{\psi}_{\alpha^j}(x)$ possède une transformée de Fourier centrée en $\alpha^j \omega_0$ avec une largeur de bande passante équivalente à la R.C.M. $\alpha^j \sigma_\omega$. L'éq. (2.22) peut donc être interprétée comme une décomposition de $f(x)$ dans un ensemble de canaux spectraux centrés en $\alpha^j \omega_0$.

Afin de caractériser le signal décomposé dans chaque canal, il est nécessaire de les échantillonner uniformément à un taux proportionnel à α^j . Soit $n\beta/\alpha^j$, le taux d'échantillonnage à l'échelle α^j . La transformée d'ondelette discrète s'écrit,

$$\mathcal{W}_d\{f(j, n)\} = \mathcal{W}\left\{f\left(\alpha^j, \frac{n\beta}{\alpha^j}\right)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{\alpha^j}\left(x - \frac{n\beta}{\alpha^j}\right) dx = f * \tilde{\psi}_{\alpha^j}\left(\frac{n\beta}{\alpha^j}\right). \quad (2.23)$$

Il n'est pas possible d'interpréter les propriétés de cette transformation en utilisant le critère de Nyquist (voir annexe B.2) puisque la transformée de Fourier de $\psi(x)$ n'a pas de support compact, c'est à dire que les bandes passantes ne sont pas strictement bornées. Daubechies (1988) propose une méthode se rapprochant de celle employée

pour la transformée de Fourier par fenêtre glissante (voir annexe B) et nous retenons des propriétés du cas discret, que pour reconstruire une fonction $f(x)$ à partir de la T.O.D. $(\mathcal{W}_d\{f(j, n)\})_{(n,j) \in \mathbb{Z}^2}$, l'opérateur suivant,

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{R}) \xrightarrow{\mathcal{W}_d} \{\mathcal{I}^2(\mathbb{Z}^2)\}, \quad (2.24)$$

doit posséder un opérateur inverse sur son intervalle, en plus de posséder une portée à laquelle correspond une portée inverse dont les bornes sont spatialement définies. La T.O.D. s'écrit,

$$\mathcal{W}\{f(j, n)\} = \left\langle f(x), \psi_{\alpha^j} \left(x - \frac{n\beta}{\alpha^j} \right) \right\rangle, \quad (2.25)$$

et les propriétés de l'opérateur \mathcal{W}_d dépendent de la famille de fonction $(\psi_{\alpha^j}(x - (n\beta/\alpha^j)))_{(n,j) \in \mathbb{Z}^2}$. Une classe importante de T.O.D. existe pour le cas où $\alpha = 2$ et où $\beta = 1$, ce qui correspond à une base orthonormée d'ondelettes. Soit une ondelette $\psi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R})$, telle que $(\psi_{2^j}(x - (n\beta/2^j)))_{(n,j) \in \mathbb{Z}^2}$ est une base orthonormée de $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$. Ces ondelettes représentent une séquence d'échelle dyadiques $(2^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ et ont la propriété d'être orthogonales.

Finalement, la reconstruction du signal s'écrit,

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f(u), \psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle \psi_{2^j}(x - 2^{-j}n). \quad (2.26)$$

2.3.6 Extension bi-dimensionnelle

Cette section est tirée des travaux de Grossmann & Morlet (1984); Mallat (1989a,b) et présente la transformée d'ondelette en deux dimensions (2D).

Soit $\Psi(x, y) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R}^2)$ une fonction d'onde 2D dont la transformée de Fourier $\hat{\Psi}(\omega_x, \omega_y)$ satisfait la relation suivante, $\forall (\omega_x, \omega_y) \in \mathcal{R}^2$;

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(s\omega_x, s\omega_y)|^2}{s} ds = C_\Psi < +\infty. \quad (2.27)$$

C'est à dire que l'intégrale donne une constante C_Ψ définie pour tous les couples de points $(\omega_x, \omega_y) \in \mathcal{R}^2$. La fonction $\Psi(x, y)$ peut être interprétée comme la réponse d'un filtre passe-bande qui n'a pas d'orientation spatiale préférentielle. La transformée d'ondelette d'une fonction $f(x, y)$, à l'échelle s , en un point (u, v) , est donc définie par,

$$\mathcal{W}\{f(s, (u, v))\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) s \Psi(s(x-u), s(y-v)) dx dy. \quad (2.28)$$

Soit $\Psi_s(x, y) = s\Psi(sx, sy)$ et $\tilde{\Psi}_s(x, y) = \Psi_s(-x, -y)$. La transformée d'ondelette de $f(x, y)$ à l'échelle s au point (u, v) peut être réécrite comme le produit de convolution,

$$\mathcal{W}\{f(s, (u, v))\} = f * \tilde{\Psi}_s(u, v). \quad (2.29)$$

La transformée peut être interprétée comme un filtre passe-bande 2D sans orientation particulière. La conservation de l'énergie s'écrit,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\mathcal{W}\{f(s, (u, v))\}|^2 s ds du dv = C_\Psi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy. \quad (2.30)$$

Ce qui est démontré par la relation de Parseval (éq. (2.16)). On reconstruit la fonction $f(x, y)$ avec une extension de l'éq. (2.17), soit,

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathcal{W}\{f(s, (u, v))\} \Psi_s(x - u, y - v) s \, ds \, du \, dv. \quad (2.31)$$

En 2D, la transformée d'ondelette satisfait aussi l'équation du noyau redondant (voir éq. (2.18)). Pour des applications en reconnaissance des images, il est souvent nécessaire d'avoir une décomposition qui différencie les orientations locales des événements de l'image. Nous posons N fonctions d'ondelette $\Psi^i(x, y)$, pour $i = 1, \dots, N$, dont la transformée de Fourier $\hat{\Psi}^i(\omega_x, \omega_y)$ satisfait la relation,

$$\sum_{i=1}^N |\hat{\Psi}^i(\omega_x, \omega_y)|^2 = |\hat{\Psi}(\omega_x, \omega_y)|^2. \quad (2.32)$$

La figure 2.2 montre un exemple de décomposition de $\hat{\Psi}(\omega_x, \omega_y)$ en différentes fonctions d'ondelettes $\hat{\Psi}^i(\omega_x, \omega_y)$. Chaque fonction $\Psi^i(x, y)$ peut être vue comme la réponse d'un filtre passe-bande ayant une orientation particulière. La transformée d'ondelette de l'orientation i est définie par,

$$\mathcal{W}^i\{f(s, (u, v))\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) s \Psi^i(s(x - u), s(y - v)) \, dx \, dy. \quad (2.33)$$

De même, soit $\Psi_s^i(x, y) = s\Psi(sx, sy)$ et $\tilde{\Psi}_s^i(x, y) = \Psi_s^i(-x, -y)$. La transformée d'ondelette de $f(x, y)$ à l'échelle s au point (u, v) , d'orientation i , peut être réécrite,

$$\mathcal{W}^i\{f(s, (u, v))\} = f * \tilde{\Psi}_s^i(u, v). \quad (2.34)$$

De la même manière qu'à l'éq. (2.14), la transformation est une isométrie lors de la transformation de $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^2)$ vers $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^2)$ et s'écrit,

$$\sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\mathcal{W}\{f(s, (u, v))\}|^2 \, ds \, du \, dv = C_\Psi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 \, dx \, dy. \quad (2.35)$$

Nous reconstruisons finalement une fonction $f(x, y)$ à partir de toutes les orientations qui la composent,

$$f(x, y) = \frac{1}{C_\Psi} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathcal{W}^i \{ f(s, (u, v)) \} \cdot \Psi_s^i(x - u, y - v) ds du dv. \quad (2.36)$$

La figure 2.2 présente la représentation des filtres de décomposition dans le domaine spectral en 2D.

Schéma de décomposition de la transformée d'ondelette 2D

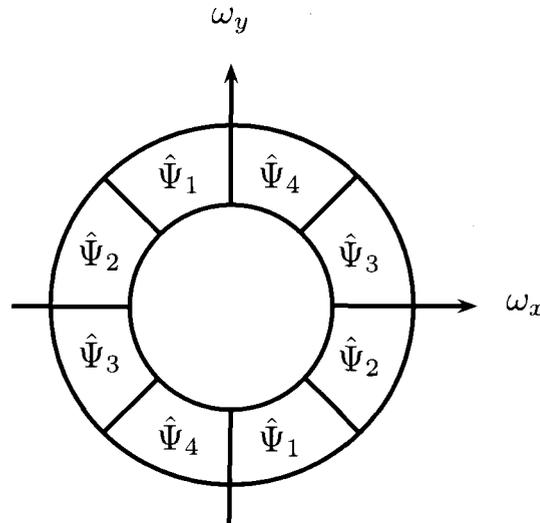


FIGURE 2.2 – Exemple de décomposition dans le domaine spectral du support de $\hat{\Psi}(\omega_x, \omega_y)$ en quatre ondelettes ($\hat{\Psi}^i(\omega_x, \omega_y), i = 1, \dots, 4$) à différentes orientations. Inspiré de Mallat (1989b).

2.3.7 Base linéaire

Cette section est tirée des travaux de Grossmann & Morlet (1984); Mallat (1989a,b); Simoncelli *et al.* (1992); Simoncelli & Freeman (1995); Portilla & Simoncelli (2000) et aborde le concept de base linéaire.

Dans le cadre des travaux de Mallat (1989a) et de Gloaguen *et al.* (2010), la base linéaire est dyadique et ses fonctions d'ondelette sont données par l'ondelette de Haar,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (2.37)$$

Cette base linéaire a été testée sur différentes images, non sans succès certes, mais toutefois en générant des artéfacts dûs au repliement de fréquence (Mallat, 1989a; Gloaguen *et al.*, 2010). Mallat conclue en outre que pour palier à ce problème, il est possible d'augmenter le taux d'échantillonnage du signal d'entrée au-delà de (2^j) , ce qui devrait avoir pour effet d'augmenter la redondance de l'opération et ne pourrait réellement rendre la transformation invariante sous translation. Mallat propose aussi de définir une représentation basée sur une échantillonnage adaptatif de la transformée d'ondelette, ce qui donne à l'opération mathématique la possibilité de se déplacer en suivant un signal fixe.

Bien qu'il existe une panoplie de bases orthonormées pouvant définir des ondelettes discrètes, nous utilisons dans le cadre de cette étude une base linéaire développée par Simoncelli *et al.* (1992); Simoncelli & Freeman (1995); Portilla & Simoncelli (2000).

Cette base linéaire inclut des filtres analytiques complexes, c'est à dire que les parties réelles et imaginaires sont liées à un couple de filtres symétriques et anti-symétriques. Ces filtres mesurent la phase locale ainsi que d'énergie dans le processus de traitement des textures. Retenons que ces filtres sont polaires et séparables dans le domaine de Fourier⁴, et que contrairement à la base linéaire de Haar, le sous-échantillonnage de Simoncelli ne produit aucun artéfact de repliement de fréquences. Les filtres sont écrits tels que,

$$L(r) = \begin{cases} 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \log_2 \left(\frac{4r}{\pi} \right) \right), & \frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & r \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & r \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (2.38)$$

et que,

$$B_j(r, \theta) = H(r)G_j(\theta), \quad (2.39)$$

où les $j \in [0, J-1]$ sont les J échelles de décomposition et où r et θ sont les coordonnées polaires de la fréquence. La partie radiale $H(r)$ ainsi que la partie angulaire $G_k(\theta)$ de $B_k(r, \theta)$ sont respectivement,

$$H(r) = \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{2} \log_2 \left(\frac{2r}{\pi} \right) \right), & \frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & r \geq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & r \leq \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad (2.40)$$

4. C'est à dire qu'ils sont écrits sous la forme $re^{i\theta}$ dans le plan complexe (ici, $i^2 = -1$) et qu'ils sont le produit de fonctions qui dépendent et du module r , et de l'angle θ .

et,

$$G_j(\theta) = \begin{cases} \frac{2^{j-1}(J-1)!}{\sqrt{J[2^{(J-1)]!}}} [\cos(\theta - \frac{\pi j}{J})]^{J-1}, & |\theta - \frac{\pi j}{J}| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (2.41)$$

2.3.8 Pyramide télescopique

Cette section est tirée des travaux de Portilla & Simoncelli (2000) et présente la pyramide télescopique de décomposition.

La décomposition d'une figure peut s'effectuer de manière récursive afin d'extraire l'information sur plusieurs échelles. La figure 2.3 présente la procédure récursive de décomposition (à gauche) et de recombinaison (à droite). Cette procédure est initialisée en séparant l'image d'entrée en deux portions de hautes et de basses fréquences à l'aide de filtres suivants,

$$L_0(r) = \frac{1}{2}L\left(\frac{r}{2}\right), \quad (2.42)$$

$$H_0(r) = H\left(\frac{r}{2}\right). \quad (2.43)$$

L'octave L_0 est ensuite décomposée en sous-bandes orientées ($B_j, j = 0, \dots, J-1$) et L_0 est traduite à l'octave d'en-dessous ($2 \downarrow$) (fig. 2.3). La séquence incluse dans l'encadré peut de cette manière être reproduite (à l'intérieur du point noir au bas de la figure) autant de fois que les dimensions de l'image le permettent. L'opération de reconstruction (partie de droite de l'image) est la transformation inverse. La figure 2.4 présente le schéma de décomposition en trois échelles sur trois orientations dans le domaine spatial 2D.

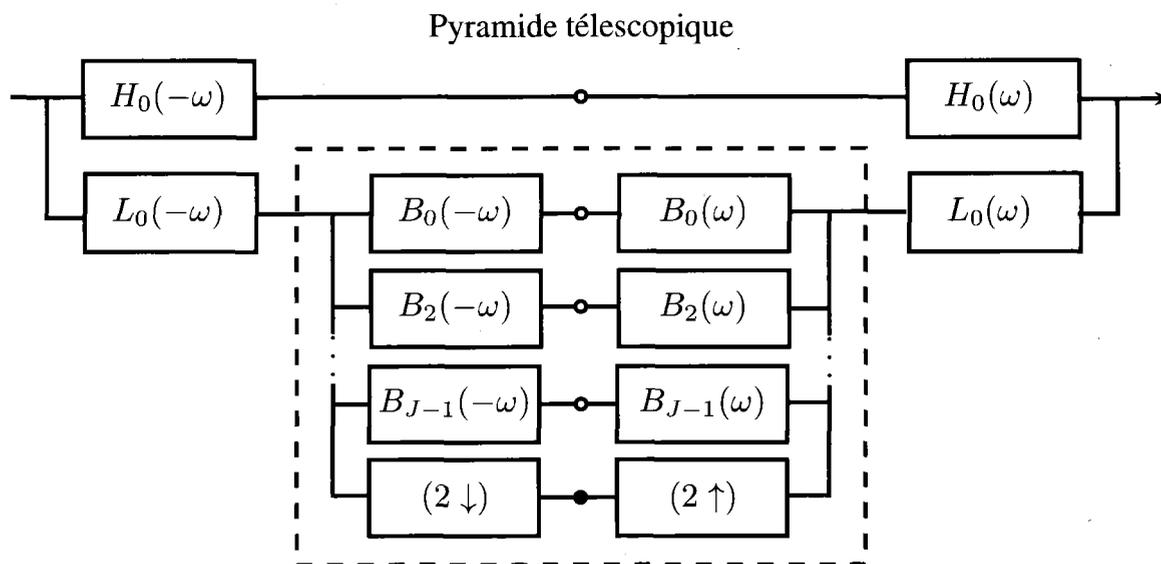


FIGURE 2.3 – Pyramide extensible de décomposition. De gauche à droite, la pyramide extensible de décomposition filtre une image en coefficients de haute et de basse fréquence, respectivement L_0 et H_0 . L'octave L_0 est ensuite décomposée en sous-bandes orientées ($B_j, j = 0, \dots, J-1$). L_0 est traduite à l'octave d'en-dessous ($2 \downarrow$). La séquence incluse dans la zone délimitée par l'encadré, est reproduite à l'intérieur du point noir au bas de la figure. La partie de droite de l'image détaille la recomposition. L'opération inverse fournit une simulation de texture à la sortie (\rightarrow) de même résolution que celle à l'entrée. Inspiré de Portilla & Simoncelli (2000).

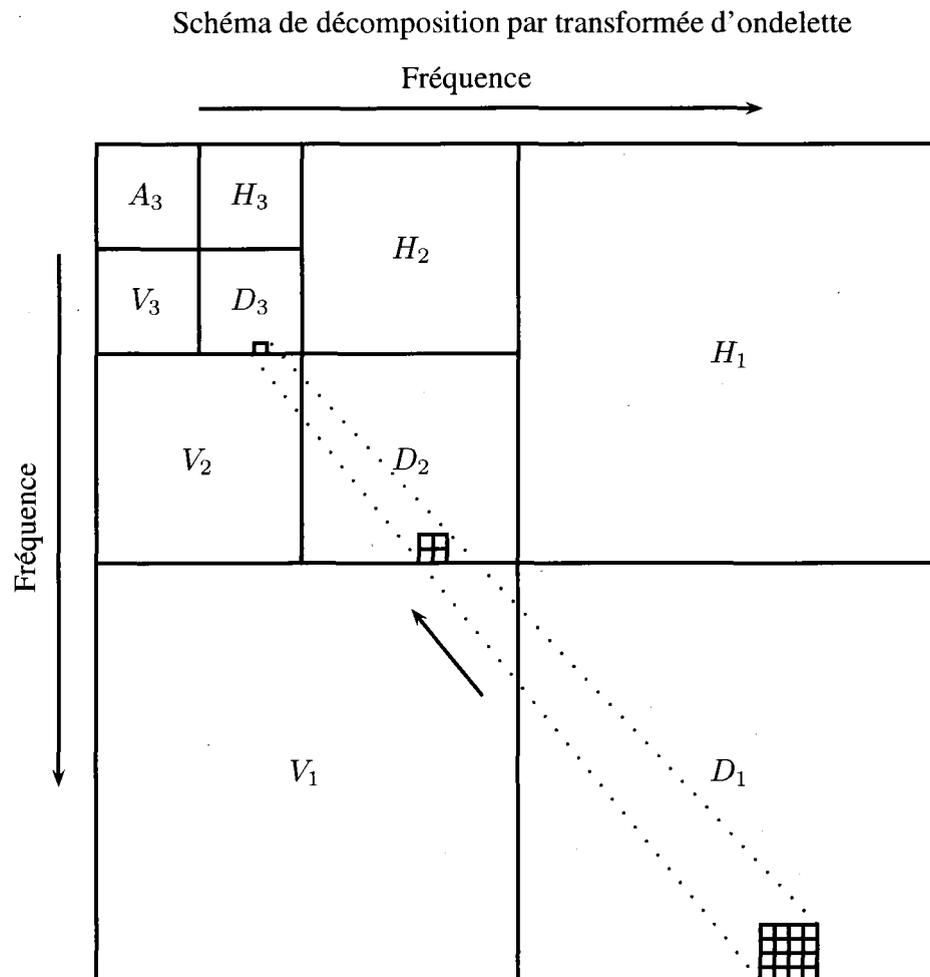


FIGURE 2.4 – Représentation de la transformée d'ondelette discrète sur trois échelles. La décomposition s'effectue de l'échelle la plus haute ($j = 1$) vers la plus basse ($j = 3$). Les pixels sont nommés coefficients parce qu'ils résultent d'une opération mathématique. Les coefficients A_j , D_j , H_j et V_j sont ceux d'approximation, diagonaux, horizontaux et verticaux, respectivement. Inspiré de Gloaguen *et al.* (2010); Mallat (1989b).

2.4 Modèle paramétrique de textures visuelles

La présente section est tirée des travaux de Portilla & Simoncelli (2000) et présente le modèle de texture paramétrique. Cette section aborde les notions d'ergodicité pratique, de génération de champs aléatoires, d'échantillonnage par projection et de gradient de projection ainsi que de contraintes d'évaluation des textures visuelles. Finalement, les notions de projections séquentielles, de convergence et d'efficacité sont présentées à la fin de cette section.

2.4.1 Historique

On accorde la paternité de l'étude des textures visuelles à Julesz (1962). On lui doit notamment l'établissement d'une description des textures en utilisant des champs aléatoires homogènes (stationnaires), avec pour objectif de déterminer un nombre minimal de mesures statistiques afin de différencier visuellement les modèles de textures. Julesz a tenté de prouver que les statistiques d'ordre 2 sont insuffisantes pour différencier toute texture. Depuis 1980, deux développements majeurs ont été faits pour améliorer la caractérisation statistique des images, soient les chaînes de Markov ainsi que l'utilisation de noyaux linéaires orientés sur de multiples échelles (p. ex., Crouse *et al.*, 1998). Ce qui rend particulière chacune des images que nous voyons, ce sont les multiples textures que ces images peuvent contenir ; l'ensemble des textures possibles est infini. La modélisation statistique est logiquement le point de départ pour caractériser les classes d'images que nous appelons « textures visuelles » puisque ces classes d'image consistent en la répétition d'éléments visuels sujets à des variations aléatoires tant au niveau de leur positionnement, de leur dimension, de leur orientation que de leur contraste ou de leur couleur.

2.4.2 Vue d'ensemble

L'idée première de Portilla & Simoncelli (2000) est d'obtenir une description statistique qui correspond à la perception visuelle biologique humaine des textures visuelles d'images. Le point de départ « naturel » est de définir une texture comme étant un champ aléatoire, homogène, réel et bi-dimensionnel (C.A.) $X(n, m)$, sur une bande physique finie $(n, m) \in \mathcal{Z}^2$. L'hypothèse est qu'il existe un ensemble de fonctions $\{\phi_k(X), k = 1 \dots N\}$ tel que tous les k échantillons tirés de n'importe quel de deux C.A. d'espérance égale dans l'ensemble défini, sont visuellement indiscernables lorsque soumis à des conditions strictes de comparaisons. Mathématiquement,

$$\mathcal{E}(\phi_k(X)) = \mathcal{E}(\phi_k(Y)), \tag{2.44}$$

$\forall k \Rightarrow$ échantillons de X et Y

sont visuellement équivalents.

où $\mathcal{E}\{\cdot\}$ indique l'espérance, soit la valeur attendue sur le C.A. d'intérêt. Nous référons à cet ensemble de fonctions comme étant un ensemble de fonctions de contraintes.

L'hypothèse stipule que la perception humaine est l'ultime critère d'équivalence de texture et postule l'existence d'un ensemble de mesures statistiques qui ont la capacité de représenter cette équivalence. Cet hypothèse implique aussi que cet ensemble de mesures statistiques fournit une paramétrisation nécessaire et suffisante de l'espace des textures visuelles.

2.4.3 Ergodicité pratique

La définition d'une équivalence de la perception humaine reste un concept assez vague et dépend ultimement des critères avec lesquelles les comparaisons sont faites. De plus, la notion de perception est établie en terme d'une image individuelle, alors que le pendant mathématique est établi en termes probabilistes abstraits. Ainsi, pour réconcilier ces deux aspects, il est nécessaire d'assumer qu'un nombre raisonnable de mesures statistiques peuvent être faites sur une image unique et finie. La définition d'ergodicité tirée de Portilla & Simoncelli (2000) se veut « pratique » au sens où elle est contrainte à deux dimensions spatiales finies et où l'espace est orthonormé par un ensemble de contraintes dont la définition est obtenue *de visu*.

Un champ aléatoire homogène X possède la propriété d'ergodicité pratique en fonction de ϕ , avec une tolérance admise ϵ et une probabilité p , si et seulement si la moyenne spatiale de ϕ prise sur un échantillon $x(n, m)$ tiré de l'image X est une bonne approximation de l'espérance de ϕ , avec une forte probabilité :

$$\mathcal{P}_X \left(\left| \overline{\phi(x(n, m))} - \mathcal{E}\{\phi(X)\} \right| < \epsilon \right) \geq p, \quad (2.45)$$

où $\overline{\phi}$ indique la moyenne sur toutes les translations de l'image :

$$\overline{\phi(x(n, m))} \equiv \frac{1}{|L|} \sum_{(u,v) \in L} \phi(x([n+u]_N, [m+v]_M)). \quad (2.46)$$

Le couple (N, M) indique les dimensions d'une image finie et $[\cdot]_{N,M}$ indique que l'opération est effectuée en tenant compte du module, soit le nombre entier de pixels qui forment l'images de $[N \times M]$. Pour une texture donnée, il existe un compromis entre la dimension des bandes qui forment l'image, la complexité et l'étendue spatiale de ϕ , ainsi qu'entre les valeurs de ϵ et de p . Une méthode efficace d'évaluation des contraintes est ainsi nécessaire puisqu'il peut soit ne pas y avoir suffisamment de contraintes en place, soit y en avoir trop. La méthode de « synthèse par analyse » est ainsi retenue

puisqu'elle consiste à mettre en place un algorithme qui à partir de l'échantillonnage d'un C.A. évalue un nombre de statistiques afin de les comparer aux statistiques d'une image d'entraînement. En premier, une valeur spécifique c_k correspondant à une fonction de contrainte ϕ_k d'une texture étalon est évaluée. Ensuite, un C.A. $X(n, m)$ est échantillonné afin de savoir s'il satisfait aux contraintes statistiques demandées :

$$\mathcal{E}(\phi_k(X)) = c_k. \quad (2.47)$$

Il est impossible de démontrer l'existence d'un jeu de mesures statistiques suffisant en utilisant seulement cette approche ; pour y arriver il serait nécessaire de connaître l'infinité d'échantillons statistiques de tous les C.A. possibles. Par contre, si on pose que l'image générée satisfait aux exigences d'ergodicité pratique pour toutes fonctions de contraintes qui sont visuellement pertinentes, on obtient que tous les échantillons simulés sont perceptuellement équivalents. Inversement, tout échantillon simulé mais visuellement différent de ce qui est attendu est la preuve que l'ensemble de contraintes est insuffisant. La synthèse par analyse fonctionnelle, telle que proposée par Portilla & Simoncelli (2000), s'itère comme suit :

- Un ensemble de fonctions de contrainte $\{\phi_k\}$ (voir § 2.3.8).
- Une bibliothèque de textures (VisTex, 1995; Brodatz, 1996).
- Une méthode d'évaluation des paramètres statistiques qui tient compte de l'ergodicité pratique telle que précédemment définie.
- Un algorithme qui génère les échantillons des C.A. satisfaisant les contraintes statistiques et dont la construction ne viend pas entraver la qualité du contenu statistique des images.
- Une mesure *de visu* des similarités de deux textures.

2.4.4 Champs aléatoires générés de fonctions de contrainte

Étant donné un ensemble de fonctions de contraintes $\{\phi_k\}$, ainsi que l'ensemble des valeurs de contraintes correspondantes à une texture particulière $\{c_k\}$, nous cherchons à définir et à échantillonner un C.A. qui satisfait l'éq. (2.47). Un choix mathématique intéressant est la « densité du maximum d'entropie », au sens où celle-ci n'induit pas de contraintes de plus que celles de l'éq. (2.47). Cette formulation est dérivée des solutions fournies par les multiplicateurs de Lagrange.

$$\mathcal{P}(\vec{x}) \propto \prod e^{-\lambda_k \phi_k(\vec{x})} \quad (2.48)$$

où $\vec{x} \in \mathcal{R}^{|\mathcal{L}|}$ correspond à une image vectorielle et où les λ_k sont les multiplicateurs de Lagrange. Ce sont ces derniers qui doivent satisfaire l'éq. (2.47). C'est une numérisation exhaustive qui est typiquement résolue par approximation itérative et demande beaucoup de temps de calcul. Le modèle de texture ici proposé est basé sur une alternative de la formulation précédente qui opère en échantillonnant un ensemble d'images \mathcal{T} qui contiennent les mêmes estimations de contraintes.

$$\mathcal{T}_{\vec{\phi}, \vec{c}} = \{\vec{x} : \langle \phi_k(\vec{x}) \rangle = c_k, \forall k\} \quad (2.49)$$

En incluant sur cet ensemble la variance de l'image comme l'une des contraintes, la distribution du maximum d'entropie reste uniforme. Il a été démontré qu'il en était de même pour l'éq. (2.48), dans la limite où les dimensions de la fenêtre \mathcal{L} tendent vers l'infini.

2.4.5 Échantillonnage par projection

Soit un ensemble de fonctions de contraintes ϕ_k , et soit leur valeurs correspondantes c_k . La phase d'échantillonnage revient à choisir aléatoirement à l'intérieur d'un ensemble de contraintes, tel que défini à l'éq. (2.49). Considérant une fonction déterministe qui représente une situation initiale \vec{x}_0 projetée sur un des éléments de $\mathcal{T}_{\vec{\phi}, \vec{c}}$, soit,

$$p_{\vec{\phi}, \vec{c}} \in \mathcal{R}^{L|} \rightarrow \mathcal{T}_{\vec{\phi}, \vec{c}} \quad (2.50)$$

Si \vec{x}_0 est échantillonné d'un C.A. X_0 défini sur la même fenêtre L , la fonction $p_{\vec{\phi}, \vec{c}}$ se trouve à être un C.A. dans l'ensemble $\mathcal{T}_{\vec{\phi}, \vec{c}}$, soit,

$$X_t = p_{\vec{\phi}, \vec{c}}(X_0). \quad (2.51)$$

Si l'on suppose que X_0 est représenté par un C.A. homogène et que $p_{\vec{\phi}, \vec{c}}$ est invariant sous translation, l'image résultante X_t est elle aussi homogène. Avec cette construction, la synthèse de texture est réduite à tirer au hasard des échantillons indépendants de X_0 pour ensuite leur appliquer $p_{\vec{\phi}, \vec{c}}$.

Il doit être noté que X_t a de fortes probabilités d'être ergodique, étant donné l'ensemble de fonction de contraintes ϕ_k , pour toute tolérance $\epsilon > 0$ et pour tout p . Ainsi, un seul échantillon tiré de X_t visuellement non-conforme à l'image d'entraînement peut servir à démontrer que l'ensemble de contraintes est insuffisant.

2.4.6 Projection sur les surfaces de contraintes

Le nombre et la complexité des fonctions de contraintes $\{\phi_k\}$ dans un modèle réaliste de texture rend très difficile la construction d'une fonction de projection $p_{\vec{\phi}, \vec{c}}$. Ainsi, on considère une solution itérative de sorte que les contraintes soient imposées de façon séquentielle. Nous cherchons un ensemble de fonctions tel que,

$$p_k : \mathcal{R}^{|\mathcal{L}|} \rightarrow \mathcal{T}_k, \quad (2.52)$$

où \mathcal{T}_k est l'ensemble d'images qui satisfont à la k-ième contrainte (voir éq. (2.49)). Nous obtenons une image $\mathcal{T}_{\vec{\phi}, \vec{c}}$ en appliquant de manière itérative ces fonctions. Ainsi,

$$\vec{x}^{(n)} = p_{|n|N_c}(\vec{x}^{(n-1)}), \quad (2.53)$$

où $\vec{x}^{(0)} = \vec{x}_0$ est l'image initiale et où N_c est le nombre total de contraintes. Pour une convergence de la séquence, l'image résultante est membre de l'ensemble de Julesz que l'on écrit :

$$p_{\vec{\phi}, \vec{c}}(\vec{x}_0) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} \in \mathcal{T}_{\vec{\phi}, \vec{c}} \quad (2.54)$$

Puisque l'on ne connaît pas, en général, comment les opérations de projections vont interagir entre-elles, il est préférable de choisir chaque fonction p_k de sorte que l'image ne soit que peu modifiée. Si les fonctions ϕ_k sont lisses, l'ajustement qui minimise le changement cartésien dans l'image devient une projection orthogonale de l'image, et ce à l'intersection de toutes les images satisfaisant cette contrainte particulière. Pour le cas restreint où deux contraintes ont des ensembles solutions convexes qui s'intersectent, la procédure garantit la convergence vers une solution. Pour le cas où plus de deux ensembles solutions existent, même s'ils sont tous convexes, la convergence n'est pas assurée. À l'intérieur des travaux de Portilla & Simoncelli (2000), un grand nombre de contraintes sont utilisées et seulement quelques-unes d'entre elles sont convexes, néanmoins leur algorithme converge toujours.

2.4.7 Gradient de projection

Le problème mathématique est largement simplifié lorsque sont séparées les opérations de projection en différentes séquences. Dans plusieurs cas pratiques, le seul fait de résoudre pour une simple projection orthogonale peut être difficile. Puisque la méthode présentée par Portilla & Simoncelli (2000) implique déjà deux boucles qui parcourent l'ensemble des contraintes, on cherche une manière efficace d'ajuster en une étape et à tour de rôle, chacune de ces contraintes. La solution préconisée correspond à un « déplacement vectoriel » dans la direction du gradient de contrainte $\nabla\phi_k(\vec{x})$, soit,

$$\vec{x}' = \vec{x} + \lambda_k \vec{\nabla}\phi_k(\vec{x}), \quad (2.55)$$

où λ_k est choisi de sorte que,

$$\phi_k(\vec{x}') = c_k. \quad (2.56)$$

$\phi_k(\vec{x})$ doit être ajuster en changeant au minimum \vec{x} . Le gradient $\vec{\nabla}\phi_k(\vec{x})$ est orthogonal à la surface de contraintes \mathcal{T}_k , lorsqu'évalué en $\vec{x} \in \mathcal{T}_k$. Dans la limite où $\phi_k(\vec{x}) \rightarrow c_k$, les projections par gradient sont équivalentes aux projections sur les surfaces de contraintes mais de sens opposé. C'est à dire que l'on projette dans l'espace des contraintes original, le vecteur \vec{x}' précédemment projeté par gradient. Le calcul de $\vec{\nabla}\phi_k(\vec{x})$ est direct et la tâche qui incombe est de résoudre pour une constante λ_k qui satisfasse l'éq. (2.56). Il se peut qu'il y ait plus d'une solution possible pour un λ_k donné. Lorsque c'est le cas, la contrainte qui diminue le moins l'image est choisie. Lorsqu'il n'y a pas de solution, il est nécessaire d'opter pour une solution qui satisfasse le mieux l'éq. (2.56). Afin d'obtenir un ajustement pour un sous-ensemble de contraintes reliées $\{\vec{\phi}_{\mathcal{S}}, \vec{c}_{\mathcal{S}}\}$, où $\mathcal{S} \subset \{k = 1, \dots, N_c\}$, des valeurs de $\lambda_k, \forall k \in \mathcal{S}$ sont recherchées, de sorte que le vecteur,

$$\vec{x}' = \vec{x} + \sum_{k \in \mathcal{S}} \lambda_k \vec{\nabla}\phi_k(\vec{x}), \quad (2.57)$$

satisfasse le vecteur de contraintes $\vec{\phi}_{\mathcal{S}}(\vec{x}) = \vec{c}_{\mathcal{S}}$.

2.4.8 Projection séquentielle, convergence, efficacité

La figure 2.5 représente le diagramme de fonctionnement de l'algorithme de synthèse par analyse. Le processus est initialisé avec une image contenant un échantillonnage de bruit blanc (distribution gaussienne). L'image est décomposée à l'intérieur d'une pyramide télescopique. La figure 2.6 présente la procédure récursive qui impose les contraintes statistiques aux sous-bandes passantes, simultanément à la reconstruction d'une image passe-bas. L'autocorrélation, l'aplatissement ainsi que l'asymétrie de l'image passe-bas reconstruite sont alors ajustées et le résultat est ajouté aux sous-bandes de haute-fréquence, dont la variance est au préalable ajustée. On obtient ainsi une image texturale. L'algorithme décrit est somme toute simple et il est impossible de garantir la convergence. L'opération de projection n'est pas exactement orthogonale et les contraintes ne sont pas toutes convexes. Néanmoins, Portilla & Simoncelli (2000) testent l'algorithme sur plusieurs centaines de textures différentes et l'algorithme converge toujours en 50 itérations. De plus, lorsque la convergence est atteinte, les textures synthétisées sont stables, c'est à dire qu'elles ne varient seulement qu'à l'intérieur des paramètres les contraignant.

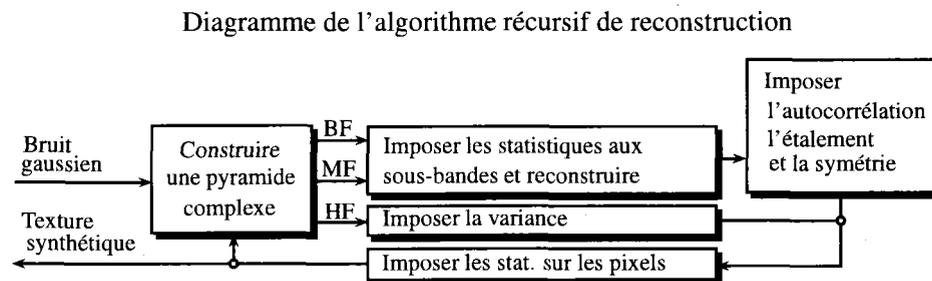


FIGURE 2.5 – Diagramme de l'algorithme récursif. BF, MF et HF signifient basse, moyenne et haute fréquence, respectivement. Le rectangle *Imposer les statistique aux sous-bandes et reconstruire* est développé à la figure 2.6. Inspiré de Portilla & Simoncelli (2000).

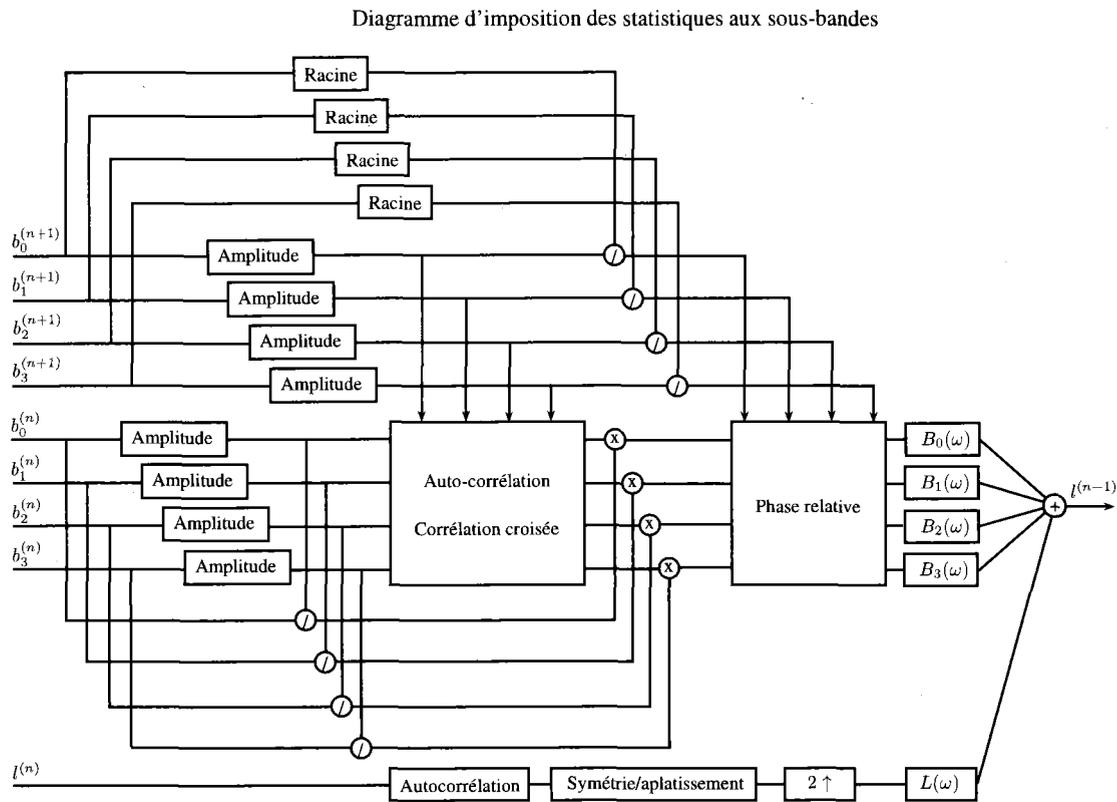


FIGURE 2.6 – Imposition des statistiques aux sous-bandes et reconstruction. Inspiré de Portilla & Simoncelli (2000).

2.4.9 Contraintes statistiques du modèle paramétrique

Les travaux de Portilla & Simoncelli (2000) identifient quatre groupes de contraintes nécessaire à la caractérisation des textures visuelles. Ces paramètres sont les statistiques marginales, les corrélations des coefficients d'approximation *intra*-échelle, les corrélations des amplitudes *intra*-échelle, ainsi que les statistiques inter-échelle sur la phase. En plus de ces quatre groupes de paramètres, l'algorithme développé par Portilla & Simoncelli (2000) est en mesure d'inclure des données de conditionnement. La présente section expose à la fois les paramètres et la façon dont sont imposées les données conditionnantes.

2.4.9.1 Statistiques marginales

Les statistiques sur le niveau de gris des pixels de texture expriment la valeur relative de l'intensité de la texture à reconstruire. La moyenne, la variance, l'asymétrie, l'aplatissement ainsi que l'intervalle de valeurs des pixels sont ajustés dans cet ordre. Ces contraintes statistiques permettent ainsi d'utiliser l'histogramme de l'échantillonnage dans la recombinaison des textures. Tel que le montre la figure 2.7 cette contrainte permet en outre de conserver les contrastes de l'image d'entraînement.

Soit un attribut x localisé en (n, m) , on écrit le i -ième moment $\mathcal{E}_{(i)}\{\vec{x}\}$ du vecteur \vec{x} tel que,

$$\mathcal{E}_{(i)}\{\vec{x}\} = \begin{cases} \overline{x(n, m)}, & i = 1, \\ \overline{(x(n, m) - \mathcal{E}_{(1)}\{\vec{x}\})^i}, & i > 1. \end{cases} \quad (2.58)$$

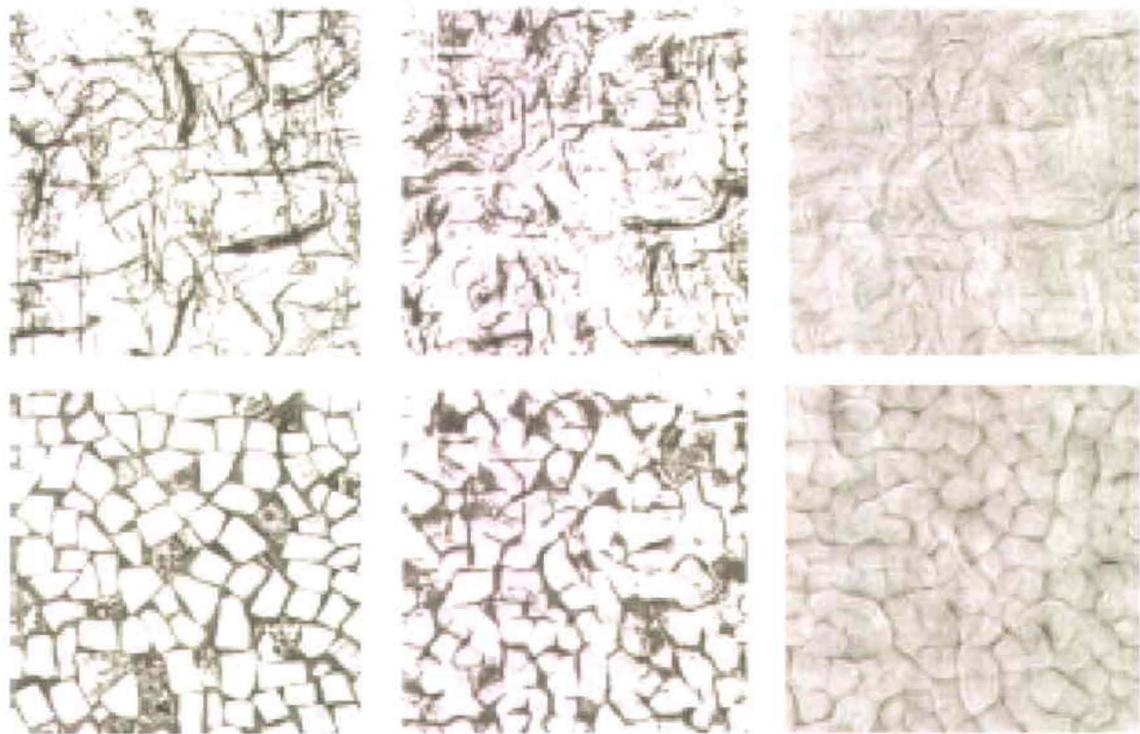


FIGURE 2.7 – Contraintes sur les statistiques marginales. Les deux rangées représentent des textures différentes. La colonne de gauche montre la texture initiale. La colonne du centre représente la reconstitution de l'image en tenant compte des statistiques marginales. La colonne de droite montre la reconstitution d'une image qui n'en tient pas compte. Figure tirée de Portilla & Simoncelli (2000).

Nous réécrivons ici les coefficients d'asymétrie η et d'aplatissement κ de sorte que,

$$\eta(\vec{x}) = \frac{\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\}}{\left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\}\right)^{3/2}}, \quad (2.59)$$

et,

$$\kappa(\vec{x}) = \frac{\mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\}}{\left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\}\right)^2}. \quad (2.60)$$

Ajustement sur la moyenne et la variance

L'ajustement sur la moyenne et la variance est effectué de sorte que la moyenne échantillonnée sur l'image soit ramenée à zéro, normalisée par le rapport des écarts-types et déplacée à la moyenne échantillonnée sur l'image d'entraînement,

$$\vec{x}' = \left(\vec{x} - \mathcal{E}_{(1)}\{\vec{x}\}\right) \left(\frac{\mathcal{E}_{(2)}^t\{\vec{x}\}}{\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\}}\right)^{1/2} + \mathcal{E}_{(1)}^t\{\vec{x}\}, \quad (2.61)$$

où t indique que la mesure statistique provient de l'image d'entraînement.

Ajustement de l'asymétrie

De manière à ajuster l'asymétrie, nous posons $\mathcal{E}_{(1)}\{\vec{x}\} = 0$ et nous évaluons le gradient de projection $\vec{\nabla}\eta(\vec{x})$ (voir § 2.4.7),

$$\frac{\partial\eta}{\partial x(n, m)} = \frac{3 \left(x(n, m)^2 - \eta x(n, m) \left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\}\right)^{1/2} - \left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\}\right) \right)}{|L| \left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\}\right)^{3/2}}, \quad (2.62)$$

où nous rappelons que L représente la bande de pixels qui supporte la distribution. Omettant le facteur d'échelle, nous définissons un vecteur \vec{g} pointé dans la direction du

gradient d'asymétrie,

$$\vec{g} \equiv \vec{x} \odot \vec{x} - \left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} \right)^{1/2} \eta \vec{x} - \mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\}, \quad (2.63)$$

où \odot indique un produit vectoriel, membre à membre. Tel que nous l'avons précédemment défini à l'éq. (2.56), l'ajustement proposé correspond à déplacer la réponse dans la direction de la contrainte ; ici le gradient d'asymétrie $\vec{\nabla} \eta(\vec{x})$. Suivant l'éq. (2.55), nous imposons l'asymétrie de l'image projetée à la valeur désirée,

$$\eta(\vec{x} + \lambda \vec{g}) = \frac{\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x} + \lambda \vec{g}\}}{\left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x} + \lambda \vec{g}\} \right)^{3/2}} = \eta_t. \quad (2.64)$$

En posant $\mathcal{E}_{(1)}\{\vec{x} + \lambda \vec{g}\} = 0$, pour $\mathcal{E}_{(1)}\{\vec{x}\} = 0$ et en substituant l'éq. (2.63) dans l'éq. (2.64), nous obtenons,

$$\eta_t = \frac{\sum_{i=0}^3 p_i \lambda^i}{\left(\sum_{i=0}^2 q_i \lambda^i \right)^{3/2}}, \quad (2.65)$$

où,

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \eta \left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} \right)^{3/2}, \\
 p_1 &= 3 \left(\mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\} - 2 \left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} \right)^2 (1 + \eta^2) \right), \\
 p_2 &= 3 \left(\mathcal{E}_{(5)}\{\vec{x}\} - 2 \left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} \right)^{1/2} \eta \mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\} + \left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} \right)^{5/2} \eta^3 \right), \\
 p_3 &= \mathcal{E}_{(6)}\{\vec{x}\} - 3 \left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} \right)^{1/2} \eta \mathcal{E}_{(5)}\{\vec{x}\} + 3 \mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} (\eta^2 - 1) \mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\} + \left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} \right)^3 (2 + 3\eta^2 - \eta^4), \\
 q_0 &= \mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\}, \\
 q_1 &= 0, \\
 q_2 &= \mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\} - (1 + \eta^2) \left(\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Les deux membres de l'éq. (2.65) sont élevés au carré afin d'obtenir l'équation algébrique suivante,

$$\sum_{i=0}^6 a_i \lambda^i = 0, \tag{2.67}$$

où,

$$\begin{aligned}
 a_0 &= p_0^2 - \eta_t^2 q_0^3, \\
 a_1 &= 2p_1 p_0, \\
 a_2 &= p_1^2 + 2p_2 p_0 - 3\eta_t^2 q_2 q_0^2, \\
 a_3 &= 2(p_3 p_0 + p_2 p_1), \\
 a_4 &= p_2^2 + 2p_3 p_1 - 3\eta_t^2 q_2^2 q_0, \\
 a_5 &= 2p_3 p_2, \\
 a_6 &= p_3^2 - \eta_t^2 q_2^3.
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

De la même manière que nous l'avons expliqué à la section 2.4.7, des six solutions obtenues de l'éq. (2.67), nous choisissons la solution qui possède un minimum d'amplitude et qui satisfait l'éq. (2.64) dans l'intervalle autour de $\lambda = 0$, où $\eta(\lambda)$ possède une pente positive. Lorsqu'aucune solution n'est disponible à l'intérieur de cet intervalle, la valeur maximale de l'intervalle est choisie.

Ajustement de l'aplatissement

De manière à ajuster l'aplatissement, nous procédons de la même façon que pour l'asymétrie. Nous posons $\mathcal{E}_{(1)}\{\vec{x}\} = 0$ et définissons un vecteur dans la direction du gradient de contrainte,

$$\vec{g} \equiv \vec{x} \odot \vec{x} \odot \vec{x} - \alpha \vec{x} - \mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\}, \tag{2.69}$$

où $\alpha = \mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\}/\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\}$. En appliquant l'éq. (2.55) et la définition de l'éq. (2.60), nous obtenons

$$\kappa_t = \frac{\sum_{i=0}^4 p_i \lambda^i}{\left(\sum_{i=0}^2 q_i \lambda^i\right)^2}, \quad (2.70)$$

où,

$$\begin{aligned} p_0 &= \mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\}, \\ p_1 &= 4 \left(\mathcal{E}_{(6)}\{\vec{x}\} - \alpha^2 \mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} - \left(\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \right)^2 \right), \\ p_2 &= 6 \left(\mathcal{E}_{(8)}\{\vec{x}\} - 2\alpha \mathcal{E}_{(6)}\{\vec{x}\} - 2\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \mathcal{E}_{(5)}\{\vec{x}\} + \alpha^2 \mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\} + (\mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} + 2\alpha) \left(\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \right)^2 \right), \\ p_3 &= 4 \left(\mathcal{E}_{(10)}\{\vec{x}\} - 3\alpha \mathcal{E}_{(8)}\{\vec{x}\} - 3\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \mathcal{E}_{(7)}\{\vec{x}\} + 3\alpha^2 \mathcal{E}_{(6)}\{\vec{x}\} \right. \\ &\quad \left. + 6\alpha \mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \mathcal{E}_{(5)}\{\vec{x}\} + 3 \left(\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \right)^2 \mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\} - \alpha^3 \mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\} - 3\alpha^2 \left(\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 3\mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\} \left(\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \right)^2 \right), \\ p_4 &= \mathcal{E}_{(12)}\{\vec{x}\} - 4\alpha \mathcal{E}_{(10)}\{\vec{x}\} - 4\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \mathcal{E}_{(9)}\{\vec{x}\} + 6\alpha^2 \mathcal{E}_{(8)}\{\vec{x}\} + 12\alpha \mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \mathcal{E}_{(7)}\{\vec{x}\} \\ &\quad + 6 \left(\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \right)^2 \mathcal{E}_{(6)}\{\vec{x}\} - 4\alpha^3 \mathcal{E}_{(6)}\{\vec{x}\} - 12\alpha^2 \mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \mathcal{E}_{(5)}\{\vec{x}\} + \alpha^4 \mathcal{E}_{(4)}\{\vec{x}\} \\ &\quad - 12\alpha \left(\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \right)^2 \mathcal{E}_{(5)}\{\vec{x}\} + 4\alpha^3 \left(\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \right)^2 + 6\alpha^2 \left(\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \right)^2 \mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\} - 3 \left(\mathcal{E}_{(3)}\{\vec{x}\} \right)^4, \end{aligned} \quad (2.71)$$

et où,

$$\begin{aligned}q_0 &= \mathcal{E}_{(2)}\{\vec{x}\}, \\q_1 &= 0, \\q_2 &= \frac{1}{4}p_1.\end{aligned}\tag{2.72}$$

Une solution est obtenue pour l'éq. (2.70), alors que les mêmes critères que ceux pour l'asymétrie sont utilisés pour choisir une solution.

Ajustement sur l'intervalle de valeurs

L'ajustement sur l'intervalle de valeurs de pixels est effectué en forçant les valeurs extrêmes de la distribution obtenue aux valeurs limites de la distribution de l'image initiale. Cette opération a pour effet d'accélérer la convergence de l'algorithme.

Imposition des données conditionnantes

L'imposition des données conditionnantes est effectuée en substituant les valeurs des pixels d'intérêt à celles choisies par l'utilisateur. Un masque de pondération accompagne les valeurs de pixel à imposer. Ce masque possède des valeurs comprises entre 0 et 1. Il appartient à l'utilisateur de choisir les valeurs du masque. Dans le cas contraire, une fonction cosinusoidale carré sélectionne aléatoirement les valeurs du masque par défaut. Dans le cas où l'utilisateur veut éviter l'utilisation du masque de pondération, le facteur de pondération de chaque pixel conditionné doit être égal à 1.

Peu de détails sont donnés dans Portilla & Simoncelli (2000) quant à la manière dont l'algorithme impose les données conditionnantes. Comme il est expliqué à la section 2.4.8 précédente, l'algorithme de synthèse est scindé en deux parties, la première étant la préparation de la pyramide télescopique et la seconde, une boucle de reconstruction des échelles grossières aux fines. Une lecture des codes de Portilla & Simoncelli (2000) permet de constater que l'algorithme impose les données pondérées à la fin de chaque itération, après la loupe de synthèse « grossière-à-fine ». À cette étape, l'image entière est légèrement modifiée en étant multipliée par une sorte de facteur d'amortissement. Ensuite, avant la fin de la loupe principale de synthèse, l'algorithme modifie l'image finale en la multipliant par un bruit de fond. Ceci a pour effet de modifier légèrement l'image pour éviter la convergence à des minimum locaux, cependant, les valeurs conditionnantes sont modifiées. Il est mentionné au chapitre suivant de quelle manière le code est altéré pour que soit conservées ces valeurs conditionnantes.

2.4.9.2 Auto-corrélation des coefficients

Les coefficients issus de la décomposition d'ondelette sont typiquement corrélés pour deux raisons ; d'une part parce que la base linéaire de décomposition est fermée et correspond à un sous espace linéaire ; d'autre part, parce que les sous-bandes contiennent des événements périodiques de large échelle ainsi que des structures orientées sur l'image en entier. De manière à contraindre l'auto-corrélation des textures des images, Portilla & Simoncelli (2000) utilisent l'auto-corrélation locale calculée des images passe-bas à chaque niveau de la pyramide de décomposition. Cet ensemble est de haute résolution spectrale pour les coefficients basses-bas et de basse résolution pour les coefficients passe-haut. La figure 2.8 est une démonstration visuelle de la nécessité de tenir compte de l'auto-corrélation entre les coefficients ; l'omission d'une telle contrainte induit des déformations majeures à la reconstruction.

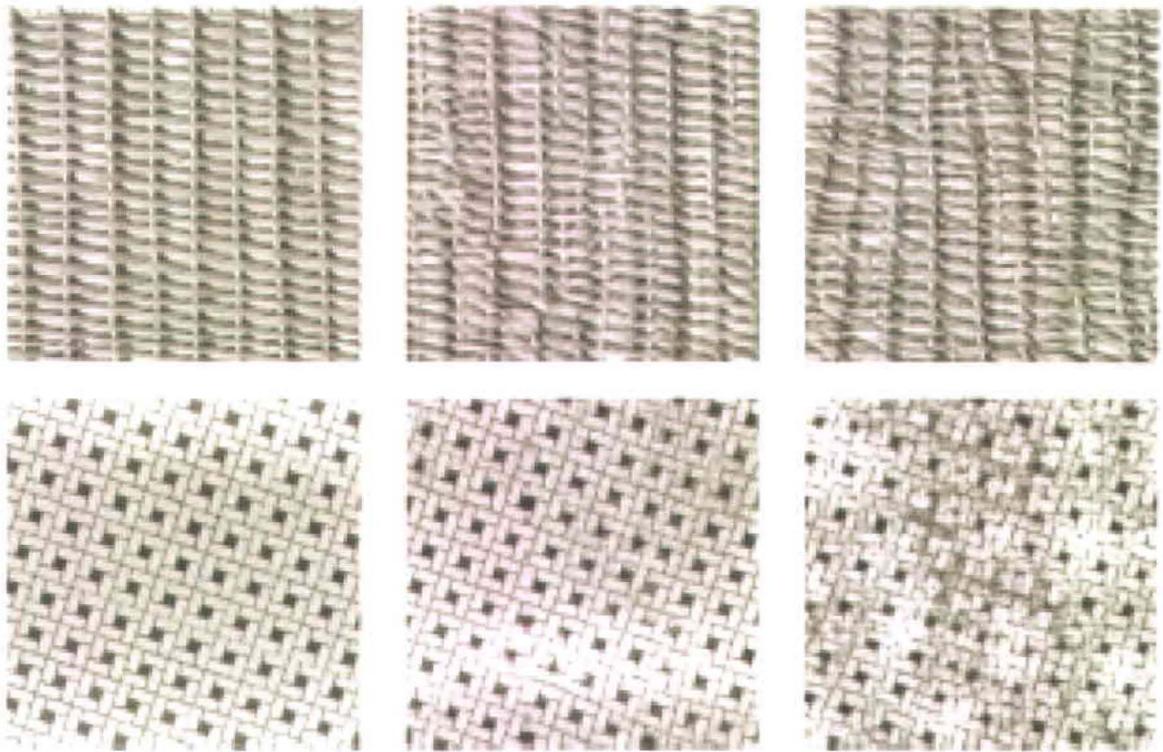


FIGURE 2.8 – Nécessité des contraintes sur l’auto-correlation entre les coefficients. Les deux rangées présentent des textures différentes. La colonne de gauche montre les textures initiales. La colonne du centre présente la recombinaison de l’image en tenant compte des contraintes sur l’auto-corrélation. La colonne de droite montre la recombinaison d’une image qui n’en tient pas compte. Figure tirée de Portilla & Simoncelli (2000).

L'ajustement de l'auto-corrélation des différentes sous-bandes passantes nécessite de poser une grille rectangulaire L qui contient $U \times V$ pixels. Nous utilisons ensuite un estimateur d'auto-corrélation circulaire $A(u, v)$ d'une image $\vec{x}(n, m)$ que nous écrivons,

$$A(u, v) = \overline{x(n, m)x([n + u]_U, [m + v]_V)}, \quad (2.73)$$

où nous rappelons que $[n + u]_U$ indique la que la somme de n et u est modulée sur le nombre de pixels contenus dans U . La dérivée partielle de cette mesure statistique en fonction du pixel en (n, m) est donnée par,

$$\frac{\partial A(u, v)}{\partial x(n, m)} = \frac{1}{|L|} \left(x([n + u]_U, [m + v]_V) + x([n - u]_U, [m - v]_V) \right). \quad (2.74)$$

Tel que nous l'avons précédemment défini à l'éq. (2.55), l'ajustement proposé correspond à déplacer la réponse dans la direction d'un sous ensemble de contraintes $\{\vec{\phi}_S, \vec{c}_S\}$, où $S \subset \{k = 1, \dots, N_c\}$. Nous obtenons une expression pour l'image projetée :

$$\begin{aligned} x'(n, m) &= x(n, m) + \frac{1}{|L|} \sum_{(u,v) \in \mathcal{N}} \lambda_{u,v} \\ &\quad \times \left(x([n + u]_U, [m + v]_V) + x([n - u]_U, [m - v]_V) \right), \end{aligned} \quad (2.75)$$

où $\mathcal{N} \in L$ est le voisinage composé de tous les échantillons (u, v) de l'auto-corrélation que nous voulons ajuster. L'expression précédente est réécrite de sorte que,

$$x'(n, m) = x(n, m) \otimes K_{\vec{\chi}}(n, m), \quad (2.76)$$

où \otimes indique une convolution circulaire et où $K_{\vec{\chi}}(n, m)$ est un noyau anti-symétrique avec un support spatial équivalent à celui de \mathcal{N} . Ainsi, l'auto-corrélation est ajustée en appliquant un filtre de moyenne mobile à phase nulle. Il faut résoudre pour le filtre $K_{\vec{\chi}}$:

$$\begin{aligned}
 A'(u, v) &= \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}} \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}} K_{\bar{\chi}}(k, l) K_{\bar{\chi}}(p, q) \\
 &\quad \times \left(A_t(u + p + k, v + q + l) + A_t(u - p + k, v - q + l) \right. \\
 &\quad \left. + A_t(u + p - k, v + q - l) + A_t(u - p - k, v - q - l) \right), \\
 &\quad \forall (u, v) \in \mathcal{N}.
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Ce système de $|\mathcal{N}|$ équations quadratiques à $|\mathcal{N}|$ inconnus peut avoir jusqu'à $2^{|\mathcal{N}|}$ solutions possibles. Puisque nous sommes à la recherche d'un filtre qui modifie l'image au minimum, nous résolvons pour un noyau symétrique et pair $A_K(u, v)$ avec $2|\mathcal{N}| - 1$ échantillons non-nuls qui satisfont à l'équation suivante,

$$A_t(u, v) = A(u, v) * A_K(u, v), \forall (u, v) \in |\mathcal{N}|. \tag{2.78}$$

Nous arrangeons les échantillons de l'auto-corrélation $A(u, v)$ qui influencent le résultat de la convolution sous forme de matrice et A_t et A_K en vecteurs colonnes. L'expression (2.78) est alors écrite telle qu'un système à $|\mathcal{N}|$ équations linéaires à $|\mathcal{N}|$ inconnues.

Lorsque A_K est positive et définie (c.-à-d. que sa transformée de Fourier discrète est réelle et positive), elle peut être interprétée telle que $A_K(u, v) = K_{\bar{\chi}}(u, v) * K_{\bar{\chi}}(-u, -v)$, de sorte qu'elle peut être évaluée pour $K_{\bar{\chi}}$ satisfaisant les contraintes, et ce en inversant la racine carrée de sa Transformée de Fourier Discrète (T.F.D.). En général, le spectre de Fourier n'est pas positif et c'est ce pourquoi nous utilisons la racine carré de sa valeur absolue :

$$K_{\bar{\chi}}(n, m) \simeq \text{T.F.D.}^{-1} \left\{ \left| \text{T.F.D.} \{ A_K(n, m) \} \right|^{1/2} \right\}. \tag{2.79}$$

2.4.9.3 Corrélation entre les sous-bandes

La corrélation croisée entre les sous-bandes des coefficients permet la reconstruction des structures locales d'une image. L'idée est de décomposer l'image sur une base linéaire, de la rectifier et de lui appliquer une transformation linéaire inverse. La figure 2.9 présente une démonstration visuelle illustrant la nécessité d'une telle contrainte. Nous remarquons que l'utilisation d'une telle contrainte permet d'orienter les structures locales de sorte qu'elles soient cohérentes avec les structures globales de l'image.

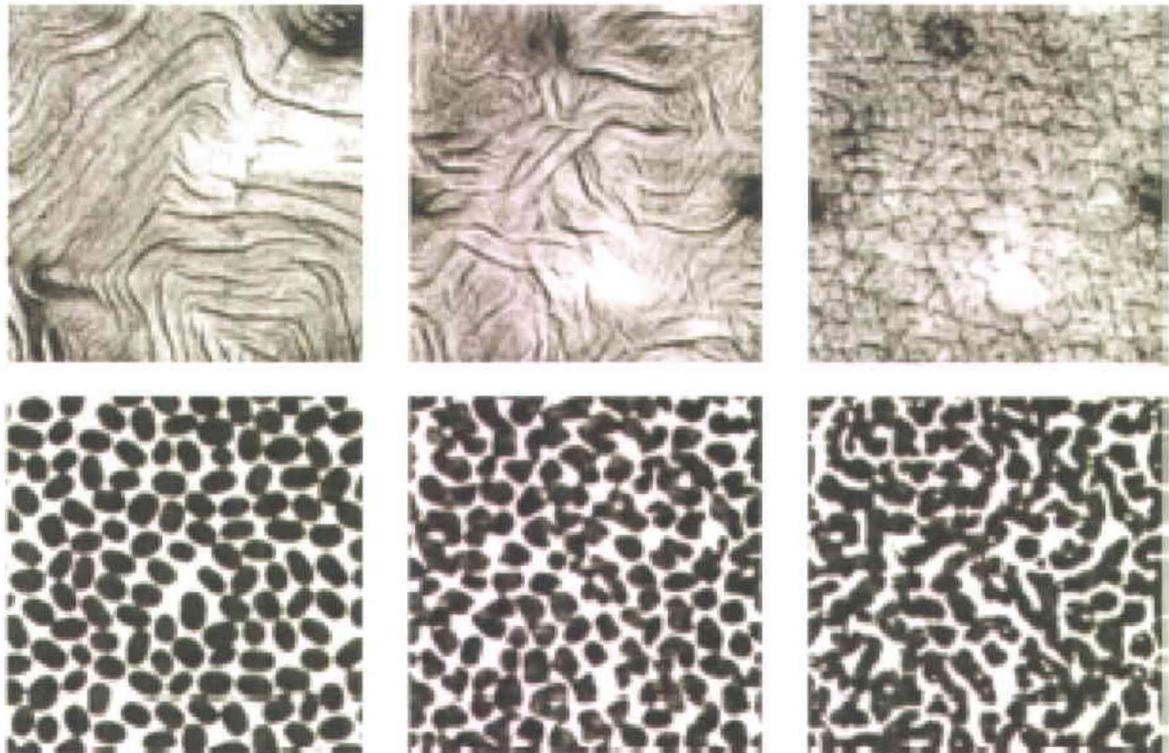


FIGURE 2.9 – Nécessité des contraintes sur la corrélation entre les sous-bandes. La colonne de gauche montre les textures initiales. La colonne du centre représente la recomposition de l'image en tenant compte des contraintes sur la corrélation croisée. La colonne de droite montre la recomposition d'une image qui n'en tient pas compte. Figure tirée de Portilla & Simoncelli (2000).

À l'échelle la plus grossière de la pyramide de décomposition, nous devons ajuster la corrélation croisée de l'amplitude des coefficients pour toutes les directions Δ . Soit un ensemble de sous-bandes $\{x_d(n, m), d = 1, \dots, \Delta\}$, les éléments de la matrice $\Delta \times \Delta$ de corrélation C sont évalués de sorte que :

$$C_{u,v} = \overline{x_u(n, m)x_v(n, m)}. \quad (2.80)$$

La dérivée partielle des éléments de cette matrice en fonction des coefficients de la d -ième sous-bande est :

$$\frac{\partial C_{u,v}}{\partial x_d(n, m)} = \begin{cases} \frac{1}{|L|}x_u(n, m), & u = d, \\ \frac{1}{|L|}x_v(n, m), & v = d, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (2.81)$$

Nous appliquons l'éq. (2.55) afin d'obtenir le gradient de contraintes. Nous vectorisons et omettons la dépendance au facteur d'échelle pour obtenir :

$$\vec{x}'_u = \vec{x}_u + \sum_{v=1}^{\Delta} \lambda_{u,v} \vec{x}_v, \text{ pour } d = 1, \dots, \Delta, \text{ où } \lambda_{u,v} = \lambda_{v,u}. \quad (2.82)$$

Les sous-bandes mises à jour sont une combinaison linéaire symétrique des sous-bandes originales. Nous arrangeons les Δ vecteurs \vec{x}_d pour qu'ils correspondent aux lignes de la matrice \mathbf{X} . Nous réécrivons l'expression précédente de sorte que,

$$\mathbf{X}' = \mathbf{V}\mathbf{X}, \quad (2.83)$$

où \mathbf{V} est une matrice symétrique $[\Delta \times \Delta]$ contenant les $\lambda_{u,v}$. La corrélation croisée des sous-bandes originales peut aussi être exprimée sous forme matricielle :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{|L|} \mathbf{X}\mathbf{X}^T. \quad (2.84)$$

Nous résolvons pour que \mathbf{V} réalise la corrélation croisée désirée. Soit,

$$\frac{1}{|L|} \mathbf{X}'(\mathbf{X}')^T = \frac{1}{|L|} \mathbf{VX}(\mathbf{VX})^T = \mathbf{VCV}^T = \mathbf{C}_t, \quad (2.85)$$

ce qui correspond à un système de $\Delta(\Delta + 1)/2$ équations quadratiques pour autant d'inconnus (éléments de \mathbf{V}).

Comme pour le cas de l'auto-corrélation, nous obtenons une approximation de la solution du système en évaluant d'abord les vecteurs propres des matrices de corrélation :

$$\mathbf{C} = \mathbf{O}\mathbf{D}\mathbf{O}^T \text{ et } \mathbf{C}_t = \mathbf{O}_t\mathbf{D}_t\mathbf{O}_t^T, \quad (2.86)$$

où les matrices \mathbf{D} sont diagonales et strictement positives et où les matrices \mathbf{O} sont orthogonales. En substituant ces vecteur propres à l'intérieur de l'équation (2.85), l'ensemble complet des solutions pour \mathbf{V} est de la forme :

$$\mathbf{V} = \mathbf{O}_t\mathbf{D}_t^{1/2}\mathbf{H}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{O}^T, \quad (2.87)$$

où \mathbf{H} est une matrice orthogonale quelconque. Pour $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_t$, la solution optimale est :

$$\mathbf{H} = \mathbf{O}_t^T\mathbf{O}. \quad (2.88)$$

En contraste avec l'ajustement d'auto-corrélation, cette solution fournit un ajustement exact de la corrélation croisée.

2.4.9.4 Corrélations croisées de la phase avec les sous-bandes fixes

La corrélation croisée de la phase avec des sous-bandes fixes permet de tenir compte de la phase des coefficients des bandes passantes à des échelles adjacentes. En général, la phase locale varie linéairement avec la distance entre les objets. Afin de compenser, Portilla & Simoncelli (2000) proposent de doubler la phase complexe de l'échelle grossière et de calculer la corrélation croisée entre ces coefficients modifiés et les coefficients de l'échelle fine. Cette contrainte permet à l'algorithme de représenter les gradients d'ombre ou d'éclairage d'une texture, tel que l'indique la figure 2.10. L'algorithme séquentiel procède de l'échelle la plus grossière à l'échelle la plus fine.

Pour toutes les échelles, exception faite de la plus grossière, la corrélation croisée des coefficients est ajustée pour les K orientations ainsi que la corrélation croisée des sous-bandes de l'échelle plus grossière. Ceci est fait pour l'amplitude des coefficients ainsi que pour la phase des coefficients complexes. Définissons la matrice de corrélation croisée \mathbf{B} des sous-bandes à être ajustées avec un ensemble de M_s sous-bandes $\{y_d(n, m)\}$ définies sur une surface L :

$$B_{u,v} = \overline{x_u(n, m)y_v(n, m)}. \quad (2.89)$$

Les différences entre les taux d'échantillonnage des deux sous-bandes sont éliminées en suréchantillonnant et en interpolant les bandes d'échelle grossière. Le gradient de B contient les éléments suivants :

$$\frac{\partial B_{u,v}}{\partial x_d(n, m)} = \begin{cases} \frac{1}{|L|}y_v(n, m), & u = d, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (2.90)$$

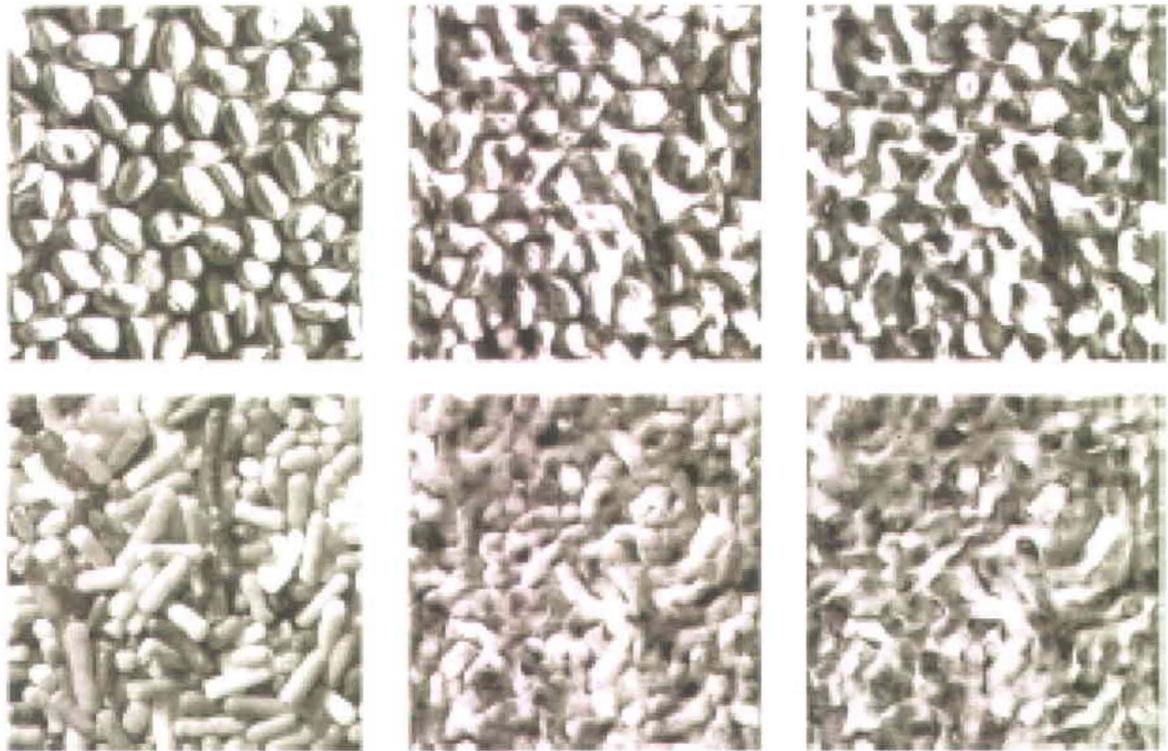


FIGURE 2.10 – Nécessité des contraintes sur les corrélations croisées avec des sous-bandes fixes. La colonne de gauche montre les textures initiales. La colonne du centre représente la recombinaison des coefficients de l'image en tenant compte des corrélations croisées de la phase. La colonne de droite montre la recombinaison d'une image qui n'en tient pas compte. Figure tirée de Portilla & Simoncelli (2000).

En combinant ces éléments et ceux calculés à la section précédente, en mettant sous forme vectorielle et en omettant le facteur d'échelle, nous obtenons une expression pour la mise-à-jour des coefficients :

$$\vec{x}'_d = \vec{x}_d + \sum_{u=1}^{\Delta} \lambda_{d,u} \vec{x}_u + \sum_{v=1}^{V_s} \mu_{d,v} \vec{y}_v, \text{ pour } d = 1, \dots, \Delta. \quad (2.91)$$

Tel que précédemment, $\lambda_{k,n} = \lambda_{n,k}$. Pour ce qui est de $\mu_{d,v}$, la symétrie n'est pas nécessaire. Nous écrivons l'équation (2.90) sous forme matricielle :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{V}\mathbf{X} + \mathbf{\Xi}\mathbf{Y}, \quad (2.92)$$

où \mathbf{V} est une matrice symétrique $[\Delta \times \Delta]$ et où $\mathbf{\Xi}$ est une matrice inconnue $[\Delta \times V_s]$. Nous résolvons pour \mathbf{V} et $\mathbf{\Xi}$ de sorte que la corrélation croisée désirée s'écrive,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathcal{L}|} \mathbf{X}'(\mathbf{X}')^T &= \frac{1}{|\mathcal{L}|} \left[\mathbf{V}\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{V}^T + \mathbf{V}\mathbf{X}\mathbf{Y}^T\mathbf{\Xi}^T \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{\Xi}\mathbf{Y}\mathbf{X}^T\mathbf{V}^T + \mathbf{\Xi}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{\Xi}^T \right] \\ &= \mathbf{V}\mathbf{C}\mathbf{V}^T + \mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{\Xi}^T + \mathbf{\Xi}\mathbf{B}^T\mathbf{V}^T + \mathbf{\Xi}\mathbf{E}\mathbf{\Xi}^T \\ &= \mathbf{C}_t, \end{aligned} \quad (2.93)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathcal{L}|} \mathbf{X}'(\mathbf{Y}')^T &= \frac{1}{|\mathcal{L}|} \left[\mathbf{V}\mathbf{X}\mathbf{Y}^T + \mathbf{\Xi}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \right] \\ &= \mathbf{V}\mathbf{B} + \mathbf{\Xi}\mathbf{E} \\ &= \mathbf{B}_t, \end{aligned} \quad (2.94)$$

où $\mathbf{E} = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T$. Nous résolvons l'éq. (2.94) pour $\mathbf{\Xi}$:

$$\mathbf{\Xi} = (\mathbf{B}_t - \mathbf{V}\mathbf{B})\mathbf{E}^{-1}. \quad (2.95)$$

En substituant ce résultat dans l'éq. (2.93), nous obtenons une contrainte quadratique pour \mathbf{V} :

$$\mathbf{V}[\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}^T]\mathbf{V}^T = \mathbf{C}_t - \mathbf{B}_t\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}_t^T. \quad (2.96)$$

Cette contrainte est de la même forme que l'éq. (2.85), ainsi la solution de \mathbf{V} est obtenue en utilisant la même technique des vecteurs propres. La solution de $\mathbf{\Xi}$ est obtenue en substituant \mathbf{V} dans l'équation (2.95).

2.5 Métriques de validation

L'objectif de la validation est d'être en mesure de statuer sur l'incertitude des réalisations de porosité synthétique. Cependant, l'approche proposée dans le cadre de cette étude se résume elle-même à appliquer une métrique de validation de textures visuelles à la simulation de porosité synthétique. L'approche appliquée de Portilla & Simoncelli semble suffisante en soi et il apparaît incongru de la valider à l'aide d'un modèle statistique plus simple. Néanmoins, il est nécessaire de rendre compte de la qualité des simulations de porosité synthétique d'une part pour comparer les résultats obtenus dans le cadre de ce projet à ceux des travaux de Gloaguen *et al.* (2010); Dubreuil Boisclair *et al.* (2011) et d'autre part afin de donner une appréciation générale sur la qualité des images, d'un point de vue autre que celui de Portilla & Simoncelli. De plus, dans le cadre du modèle biomédical, une analyse morphométrique (voir annexe C) est conduite en lien avec les travaux de Vachon (2010) puisque ultimement, l'approche proposée dans le cadre de ce projet pourrait devenir une méthode de caractérisation clinique. Le cas échéant, ce sont ces paramètres morphométriques qui sont utilisés.

Ainsi, la corrélation pixel-à-pixel entre les simulations et leur cible est obtenue en utilisant l'éq. (A.11). Tel que précédemment mentionné, cette mesure de corrélation permet de comparer nos résultats à ceux des travaux de Gloaguen *et al.* (2010); Dubreuil Boisclair *et al.* (2011). Ensuite, les histogrammes des réalisations sont présentés (voir § A.1) afin de comparer leur moment statistique (la moyenne, la variance, l'asymétrie et l'aplatissement) avec les cibles des simulations. Aussi, les cartes statistiques sur 100 réalisations sont montrées. Celles-ci permettent de visualiser l'incertitude des réalisations. Finalement, des cartes de différence sont obtenues afin de visuellement apprécier l'écart pixel-à-pixel entre les simulations et leur cible.

2.6 Objectifs de recherche

Tel que mentionné en introduction, l'objectif de ce projet de recherche est de modéliser une variable principale de haute résolution à partir d'une variable complémentaire de basse résolution. En termes géologiques, l'objectif est de modéliser la porosité de lithofaciès entre forage à partir d'une tomographie géophysique, de façon similaire à ce qui est proposé dans le cadre des travaux de Gloaguen *et al.* (2010). À cet objectif s'ajoute celui d'incorporer aux simulations de porosité de haute résolution, l'information conditionnelle connue des forages, ainsi que de fournir une métrique de validation des simulations.

La méthode proposée consiste à simuler en premier lieu les hydrofaciès de « larges échelles » pour ensuite modéliser les textures de porosité de « courtes échelles », tout en tenant compte des valeurs en forages. Afin de simuler les hydrofaciès, il est proposé de simuler les coefficients d'approximation (voir fig. 2.4) d'un modèle géologique synthétique à l'aide d'une approche par simulation séquentielle bayésienne. Ce faisant, la

connaissance *a priori* d'un noyau de densité de probabilité entre les coefficients d'approximation d'un modèle analogue ainsi que la variabilité spatiale des coefficients d'approximation d'une mesure géophysique synthétique sont mises à contribution. Ensuite, afin de modéliser les structures de haute fréquence, soient les textures de porosité des différents hydrofaciès, la méthodologie présentée propose de simuler la valeur des pixels à l'aide du modèle de texture paramétrique. Dans le cadre de cette étude, le modèle de texture paramétrique contraint les statistiques du modèle analogue de porosité aux réalisations synthétiques.

Les contributions de l'approche proposée par rapport aux travaux de Gloaguen *et al.* (2010) sont : de un, remplacer la base linéaire dyadique de Haar par la base linéaire complexe de Portilla & Simoncelli (2000) ; de deux, remplacer les statistiques de covariances croisées entre et à l'intérieur des échelles par le modèle de texture paramétrique de Portilla & Simoncelli (2000) ; de trois, remplacer l'approche de co-simulation séquentielle gaussienne telle qu'utilisée par Gloaguen *et al.* (2010), par une approche de simulation séquentielle bayésienne ; de quatre, modifier l'algorithme de Portilla & Simoncelli (2000) afin d'imposer des données conditionnantes issues de forages ; et finalement de cinq, étudier différentes métriques de validation des simulations de porosité.

Dans le cadre de ce projet, l'objectif est de synthétiser des textures de porosité hétérogènes à partir de mesures de données complémentaires affichées sur des supports d'échelle différents, à des fins hydrogéologiques. De manière à s'assurer que l'approche proposée est fonctionnelle et afin de déterminer les limites de l'algorithme, il est aussi nécessaire d'être en mesure de synthétiser un modèle textural simplifié.

Dans le cadre d'une collaboration avec les travaux de maîtrise de Vachon (2010), affilié au Laboratoire d'Imagerie orthopédique de l'Hôpital-Sacré-Cœur de Montréal

(LIO-HSCM), l'étude de la porosité des os spongieux peut fournir ce type de modèle textural « témoin ». L'approche proposée est donc construite à l'aide de deux modèles d'imagerie (détaillé au chapitre suivant); le premier modèle hydrogéologique possède des textures hétérogènes sur l'ensemble du domaine et est construit de deux variables complémentaires à différentes résolutions; le second présente des textures homogènes sur tout le domaine et est construit d'une seule variable à différentes résolutions. Ainsi, le premier modèle est l'objectif final, alors que le second permet de valider les limites de l'approche.

Chapitre 3

Méthodologie

Le présent chapitre aborde la méthodologie employée dans le cadre de ce projet de recherche. En premier lieu, les données de deux études de cas utilisées sont détaillées. En second lieu, l'approche proposée est développée.

3.1 Les données utilisées

La présente section expose les données utilisées dans le cadre de cette étude. L'approche proposée a pour objet deux études de cas et telles qu'elles ont toutes deux été introduites à la section 2.6. La première étude de cas est à caractère hydrogéologique alors que la seconde est à caractère biomédical.

3.1.1 Imagerie hydrogéologique

Le premier jeu de données utilisé dans le cadre de cette étude est le même que celui étudié dans le cadre des travaux de Gloaguen *et al.* (2010) et Boisclair *et al.* (2008); Dubreuil Boisclair *et al.* (2011). À l'intérieur de cette section la méthode numérique de tomographie radar entre forage employée est brièvement expliquée. Les modèles analogues et synthétiques ainsi que leurs histogrammes respectifs sont ensuite présentés.

Les données consistent en un duo de photographies numériques montrant la coupe transversale d'un dépôt sédimentaire de 9 mètres de profondeur par 4,5 mètres de largeur. Ces photographies sont converties en porosité, sur une échelle de 0,10 à 0,50 (fig. 3.1 a) et b)). Ces images contiennent 256×128 pixels dont la résolution est approximativement de 3,5 cm par pixel.

Les champs de porosité présentés aux figures 3.1 a) et b) sont convertis en permittivité électrique et en conductivité électrique en utilisant le modèle Maxwell-Garnet (Sihvola, 2000) ainsi que le modèle macroscopique de Pride (1994), respectivement. Les résultats des travaux de Giroux & Chouteau (2008) sont utilisés à ce propos. Le milieu est saturé en eau à 100 % (avec 1000 mg/L de solide dissous à 15°C donnant une conductivité de 128 mS/m).

Une tomographie radar entre forage synthétique est ensuite simulée en utilisant les propriétés électriques obtenues. Les émetteurs radar ainsi que les récepteurs sont distants de 25 cm le long des forages ce qui donne un total de 1296 couples émetteur-récepteur. En utilisant les champs de permittivité et de conductivité et en posant la perméabilité magnétique égale à celle du vide, un tomogramme radar est numérisé. Cette tomographie est obtenue à l'aide d'une différenciation par éléments finis dans le

domaine du temps des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques. Les temps de parcours sont manuellement pointés et la covariance sur la lenteur est modélisée en utilisant un semi-variogramme exponentiel anisotrope ; la portée horizontale est de 6 mètres sur un angle de -10° par rapport à l'horizon alors que la portée verticale est de 2 mètres.

Les vitesses sont inversées en utilisant l'algorithme d'inversion stochastique développé par Gloaguen *et al.* (2004). Cet algorithme est implémenté au logiciel *bh_tomo* (Giroux *et al.*, 2007). De cette façon, les figures 3.1 a) et b) permettent d'obtenir les figures 3.1 c) et d), respectivement. Tel que dans le cadre des travaux de Gloaguen *et al.* (2010), la présente étude utilise l'une des deux images de porosité, soit la figure 3.1 a), ainsi que l'image produite à partir de celle-ci (fig. 3.1 c)), comme étant le modèle « analogue ». Les deux autres images (fig. 3.1 b) et d)) constituent le modèle « synthétique », soit un contexte *in situ* typique à reconstruire à partir de la mesure géophysique vers la variable géologique principale.

Sur la figure 3.1 a), du haut vers le bas, le modèle contient une couche de faible porosité et de texture unie à 25 pixels de profondeur, une couche plus poreuse et plus hétérogène centrée en 50 pixels de profondeur, une couche relativement poreuse entre 75 et 175 pixels de profond, une couche très poreuse et très homogène, comprise entre 175 et 225 pixels de profond, ainsi qu'une couche relativement poreuse et homogène épaisse de 25 pixels, centrée à 250 pixels de profond.

Sur la figure 3.1 b), du haut vers le bas, le modèle contient une couche peu poreuse centrée à 25 pixels de profondeur, une mince couche poreuse relativement homogène centrée en 50 pixels de profondeur, une seconde couche très peu poreuse et homogène entre 75 et 80 pixels de profond, une couche poreuse très hétérogène suivi d'une troi-

sième couche peu poreuse et très homogène à la droite de la figure. Le modèle contient de plus une couche très hétérogène entre 125 et 225 pixels de profond, une couche poreuse et homogène épaisse de 25 pixels centrée à 225 pixels de profond, ainsi qu'une dernière couche relativement hétérogène centrée à 250 pixels de profondeur.

Les images de porosité des modèles analogues et synthétiques diffèrent sur la disposition précise des unités stratigraphiques qu'elles contiennent. Les proportions ainsi que les géométries ne sont pas les mêmes; les successions du modèle analogue sont plus épaisses et plus homogènes que celles du modèle synthétique alors que ce dernier contient plus de couches distinctes. De plus, le modèle synthétique de la figure 3.1 b) contient un type de texture inconnu du modèle analogue. Cette texture est située au centre de la figure, entre 50 et 150 pixels de profondeur (voir la région encerclée sur la figure). Nous ne retrouvons pas cette texture en aucun endroit sur la figure 3.1 a). Ces textures ont une correspondance géophysique identique à celle du modèle analogue, alors que sur le modèle géophysique analogue, cette mesure pointe vers une texture qui diffère du modèle synthétique de porosité. Autrement dit, l'algorithme devrait converger vers un type de texture du modèle analogue qui n'est pas celui contenu à l'intérieur du modèle synthétique.

Les histogrammes du modèle synthétique et du modèle analogue sont présentés à la figure 3.2. D'emblée, les modèles analogues et synthétiques de haute-résolution diffèrent, au niveau de leur intervalle de valeurs mais aussi par rapport à leur comportement général. En effet, l'histogramme du modèle analogue est constitué de trois pics centrés à 0,25, 0,29 et 0,35 (fig. 3.2 a)), alors que l'histogramme du modèle synthétique contient une plage unimodale de valeurs admissibles plus large (de 0,10 à 0,50), centrée en 0,25 (fig. 3.2 b)). De plus, il est possible de constater que les distributions de lenteur radar, telles que présentées aux figures 3.2 c) et d), diffèrent aussi au niveau du comportement de leur distribution. Ceci indique que les modèles synthétiques et analogues diffèrent

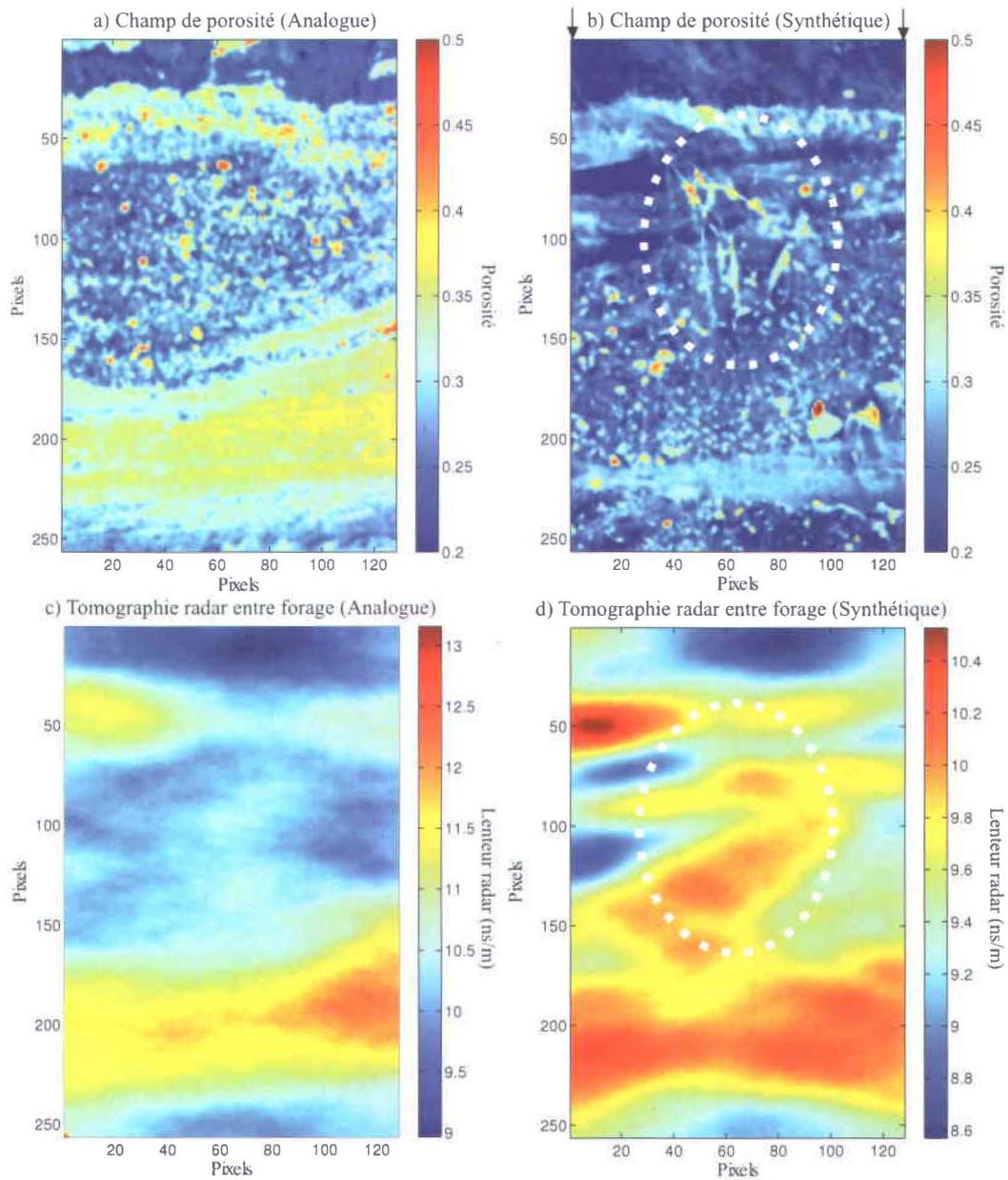


FIGURE 3.1 – Modèles analogues et synthétiques. a) Modèle de porosité analogue. b) Modèle de porosité synthétique. L'échelle de valeurs de porosité varie de 0,1 à 0,5. La résolution est d'environ $\sim 3,5$ cm/pixel. Les flèches verticales indiquent la localisation des forages. c) Tomographie radar numérique entre forages du champ de porosité analogue en a). d) Tomographie radar numérique entre forages du champ synthétique en b). L'échelle de valeur est différente afin d'accentuer les contrastes. La lenteur de l'onde radar est exprimée en nanoseconde par mètre (ns/m).

substantiellement, que le modèle analogue fournit un aperçu représentatif du contexte géologique à modéliser, mais qu'il ne contient pas toute l'information pour simuler la totalité des champs de porosité synthétiques possibles et .

Les caractéristiques statistiques des distributions des modèles sont présentées au tableau 3.1. La moyenne, l'écart-type, l'asymétrie ainsi que le coefficient d'aplatissement sont évalués. L'évaluation est effectuée pour les quatre images de la figure 3.1 ainsi que pour les valeurs de « forages », qui sont les valeurs de deux colonnes de pixels de chaque côté de la figure 3.1 b). Ainsi de manière quantitative, la moyenne varie d'environ 15 % entre les champs de porosité des modèles analogues et synthétiques. L'écart-type varie de 61 %, l'asymétrie de 39 % et l'aplatissement de 37 %, alors que ces deux coefficients sont quasiment nuls. L'écart entre les statistiques est plus important du côtés des tomographies. En effet, si nous comparons les tomographies de lenteur radar des modèles analogues et synthétiques, nous observons un écart de 9 % sur la moyenne, 47 % sur l'écart-type, 57 % pour l'asymétrie (qui est positive pour le modèle analogue et négative pour le modèle synthétique) et 67 % sur l'aplatissement.

Statistiques sur les histogrammes (géologie)				
Figures	Moyenne	Écart-type	Asymétrie	Aplatissement
Porosité Analogue	0,2979	0,0417	0,0013	0,0044
Porosité Synthétique	0,2526	0,0378	0,0033	0,0070
Radar Analogue	10,5538	0,6666	0,2332	1,1012
Radar Synthétique	9,6343	0,3514	-0,0999	0,3665
Forages	0,3039	0,0453	0,2254	0,0930

Tableau 3.1 – Statistiques sur les histogrammes (géologie).

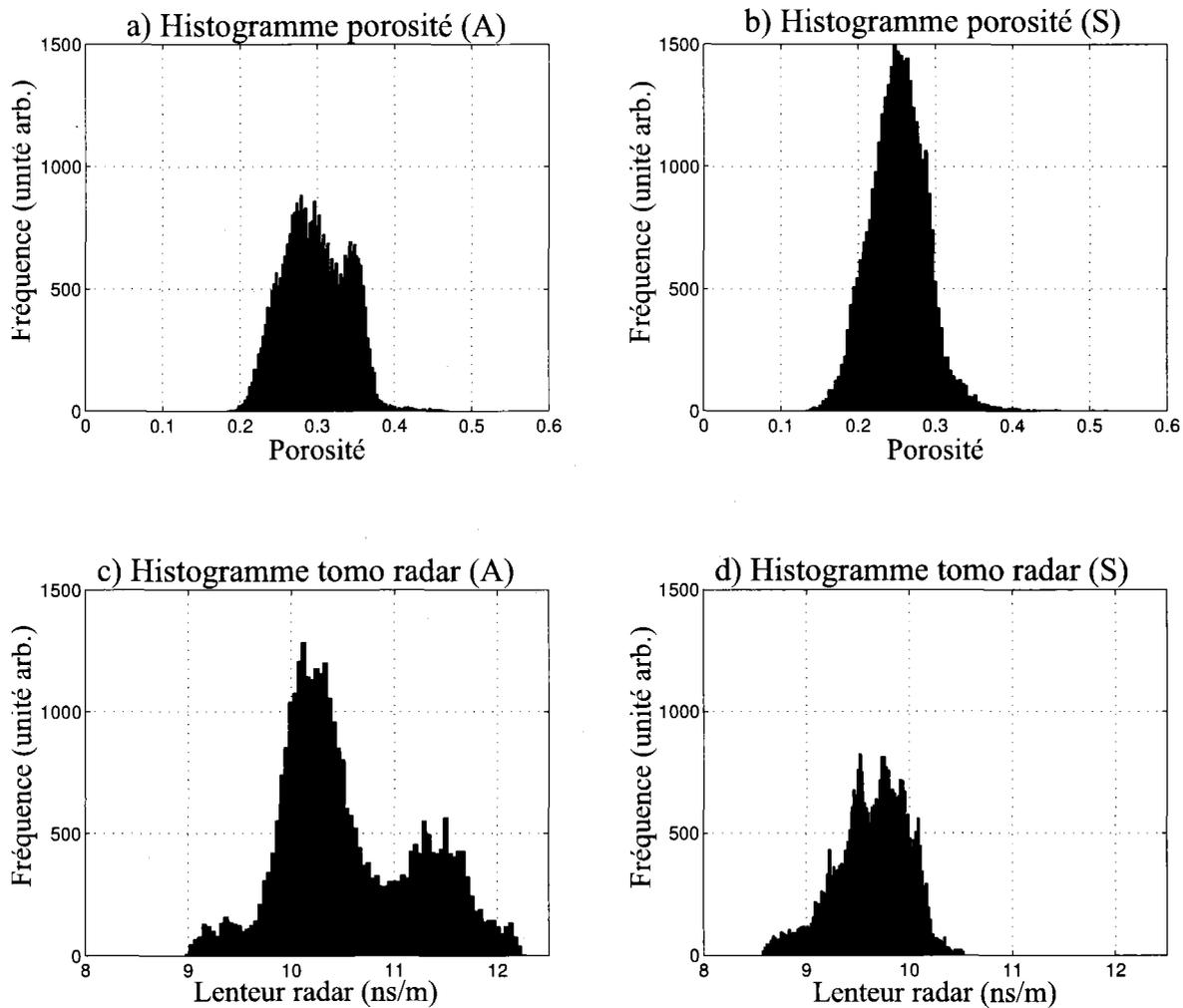


FIGURE 3.2 – Histogrammes des modèles analogues (A) et synthétiques (S). a) Histogramme du modèle de porosité analogue. b) Histogramme du modèle de porosité synthétique. c) Histogramme du modèle de tomographie radar numérique entre forages du champ de porosité analogue. d) Histogramme du modèle de tomographie radar numérique entre forages du champ synthétique.

3.1.2 Imagerie médicale

La présente section expose la provenance des images de tomодensitométrie et est tirée du Larousse médical (Wainsten, 2006). Ces images ont été obtenues d'une collaboration avec le Laboratoire d'imagerie orthopédique de l'hôpital Sacré-Cœur de Montréal (LIO-HSCM) dans le cadre du projet de maîtrise de Vachon (2010). La tomодensitométrie axiale calculée par ordinateur (T.A.C.O.) est une image qui présente la distribution de l'absorption des rayons X (Wainsten, 2006). Cette image est produite par le balayage d'un faisceau collimaté de rayons X en rotation autour d'une région anatomique et le long de l'axe du corps humain. Le modèle mathématique décrivant la propagation de l'intensité d'une onde électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur s'écrit (Hecht, 2002, voir chap. 4, § 4.8, p. 128) ;

$$I(x) = I_0 e^{-\beta x}, \quad (3.1)$$

où $I_0 = I(0)$ est la *radiance* en $x = 0$ (p. ex. à l'interface tissu spongieux - tissu osseux), et où $\beta \equiv 2\omega n_I/c = \ln(I_0/I_{x_0})$ est le coefficient d'absorption (d'atténuation) à l'épaisseur x_0 . Ici, ω est la fréquence du rayon X, n_I est l'indice de réfraction et c est la vitesse du signal (3×10^8 m/s). On normalise ensuite le coefficient d'atténuation sur le coefficient de l'eau β_{eau} afin d'obtenir une image dont les valeurs de voxels¹ sont comprises sur une échelle de valeur de Hounsfield (HU) définie de sorte que,

$$[HU] = 1000 \left(\frac{\beta - \beta_{eau}}{\beta_{eau}} \right). \quad (3.2)$$

Les valeurs sont ainsi comprises en -1000 et $+3000$, ce qui est représenté par 2^{12} octets par pixel. Le tableau 3.2 présente différents coefficients d'absorption d'intérêt. Il existe une échelle HU étendue, ou modifiée, (2^{15} octets) qui permet d'améliorer les contrastes (Coolens & Childs, 2003).

1. Le voxel est un pixel qui possède une épaisseur.

Valeur HU pour différents milieux diélectriques	
Milieu	Unité HU
Air	-1000
Tissus spongieux	-100 à 300
Eau	~ 0
Tissus minéralisés	0 à 3000

Tableau 3.2 – Valeur en unité de Hounsfield pour différents milieu diélectriques. Inspiré de Vachon (2010).

Les images médicales utilisées dans le cadre de cette étude ont été acquises dans le cadre des travaux de Vachon (2010) où le corps vertébral d'une lombaire bovine fait l'objet d'une analyse structurelle. L'arc vertébral est au préalable scié et le corps vertébral est ensuite coulé dans une résine de soutien lui permettant d'être assujetti sur un gabarit dont la position est étalonnée par visée laser.

Le montage est finalement dirigé à l'intérieur d'un tomodynamomètre. Les images micrométriques T.A.C.O. sont obtenues à l'aide d'un appareil Iveon PET-CT Siemens. L'acquisition est effectuée par tranche de 100 μm avec un intervalle dynamique de 2^{15} octets par pixels, à une résolution de 105 $\mu\text{m}/\text{pixel}$ ($\sim 0,1 \text{ mm}/\text{pixel}$). Les images macrométriques T.A.C.O. sont obtenues à l'aide d'un appareil GE Healthcare LightSpeed VCT 64. L'acquisition est effectuée par tranche de 0,625 mm d'épaisseur avec un intervalle dynamique de 2^{12} octets par pixel, à une résolution de 977 $\mu\text{m}/\text{pixel}$ ($\sim 1 \text{ mm}/\text{pixel}$). L'épaisseur des tranches n'étant pas la même pour les deux appareils, elles sont choisies de manière à ce que les surfaces représentées soient la même (Vachon, 2010):

La région d'intérêt est délimitée à l'intérieur de l'os spongieux. Les modèles analogues et synthétiques sont définis comme étant les parties supérieures et inférieures de la zone d'intérêt et sont présentés à la figure 3.3. Les deux modèles proviennent donc

du même objet physique qui a été scindé en deux parties. Qualitativement parlant, les images sont similaires et semblent visuellement homogènes puisqu'elles ne comportent qu'une seule texture d'os spongieux. Il est aussi possible de constater sur les images de la figure 3.3 que la densité de la moelle est variable. Donc, bien que les images de porosité proviennent d'un objet d'une seule texture, celle-ci semble être supportée par une structure sous-jacente qui varie entre le modèle synthétique et le modèle analogue.

Les histogrammes des modèles de la figure 3.3 sont présentés à la figure 3.4. Il est possible de remarquer que les histogrammes du modèle analogue (fig. 3.4 a) et c)) sont très similaires à ceux du modèle synthétique (fig 3.4 b) et d)). En effet, les deux histogrammes présentent une distribution unimodale de type gaussienne. La moyenne, l'écart-type, l'asymétrie ainsi que l'aplatissement des modèles analogues et synthétiques, de haute et de basse-résolution sont affichés au tableau 3.3. La moyenne varie de 0,02 %, l'écart-type varie de 4,60 %, l'asymétrie de 46,40 % et l'aplatissement de 8,00 %.

Statistiques sur les histogrammes (biomédical)				
Figures	Moyenne (HU)	Écart-type	Asymétrie	Aplatissement
Analogue (100 $\mu\text{m}/\text{pxl}$)	32 455	85,0263	-127,5584	26 351
Synthétique (100 $\mu\text{m}/\text{pxl}$)	32 448	81,2497	-237,9902	24 401
Analogue (1 mm/pxl)	1530,9	67,2621	-1 400,2	59 005
Synthétique (1 mm/pxl)	1515,3	54,2324	-729,6742	27 229

Tableau 3.3 – Statistiques sur les histogrammes (biomédical). L'échelle d'intensité des images de 977 $\mu\text{m}/\text{pixel}$ est le HU (2^{12} octets/pixel). L'échelle d'intensité des images de 105 $\mu\text{m}/\text{pixel}$ est l'unité HU étendue (2^{15} octets/pixel).

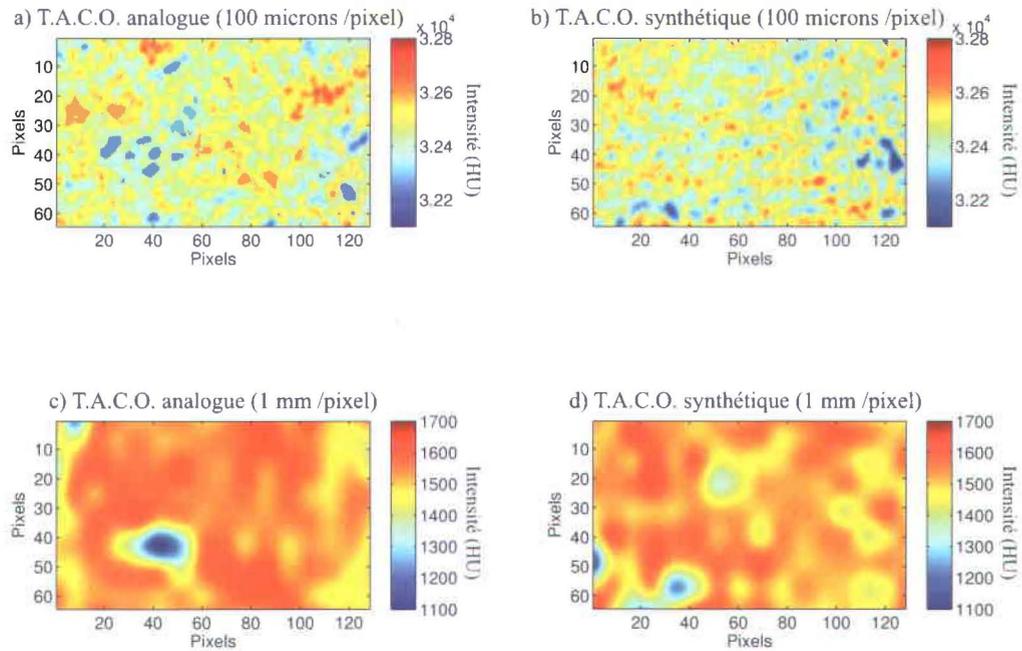


FIGURE 3.3 – Modèles biomédicaux analogues et synthétiques. a) Modèle analogue micrométrique ($105 \mu\text{m}/\text{pixel}$). b) Modèle synthétique micrométrique ($105 \mu\text{m}/\text{pixel}$). c) Modèle analogue macrométrique ($977 \mu\text{m}/\text{pixel}$). d) Modèle synthétique macrométrique ($977 \mu\text{m}/\text{pixel}$). L'échelle d'intensité des images de $977 \mu\text{m}/\text{pixel}$ est le HU (2^{12} octets/pixel). L'échelle d'intensité des images de $105 \mu\text{m}/\text{pixel}$ est l'unité HU étendue (2^{15} octets/pixel).

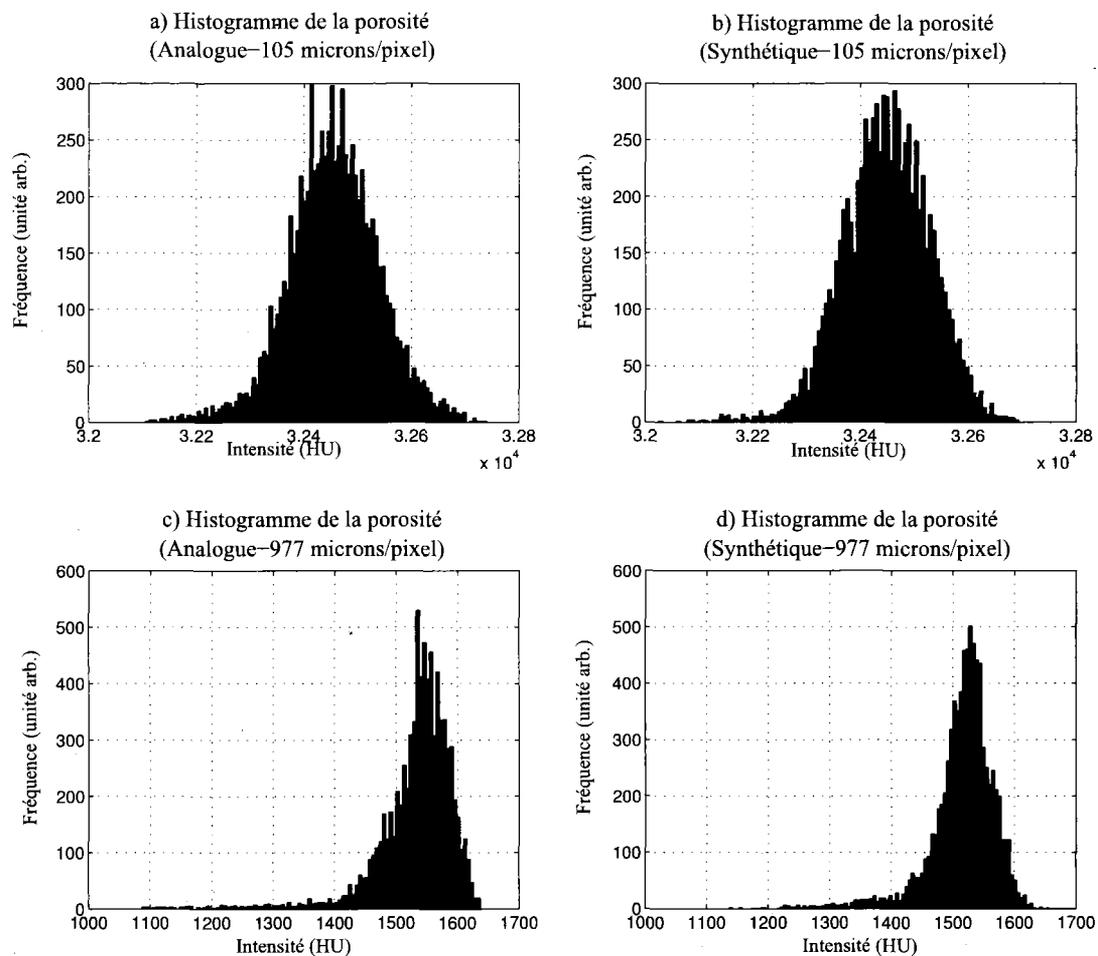


FIGURE 3.4 – Histogrammes des modèles biomédicaux analogues et synthétiques. a) Histogramme du modèle analogue micrométrique ($105 \mu\text{m}/\text{pixel}$). b) Histogramme du modèle synthétique micrométrique ($105 \mu\text{m}/\text{pixel}$). c) Histogramme du modèle analogue macrométrique ($977 \mu\text{m}/\text{pixel}$). d) Histogramme du modèle synthétique macrométrique ($977 \mu\text{m}/\text{pixel}$). L'échelle d'intensité des images de $977 \mu\text{m}/\text{pixel}$ est le HU (2^{12} octets/pixel). L'échelle d'intensité des images de $105 \mu\text{m}/\text{pixel}$ est le HU étendue (2^{15} octets/pixel).

3.2 L'approche proposée

La présente section détaille l'approche proposée dans le cadre de cette étude. En premier lieu, les textures visuelles qui forment les images des modèles analogues et synthétiques sont analysées à l'aide du modèle de texture paramétrique. Simultanément, les images sont décomposées afin d'en extraire les coefficients d'approximation à différentes échelles. Ces coefficients d'approximation sont comparés par corrélation à toutes les échelles. C'est ce qui détermine l'échelle de travail qui est utilisée pour la suite de nos travaux. Deuxièmement, cette section aborde la manière dont est effectuée la simulation séquentielle bayésienne des coefficients d'approximation du modèle synthétique de porosité. Troisièmement, il est question de reconstruction des textures de porosité synthétique ainsi que de métriques de validation des simulations.

3.2.1 Analyse des textures

Cette étape consiste à analyser les textures d'entraînement qui sont contenues à l'intérieur du modèle analogue de haute-résolution. L'algorithme `textureAnalysis.m` est utilisé à ce propos (Portilla & Simoncelli, 2000). Les paramètres d'entrée sont ; l'image dont les textures doivent être analysées ; le nombre d'échelles de décomposition ; le nombre d'orientations ; et finalement le nombre de pixels voisins inclus dans l'évaluation des statistiques. Il doit être noté que les images incorporées à l'algorithme sont au préalable normalisées (c.-à-d. que la moyenne est soustraite et que cette différence est divisée par la variance du champ de porosité analogue). De plus, les dimensions de l'image doivent obligatoirement être un multiple de $2^{(\text{échelle}+2)}$, c'est à dire que pour la quatrième échelle, par exemple, les images doivent posséder des dimensions qui sont un multiple de 2^8 . Les paramètres de sortie sont les dix vecteurs de contraintes regroupés à l'intérieur d'une structure de données représentant l'ensemble des statistiques de

modélisation paramétrique précédemment défini (voir § 2.4.9).

Dans le cadre de cette étude, il est proposé de simuler les coefficients B_{J-1} (voir § 2.3.8) du modèle de porosité synthétique à l'aide de l'approche séquentielle bayésienne. L'algorithme d'analyse des textures sert donc en premier lieu à obtenir les coefficients d'approximation des images du modèle analogue aux quatre premières échelles (les images ont de trop petites dimensions pour atteindre la cinquième échelle). Ceux-ci peuvent ensuite être comparés par corrélation afin de statuer sur l'échelle optimale de travail et finalement servir à construire la densité de probabilité conjointe utilisée par la simulation séquentielle bayésienne. De plus, l'algorithme d'analyse des textures relève les caractéristiques statistiques du modèle analogue de porosité. Ces statistiques sont mises en mémoire et nous les réutilisons pour contraindre les simulations de texture synthétique. Ces dernières sont réalisées à l'aide de l'algorithme de synthèse des textures `textureSynthesis.m`, présenté à la section 3.2.3.

3.2.2 Simulation séquentielle bayésienne

L'objectif est de simuler les coefficients d'approximation du modèle synthétique de porosité (fig. 3.1 b) et 3.3 b)). La procédure implique de tirer aléatoirement une valeur pour chaque localisation de coefficient d'approximation du modèle de porosité synthétique, à l'intérieur d'une distribution *a posteriori* $f(p_{t+1}|g_{t+1})$ (lignes 60 et suivantes du code en annexe D.1). Cette distribution est le produit entre la densité de probabilité conjointe de *vraisemblance* des coefficients d'approximation des images du modèle analogue qui correspondent à la valeur de coefficient d'approximation du modèle géophysique (ou macroscopique biomédical) synthétique en cet endroit (lignes 42 à 47 du code), ainsi que la distribution *a priori* $f(p_{t+1})$ évaluée en ce même endroit (lignes 70 à 74). La condition écrite à la ligne 65 du code en annexe D.1 indique que le premier

coefficient est simulé à l'intérieur de la distribution de *vraisemblance* seule. Pour tous les coefficients subséquents à simuler, la distribution *a priori* est rejetée si et seulement si le krigeage génère une valeur [NaN]² (lignes 84 à 88 du code).

De manière à évaluer la distribution de *vraisemblance*, un noyau d'interpolation est au préalable construit entre les coefficients d'approximation des images du modèle analogue. Ainsi toute valeur de coefficient d'approximation géophysique (ou macroscopique biomédical) synthétique peut y être comparée afin d'en extraire la section du noyau qui contient toutes les valeurs admissibles de coefficients d'approximation du modèle de porosité analogue. Cette distribution est ensuite attribuée au modèle de porosité synthétique. Afin d'évaluer la distribution *a priori*, l'approche appliquée est séquentielle gaussienne (voir § A.8.1), c'est à dire qu'à chaque localisation visitée, une densité de probabilité est construite en interpolant par krigeage ordinaire tout en tenant compte de tous les points précédemment simulés. La valeur inférée correspond à la moyenne d'une distribution normale (moyenne nulle et variance de 1) alors que l'erreur de krigeage correspondante est associée à la variance de la distribution. Les prochaines sous-sections explicitent l'approche séquentielle bayésienne proposée.

3.2.2.1 Distribution de *vraisemblance*

La distribution de *vraisemblance* obtenue du modèle analogue est extraite d'un noyau de densité de probabilité bi-dimensionnel gaussien (voir § A.8.2.1). Ce dernier est construit à l'aide des codes `cskern2d.m` (Martinez & Martinez, 2008). Les paramètres d'entrée sont ; les données sous forme de vecteur, la grille d'interpolation en x et en y, ainsi que la largeur de la fenêtre d'interpolation. Les paramètres de sortie sont la définition de la grille d'interpolation en x et en y ainsi que leur valeur correspondante

2. NaN : Not a Number.

d'intensité.

En ce qui concerne la largeur de la fenêtre d'interpolation h_f , elle est évaluée en fonction du nombre d'échantillons disponibles (nombre de couple de coefficients n). La valeur de h_f , tel que proposé par Martinez & Martinez (2008), est proportionnelle à la covariance entre les coefficients de basse-fréquence et inversement proportionnelle à la cinquième racine du nombre d'échantillons disponibles. Dans le cadre de ce projet, il est préconisé d'étudier les dimensions de la fenêtre d'interpolation optimale en les faisant varier de $n/2$ à $n/2\pi$. Ensuite, les noyaux produits sont comparés au nuage de points des coefficients d'approximation du modèle synthétique de sorte qu'il soit possible de statuer sur quelle fenêtre d'interpolation est la plus représentative. Un choix étant finalement porté sur les dimensions de la fenêtre d'interpolation, il est possible d'extraire les distributions de *vraisemblance* d'intérêt qui correspondent aux valeurs des coefficients d'approximation du modèle géophysique.

3.2.2.2 Distribution *a priori*

La distribution *a priori* est construite en deux étapes. La première étape consiste à évaluer la variabilité spatiale des coefficients d'approximation du modèle géophysique (ou macroscopique biomédical) synthétique. Cette variabilité spatiale est unique à chaque modèle géophysique (ou macroscopique biomédical). Ensuite, la deuxième étape consiste à interpoler par krigeage ordinaire la valeur des coefficients d'approximation de porosité du modèle synthétique, un-à-un, en tenant compte des valeurs précédemment interpolées.

Variabilité spatiale et modèle régional

L'analyse de la variabilité spatiale des coefficients d'approximation du modèle géophysique (ou macroscopique biomédical) synthétique est effectuée à l'aide du code `varioexp2d.m` (Marcotte, 2010). Cet algorithme permet en outre d'obtenir le semi-variogramme expérimental des coefficients d'approximation pour toutes directions et de les comparer qualitativement à différents modèles théoriques (voir § A.6.1). C'est à cette étape qu'est étudiée l'anisotropie des modèles expérimentaux.

Les paramètres d'entrée sont : la matrice qui contient les éléments des coordonnées spatiales ainsi que la variable étudiée, le nombre de classes inter-station (écart entre les points) désirées, la largeur des classes, le vecteur unitaire directionnel, ainsi que la tolérance angulaire autour du vecteur unitaire. Les paramètres de sortie sont le semi-variogramme dont les éléments sont les distances moyennes ainsi que le nombre de paires de points utilisées dans l'évaluation du semi-variogramme expérimental.

Krigeage ordinaire

L'interpolation par krigeage ordinaire des paramètres des distributions *a priori* $f(p_{t+1}|p_1, \dots, p_t)$ est effectuée à l'aide du code `cokri.m` (Wade *et al.*, 2001; Marcotte, 2010). Les paramètres d'entrée sont au nombre de 12 et clairement explicités à l'intérieur du code. Il doit être noté qu'un seul point est évalué à la fois, puisque le krigeage est répété à chaque séquence de l'algorithme de simulation bayésienne.

Aussi, le modèle de variabilité spatiale peut être représenté par un modèle régional (voir annexe A.6.3). Le cas échéant, le modèle régional est une matrice contenant sur

plusieurs lignes, les différents modèles de variabilité spatiale. Les paramètres de sortie sont ; la matrice des valeurs krigées ; la matrice des variances de krigeages ; ainsi que la variance de krigeage.

Le mode de krigeage employé est le mode ordinaire, puisque la valeur moyenne des coefficients d'approximation du modèle synthétique de porosité est inconnue. En tous les cas, le krigeage est effectué en tenant compte de toutes les valeurs précédemment simulées comprises à l'intérieur d'un rayon de 4 pixels. Finalement, de manière à obtenir une distribution *a priori* pour chacune des valeurs de coefficients d'approximation à simuler, la valeur interpolée par krigeage est imposée à la moyenne d'une distribution normale (0,1), alors que l'erreur de krigeage est imposée à la variance de cette même distribution. C'est cette distribution finale qui fait office de distribution *a priori*.

3.2.3 Synthèse des textures visuelles

La synthèse des textures visuelles est effectuée à l'aide du code `textureSynthesis.m` de Portilla & Simoncelli (2000). Les paramètres d'entrée sont ; la structure de contraintes, telle que fournie par l'algorithme d'analyse de texture (voir § 3.2.1), l'image initiale ou un vecteur aléatoire (bruit blanc) définissant les limites de l'image et un générateur de nombre aléatoire ; le nombre d'itérations désirées pour la reconstruction ; ainsi que le masque de données conditionnantes. Les paramètres de sortie sont ; l'image reconstruite ; ainsi que l'ensemble des valeurs d'ajustement des paramètres, en décibels.

Dans le cadre de cette étude, l'objectif est de simuler la porosité synthétique à partir des coefficients d'approximation B_{J-1} (voir § 2.3.8) précédemment simulés avec l'approche séquentielle bayésienne. Ces coefficients sont forcés à l'algorithme de Portilla &

Simoncelli (2000) en les substituant aux valeurs générées aléatoirement par l'algorithme. Aussi ces mêmes coefficients sont forcés à chaque itération (50) de reconstruction (voir § 2.4.8).

3.2.4 Données conditionnantes

Les données conditionnantes sont normalisées et introduites à l'algorithme de synthèse sous la forme d'une matrice de deux colonnes, la première représentant par ordre d'apparition toutes les valeurs conditionnantes et la deuxième, un facteur de pondération correspondant à la valeur conditionnante sur la même ligne. Il doit être noté que l'algorithme de Portilla & Simoncelli (2000) considère les valeurs conditionnantes, non pas comme des valeurs en forage qui doivent être fixes, mais comme un masque qui est appelé à varier au fil des itérations. L'algorithme modifie donc les valeurs du masque à leur imposition. De plus, l'image synthétisée entière est multipliée par un bruit de fond à la fin de chaque itération. Bien que Portilla & Simoncelli (2000) ne donnent que peu de détails sur cette partie de leur travaux, il semble que l'algorithme modifie les valeurs du masque à la fin de chaque itération pour éviter la convergence des réalisations vers un minimum local. Ceci étant, afin de remplir les objectifs de ce projet de recherche, l'algorithme est modifié pour qu'il force à chaque itération les valeurs réelles de forage sans qu'elles ne soient modifiées à leur imposition. De plus, de manière à ce que l'image finale ne soit pas altérée d'un bruit de fond à l'itération finale, nous modifions le code simplement en rendant conditionnelle la modification finale pour qu'elle soit faite à toute les itérations sauf la dernière.

3.2.5 Métriques de validation

Les métriques de validation employées dans le cadre de ce projet sont ; de un, la corrélation pixel-à-pixel entre les images ; de deux, les statistiques des histogrammes des simulations ; de trois, les cartes statistiques ; et de quatre, les cartes de différences. À cela s'ajoute pour le modèle biomédical, une analyse morphométrique conduite dans le cadre de travaux de Vachon (2010).

La corrélation pixel-à-pixel, les histogrammes ainsi que les statistiques les décrivant sont obtenus directement à l'aide de Matlab. Ensuite, les cartes statistiques (moyenne, variance, asymétrie et aplatissement) sont obtenues pour 100 réalisations. Finalement, les cartes de différences sont aussi obtenues directement en soustrayant la cible de simulation (porosité synthétique) aux simulations. Quant aux paramètres morphologiques biomédicaux présentés, ils sont tirés de l'étude de Vachon (2010).

Chapitre 4

Résultats

Le présent chapitre expose les résultats obtenus dans le cadre de ce projet. Ce chapitre aborde l'échelle de travail, les résultats de simulations séquentielles bayésienne ainsi que des simulations de textures paramétriques. Finalement, ce chapitre présente les résultats de validation des simulations.

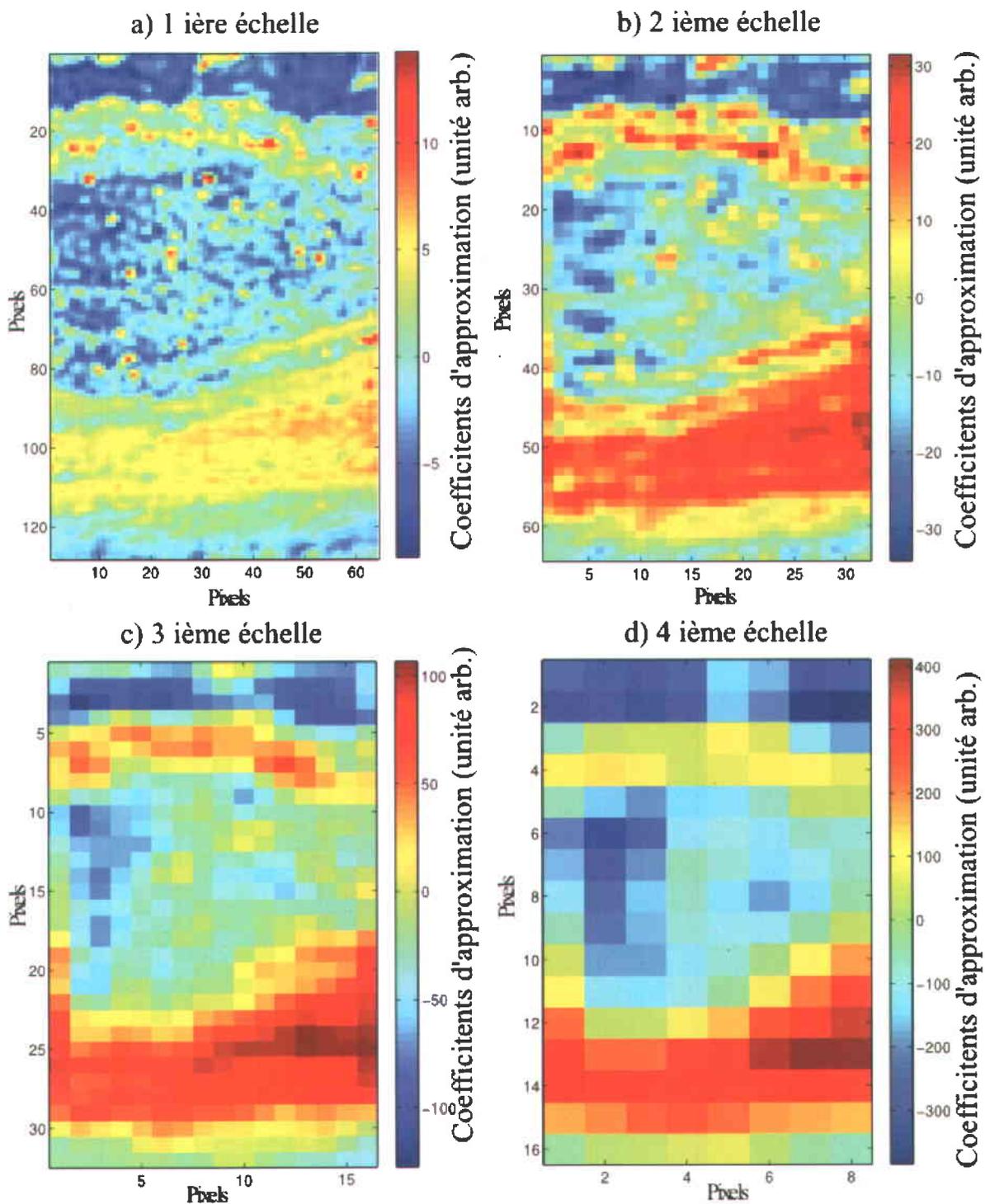
4.1 Échelle de travail

Afin de connaître l'échelle de travail à laquelle sont simulés les coefficients d'approximation du modèle de porosité synthétique, la corrélation entre les coefficients d'approximation des images des modèles analogues est évaluée pour plusieurs échelles. Les images des modèles analogues sont décomposées en coefficients d'approximation en utilisant l'algorithme de Portilla & Simoncelli (2000). Les coefficients d'approximation des images du modèle analogue hydrogéologique sont présentées à différentes échelle de décomposition à la figure 4.1 à titre d'exemple. La corrélation est ensuite évaluée

pixel-à-pixel à chaque échelle. Tel qu'il est possible de le constater au tableau 4.1, la quatrième échelle est celle où les coefficients corrént le plus entre eux, et ce tant pour le modèle analogue hydrogéologique que le modèle biomédical. La figure 4.2 présente la régression linéaire entre les coefficients des images du modèle analogue hydrogéologique. On y constate la tendance du nuage de points à s'aligner autour de la droite de régression. Puisque la quatrième échelle présente la plus forte corrélation, c'est elle qui devient l'échelle de travail. La figure 4.3 présente les coefficients d'approximation de la quatrième échelle de décomposition du modèle hydrogéologique. La figure 4.4 présente les coefficients d'approximation de la quatrième échelle de décomposition du modèle biomédical. Tel que précédemment mentionné, les images doivent avoir des dimensions qui sont le multiple de $2^{(\text{échelles}+2)}$, est parce que les images ont des dimensions de 256×128 pour le modèle hydrogéologique et de 64×128 pixels pour le modèle biomédical, leur cinquième échelle de décomposition est inaccessible en utilisant l'algorithme de Portilla & Simoncelli (2000).

Corréation entre les coefficients d'approximation des images des modèles analogues			
Échelle [Nsc]	Ondelette de Haar	Ondelette de Portilla	Biomédical
1	0,60	0,65	0,15
2	0,65	0,75	0,20
3	0,70	0,86	0,32
4	0,80	0,90	0,48
5	0,80	n.d.	n.d.

Tableau 4.1 – Corrélation entre les coefficients d'approximation des modèles analogues (hydrogéologiques et biomédicaux) à différentes échelles obtenues avec l'ondelette de Haar (Gloaguen *et al.*, 2010) et de Portilla. n.d. signifie « non disponible ».



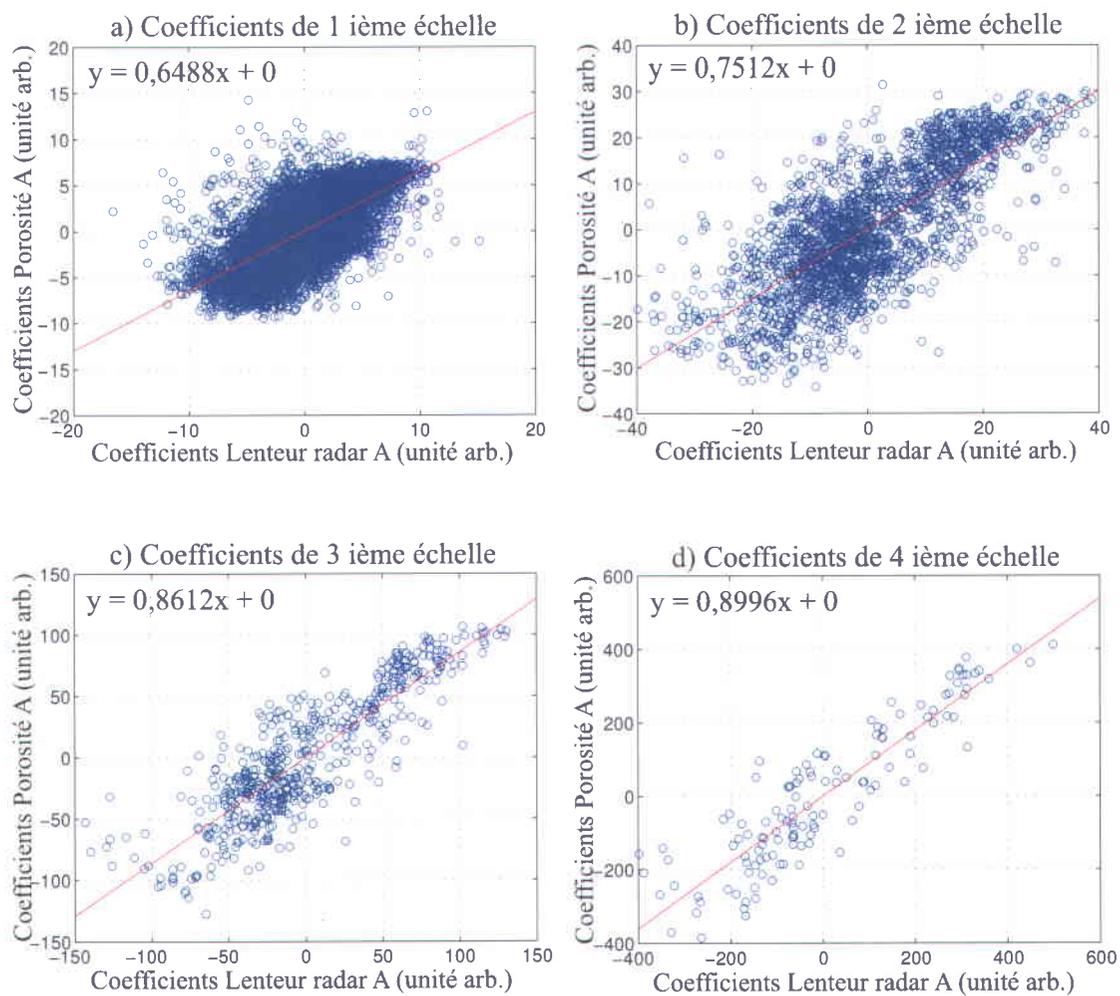


FIGURE 4.2 – Régression linéaire des coefficients d’approximation du modèle analogue hydrogéologique. a) Première, b) deuxième, c) troisième et d) quatrième échelle de décomposition, obtenues à l’aide du modèle de Portilla & Simoncelli (2000).

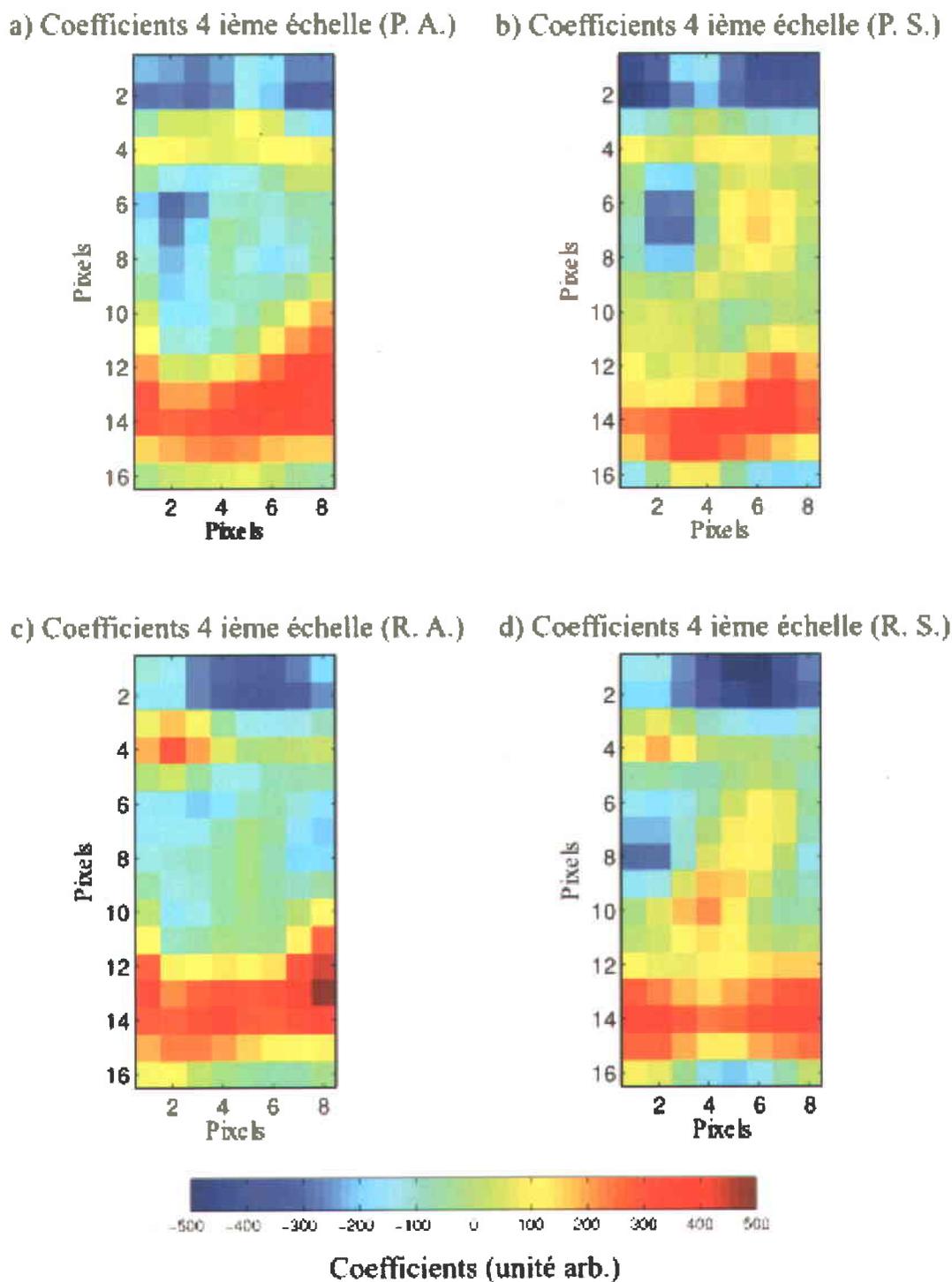


FIGURE 4.3 – Coefficients d’approximation de la quatrième échelle de décomposition obtenus à l’aide du modèle de Portilla & Simoncelli (2000). a) Modèle analogue de porosité (P.A.). b) Modèle synthétique de porosité (P.S.). c) Modèle analogue de vitesse radar (R.A.). d) Modèle synthétique de vitesse radar (R.S.).

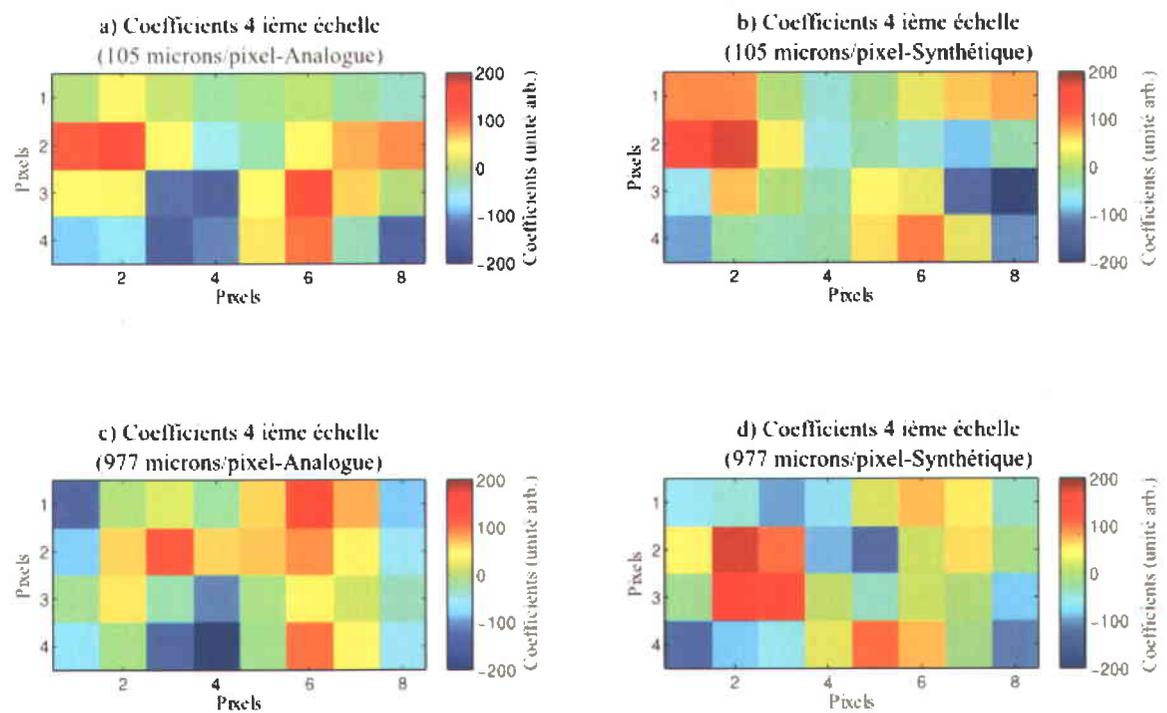


FIGURE 4.4 – Coefficients d’approximation de la quatrième échelle de décomposition obtenus à l’aide du modèle de Portilla & Simoncelli (2000). a) Modèle analogue micrométrique de porosité osseuse (105 $\mu\text{m}/\text{pixel}$). b) Modèle synthétique micrométrique de porosité osseuse (105 $\mu\text{m}/\text{pixel}$). c) Modèle analogue macrométrique de porosité osseuse (977 $\mu\text{m}/\text{pixel}$). d) Modèle synthétique macrométrique de porosité osseuse (977 $\mu\text{m}/\text{pixel}$).

4.2 Simulation séquentielle bayésienne

Cette section expose d'une part la construction de la distribution *a posteriori* et d'autre part, les résultats de simulation par approche séquentielle bayésienne. La distribution *a posteriori* est construite telle que précédemment établie à la section A.8.1 à l'aide de deux éléments ; en premier lieu, un noyau d'interpolation entre les coefficients d'approximation des images des modèles analogues et en second lieu, le modèle de variabilité spatiale évalué pour les coefficients d'approximation du modèle géophysique (ou macroscopique biomédicale). Ce n'est qu'une fois ces deux éléments en main qu'il est possible de simuler les coefficients d'approximation du modèle de porosité synthétique.

4.2.1 Distribution de *vraisemblance*

Afin de construire la distribution de *vraisemblance*, un noyau d'interpolation entre les coefficients d'approximation de modèles analogues est en premier lieu construit. Ensuite, les coefficients d'approximation du modèle synthétique y sont comparés afin d'y extraire la distribution de *vraisemblance* qui leur correspondent. La clef pour construire un noyau d'interpolation adéquat est dans le choix des dimensions de la fenêtre d'interpolation. Les dimensions de la fenêtre déterminent le comportement global des distributions de *vraisemblance* qui sont réutilisées dans l'algorithme de simulation séquentielle. C'est à dire qu'une fenêtre large génère une interpolation plutôt lissée du nuage de points, alors qu'une fenêtre étroite est plus sensible aux variations de densité.

Il n'existe à toute de fin pratique aucune méthode établie ou « recette » pour déterminer les dimensions adéquates de la fenêtre d'interpolation d'un noyau. Martinez & Martinez (2008) proposent d'utiliser une loi normale qui est inversement proportion-

nelle à la racine cinquième de l'écart-type de l'échantillonnage, ce qui est trop petit dans notre cas. Dans le cadre de ce projet, il est préconisé de comparer les nuages de points formés des coefficients de quatrième échelle du modèle analogue et du modèle synthétique. Conceptuellement, l'information sur les coefficients d'approximation du modèle synthétique de porosité est à produire et devrait rester inconnue. Cependant, pour l'exercice d'ajustement de l'approche proposée, il est de mise d'avoir un aperçu du recouvrement entre les nuages de points. Ainsi, tel qu'il est possible de le constater sur la figure 4.5, les nuages de points des modèles synthétiques et analogues se recouvrent totalement. Il semble même que le nuage de points des coefficients d'approximation du modèle synthétique soient plus diffus que ne le sont ceux du modèle analogue. Dans ce cas-ci, les dimensions de la fenêtre d'interpolation pour les coefficients d'approximation du modèle analogue doivent permettre à toutes valeurs du modèle synthétique à l'intérieur de la zone de recouvrement d'exister ainsi qu'en périphérie de la zone de recouvrement. Il en est de même pour le modèle analogue biomédical présenté à la figure 4.6.

Afin d'évaluer la fenêtre d'interpolation optimale, les noyaux d'interpolation sont construits entre les coefficients d'approximation des modèles analogues hydrogéologiques et biomédicaux, en faisant varier les dimensions de la fenêtre d'interpolation ($n/2$, n/π , $n/5$ et $n/2\pi$). La figure 4.7 présente les noyaux d'interpolation du modèle hydrogéologique et la figure 4.8 les noyaux d'interpolation du modèle biomédical. Tel qu'il est possible de le constater sur aux figures 4.7 a) et 4.8 a), plus la fenêtre d'interpolation s'élargit ($h_f \rightarrow n/2$), plus le noyau est lissé. Dans le cas contraire, plus la fenêtre d'interpolation est étroite (voir fig. 4.7 d) et 4.8 d)), plus les noyaux sont discontinus. En lien avec le recouvrement des nuages de points précédemment mentionné, la fenêtre d'interpolation optimale apparaît clairement être autours de $n/2$. C'est donc cette largeur de fenêtre qui est utilisée pour la suite de nos travaux.

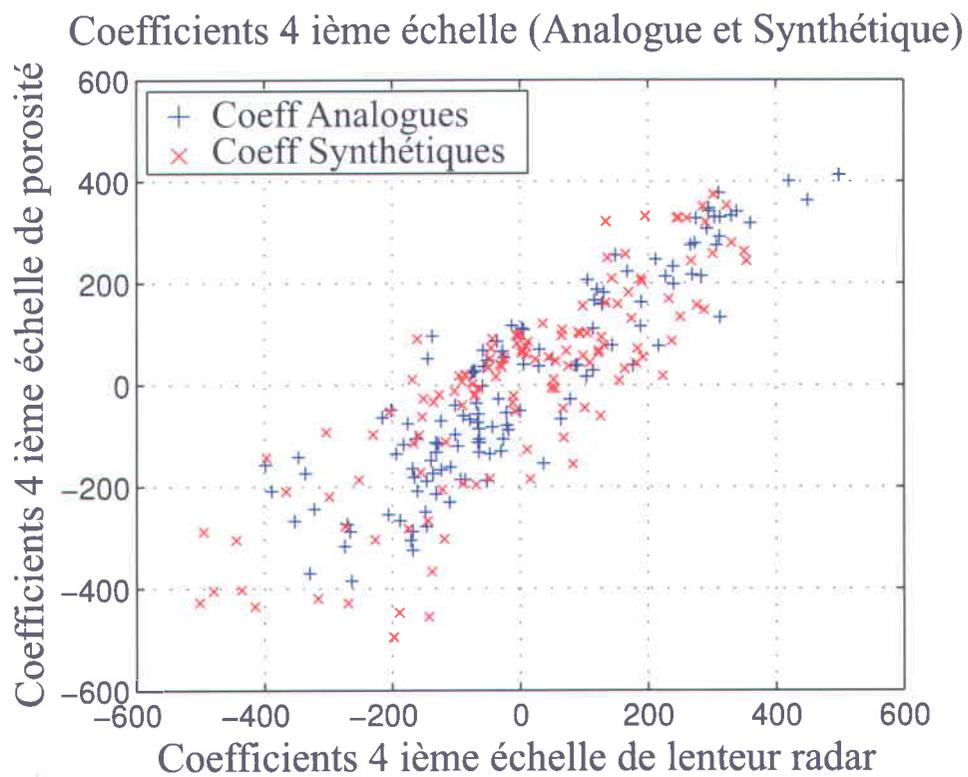


FIGURE 4.5 – Comparaison entre les nuages de points des coefficients de quatrième échelle des modèles hydrogéologiques analogues et synthétiques.

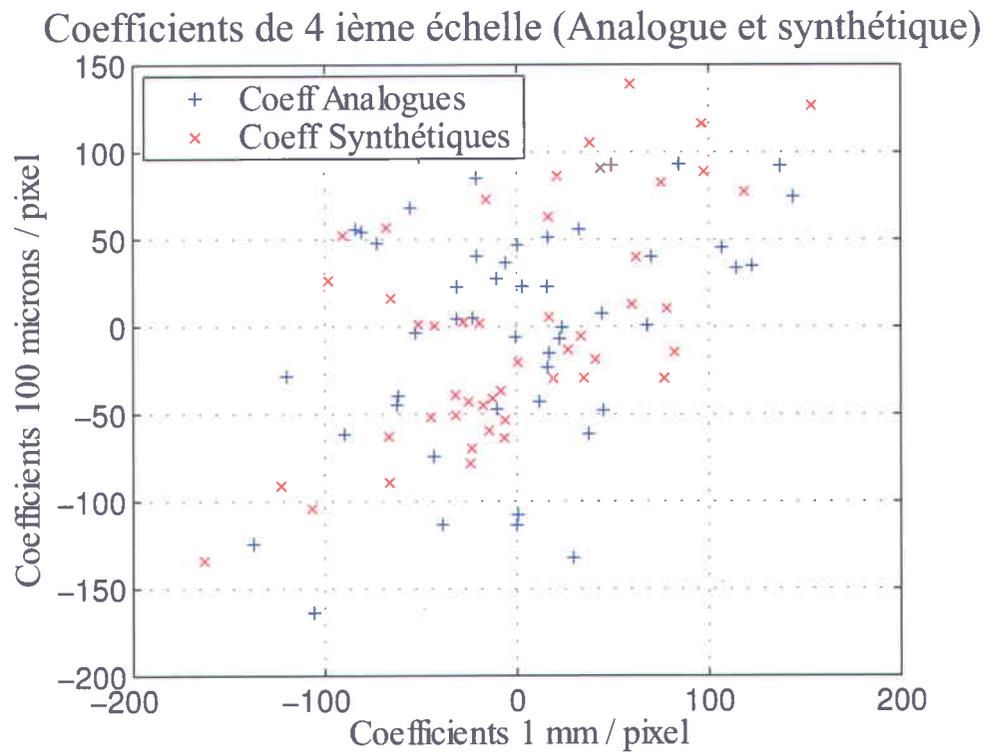


FIGURE 4.6 – Comparaison entre les nuages de points des coefficients de quatrième échelle des modèles biomédicaux analogues et synthétiques.

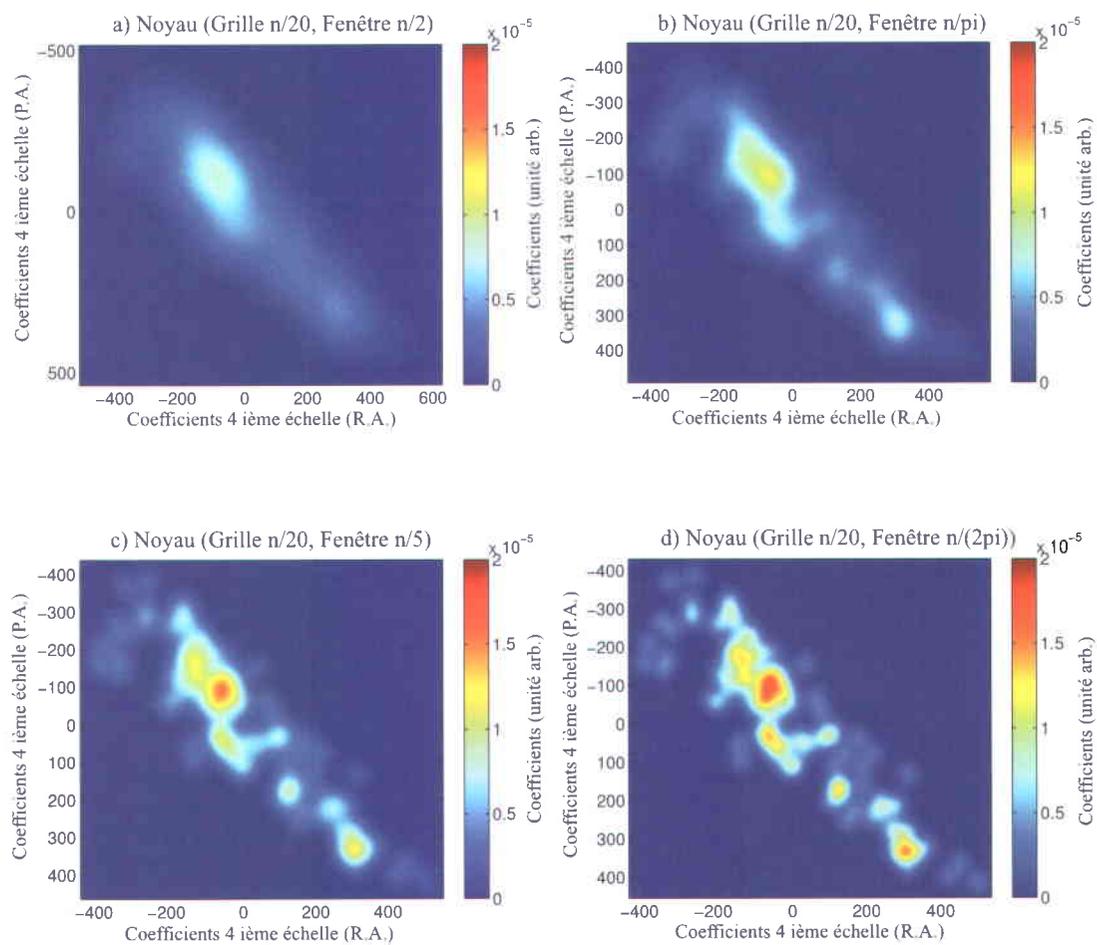


FIGURE 4.7 – Noyaux d’interpolation des coefficients de quatrième échelle du modèle analogue pour différentes fenêtres d’interpolation h_f . a) $h_f = n/2$. b) $h_f = n/\pi$. c) $h_f = n/5$. d) $h_f = n/(2\pi)$. n est le nombre de points, ici 8 fois 12 points. P.A. est l’acronyme de modèle de porosité analogue et R.A., de modèle analogue de tomographie radar entre forage.

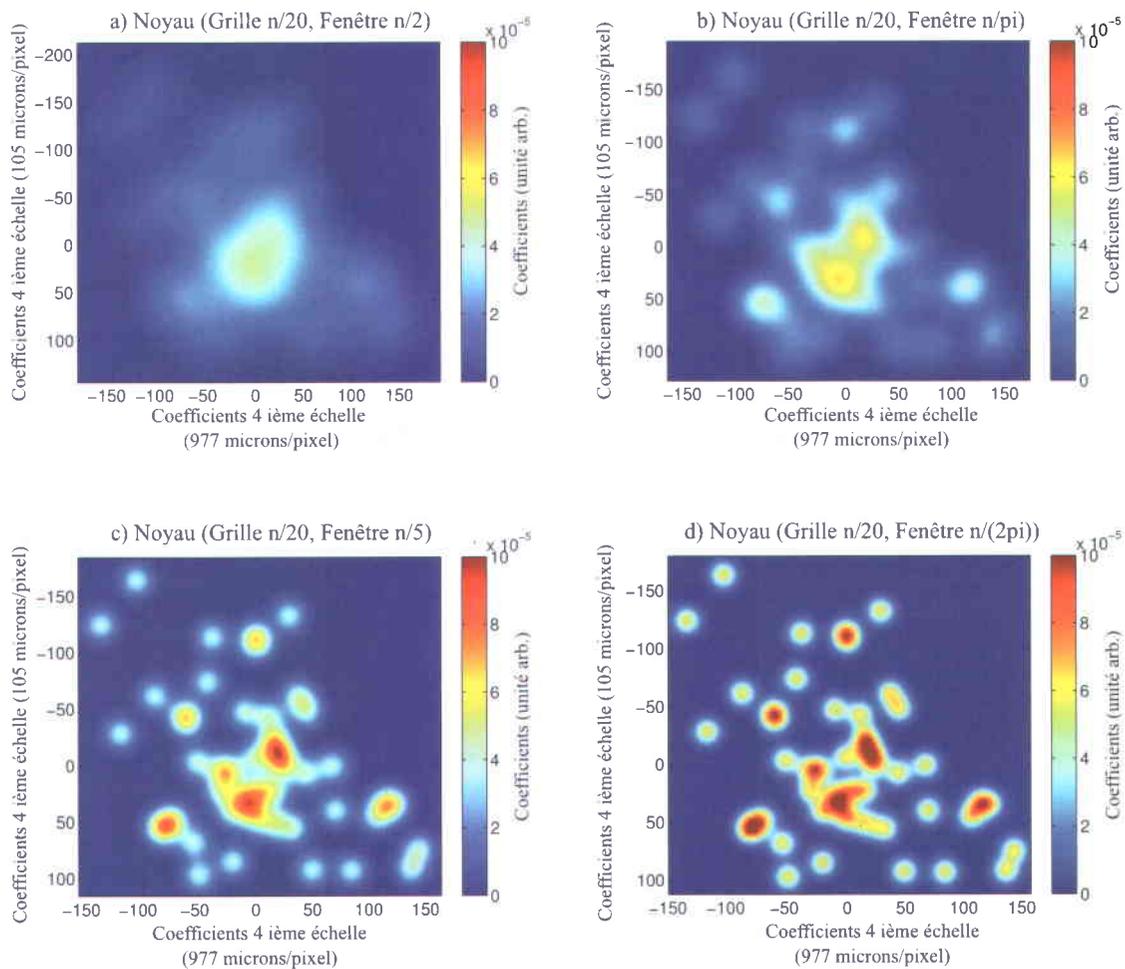


FIGURE 4.8 – Noyaux d’interpolation des coefficients du modèle analogue biomédical à différentes fenêtres d’interpolation. a) Pour $h_f = n/2$. b) Pour $h_f = n/\pi$. c) Pour $h_f = n/5$. d) Pour $h_f = n/(2\pi)$. n est le nombre de points, ici 8 fois 16 points.

Enfin, la figure 4.9 schématise un exemple d'extraction d'une distribution de *vraisemblance* pour un coefficient d'approximation du modèle géophysique synthétique. Il en est de même pour les coefficients du modèle biomédical. En somme, chaque coefficient d'approximation est comparé à l'abscisse du noyau d'interpolation (fig. 4.9 c)). La « tranche » verticale du noyau d'interpolation correspondante (fig. 4.9 a)) devient la distribution de *vraisemblance* (fig. 4.9 b)).

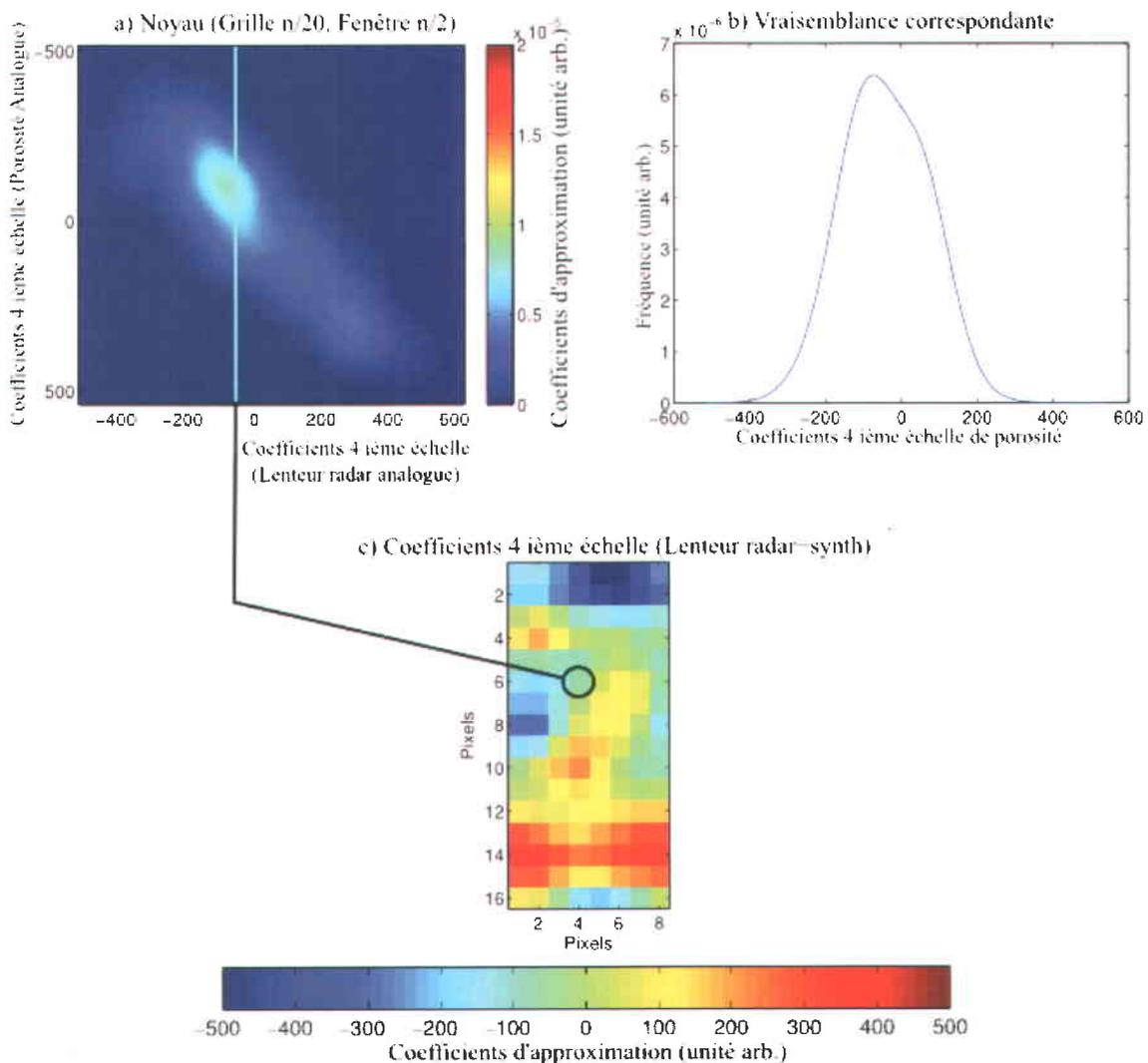


FIGURE 4.9 – Sélection d'une distribution de *vraisemblance*. a) Noyau d'interpolation de la fig. 4.7 a). b) Distribution de *vraisemblance* correspondante à la valeur de c), le coefficient de tomographie synthétique (cercle noir) qui est rapporté sur l'axe des coefficients de tomographie analogue.

4.2.2 Distribution *a priori*

Afin de construire la distribution *a priori*, la variabilité spatiale des coefficients d'approximation du modèle géophysique (ou macroscopique biomédical) doit être étudiée. Pour ce faire, et tel qu'établi à la section 3.2.2.2, les semi-variogrammes expérimentaux verticaux et horizontaux sont évalués à l'aide des codes Matlab développés dans le cadre des travaux de Wade *et al.* (2001). Ensuite, l'anisotropie est étudiée pour tous les modèles. La figure 4.10 présente les semi-variogrammes expérimentaux et théorique des coefficients d'approximation du modèle géophysique. La figure 4.11 présente les semi-variogrammes expérimentaux et théoriques du modèle macroscopique biomédical.

Pour ce qui est des coefficients d'approximation du modèle hydrogéologique, l'anisotropie est à la fois géométrique et zonale puisque le seuil ainsi que le portée varient que l'on évalue le semi-variogramme à la verticale ou l'horizontale (voir fig. 4.10). Suivant la démarche présentée à la section A.6.2, un modèle régional est construit de sortes que,

$$g(\mathbf{h}) = g_1(\mathbf{h}'_{\text{geo}}) + g_2(\mathbf{h}'_{\text{zon}}), \quad (4.1)$$

où $g_1(\mathbf{h}'_{\text{geo}})$ est un modèle sphérique de portée $a_1 = 4$,

$$g_1(\mathbf{h}'_{\text{geo}}) = 1,5 \times 10^4 \times \begin{cases} \frac{3\mathbf{h}'_{\text{geo}}}{2a_1} - \frac{\mathbf{h}'_{\text{geo}}^3}{2a_1^3}, & \text{si } |\mathbf{h}'_{\text{geo}}| \leq a_1, \\ 1, & \text{autrement,} \end{cases} \quad (4.2)$$

et où $g_2(\mathbf{h}'_{\text{zon}})$ est un modèle gaussien,

$$g_2(\mathbf{h}'_{\text{zon}}) = 2,5 \times 10^4 \left(1 - e^{-3\mathbf{h}'_{\text{zon}}^2/a_2^2}\right), \quad (4.3)$$

dont la portée $a_2 = 3$.

Pour ce qui est des coefficients d'approximation du modèle biomédical, l'étude révèle que le modèle est isotropique et qu'il doit être représenté par un modèle théorique sphérique écrit tel que,

$$\gamma(h) = \begin{cases} 7000 \left(\frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3} \right) & , \text{ si } h \leq a, \\ 7000 & , \text{ autrement.} \end{cases} \quad (4.4)$$

où la portée a est de 6,5 pixels.

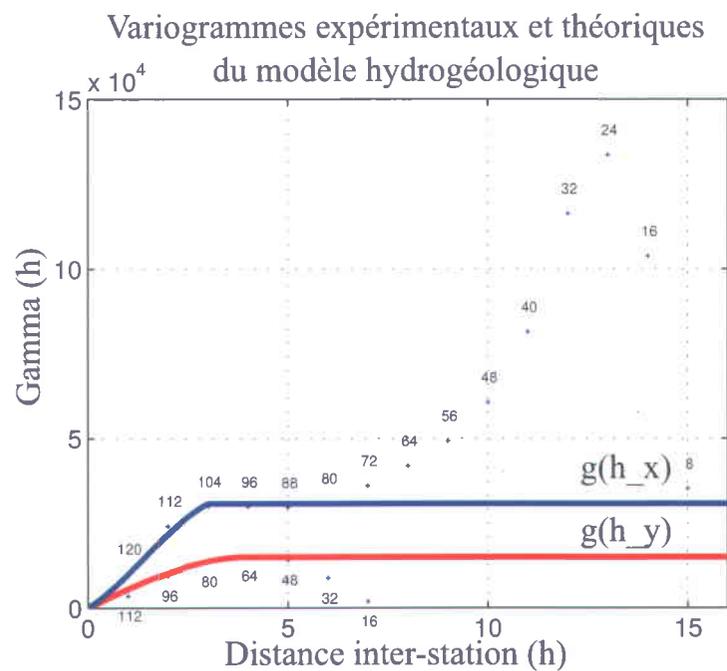


FIGURE 4.10 – Semi-variogrammes expérimentaux (points bleus) et théoriques (courbes) des coefficients d'approximation du modèle géophysique synthétique. La courbe en bleue est le modèle théorique vertical, en rouge le modèle horizontal. h est la distance inter-station et est en pixel. Le nombre à côté de chaque points bleus est le nombre de couples de points pris en compte pour chaque distance inter-station.

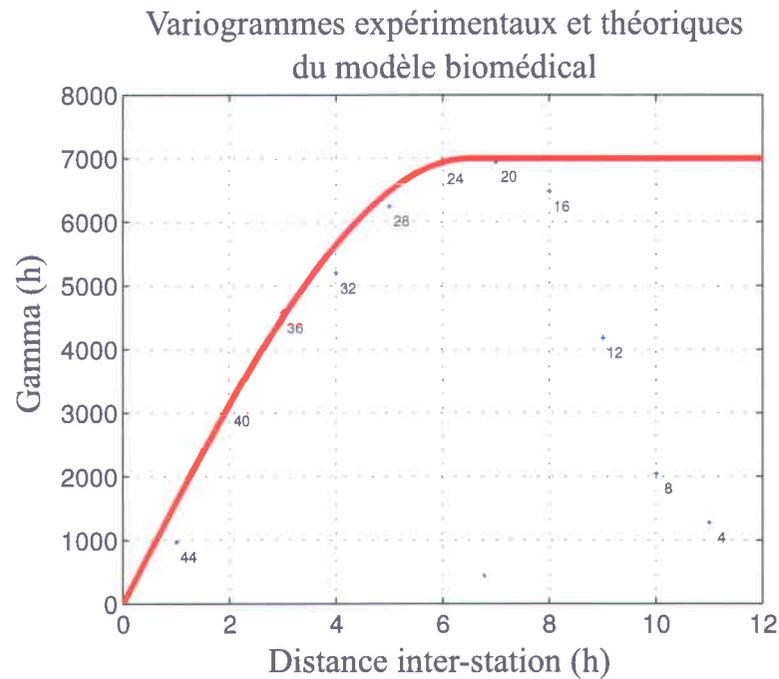


FIGURE 4.11 – Semi-variogrammes expérimentaux (points bleus) et théoriques (courbe rouge) des coefficients d’approximation du modèle de tomodensitométrie macroscopique synthétique. h est la distance inter-station et est en pixel. Le nombre à côté de chaque points bleus est le nombre de couples de points pris en compte pour chaque distance inter-station.

4.2.3 Distribution *a posteriori*

Afin de construire la distribution *a posteriori*, il ne suffit que de multiplier les distributions de *vraisemblance* et *a priori* précédemment construites. La figure 4.12 a) montre un exemple de distribution *a posteriori*. Celle dernière est obtenue pour chaque coefficient d'approximation du modèle de porosité synthétique à simuler. Cette distribution est ensuite cumulée à l'aide de l'éq. (A.31). Un nombre aléatoire est tiré d'une normale (0,1) et projeté sur l'ordonnée de la fonction de répartition et la valeur en abscisse correspondante à la valeur aléatoire tirée devient la valeur simulée du coefficient d'approximation. Cette opération est répétée pour chaque coefficients d'approximation à simuler.

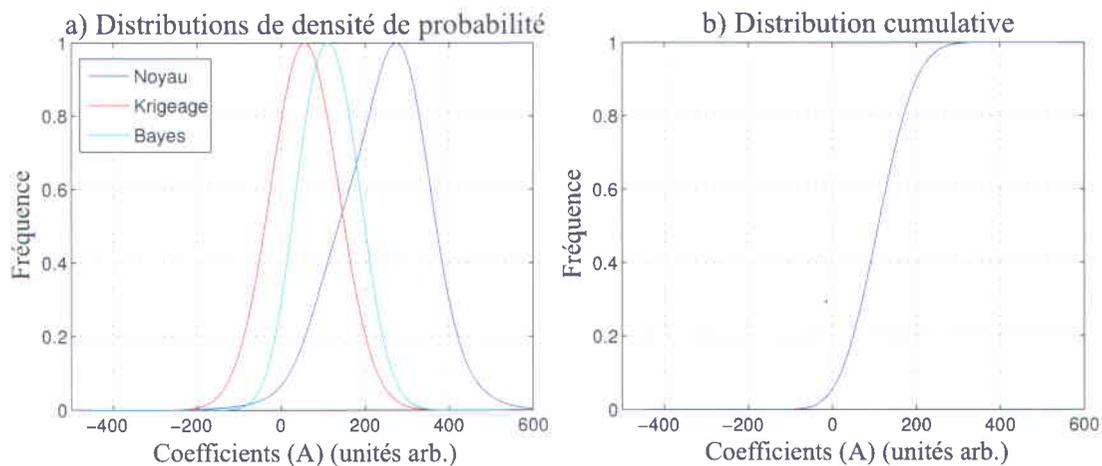


FIGURE 4.12 – Distribution *a posteriori*. a) Les distributions de *vraisemblance* (Noyau), *a priori* (Krigeage) et *a posteriori* (Bayes). À l’affichage, ces courbes sont divisées par leur valeur maximale pour que cette dernière soit un. b) Distribution cummulative (fonction de répartition) *a posteriori*.

Les figures 4.13 et 4.14 présentent quatre exemples de réalisation de coefficients d'approximation de porosité synthétique ; la première figure pour le modèle hydrogéologique et la seconde figure pour le modèle biomédical.

Pour le cas hydrogéologique, il est possible de constater sur la figure 4.13 que de manière générale, l'approche de simulation séquentielle bayésienne reproduit les structures de larges échelles du modèle cible (fig. 4.13 e)). En moyenne, la corrélation entre chacune des 100 domaines simulés et la cible des simulations est de 0,7381. De plus, la corrélation entre la moyenne des 100 simulations (fig. 4.13 f)) et la cible est de 0,8035. Ainsi la corrélation avec la cible est plus forte avec une simulation moyenne, qu'en moyenne sur plusieurs simulations. Ce phénomène est dû au resserrement autour de la moyenne des distributions bayésiennes, provoqué par l'accumulation d'échantillons dans le calcul de la moyenne.

Pour le cas biomédical dont la cible des simulations est affichée à la figure 3.3 c), l'on s'attend à retrouver une première zone à gauche de l'image dont le contraste est élevé, ainsi qu'une seconde zone de plus faible contraste à droite de l'image. Ces structures de larges échelles semblent être présentes sur l'ensemble des réalisations de la figure 4.14.

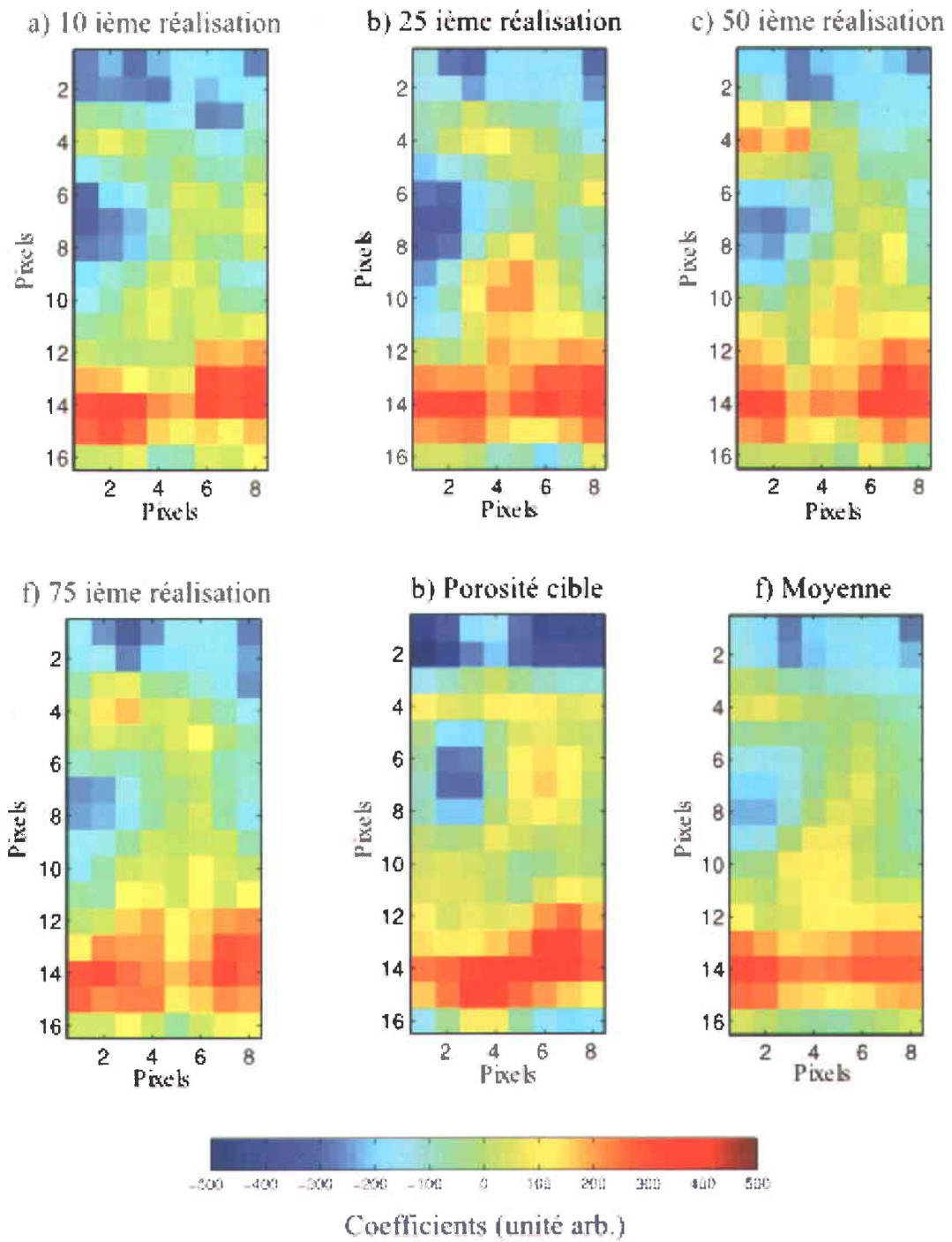


FIGURE 4.13 – Simulations des coefficients d’approximation de porosité synthétique. a) Dixième, b) vingt-cinquième, c) cinquantième et d), soixante-quzième réalisation. e) Coefficients d’approximation du modèle de porosité synthétique cible. f) Moyenne pour 100 simulations.

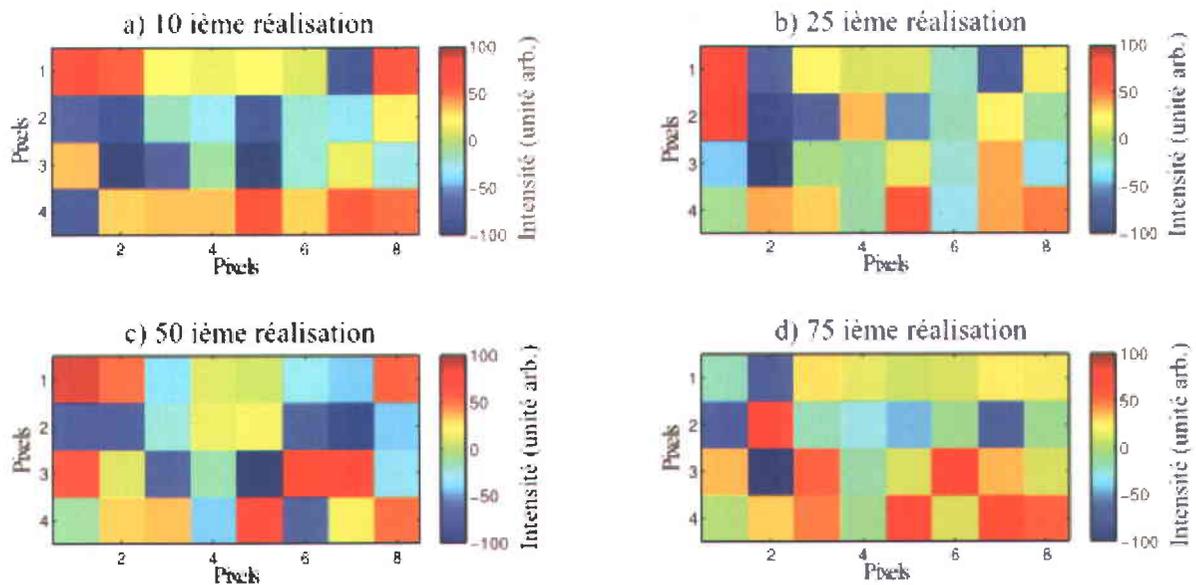


FIGURE 4.14 – Simulations des coefficients d'approximation de porosité osseuse synthétique. a) Dixième, b) vingt-cinquième, c) cinquantième et d), soixante-quinzième réalisation.

4.3 Synthèse des textures visuelles

La présente section expose les simulations de porosité synthétique pour les modèles hydrogéologiques et biomédicaux. Pour chacune des études de cas, 100 modèles de porosité synthétiques sont réalisés à l'aide de l'algorithme de Portilla & Simoncelli (2000). La figure 4.15 présente quatre exemples de réalisations hydrogéologiques.

La figure 4.16 présente quatre exemples de réalisation biomédicales. Les réalisations du modèle de porosité synthétique hydrogéologique ont été obtenues en y incorporant les données conditionnantes de forages (voir fig. 4.15). De manière générale, il semble que les réalisations présentées à la figure 4.15 tendent à reproduire le modèle de porosité du modèle analogue, en lui donnant les structures de larges échelles du modèle de porosité synthétique. Quant au modèle biomédical, il semble que les structures de larges échelles soient peu représentées (voir fig. 4.16), alors que les textures simulées sont si-

milaires au modèle synthétique. Nous expliquons mal ce phénomène ; les structures de larges échelles semblaient reproduites à la figure 4.14. Seul l'algorithme de Portilla & Simoncelli (2000) pouvant en être la cause, il est possible que la définition de la quatrième échelle soit trop grossière.

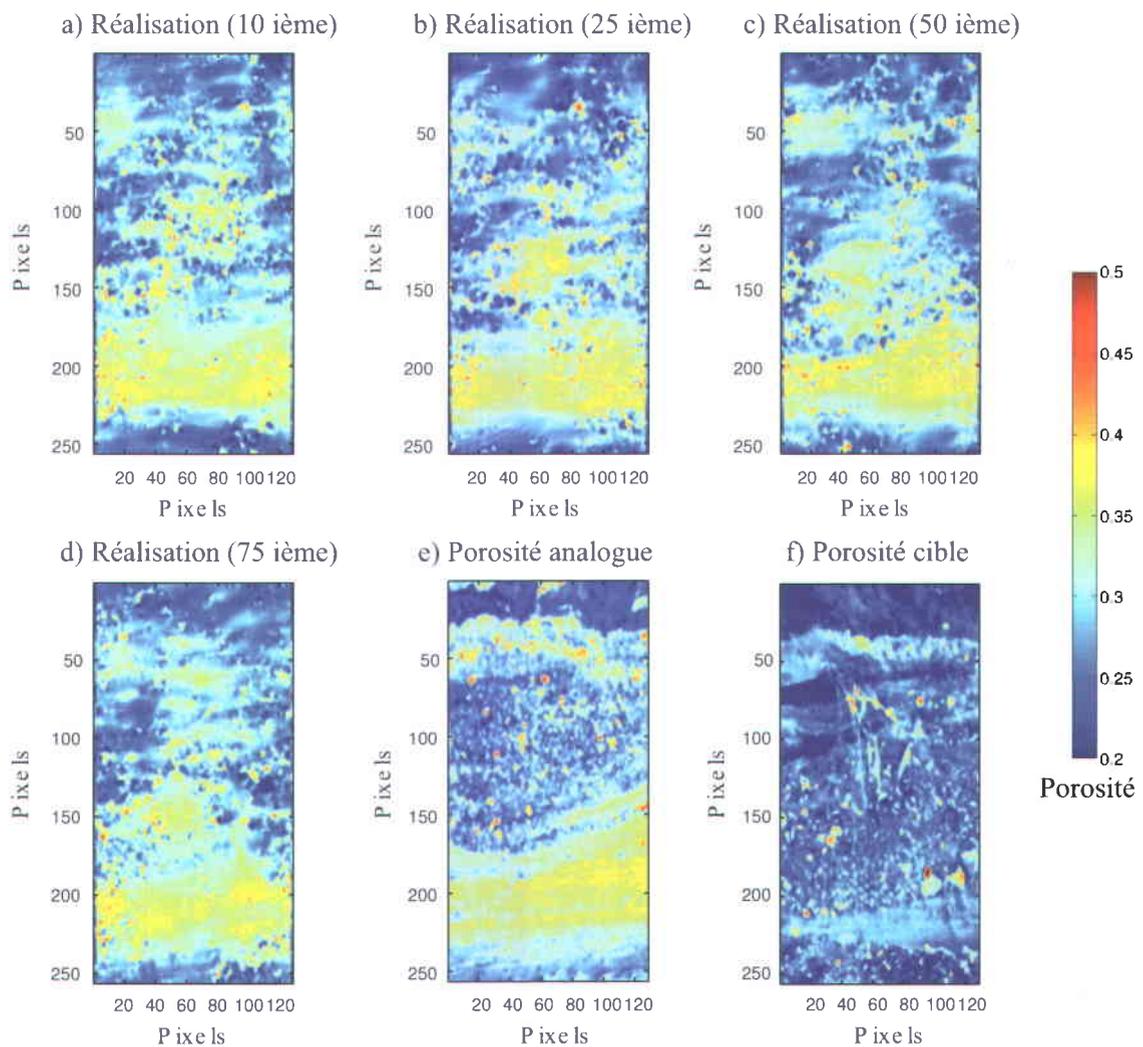


FIGURE 4.15 – Simulations de champs de porosité du modèle synthétique. a) Dixième, b) vingt-cinquième, c) cinquantième et d), soixante-quatrième réalisation. e) Porosité du modèle analogue. f) Porosité du modèle synthétique cible.

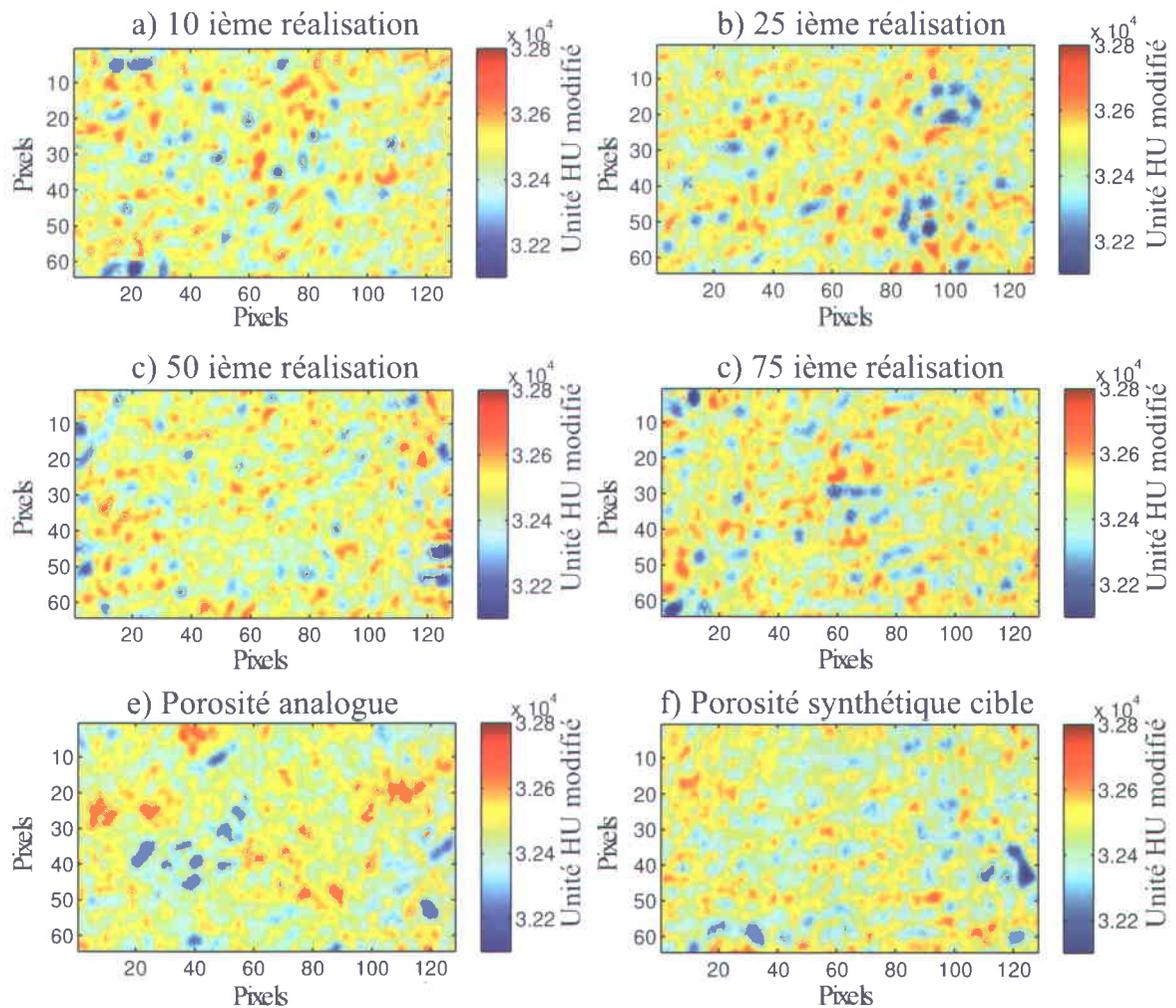


FIGURE 4.16 – Simulations de la porosité osseuse synthétique. a) Dixième, b) vingt-cinquième, c) cinquantième et d), soixante-quinzième réalisation. e) Porosité du modèle analogue. f) Porosité du modèle synthétique cible.

4.4 Métriques de validation

La présente section présente les résultats obtenus à l'aide des différentes métriques de validation choisies. En premier lieu, la corrélation pixel-à-pixel est évaluée pour le modèle hydrogéologique. En second lieu, les simulations des modèles hydrogéologiques et biomédicales sont caractérisées à partir de leur histogrammes respectifs. En troisième lieu, des cartes présentant les statistiques de 100 réalisations sont présentées. Quatrièmement, les cartes de différence sont produites entre les réalisations et leur cible de simulation. Finalement, l'analyse morphométrique des microstructures osseuses tirée des travaux de Vachon (2010) est présentée.

4.4.1 Corrélation pixel-à-pixel

La corrélation pixel-à-pixel est évaluée pour les modèles hydrogéologiques et biomédicaux entre les images de porosité synthétique réalisées et leur cible de simulation. Cette métrique de validation permet de comparer les résultats obtenus dans le cadre de ce projet avec les résultats des travaux de Gloaguen *et al.* (2010); Dubreuil Boisclair *et al.* (2011), dans le cas du modèle hydrogéologique. La figure 4.17 présente la corrélation entre chacune des 100 réalisations et la cible des simulations pour les modèles hydrogéologiques et biomédicaux.

Dans le cadre des travaux de Gloaguen *et al.* (2010), la corrélation pixel-à-pixel se situe entre 0,6 et 0,7, alors qu'à l'intérieur des travaux de Dubreuil Boisclair *et al.* (2011) la corrélation se situe en moyenne à 0,65. Tel que le présente la figure 4.17 a), la corrélation se situe est en moyenne de 0,32. La corrélation mesurée est donc faible comparativement à ce qui a été fait ailleurs. Nous expliquons ce phénomène du fait que

l'approche proposée dans le cadre de ce projet synthétise les histogrammes du modèle analogue et que par conséquent, la corrélation moyenne des réalisations doit être équivalente à la corrélation mesurée entre les modèles de porosité analogue et synthétique, ce qui est le cas puisqu'elle est égale à 0,33.

Pour le modèle biomédical de la figure 4.17 b), la corrélation moyenne est à toute fin pratique nulle (-0,0063). À nouveau, la corrélation spatiale apparaît être représentative de celle mesurable entre le modèle analogue et le modèle synthétique (0,035).

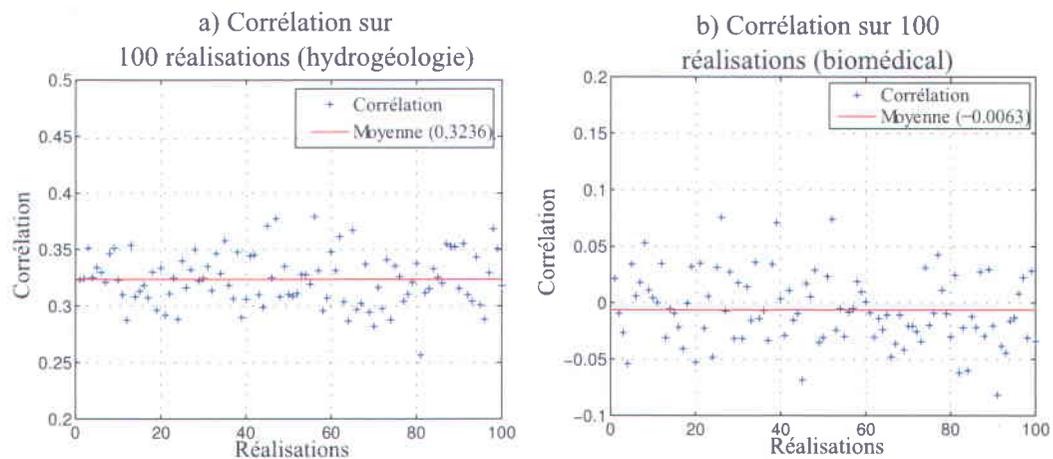


FIGURE 4.17 – Corrélation entre les réalisations de porosité synthétique et leur cible. a) Modèle hydrogéologique. b) Modèle biomédical.

4.4.2 Histogrammes des réalisations

Les histogrammes des quatre réalisations de la figure 4.15 sont présentés à la figure 4.18. Qualitativement, les histogrammes semblent tous posséder un comportement identique, alors qu'ils présentent tous une distribution centrée en 0,3. De plus, les histogrammes des simulations sont clairement représentatifs du modèle de porosité analogue (fig. 4.18 e)), plutôt que du modèle de porosité synthétique (fig. 4.18 f)). Autrement

dit, l'écart de valeur des pixels simulés (0,2 à 0,4) est celui du modèle analogue et non celui du modèle synthétique (0,1 à 0,3), alors qu'il en est de même pour le comportement général des distributions (plateau à 800). Ceci est imputable au fait que l'algorithme impose à la synthèse des textures l'histogramme du modèle analogue et non celui du modèle synthétique. Il en est de même pour les réalisations du modèle biomédical de porosité.

Pour le modèle hydrogéologique, les statistiques des histogrammes de la figure 4.18 sont présentées au tableau 4.2. Tel qu'il est possible de le constater au tableau 4.2, l'ensemble des exemples de réalisations possèdent des caractéristiques statistiques comparables. La moyenne et l'écart-type ne varient pas, l'asymétrie de 0,3 %, et l'aplatissement de 0,1 %. Ainsi, du point de vue de la moyenne, de la variance, de l'asymétrie et de l'aplatissement, les réalisations sont à toute fin pratique les mêmes. De plus, l'ensemble des valeurs statistiques réalisées s'apparentent à celles mesurées pour le modèle de porosité analogue. Ceci est dû au fait que ces dernières sont imposées à la synthèse des textures de porosité. Rappelant qu'entre les modèles de porosité analogue et synthétique, la moyenne varie d'environ 15 %, l'écart-type varie de 61 %, l'asymétrie de 39 % et l'aplatissement de 37 %, il semble impossible pour l'algorithme de diverger de manière à atteindre la cible. En effet, moyenne des réalisations varie de 17 % d'avec la cible, l'écart-type de 12 % et l'asymétrie et l'aplatissement de 33 %.

Pour le modèle biomédical, les statistiques des histogrammes de la figure 4.19 sont présentées au tableau 4.3. L'ensemble des exemples de réalisations possèdent des caractéristiques statistiques similaires. La moyenne ne varie pas, l'écart-type de 0,05 %, l'asymétrie de 0,06 % et l'aplatissement de 0,93 %. De plus, les valeurs des paramètres statistiques réalisés varient peu du modèle de porosité analogue, à l'exception de l'asymétrie. En effet, la moyenne varie de 0,02 % et en moyenne, la variance, l'asymétrie et l'aplatissement varient de 0,03 %, 226 % et 2 %, respectivement. Rappelant qu'entre les

modèles de porosité analogue et synthétique la moyenne varie de 0,02 %, l'écart-type de 4,60 %, l'asymétrie de 46,40 % et l'aplatissement de 8,00 % et qu'ils sont donc similaires, les réalisations s'approchent mieux dans cas-ci de leur cible. Ainsi l'écart entre la moyenne des réalisations et la cible est de 0,04 % et en moyenne, l'écart-type, l'asymétrie et l'aplatissement réalisées s'écartent respectivement de 7, 21 et 6 % de leur cible.

Statistiques sur les histogrammes de certaines réalisations				
Réalisations	Moyenne	Écart-type	Asymétrie	Aplatissement
10 ième	0,2966	0,0424	0,001095	0,004673
25 ième	0,2966	0,0424	0,001093	0,004669
50 ième	0,2966	0,0424	0,001092	0,004668
75 ième	0,2966	0,0424	0,001094	0,004669
Forages	0,3039	0,0453	0,0021	0,0930
Cible (Porosité synthétique)	0,2526	0,0378	0,0033	0,0070
Porosité analogue	0,2979	0,0417	0,0013	0,0044

Tableau 4.2 – Statistiques sur les histogrammes des réalisations du modèle hydrogéologique.

Statistiques sur les histogrammes de certaines réalisations				
Réalisations	Moyenne (HU mod.)	Écart-type	Asymétrie	Applatissement
10 ième	32 460	87,2225	-288,6548	26 781
25 ième	32 460	87,2225	-288,6765	26 780
50 ième	32 460	87,2262	-288,4743	24 826
75 ième	32 460	87,2219	-288,5679	24 778
Cible	32 448	81,2497	-237,9902	24 401
Porosité analogue	32 455	85,0263	-127,5584	26 351

Tableau 4.3 – Statistiques sur les histogrammes des réalisations biomédicales.

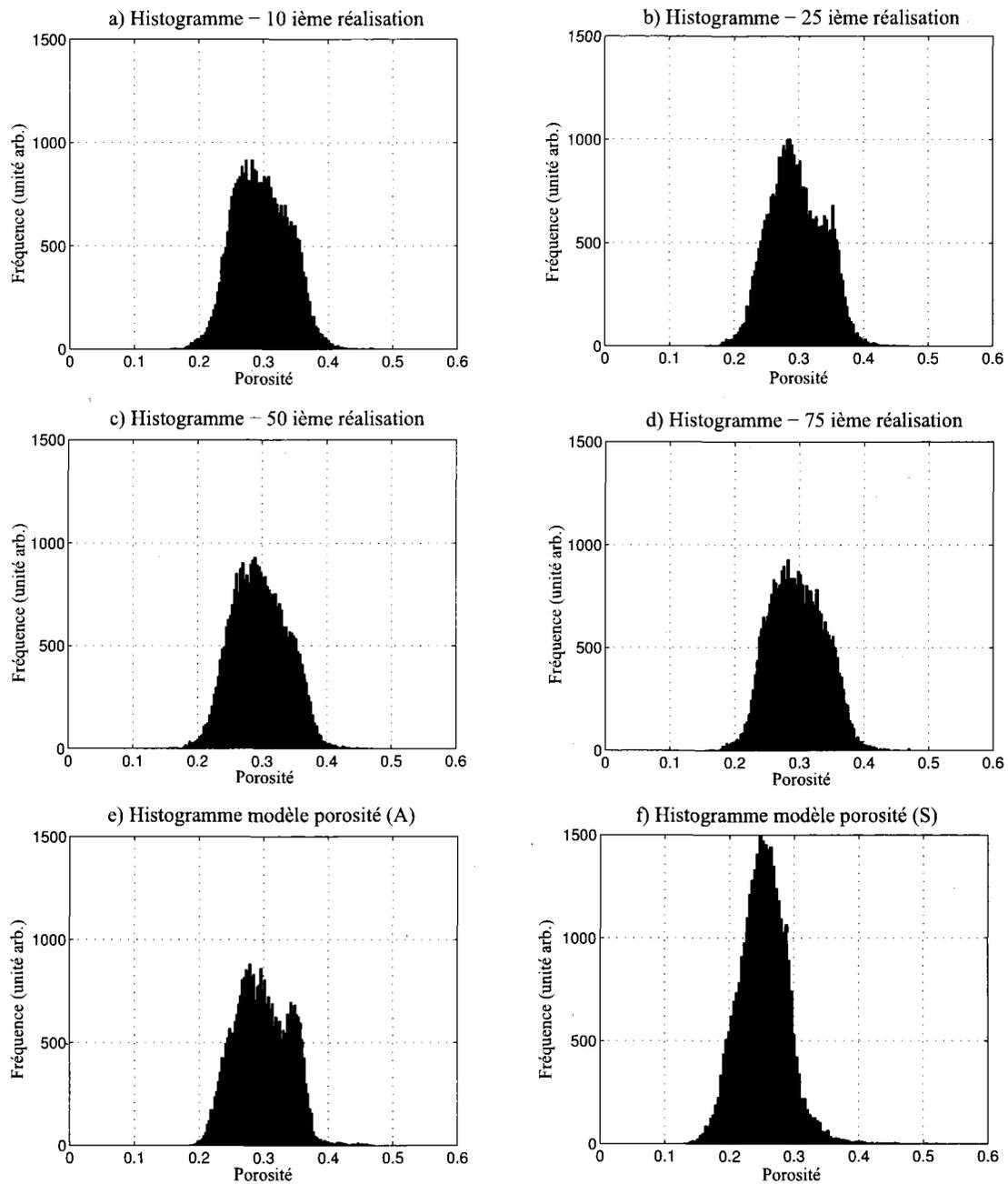


FIGURE 4.18 – Histogrammes des réalisations de porosité hydrogéologique. a) Dixième, b) vingt-cinquième, c) cinquantième et d), soixante-quinzième réalisation. e) Histogramme du modèle analogue (A) de porosité. f) Histogrammes du modèle synthétique (S) de porosité.

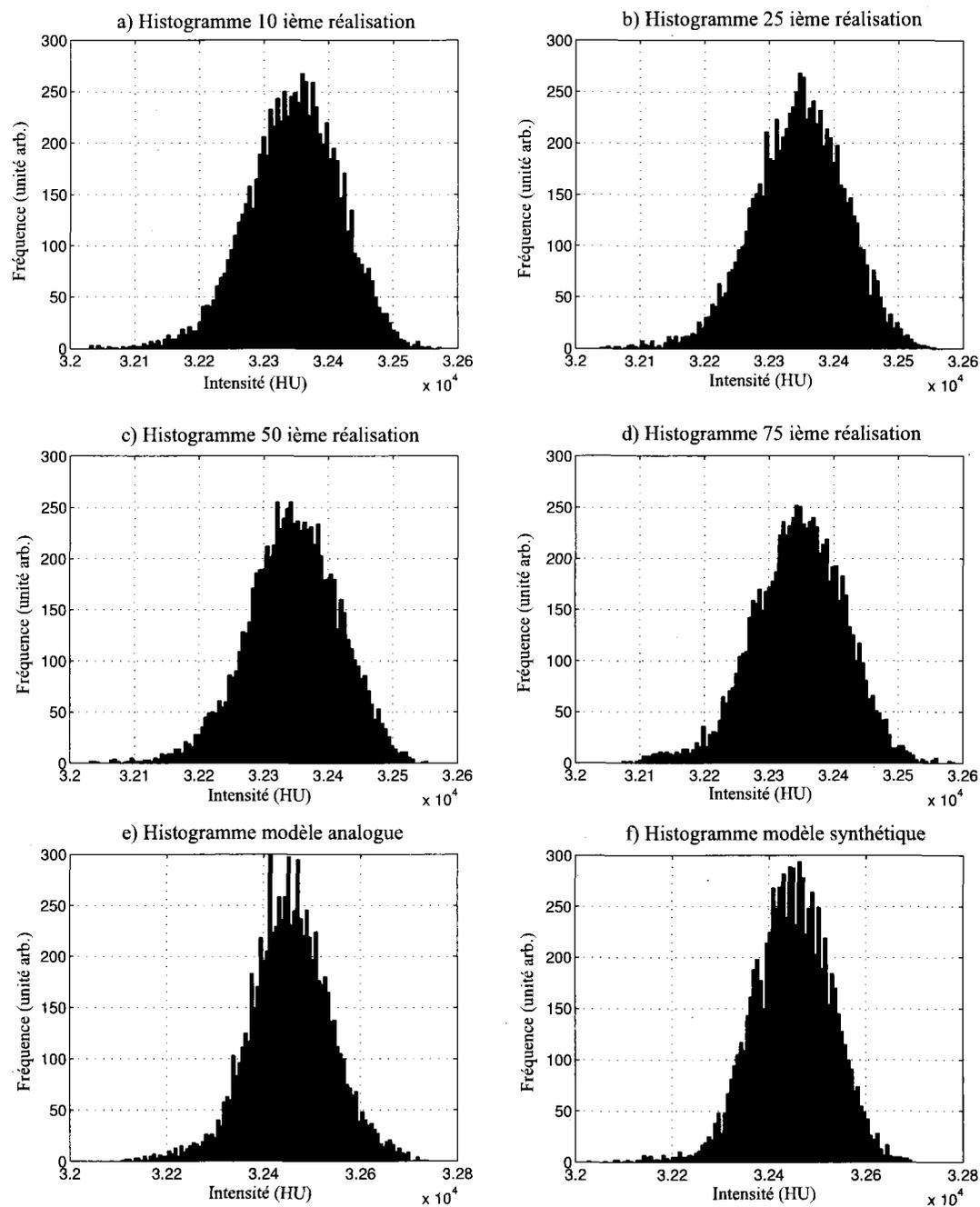


FIGURE 4.19 – Histogramme des réalisations de porosité biomédicale. a) Dixième, b) vingt-cinquième, c) cinquantième et d), soixante-quinzième réalisation. e) Histogramme du modèle analogue de porosité. f) Histogramme du modèle synthétique de porosité. L'intensité est présentée en unité HU étendue.

4.4.3 Cartes statistiques

La moyenne, la variance, l'asymétrie et l'aplatissement sont évaluées pour chacun des pixels sur les 100 réalisations des modèles de porosité synthétique. Les cartes des statistiques résultantes pour le modèle hydrogéologique sont présentées à la figure 4.20 et à la figure 4.21 pour le modèle biomédical.

Tel que le montre la figure 4.20 c), la moyenne des réalisations s'apparente à la tomographie radar entre forages du modèle synthétique (fig. 3.1 d)). La moyenne des simulations redonne donc les structures de larges échelles obtenues par simulation séquentielle bayésienne. Aussi, la figure 4.20 d) montre que la variance est plus élevée ($\sim 2 \times 10^{-3}$) dans la zone du domaine qui correspond à la zone encerclée à la figure 3.1 b) et d). Nous rappelons que cette zone est représentée par des textures de courtes échelles sur le modèle de porosité synthétique cible qui ne sont aucunement présentes sur le modèle de porosité analogue. Pour ce qui est de l'asymétrie et de l'aplatissement aux figures 4.20 e) et f), elles sont moins élevées à l'intérieur de la zone encerclée. En somme, les structures de larges échelles du modèle analogue de tomographie radar ressortent sur toutes les images de la figure 4.20 alors que les structures de courtes échelles semblent être de manière générale, moins bien représentées.

Il en va tout autrement pour le modèle biomédical présenté à la figure 4.21. En effet, la moyenne des réalisations (fig. 4.21) ne semble par représenter les structures de larges échelles du modèle biomédical macroscopique (fig. 3.3 c)), alors que la variance, l'asymétrie et l'aplatissement (fig. 3.3 d), e) et f), respectivement) sont distribués avec une certaine homogénéité sur tout le domaine.

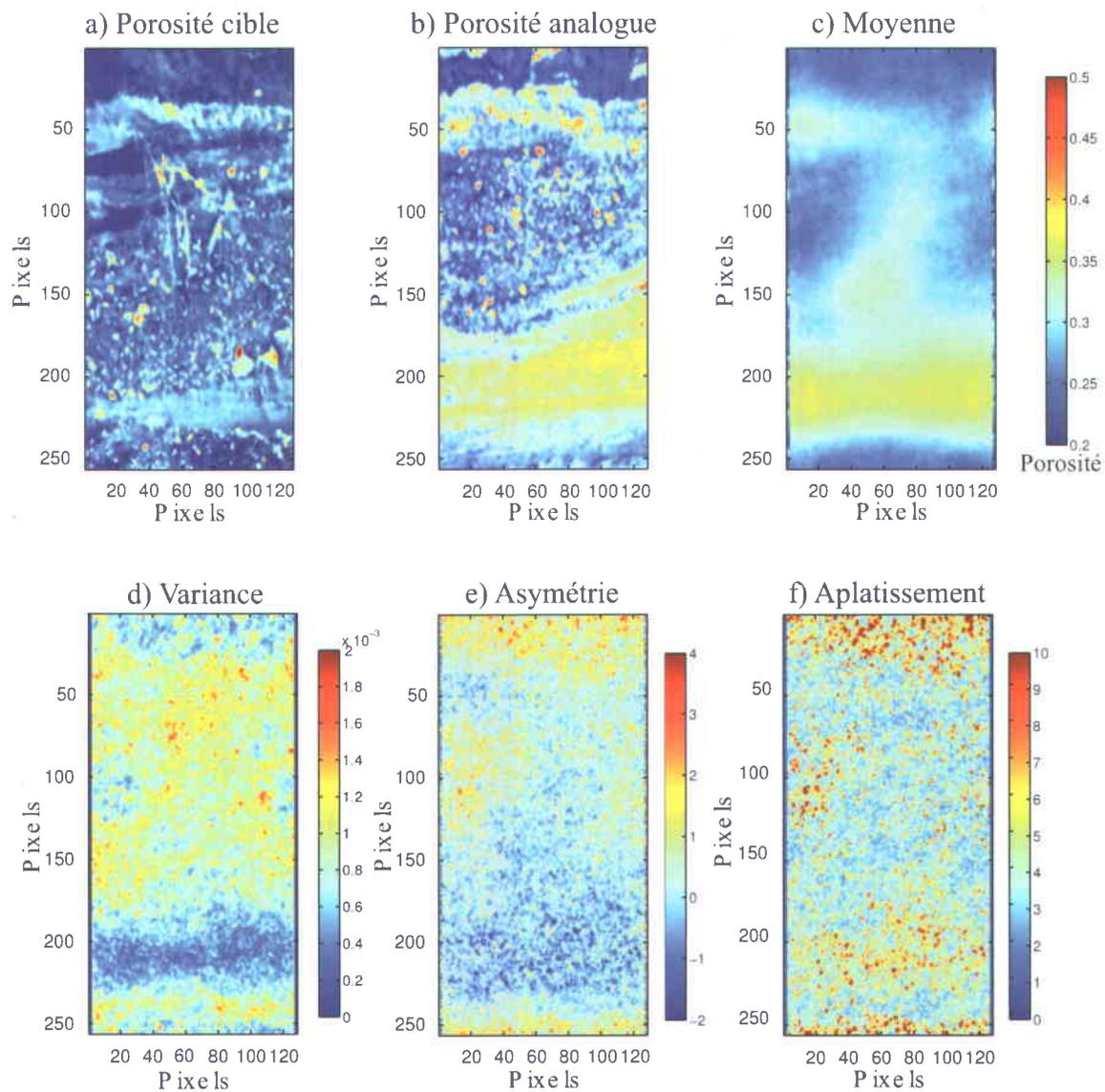


FIGURE 4.20 – Cartes statistiques des réalisations du modèle de porosité synthétique hydrogéologique. a) Modèle de porosité analogue. b) Modèle de porosité synthétique cible. c) Moyenne, d) variance, e) asymétrie et f) aplatissement de 100 réalisations.

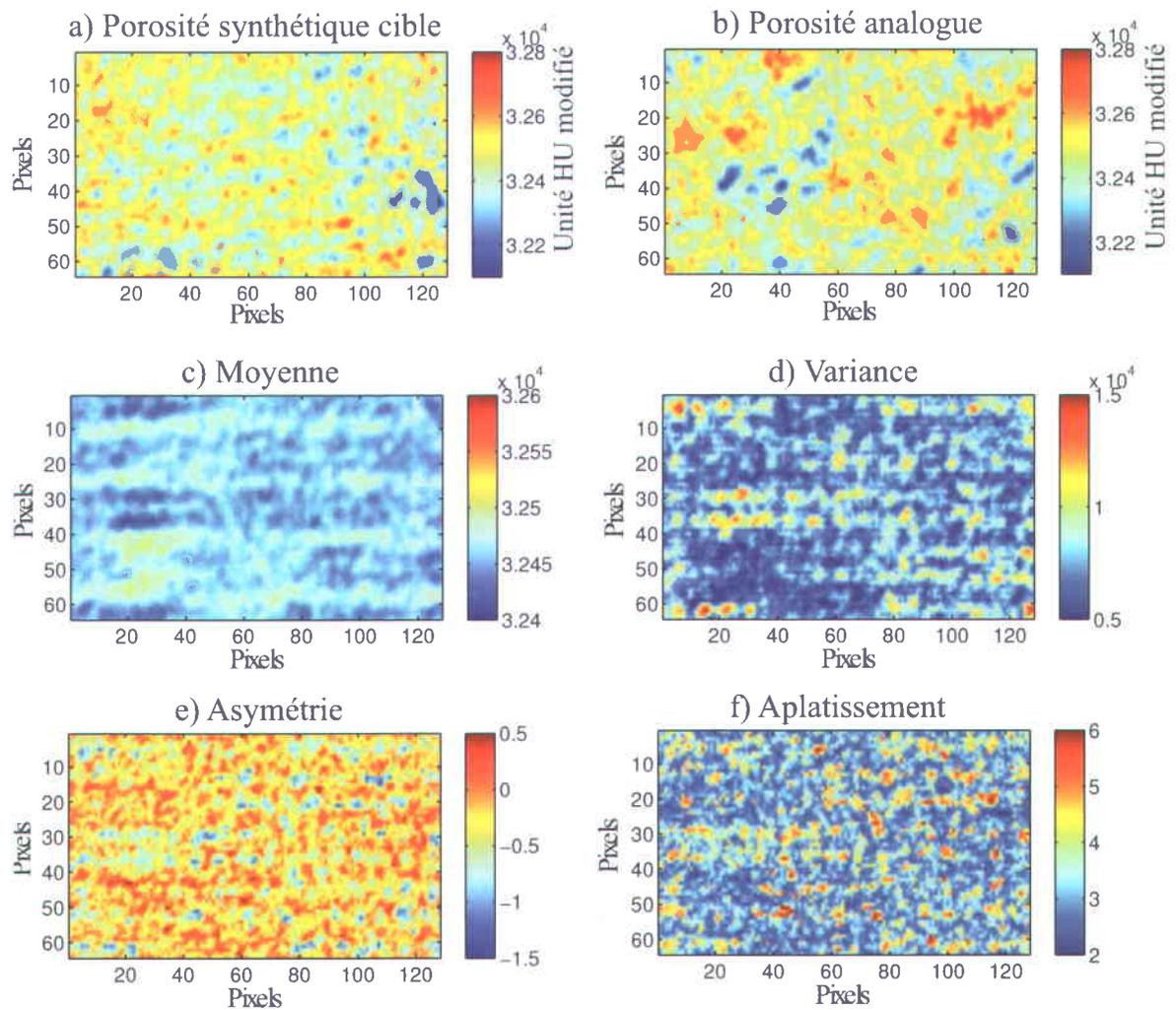


FIGURE 4.21 – Cartes statistiques des réalisations du modèle de porosité biomédical. a) Modèle de porosité analogue. b) Modèle de porosité synthétique cible. c) Moyenne, d) variance, e) asymétrie et f) aplatissement de 100 réalisations.

4.4.4 Cartes de différences

Les cartes de différence sont obtenues en soustrayant le modèle de porosité synthétique aux réalisations de porosité. Ces cartes permettent de visualiser l'écart entre les simulations et leur cible. La figure 4.22 expose les cartes de différence de quatre exemples de simulation pour le modèle de porosité hydrogéologique. La figure 4.23 présente quant à elle les cartes de différences de quatre exemples de simulation pour le modèle biomédical de porosité. Finalement, les histogrammes des cartes de différence sont fournis à la figure 4.24.

Tel qu'il est possible de le constater sur la figure 4.22, l'écart maximal sur le domaine de simulation ($\pm 0,25$) se situe au centre des réalisations de porosité synthétique. Cette localisation semble correspondre aux textures du modèle synthétique qui sont inconnues du modèle de porosité analogue. L'histogramme des cartes de différence du modèle hydrogéologique est présenté à la figure 4.24 a). Il est possible d'y constater que la moyenne est non nulle ($-0,05$). Ceci est dû au fait que la dénormalisation des images synthétisées s'effectue en tenant compte de la moyenne et de la variance du modèle analogue et non du modèle synthétique. Rappelant qu'au tableau 3.1 il existe une différence d'environ 0,05 entre les modèles analogues et synthétiques, cet écart se retrouve aussi dans les réalisations synthétiques. Pour ce qui est du pic central présent à la figure 4.24, il est imputable aux valeurs conditionnelles en forage qui ont été dénormalisées par leur valeur moyenne ainsi que la variance de leur distribution.

Pour ce qui est du modèle biomédical de porosité, les cartes de différence à la figure 4.22 présentent des structures relativement homogènes. Tel que l'indique l'histogramme de la figure 4.24 b), la moyenne est nulle, de la même manière que la différence entre la moyenne du modèle analogue et du modèle synthétique (voir tableau 3.3).

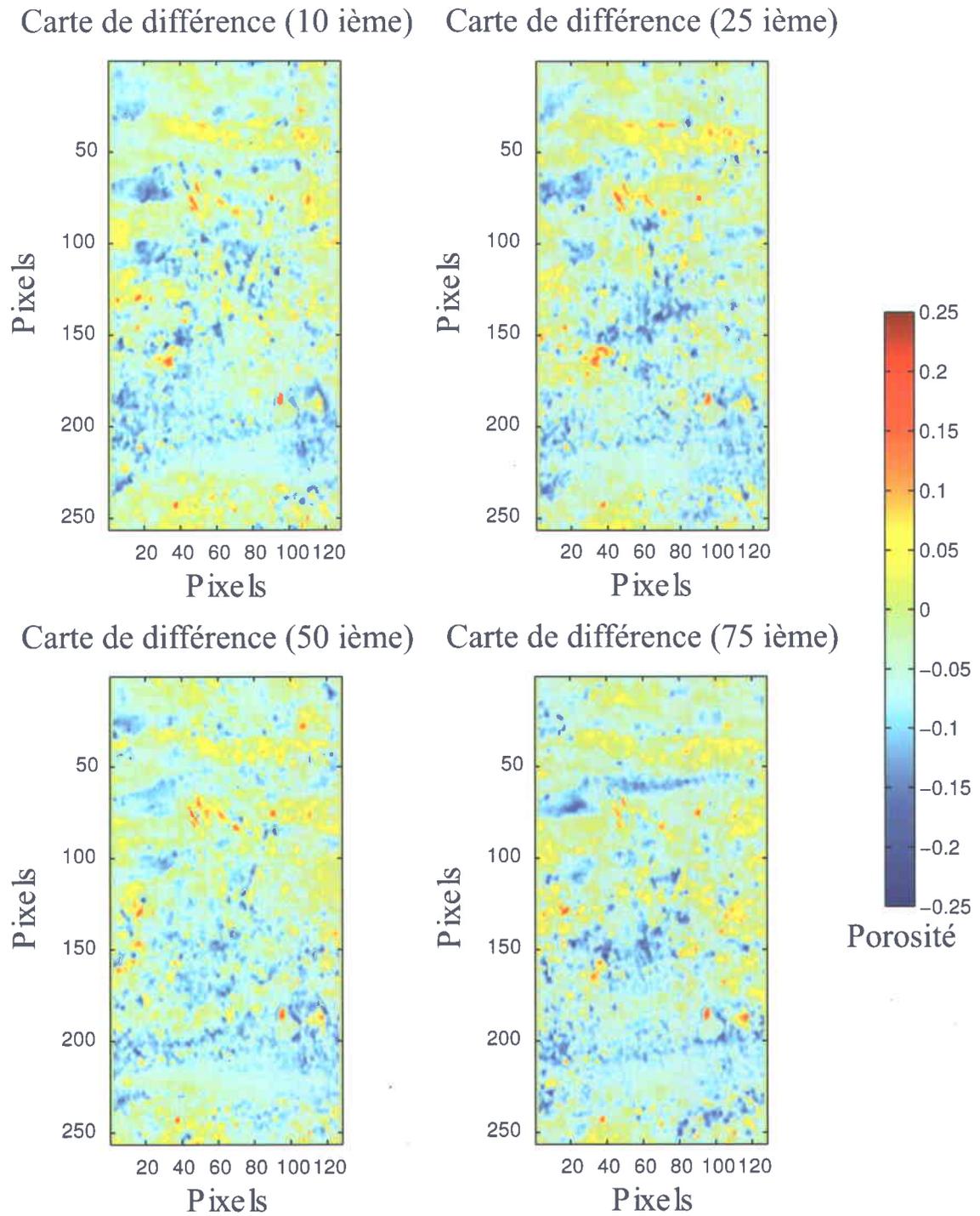


FIGURE 4.22 – Cartes de différence du modèle hydrogéologique. a) Dixième, b) vingt-cinquième, c) cinquantième et d), soixante-quinzième réalisation.

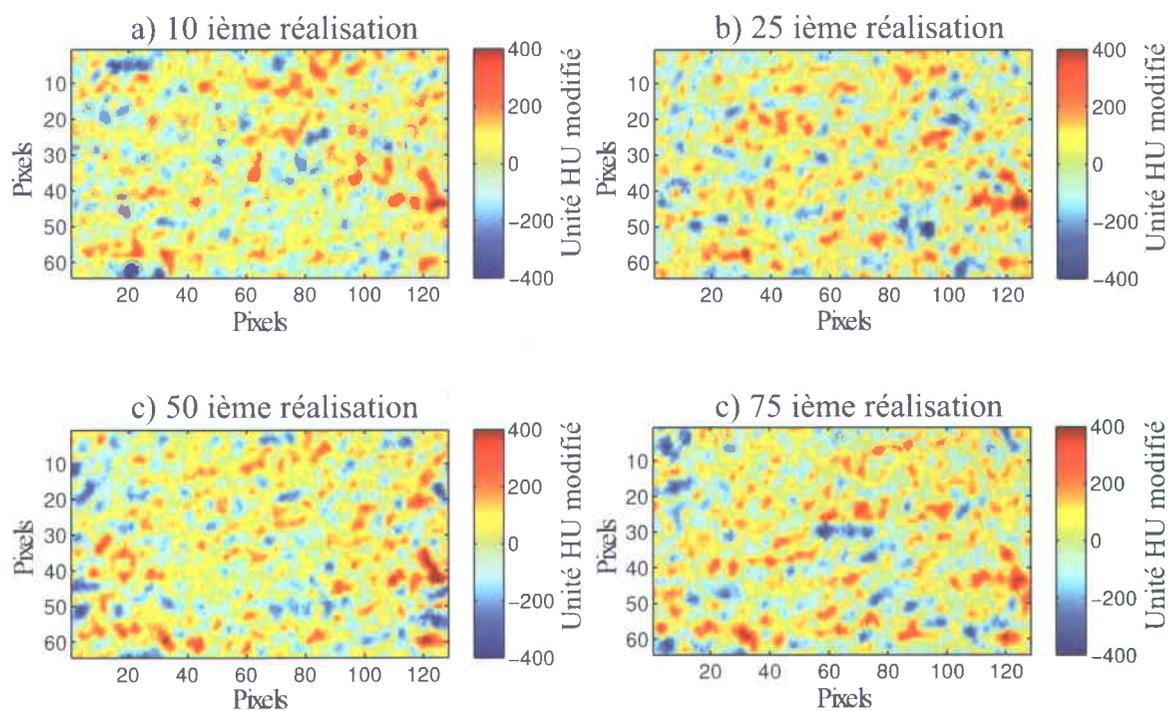


FIGURE 4.23 – Cartes de différence du modèle biomédical. a) Dixième, b) vingt-cinquième, c) cinquantième et d), soixante-quinzième réalisation.

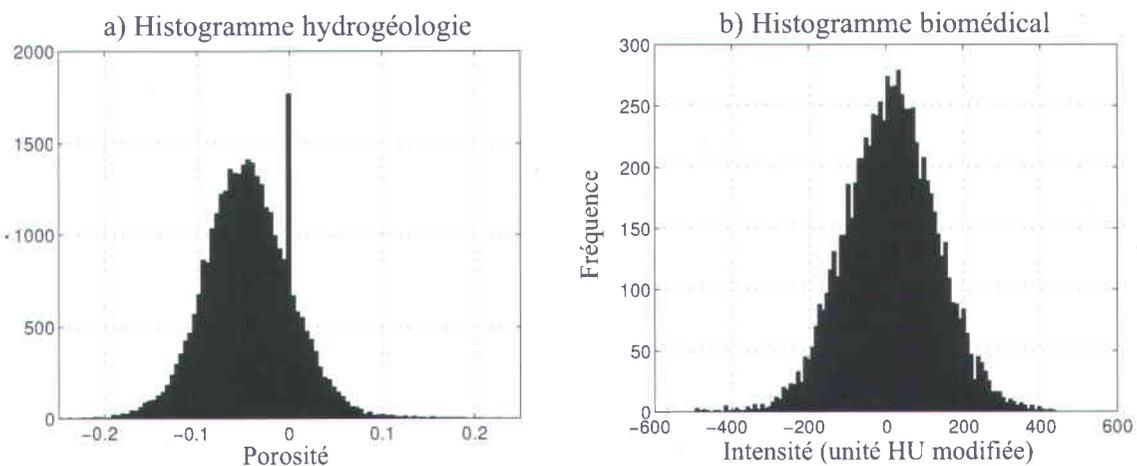


FIGURE 4.24 – Histogramme des carte de différence. a) Modèle hydrogéologique. b) Modèle biomédical.

4.4.5 Analyse morphométrique

L'analyse morphométrique conduite dans le cadre des travaux de Vachon (2010) est rapportée au tableau 4.4. Cette analyse est une métrique propre au modèle de porosité biomédical. Tel qu'il est possible de le constater au tableau 4.4, la surface osseuse simulée (B.Ar) est en moyenne légèrement supérieure ($\sim 2\%$) à celle attendue. Aussi, le périmètre osseux simulé (B.Pm) est en moyenne légèrement inférieur ($\sim 2\%$) au modèle de porosité cible. Les paramètres BS, BV, BS/BV et BV/TV simulés diffèrent également de 2, 2, 4 et 2%, respectivement avec la cible des simulations. Pour ce qui est des paramètres Tb.N, Tb.Sp et Tb.Th, ceux-ci diffèrent de 2, 1,5 et 4 %, respectivement. Ainsi, il est possible de constater au tableau 4.4 la bonne reproductibilité des résultats obtenus en notant que l'écart-type demeure faible pour tous les paramètres évalués.

Paramètres morphométriques pour cent simulations					
Paramètres (unité)	Cible	Minimum	Maximum	Moyenne	Écart-type
B.Ar (pixel)	3 992	3 968	4 184	4 065	51
B.Pm (pixel)	2 693	2 525	2 711	2 631	38
BS (mm ²)	29,712	27,859	29,911	29,034	0,421
BV (mm ³)	4,626	4,599	4,849	4,711	0,059
BS/BV (mm ⁻¹)	6,422	5,906	6,391	6,163	0,083
BV/TV (%)	0,325	0,323	0,340	0,331	0,004
Tb.N (mm ⁻¹)	1,043	0,978	1,050	1,019	0,015
Tb.Sp (mm)	0,647	0,630	0,690	0,657	0,012
Tb.Th (mm ⁻¹)	0,311	0,313	0,339	0,325	0,004

Tableau 4.4 – Analyse morphométrique. Tiré de Vachon (2010).

Séduits par le démon de l'Inédit,
nous oublions trop vite que nous
sommes les épigones du premier
pithécantrophe qui se mêla de
réfléchir.

Cioran

Chapitre 5

Discussion

Le présent chapitre est une analyse des résultats obtenus précédemment, en regard des objectifs et des hypothèses formulés et par rapport aux études antérieures. Ce chapitre discute en premier lieu du modèle analogue qui s'avère être un élément capital de l'approche proposée. Ensuite, ce chapitre analyse les résultats obtenus pour l'échelle de travail ainsi que ceux obtenus pour la simulation séquentielle bayésienne. Finalement, ce chapitre discute de la synthèse des textures en lien avec les résultats obtenus lors de la validation des simulations.

Il doit être rappelé que dans le cadre de ce projet, deux études de cas sont présentées. La première est à caractère hydrogéologique et la seconde à caractère biomédical. L'étude hydrogéologique présente un cas hétérogène dont le modèle analogue est construit d'images sur différents supports d'échelle de variables complémentaires. L'étude biomédicale présente un cas homogène dont le modèle analogue est construit d'images d'une même variable.

5.1 Le modèle analogue

Le modèle analogue est la principale, sinon la seule limitation de l'approche proposée. D'abord le modèle analogue fournit les textures visuelles « connues », donc les structures de courtes échelles qui sont synthétisées par l'algorithme. L'effet net sur les réalisations est une reproduction systématique des histogrammes du modèle analogue et non ceux du modèle synthétique cible.

Pour le cas biomédical, les modèles analogues et synthétiques sont issus d'une même tranche osseuse. Les deux possèdent essentiellement les mêmes histogrammes ainsi que les mêmes textures visuelles. Les réalisations de porosité synthétiques reproduisent les statistiques du modèle analogue et sont donc proches de la cible. Cependant, les structures de larges échelles sont moins bien représentées. Ceci est imputable au processus aléatoire de sélection de valeur de coefficients d'approximation dans la simulation séquentielle bayésienne, qui permet à toutes les valeurs des distributions à être choisies, ce qui veut aussi dire que les distributions *a posteriori* sont possiblement trop larges.

Pour le cas hydrogéologique, les deux modèles sont tirés d'un même contexte hydrogéologique qui varie substantiellement d'une image à l'autre. En effet, les histogrammes des modèles analogues et synthétiques diffèrent de beaucoup. Les réalisations de porosité synthétiques sont donc similaires au modèle analogue et peinent à reproduire l'histogramme du modèle synthétique. Cependant, les structures de larges échelles reproduisent bien le modèle synthétique.

Nous retenons donc que pour l'approche proposée soit fonctionnelle, qu'il est primordial les coefficients d'approximation du modèle analogue corrélerent entre eux, à défaut

de quoi, comme c'est le cas pour le modèle biomédical, les structures de larges échelles se perdent dans le processus aléatoire de simulation séquentielle bayésienne. De plus, pour que l'approche proposée soit efficace, il est aussi nécessaire que les histogrammes des modèles analogues et synthétiques soient similaires. Ceci ne veut pas dire qu'il est nécessaire que le modèle analogue doit être générique, cependant, il apparaît qu'il soit capital pour retrouver les textures de porosité synthétique, que celles-ci soient connues du modèle analogue.

5.2 Échelle de travail

L'échelle de travail est déterminée quantitativement en évaluant la corrélation entre les coefficients d'approximation des images des modèles analogues de la première à la quatrième échelle de décomposition (la cinquième étant inatteignable avec le format d'image en main). Les données sont présentées au tableau 4.1. L'analyse révèle que la corrélation augmente avec l'échelle de décomposition et que de la première à la quatrième échelle, la corrélation augmente de 0,65 à 0,90 pour le modèle hydrogéologique, et de 0,15 à 0,48 pour le modèle biomédical. La quatrième échelle étant celle où les coefficients d'approximation des modèles analogues corréleront le plus, c'est cette échelle qui est utilisée comme échelle de travail pour la suite des travaux, de la même manière que dans le cadre des travaux de Gloaguen *et al.* (2010). Il doit aussi être noté que dans le cadre des travaux de Gloaguen *et al.* (2010), la cinquième échelle est mesurée sur les images et permet de constater que la corrélation atteint un seuil maximal à la quatrième échelle (voir tableau 4.1). Il eût été intéressant de décomposer les images à la cinquième échelle afin de constater si oui ou non ce phénomène existe pour les ondelettes de Portilla & Simoncelli.

Il est intéressant de constater que la corrélation entre les coefficients d'approximation du modèle analogue hydrogéologique (0,90) est plus élevée que celle obtenue à l'intérieur des travaux de Gloaguen *et al.* (2010) (0,8). Ceci ne peut qu'être imputable à la définition de l'ondelette mère qui sert à la décomposition des images. Ainsi, l'ondelette mère cosinusoidale et complexe de Portilla & Simoncelli (2000) semble plus appropriée que l'ondelette de Haar pour représenter la corrélation entre des structures de larges échelles d'un objet, lorsque celui-ci est imagé à l'aide de deux méthodes complémentaires.

5.3 Données conditionnantes

Pour ce qui est des valeurs conditionnantes, dans le cas hydrogéologique où des données de forage sont disponibles, l'algorithme peut les reproduire suivant les modifications que nous lui avons apportées (voir § 3.2.4). Les domaines réalisés semblent respecter la stratigraphie proposée par les forages (fig. 4.15 a) à d)).

Cependant, tel qu'il est possible de le constater sur les figures 4.15 a) à d)), il existe une légère discontinuité entre les forages et les domaines simulés. Ceci est dû au fait que bien que l'algorithme impose directement les valeurs de forages à la fin chaque itération, sans tenir compte de la fonction d'ondelette générée au préalable. Par défaut, l'algorithme impose les données de forages et modifie l'image finale par un bruit de fond avant de retourner à l'itération suivante. Nous avons modifié le code pour que les données conditionnantes soient toujours respectées. La résultante provoque une discontinuité le long des forages. Ce qui devrait être fait serait d'introduire les valeurs conditionnantes comme des conditions limites aux fonctions d'ondelettes de haute résolution.

5.4 Erreur relative des réalisations

La présente section discute de l'erreur relative des réalisations. En premier lieu les résultats de corrélation pixel-à-pixel sont présentés, ceux des histogrammes des réalisations, des cartes statistiques et ainsi que des cartes de différence. Ensuite, cette section aborde l'analyse morphométrique tirée de Vachon (2010).

5.4.1 Corrélation pixel-à-pixel

La corrélation pixel-à-pixel est évaluée entre la cible (modèle synthétique de porosité) et 100 simulations. En moyenne, la corrélation est de 0,32 alors qu'à l'intérieur des travaux de Gloaguen *et al.* (2010) elle se situe entre 0,6 et 0,7, et qu'à l'intérieur des travaux de Dubreuil Boisclair *et al.* (2011), elle est en moyenne de 0,65. Pour le cas biomédical, elle est de -0,0065. Nous pourrions conclure que l'approche proposée ne permet pas de reproduire le modèle de porosité attendu.

Cependant, le fait est que l'approche proposée n'a pour seule fonction que de reproduire les statistiques d'un modèle de texture visuelle, le modèle analogue de porosité dans ce cas-ci. La corrélation des simulations avec le modèle synthétique ne peut être que celle entre les modèles analogues et synthétiques, ce qui est le cas. En effet, la corrélation entre les modèles analogues et synthétiques hydrogéologiques est de 0,3298, alors qu'elle est de 0,035 pour le cas biomédical. Ainsi, l'analyse des réalisations pixel-à-pixel ne semble pas être une métrique de validation pertinente pour l'approche proposée.

5.4.2 Histogrammes des réalisations

Les histogrammes des réalisations reproduisent les histogrammes des modèles analogues de porosité. L'algorithme étant construit pour reproduire les histogrammes contraints par l'utilisateur, nous avons effectivement imposé les histogrammes des modèles analogues. Il en est de même pour les deux études de cas, à la différence que pour le cas biomédical, le modèle analogue possède un histogramme similaire à celui du modèle synthétique, ce qui donne l'impression que l'algorithme reproduit l'histogramme synthétique. Nous pouvons donc avancer que l'approche proposée est reproductible car toutes les simulations sont similaires au niveau de leur histogramme.

5.4.3 Cartes statistiques

Les cartes statistiques obtenues à la section 4.4.3 permettent de visualiser la moyenne, la variance, l'asymétrie et l'aplatissement pour 100 réalisations de porosité synthétique ; à la figure 4.20 pour le modèle hydrogéologique, et à la figure 4.21 pour le modèle biomédical.

La variance des réalisations permet de constater l'étalement des valeurs de pixel (fig. 4.20 d) et 4.21 d)). Dans le cas du modèle hydrogéologique de porosité, la variance se situe entre 0 pour les textures synthétiques connues du modèle analogue et 2×10^{-3} pour les textures synthétique inconnues du modèle analogue (fig. 4.20 a)). Ceci signifie que la carte de variance permet donc d'évaluer la représentativité du modèle analogue de porosité.

5.4.4 Cartes de différence

Les cartes de différences permettent de visualiser l'écart existant entre les réalisations du modèle synthétique de porosité et la cible des simulations (fig. 4.22 et 4.23).

Qualitativement, les cartes de différences montrent (encore une fois de plus) les textures inconnues du modèle analogue de porosité. De plus, l'histogramme d'une carte de différence du modèle hydrogéologique (fig. 4.24 a)) indique qu'une erreur absolue est introduite en dénormalisant les réalisations à partir de la moyenne et de la variance du modèle analogue de porosité. Il est pour le moment impossible de faire autrement puisque la moyenne et la variance du modèle synthétique de porosité sont supposées être inconnues. Par contre, puisque les valeurs en forages semblent être plus représentatives du modèle synthétique, celle-ci devraient être utilisées pour de futures applications de l'approche. Dans le cas du modèle biomédical, encore une fois, les distributions synthétique et analogue du modèle de porosité sont équivalente. Cette erreur absolue n'apparaît donc pas.

L'intervalle de valeur des écarts entre réalisations et cible des simulations se situe autour de $\pm 0,05$ pour le modèle hydrogéologique (fig. 4.24 a)) et de ± 100 HU (modifié) pour le cas biomédical (fig. 4.24 b)). Ceci nous indique que l'erreur relative des réalisations est de l'ordre de 10 % dans le cas hydrogéologique et de l'ordre de 1 % dans le cas biomédical.

5.4.5 Analyse morphométrique

Les résultats obtenus dans le cadre des travaux de Vachon (2010) sont présentés au tableau 4.4. En moyenne, les paramètres morphométriques sont toujours simulés près de la valeur cible, à l'intérieur sinon tout près de l'écart-type. Il doit être soulignée que ces paramètres morphométriques auront été obtenus en coupant l'image des pixels dont la valeur d'intensité se retrouve en dessous d'un seuil dit de « minéralisation », afin de départager sur l'image l'os « dur » de l'os « mou ». Cette métrique de validation mesure donc une partie de l'histogramme réalisé. Puisque ce dernier est identique pour toutes les réalisations et que l'histogramme du modèle synthétique se comporte de la même façon que l'histogramme du modèle analogue de porosité, l'analyse linéaire subséquente des paramètres morphométriques ne peut que faire à nouveau ressortir cette similarité.

Où que tu poses le pied, sois sûr que
la poussière
Fut un homme notable, un homme
très capable.

Omar Khayam

Chapitre 6

Conclusion

Dans le cadre de la présente étude, nous avons développé une approche permettant de modéliser les hydrofaciès d'un contexte géologique à partir d'imagerie géophysique complémentaire. Nous avons construit notre approche en nous basant sur les travaux de Gloaguen *et al.* (2010) à l'intérieur desquels un modèle analogue permet de définir un modèle hydrogéologique conceptuel dont les images sont analysées au niveau de leur coefficients d'approximation. Ces derniers sont obtenus par transformée d'ondelette discrète.

À l'intérieur de nos travaux, nous avons substitué la définition d'ondelette discrète de Haar pour celle proposée par Portilla & Simoncelli (2000) et ce nous avons réutilisé le modèle de texture paramétrique afin de tirer un maximum d'information des structures de courtes échelles (statistiques marginales, à chaque bande de fréquence et entre les bandes). Nous avons finalement validé les réalisations produites à l'aide de différents outils statistiques usuels.

Nous avons construit l'approche à l'aide de deux études de cas. La nuance entre les deux modèles réside dans l'homogénéité des textures contenues dans les images, à savoir que le modèle biomédical présente un seul type de texture visuelle alors que le modèle hydrogéologique en présente un éventail. De plus, les modèles diffèrent aussi au niveau de leur acquisition puisque le modèle hydrogéologique est constitué de deux variables complémentaires (porosité et lenteur radar) alors que le modèle biomédical est constitué d'une seule variable représentée à différentes résolutions.

Pour tous les cas d'espèce étudiés, la méthode est reproductible car elle reproduit systématiquement les structures de larges échelles à partir des images des modèles synthétiques géophysiques (et macroscopiques biomédicaux) ainsi que les histogrammes des modèles analogues de porosité. Pour 100 réalisations, nous avons constaté la similarité entre les histogrammes des réalisations. De plus, nous avons réussi à forcer l'algorithme à imposer les valeurs conditionnantes en forage.

Ainsi l'approche proposée est facile d'utilisation, flexible et efficace, dans la mesure où le modèle analogue fournit globalement les statistiques à laquelle l'utilisateur peut s'attendre du modèle synthétique. Les travaux futurs doivent inclure le développement de l'approche au cas tridimensionnel ce qui techniquement n'est qu'une généralisation du cas bidimensionnel. De plus les travaux futurs devront aussi permettre de tenir compte d'un modèle analogue qui possède plus d'une variable complémentaire de sorte que plus d'une mesure géophysique puisse raffiner la simulation séquentielle bayésienne. Finalement, il sera nécessaire d'être en mesure de valider le ou les scénarios les plus probables, de manière à ce que la méthode devienne un outil diagnostique.

Bibliographie

- Arfken G & Weber H (2001) *Mathematical methods for physicists*, 5th Edit. Harcourt, Academic Press, 1112 pp.
- Aslaken E & Klauder J (1969) Continuous representation theory using affine group. *Journal of Mathematical Physics* 10(12) :2267–2275.
- Boisclair C, Gloaguen E, Marcotte D, Giroux B & Chouteau M (2008) Comparison between classical geostatistical simulation algorithms and Bayesian simulation for the simulation of porosity fields based on borehole geological data and GPR tomography. In Conférence Association Hydrogéophysique du Québec.
- Bosch E, Gonzalez A, Vivas J & Easley G (2009) Directional wavelets and a wavelet variogram for two-dimensional data. *Mathematical Geosciences* 41 :611–641.
- Brodatz P (1996) *Textures : A photographic album for artists and designers*. Dover, New York.
- Butler D (2005) *Near-surface geophysics*. Society of Exploration Geophysicists.
- Chapuis R (2007) *Guide des essais de pompage et leurs interprétations*. Québec, 112 pp.
- Chilès J & Delfiner P (1999) *Geostatistics : Modeling and spatial uncertainty*. John Wiley & Sons, Inc., 696 pp.

BIBLIOGRAPHIE

- Coolens C & Childs P (2003) Calibration of CT hounsfield units for radiotherapy treatment planning of patients with metallic hip prostheses : The use of the extended CT-scale. *Physics in Medicine and Biology* 48(11) :1591–1603.
- Crochiere R, Webber S & Flanagan J (1976) Digital coding of speech in sub-bands. *Computers and Geosciences* 55(8) :1069–1085.
- Crouse M, Baranuik R & Nowak R (1996) Hidden Markov models for wavelet-based signal processing. *IEEE Transaction on Signal Processing* pp. 1029–1035.
- Crouse M, Nowak R & Baranuik R (1998) Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov model. *IEEE Transaction on Signal Processing* 46(4) :886–902.
- Cui Hf & Zheng X (2007) A wavelet-based image Enhancement Algorithm for real time multi-resolution texture mapping. In *Virtual Reality, HCII 2007, LCNS 4563*.
- Daubechies I (1988) Orthonormal bases of compactly supported wavelets. In *Communications on Pure and Applied Mathematics*, volume 41, pp. 909–996.
- Demyanov V, Soltani S, Kanevski M, Canu S, Maignan M, Savelieva E, Timonin V & Pisarenko V (2001) Wavelet analysis residual kriging *versus* neural network residual kriging. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 15 :18–32.
- Doyen P (1988) Porosity from seismic data : A geostatistical approach. *Geophysics* 53 :1263–1275.
- Doyen PM & Den Boar LD (1996) Bayesian sequential gaussian simulation of lithology with non-linear data. In *Western Atlas International, Inc.*, p. 11.
- Dubreuil Boisclair C, Gloaguen E, Marcotte D & Giroux B (2011) Heterogeneous aquifer characterization from ground-penetrating radar tomography and borehole hydrogeophysical data using nonlinear Bayesian simulations. *Geophysics* 76(4) :1–13.
- Flandrin P (1992) Wavelet analysis and synthesis of fractionnal Brownian motion. *IEEE Transactions on Information Theory* 35(1) :197–199.

BIBLIOGRAPHIE

- Giroux B & Chouteau M (2008) An hydrogeophysical synthetic model generator. *Computers and Geosciences* 34 :1080–1092.
- Giroux B, Gloaguen E & Chouteau M (2007) Bh tomo - A Matlab borehole georadar 2D tomography package. *Computers and Geosciences* 33 :127–137.
- Gloaguen E & Dimitrakopoulos R (2009) Two-dimensional conditional simulations based on the wavelet decomposition of training images. *Mathematical Geosciences* DOI 10.1007/s11004-0099235-3 :23.
- Gloaguen E, Giroux B, Marcotte D, Dubreuil Boisclair C & Tremblay Simard P (2010) Multiple-scale-porosity wavelet simulation using ground-penetrating radar tomography and hydrogeophysical analogs. In Miller R D, Holliger K & Bradford J H (Edit.) *Advances in Near Surface Seismology and Ground-Penetrating Radar*, Society of Exploration Geophysicists, pp. 117–130.
- Gloaguen E, Marcotte D & Chouteau M (2004) Borehole radar velocity imaging using slowness covariance estimation and cokriging. In *GPR 2004 : Proceedings of the Tenth International Conference on Ground Penetrating Radar*, pp. 75–78.
- Goovaerts P (1997) *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Applied Geostatistics Series, Oxford University, 483 pp.
- Grossmann A & Morlet J (1984) Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal of Mathematics* 15 :723–736.
- Grossmann A, Morlet J & Paul T (1986) Transforms associated to square integrable group representations. I. General results. *Journal of Mathematical Physics* 26(10) :2473–2479.
- Guillemette N, St-Hilaire A, Ouarda T, Bergeron N, Robichaud A & Bilodeau L (2009) Feasibility study of a geostatistical modelling of monthly maximum stream temperatures in a multivariate space. *Journal of Hydrology* 364 :1–12.
- Haar A (1910) On the theory of orthogonal function systems. *Mathematische Annalen* 69 :331–371.

BIBLIOGRAPHIE

- Hecht E (2002) Optics, Fourth Edition. Addison Wesley, 698 pp.
- Julesz B (1962) Visual pattern discrimination. *IRE Transaction on Information Theory* IT-8 :84–92.
- Krug R, Gamio J, Burghardt A, Haase S, Sedat J, Moss W & Majumdar S (2007) Wavelet-based characterization of vertebral trabecular bone structure from magnetic resonance images at 3 T compared with micro-computed tomographic measurements. *Magnetic Resonance Imaging* 27 :392–398.
- Lyon S, Lembo Jr A, Walter M & Steenhuis T (2006) Defining probability of saturation with indicator kriging on hard and soft data. *Advances in Water Resources* 29 :181–193.
- Mallat S (1989a) Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models. *IEEE Transaction on acoustics, speech and signal processing* 37(12) :2091–2109.
- Mallat S (1989b) Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of L^2 . *Transaction of the American Mathematical Society* 315(12) :69–87.
- Marcotte D (2010) Géostatistique - Note de cours.
- Martinez W & Martinez A (2008) Computational Statistics Handbook with Matlab, 2-ieme Edition. Computer Science and Data Analysis Series, Chapman & Hall / CRC, 767 pp.
- Meng Q, Cieszewski C & Madden M (2009) Large area forest inventory using Landsat ETM+ : A geostatistical approach. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* 64 :27–36.
- Morlet J, Arens G, Fourgeau E & Giard D (1982) Wave propagation and sampling theory-Part I & II : Complex signal and scattering in multilayered media. *Geophysics* 47(2) :203–221.
- Moss W, Haase S, Lyle M, Agard D & Sedat J (2005) A novel 3D wavelet-based filter for visualizing features in noisy biological data. *Journal of Microscopy* 219(2) :43–49.

BIBLIOGRAPHIE

- Moura O & Fernandes A (2009) Kriging density estimates for the bluemouth rockfish, *Helicolenus dactylopterus* (Scorpaenidae) off the southern Portuguese coast. *Fisheries Research* 95 :112–124.
- Parfitt A, Drezner M, Glorieux F, Kanis J, Malluche H, Meunier P, Ott S & Recker R (1987) Bone hystomorphometry : standardization of nomenclature, symbols, and units. *Journal of Bone and Mineral Research* 2(6) :595–610.
- Portilla J & Simoncelli E (2000) A parametric texture model based on joint statistics of complex wavelet coefficients. *International Journal of Computer Vision* 40 :49–71.
- Pride S (1994) Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustic porous media. *Physical Review B* 50 :15678–15696.
- Renard P & Marsily Gd (1997) Calculating equivalent permeability : a review. *Advances in Water Ressources* 20(5-6) :253–278.
- Robinson D, Binley A, Crook N, Day-Lewis F, Ferré T, Grauch V, Knight R, Knoll M, Lakshmi V, Miller R, Nyquist J, Pellerin R, Singha K & Slater L (2008) Advancing process-based watershed hydrological research using near-surface geophysics : a vision for, and review of, electrical and magnetic geophysical methods. *Hydrological Processes* 22(18) :3604–3635.
- Sihvola A (2000) Mixing rules with complex dielectric coefficients. *Subsurface Sensing Technologies and Applications* 1 :393–415.
- Simoncelli E & Freeman W (1995) The steerable pyramide : a flexible architecture for multi-scale derivative computation. In 2^eIEEE International Conference on Image Processing, Washington, DC, volume 3, pp. 444–447.
- Simoncelli E, Freeman W, Adelson E & Heeger D (1992) Shiftable Multiscale Transforms. *IEEE Transactions on information theory* 38(2) :587–607.
- Srivastava R (1995) An overview of stochastic methods for reservoir characterization. In J. Yarus & R. Chambers, Eds., *Stochastic modeling and geostatistics : Principles,*

BIBLIOGRAPHIE

- methods and case studies, Chapter 1 : AAPG computer applications in geology, Tulsa, volume 3, pp. 3–16.
- Tavchandjian O, Rouleau A, Archambault G, Daigneault R & Marcotte D (1995) Quantitative integration of hydrogeophysical data : Conditionnal geostatistical simulation for characterizing heterogeneous alluvial aquifers. *Tectonophysics* 269 :51–63.
- Vachon A (2010) Analyse multi-échelle de la qualité/ osseuse. École de technologies supérieures de Montréal, 81 pp.
- VisTex (1995) VisTex : An online collection of visual textures. In MIT Media Laboratory, pp. Available from <http://www-white.media.mit.edu/vismod/imagery/VisionTexture/vistex.html>.
- Wade E, Marcotte D & Moriyasu M (2001) Matlab Based Geostatistical Analysis Tool for Assessing and Mapping Marine Invertebrate Stocks : Application to Snow Crab Stock Assessment in the Southern Gulf St. Lawrence (Northwest Atlantic). In Conference "Life Histories, Assessment and Management of Crustacean Fisheries".
- Wainsten J (2006) Le Larousse médical. Larousse, 1113 pp.
- Walnut H (2006) Fundamental papers in wavelet theory. Princeton University Press, 878 pp.
- Zeldin B & Spanos P (1995) Random field simulation using wavelet bases. In Applications of Statistics and Probability-Civil Engineering Reliability and Risk Analysis, Vol. 2, pp. 1275–1283.

Annexe

Annexe A

Éléments de géostatistique

La présente section est tirée des travaux de Goovaerts (1997). Les notions abordées sont le modèle de variable et de fonction aléatoire, la notion de stationnarité et de variabilité spatiale, les modèles de covariance admissibles, les modèles d'anisotropies, ainsi que les modèles de krigeage simple et de krigeage ordinaire.

A.1 Description univariée

La présente section est tirée des travaux de (Goovaerts, 1997, voir chap. 2, § 2.1, p. 9). La notation est légèrement modifiée afin de respecter la cohérence du présent document. Soit $\{s_n, n = 1, \dots, N\}$, l'ensemble des observations des attributs *catégoriques* s , tels que mesurés sur N individus. L'ensemble des K états possibles s_k pour toute valeur de s_n admissible est dénoté par $\{s_1, \dots, s_K\}$. La fréquence « d'occurrence » des états s_k , notée p_k , est donnée par la moyenne arithmétique, soit,

$$p_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_{n;s_k}, \quad (\text{A.1})$$

où « l'indicatrice » $I_{n;s_k}$ (correspondant au n -ième individu) vaut 1 lorsque l'état s_k est observé et vaut zéro autrement. Mathématiquement, l'indicatrice s'écrit,

$$I_{n;s_k} = \begin{cases} 1, & \text{si } s = s_k, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

En plus de la table des fréquences pour chaque état, il est possible de dresser la table des occurrences de deux états s_k et s'_k qui correspondent à deux attributs catégoriques apparaissant en une position sur le domaine d'étude. Nous obtenons cette information de la table des occurrences croisées p_{s_k, s'_k} qui est ici exprimée comme étant la « moyenne du produit des indicatrices »,

$$p_{s_k, s'_k} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_{n;s_k} \cdot I_{n;s'_k}. \quad (\text{A.3})$$

Maintenant, soit $\{z_n, n = 1, \dots, N\}$, l'ensemble des attributs continus z des N individus d'une population. La distribution des valeurs continues est typiquement décrite à l'aide de l'histogramme qui discrétise d'une part l'intervalle de valeurs admises en un nombre de classes d'égale largeur et d'autre part les proportions relatives de données pour chaque classe. Ce sont ces dernières qui définissent la fréquence des classes, ainsi l'histogramme décrit la distribution des fréquences des valeurs pour une largeur de classe donnée. Il est en pratique parfois important de connaître la proportion des valeurs d'une donnée qu'elle soit supérieure ou inférieure à seuil donné. Ainsi la proportion d'échantillons z ne dépassant pas la valeur seuil z_k , notée F_{z_k} , est donnée par la moyenne des indicatrices,

$$F_{z_k} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_{n;z_k}, \quad (\text{A.4})$$

où,

$$I_{n;z_k} = \begin{cases} 1, & \text{si } z_n \leq z_k, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Ces proportions sont évaluées pour une série de valeurs seuil qui forment ensemble une fonction de distribution cumulative. Les éléments statistiques importants pour caractériser une distribution unimodale sont ; la valeur centrale, la mesure d'étalement ainsi que la mesure de symétrie. La valeur centrale m est usuellement donnée par la moyenne arithmétique des valeurs z_n , de la même manière qu'à l'éq. (A.1), soit,

$$m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n. \quad (\text{A.6})$$

Pour les distributions asymétriques, il est préférable d'utiliser la médiane de la distribution. Cette dernière correspond à la fréquence cumulative de la cinquième décile (c.-à-d., $F_{z_k} = 0,5$). La mesure de l'étalement autour de la moyenne est définie comme étant la variance σ^2 de la distribution, soit,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (z_n - m)^2. \quad (\text{A.7})$$

La racine carrée de la variance est l'écart-type et est notée σ . D'autre part, nous dirons qu'une distribution est symétrique si,

$$f(m - z) = 1 - f(m + z), \quad \forall z. \quad (\text{A.8})$$

La relation de symétrie indique que la moyenne et la médiane d'une distribution sont égales. Finalement, nous mesurons l'asymétrie de la distribution avec le coefficient d'aplatissement, noté φ et défini tel que,

$$\varphi = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{(z_n - m)^3}{\sigma^3}. \quad (\text{A.9})$$

Pour une distribution symétrique, $\varphi = 0$. Pour une distribution qui tend vers zéro de manière asymptotique pour de fortes valeurs de z , l'asymétrie est dite positive. Inversement, pour de faibles valeurs de z , l'asymétrie est dite négative.

A.2 Description bivariée

La présente section est tirée des travaux de Goovaerts (1997, voir chap. 2, § 2.2, p. 19). La notation est légèrement modifiée afin de respecter la cohérence du présent document. Soit $\{z_{i,n}, z_{j,n}, n = 1, \dots, N\}$, les mesures de deux attributs continus $z_{i,n}$ et $z_{j,n}$ des mêmes N individus. Nous construisons un nuage de points de manière à représenter chaque paire de points (i, j) . Les statistiques permettant de caractériser une relation bivariée les plus fréquemment utilisées sont la covariance, notée $\text{Cov}\{\cdot\}$ ou σ_{ij} , ainsi que la corrélation linéaire, notée ρ . Elles sont définies telles que,

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (z_{i,n} - m_i) \cdot (z_{j,n} - m_j). \quad (\text{A.10})$$

et,

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_i \sigma_j} \in [-1, 1], \quad (\text{A.11})$$

où σ_i et σ_j sont les écart-types des distributions de valeurs de z_i et z_j , respectivement. Lorsque $i = j$, la covariance devient la variance σ_i^2 . La quantité ρ_{ij} fournit une mesure de la relation linéaire entre deux variables. Il est important de noter que deux variables peuvent fortement dépendre l'une de l'autre (p. ex., $z_i = z_j^2$), mais n'avoir aucune corrélation entre elles. De plus, la corrélation linéaire est fortement affectée par les valeurs extrêmes des distributions. Le cas échéant, la corrélation doit être évaluée en sommant la moyenne arithmétique de chaque classe de valeur de l'histogramme (voir éq. (A.4)). En somme, la corrélation n'évalue qu'un aspect de toute l'information d'une distribution.

A.3 Description spatiale univariée

La présente section est tirée des travaux de Goovaerts (1997, voir chap. 2, § 2.3, p. 22). La notation est légèrement modifiée afin de respecter la cohérence du présent document. Soit un attribut continu, noté $z(\mathbf{u}_n)$, dont le vecteur position est noté \mathbf{u}_n . Nous procédons à la mise en graphique des paires de points $(z(\mathbf{u}_n), z(\mathbf{u}_n + h))$ séparés d'une distance h . L'étalement des données autour de la bisectrice de corrélation unitaire reflète la variabilité entre les données et l'inflation de leur étalement pour une distance h croissante reflète la dissimilarité croissante entre des mesures toujours plus distantes. Nous écrivons la covariance spatiale entre deux points de mesures séparés d'un vecteur \mathbf{h} telle que,

$$C(\mathbf{h}) = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} z(\mathbf{u}_n) \cdot z(\mathbf{u}_n + \mathbf{h}) - m_{-\mathbf{h}} \cdot m_{+\mathbf{h}}, \quad (\text{A.12})$$

où,

$$m_{-\mathbf{h}} = m = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} z(\mathbf{u}_n), \quad (\text{A.13})$$

où,

$$m_{+\mathbf{h}} = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} z(\mathbf{u}_n + \mathbf{h}), \quad (\text{A.14})$$

et où $N(\mathbf{h})$ est le nombre de paires de points à l'intérieur de cette classe de vecteur \mathbf{h} . Nous obtenons la fonction d'autocorrélation expérimentale $\rho(\mathbf{h})$ pour un ensemble de valeurs croissantes de \mathbf{h} , de sorte que,

$$\rho(\mathbf{h}) = \frac{C(\mathbf{h})}{\sqrt{\sigma_{-\mathbf{h}}^2 \cdot \sigma_{+\mathbf{h}}^2}} \in [-1, 1], \quad (\text{A.15})$$

où,

$$\sigma_{-\mathbf{h}}^2 = \sigma^2 = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} (z(\mathbf{u}_n) - m_{-\mathbf{h}})^2, \quad (\text{A.16})$$

et où,

$$\sigma_{+\mathbf{h}}^2 = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} (z(\mathbf{u}_n + \mathbf{h}) - m_{+\mathbf{h}})^2. \quad (\text{A.17})$$

La corrélation est une mesure de similarité alors que le semi-variogramme expérimental $\gamma(\mathbf{h})$ est une mesure d'écartement. Nous écrivons le semi-variogramme expérimental tel que,

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} (z(\mathbf{u}_n) - z(\mathbf{u}_n + \mathbf{h}))^2. \quad (\text{A.18})$$

La valeur que prend le semi-variogramme pour un vecteur \mathbf{h} donné peut être interprétée comme étant le moment d'inertie du nuage de points autours de sa première bisectrice (c.-à-d. autours de $\gamma(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$). Ainsi, la valeur du semi-variogramme augmente avec la distance mesurée entre un point $(z(\mathbf{u}_n), z(\mathbf{u}_n) + \mathbf{h})$ et la première bisectrice. La distance de séparation pour laquelle la covariance et la corrélation sont nulles est nommée la portée. De plus, il existe usuellement une discontinuité à l'origine telle que $\gamma(0) \neq 0$; c'est l'effet pépite. Une telle discontinuité à l'origine du semi-variogramme indique une erreur intrinsèques aux mesures et/ou une source de variation pour des vecteurs \mathbf{h} dont la norme est inférieure au plus petit interval de mesure.

A.4 Description spatiale bivariée

Cette section est tirée des travaux de Goovaerts (1997, voir chap.2, § 2.4, p. 46). La notation est légèrement modifiée afin de respecter la cohérence du présent document. Soit, z_i et z_j , deux attributs séparés d'un vecteur \mathbf{h} , nous écrivons la covariance croisée $C_{ij}(\mathbf{h})$ entre z_i et z_j , telle que,

$$C_{ij}(\mathbf{h}) = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} z_i(\mathbf{u}_n) \cdot z_j(\mathbf{u}_n + \mathbf{h}) - m_{i-\mathbf{h}} \cdot m_{j+\mathbf{h}}, \quad (\text{A.19})$$

où,

$$m_{i-\mathbf{h}} = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} z_i(\mathbf{u}_n), \quad (\text{A.20})$$

et où,

$$m_{j+\mathbf{h}} = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} z_j(\mathbf{u}_n + \mathbf{h}). \quad (\text{A.21})$$

L'ensemble des covariances croisées $C_{ij}(\mathbf{h}_1), C_{ij}(\mathbf{h}_2), \dots$ est appelé la fonction de covariance expérimentale croisée. De manière générale, $C_{ij}(\mathbf{h}) \neq C_{ij}(-\mathbf{h})$, bien qu'usuellement on pose que $C_{ij}(\mathbf{h}) = C_{ji}(-\mathbf{h})$. Le corrélogramme croisé $\rho_{ij}(\mathbf{h})$ s'écrit,

$$\rho_{ij}(\mathbf{h}) = \frac{C_{ij}(\mathbf{h})}{\sqrt{\sigma_{i-\mathbf{h}}^2 \cdot \sigma_{j+\mathbf{h}}^2}} \in [-1, 1], \quad (\text{A.22})$$

où,

$$\sigma_{i-\mathbf{h}}^2 = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} (z_i(\mathbf{u}_n) - m_{i-\mathbf{h}})^2, \quad (\text{A.23})$$

et où,

$$\sigma_{j+\mathbf{h}}^2 = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} (z_j(\mathbf{u}_n + \mathbf{h}) - m_{j+\mathbf{h}})^2. \quad (\text{A.24})$$

Nous écrivons le semi-variogramme expérimental croisé $\gamma_{ij}(\mathbf{h})$ tel que,

$$\gamma_{ij}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{n=1}^{N(\mathbf{h})} (z_i(\mathbf{u}_n) - z_i(\mathbf{u}_n + \mathbf{h})) \cdot (z_j(\mathbf{u}_n) - z_j(\mathbf{u}_n + \mathbf{h})). \quad (\text{A.25})$$

Le semi-variogramme croisé est symétrique si l'on interchange i et j ou \mathbf{h} et $-\mathbf{h}$. De plus, le semi-variogramme croisé ne peut être qu'évalué en des points où les deux attributs z_i et z_j sont présents. La fonction de codispersion est évaluée à partir de la relation suivante,

$$\nu_{ij}(\mathbf{h}) = \frac{\gamma_{ij}(\mathbf{h})}{\gamma_{ii}(\mathbf{h}) \cdot \gamma_{jj}(\mathbf{h})} \in [-1, +1]. \quad (\text{A.26})$$

A.5 Modèle de fonction aléatoire

La présente section est tirée des travaux de Goovaerts (1997, voir chap. 3, § 3.2, p. 63). La notation est légèrement modifiée afin de respecter la cohérence du présent document. Nous abordons en premier lieu les notions de variable aléatoire ainsi que de fonction aléatoire. Ensuite, nous abordons la notion de stationnarité.

A.5.1 Variable aléatoire

Une variable aléatoire (V.A.) est une fonction qui possède une distribution de valeurs. Il existe la V.A. discrète (ou catégorique), ainsi que la V.A. continue. La V.A. catégorique, notée $S(\mathbf{u})$, possède une représentation finie (p. ex., bleu, vert ou rouge). On note la probabilité $p(\mathbf{u}; s_k)$ représente la probabilité que l'état s_k soit mesuré en \mathbf{u} , mathématiquement,

$$p(\mathbf{u}; s_k) = \mathcal{P}\{S(\mathbf{u}) = s_k\}. \quad (\text{A.27})$$

Les K probabilités $p(\mathbf{u}; s_k)$ se retrouvent à l'intérieur de l'intervalle $[0, 1]$ et leur somme équivaut à 1,

$$\sum_{k=1}^K p(\mathbf{u}; s_k) = 1. \quad (\text{A.28})$$

La distribution de probabilité cumulative, notée $F(\mathbf{u}; s_k)$, s'écrit sans ordre préférentiel des K valeurs possibles de s_k , ainsi,

$$F(\mathbf{u}; s_k) = \mathcal{P}\{(S(\mathbf{u}) = s_1) \cup (S(\mathbf{u}) = s_2) \cup \dots \cup (S(\mathbf{u}) = s_k)\} = \sum_{k'=1}^k p(\mathbf{u}; s_{k'}). \quad (\text{A.29})$$

La quantité $F(\mathbf{u}; s_k)$ est la probabilité pour toute valeur de toute catégorie ordonnée $s_{k'}$, que la valeur de s_k existe en \mathbf{u} . Puisque $p(\mathbf{u}; s_k) \in [0, 1]$ et que la condition présente à

l'éq. (A.28) existe, toute fonction de probabilité cumulative $F(\mathbf{u}; s_k)$ doit être comprise dans l'intervall $[0, 1]$. Aussi, la distribution de probabilité cumulative de l'éq. (A.29) ne peut être une fonction décroissante du seuil s_k , tel que $F(\mathbf{u}; s_k) \in [0, 1], k = 1, \dots, K$, et que,

$$F(\mathbf{u}; s_k) \leq F(\mathbf{u}; s'_k), \forall k' > k. \quad (\text{A.30})$$

La V.A. continue, notée $Z(\mathbf{u})$, possède quant à elle un interval continu de valeurs accessibles dans un ordre naturel. Une V.A. continue peut être complètement décrite par une fonction de distribution cumulative (F.D.C.) qui donne la probabilité que la variable Z prenne en \mathbf{u} une valeur inférieure au seuil z , soit,

$$F(\mathbf{u}; z) = \mathcal{P}\{Z(\mathbf{u}) \leq z\} \forall z. \quad (\text{A.31})$$

Lorsqu'elle existe, la dérivée de la F.D.C. est la fonction de densité de probabilité (F.D.P.) $f(\mathbf{u}; z) = F'(\mathbf{u}; z)$. Par analogie avec le cas discret précédemment exposé, les relations suivantes sont satisfaites,

$$F(\mathbf{u}; z) \in [0, 1] \forall z, \quad (\text{A.32})$$

et,

$$F(\mathbf{u}; z) \leq F(\mathbf{u}; z') \forall z' > z. \quad (\text{A.33})$$

Ainsi toute F.D.C. $F(\mathbf{u}; z)$ se situe à l'intérieur d'un interval $[0, 1]$, alors que la F.D.P. est une fonction non-décroissante du seuil z .

A.5.2 Fonction aléatoire

Une fonction aléatoire (F.A.) est définie comme un ensemble de V.A. dépendantes, pour chaque position \mathbf{u} sur un domaine \mathcal{A} . Pour l'ensemble des K positions $\mathbf{u}_k, k = 1, \dots, K$, il existe un vecteur contenant K V.A. $\{Z(\mathbf{u}_1), \dots, Z(\mathbf{u}_K)\}$ caractérisé par la F.D.C. suivante,

$$F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K; z_1, \dots, z_K) = \mathcal{P}\{Z(\mathbf{u}_1) \leq z_1, \dots, Z(\mathbf{u}_K) \leq z_K\}. \quad (\text{A.34})$$

En pratique, l'analyse est limitée à des F.D.C. qui n'impliquent plus de deux positions simultanément en un instant donné, ainsi qu'à leur moments statistiques correspondants; soit la F.D.C. à un point,

$$F(\mathbf{u}; z) = \mathcal{P}\{Z(\mathbf{u}) \leq z\}, \quad (\text{A.35})$$

la F.D.C. à deux points,

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{u}'; z, z') = \mathcal{P}\{Z(\mathbf{u}) \leq z, Z(\mathbf{u}') \leq z'\}, \quad (\text{A.36})$$

l'espérance de Z ,

$$m(\mathbf{u}) = \mathcal{E}\{Z(\mathbf{u})\}, \quad (\text{A.37})$$

la covariance à deux points de Z ,

$$C(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \mathcal{E}\{Z(\mathbf{u}) \cdot Z(\mathbf{u}')\} - \mathcal{E}\{Z(\mathbf{u})\} \cdot \mathcal{E}\{Z(\mathbf{u}')\}, \quad (\text{A.38})$$

le corrélogramme à deux points,

$$\rho(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \frac{C(\mathbf{u}, \mathbf{u}')}{\sqrt{C(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \cdot C(\mathbf{u}', \mathbf{u}')}}, \quad (\text{A.39})$$

et le variogramme de Z ,

$$2\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \text{Var}\{Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u}')\}. \quad (\text{A.40})$$

A.5.3 Décision de stationnarité

Une F.A. est dite *stationnaire* sur le domaine \mathcal{A} si la F.D.C. est invariante sous translation (voir éq. (A.34)). C'est à dire que n'importe quels vecteurs de F.A. $\{Z(\mathbf{u}), \dots, Z(\mathbf{u}_K)\}$ et $\{Z(\mathbf{u} + \mathbf{h}), \dots, Z(\mathbf{u}_K + \mathbf{h})\}$ ont la même F.D.C. à deux points, peu importe la translation de \mathbf{h} . Mathématiquement,

$$F(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}_K; z_1, \dots, z_K) = F(\mathbf{u} + \mathbf{h}, \dots, \mathbf{u}_K + \mathbf{h}; z_1, \dots, z_K), \forall \mathbf{u}_n, \mathbf{h}. \quad (\text{A.41})$$

La référence à une position \mathbf{u} peut alors être déduite des éqs. (A.35) à (A.40) afin que les statistiques à deux points ne dépendent que du vecteur de translation \mathbf{h} ,

$$F(z) = \mathcal{P}\{Z(\mathbf{u}) \leq z\}, \quad (\text{A.42})$$

la F.D.C. à deux points,

$$F(\mathbf{u}; z, z') = \mathcal{P}\{Z(\mathbf{u}) \leq z, Z(\mathbf{u} + \mathbf{h}) \leq z'\}, \quad (\text{A.43})$$

l'espérance de Z ,

$$m = \mathcal{E}\{Z(\mathbf{u})\}, \quad (\text{A.44})$$

la covariance à deux points de Z ,

$$C(\mathbf{h}) = \mathcal{E}\{Z(\mathbf{u}) \cdot Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})\} - \mathcal{E}\{Z(\mathbf{u})\} \cdot \mathcal{E}\{Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})\}, \quad (\text{A.45})$$

le corrélogramme à deux points,

$$\rho(\mathbf{h}) = \frac{C(\mathbf{h})}{C(0)}, \quad (\text{A.46})$$

et le variogramme de Z ,

$$2\gamma(\mathbf{h}) = \text{Var}\{Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})\} = \mathcal{E}\left\{\left(Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})\right)^2\right\}. \quad (\text{A.47})$$

Les fonctions $C(\mathbf{h})$ et $2\gamma(\mathbf{h})$ sont dites anisotropiques si elles dépendent de la distance et de la direction. Elles sont dites isotropiques si elles ne dépendent que du module de

h. Ainsi, un modèle de F.A. est dit stationnaire de deuxième ordre si,

1. l'espérance $\mathcal{E}\{Z(\mathbf{u})\}$ existe et est invariante à l'intérieur du domaine \mathcal{A} ,
2. la covariance à deux points $C(\mathbf{h})$ existe et ne dépend que du vecteur de séparation \mathbf{h} .

La fonction de covariance, le corrélogramme et le semi-variogramme d'une F.A. sont écrits ;

$$\gamma(\mathbf{h}) = C(0) - C(\mathbf{h}), \quad (\text{A.48})$$

et,

$$\rho(\mathbf{h}) = 1 - \frac{\gamma(\mathbf{h})}{C(0)}. \quad (\text{A.49})$$

Lorsque la distance « inter-station » $|\mathbf{h}|$ augmente, la corrélation entre n'importe quelle F.A. $Z(\mathbf{u})$ et $Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})$ tend généralement vers zéro. Le semi-variogramme est limité pour $|\mathbf{h}| \rightarrow \infty$ par le seuil $C(0)$. La définition du semi-variogramme $\gamma(\mathbf{h})$ ne requiert pas l'existence d'une moyenne constante ni d'une variance finie de la F.A. $Z(\mathbf{u})$. Une condition suffisante est que les incréments $(Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u} + \mathbf{h}))$ soient stationnaires d'ordre deux. Nous appelons cette condition « l'hypothèse intrinsèque ». La stationnarité de second ordre implique l'hypothèse intrinsèque alors que l'inverse n'est pas vrai ; c.-à-d. que la stationnarité n'est pas une propriété du modèle de F.A., mais bien une propriété nécessaire pour l'inférence. La stationnarité est ainsi une décision, et non une hypothèse à infirmer ou à confirmer. La stationnarité permet ainsi l'étude de données sur des domaines considérés homogènes. Lorsqu'un modèle régional est hétérogène et présente des « zones » qui forment différents sous-domaines locaux homogènes, il est suggéré de délimiter ces zones afin de leur appliquer la décision de stationnarité.

A.6 Modélisation de la variabilité spatiale

La présente section est tirée des travaux de Goovaerts (1997, voir chap. 4, § 4.2, p. 87). La notation est légèrement modifiée afin de respecter la cohérence du présent document. Nous abordons en premier lieu l'admissibilité des modèles de covariance. Nous abordons ensuite les modèles d'anisotropie ainsi que le modèle linéaire de régionalisation.

A.6.1 Modèles admissibles

Soit $\{Z(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathcal{A}\}$ une F.A. stationnaire, de covariance $C(\mathbf{h})$. La variance d'une quelconque combinaison linéaire finie, notée Y , d'une variable aléatoire $Z(\mathbf{u}_k)$, localisée en $\mathbf{u}_k \in \mathcal{A}$, s'exprime comme une combinaison linéaire des valeurs de covariance et doit être positive. Mathématiquement,

$$\text{Var}\{Y\} = \text{Var} \left\{ \sum_{k=1}^K \lambda_k Z(\mathbf{u}_k) \right\} = \sum_{l=1}^K \sum_{l=1}^K \lambda_k \lambda_l C(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_l) \geq 0. \quad (\text{A.50})$$

où λ est un facteur de pondération. Pour s'assurer que cette variance est positive, le modèle de covariance $C(\mathbf{h})$ doit être positif et défini. Considérant la relation $\gamma(\mathbf{h}) = C(0) - C(\mathbf{h})$, la variance est réécrite en terme du semi-variogramme.

$$\text{Var}\{Y\} = C(0) \sum_{k=1}^K \lambda_k \sum_{l=1}^K \lambda_l - \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \lambda_k \lambda_l \cdot \gamma(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_l) \geq 0. \quad (\text{A.51})$$

Nous présentons des modèles de covariances admissibles usuels,

– Effet de pépite :

$$g_p(h) = \begin{cases} 0, & \text{si } h = 0, \\ 1, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

- Modèle sphérique de portée a :

$$g_s(h) = \begin{cases} \frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3}, & \text{si } h \leq a, \\ 1, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

- Modèle exponentiel de portée effective a' :

$$g_e(h) = 1 - e^{-3h/a'}. \quad (\text{A.54})$$

- Modèle gaussien :

$$g_g(h) = 1 - e^{-3h^2/a'^2}. \quad (\text{A.55})$$

- Modèle de puissance :

$$g_w(h) = h^w \text{ pour } 0 < w < 2. \quad (\text{A.56})$$

Il doit être noté que pour le modèle d'effet de pépite, le seuil est atteint pour tout $h > 0$. Pour ce qui est du modèle sphérique, le seuil est atteint pour une distance égale à la portée $h = a$. De plus, trois types de comportements peuvent être distingués proche de l'origine ; soit un comportement parabolique (modèle gaussien), linéaire (modèles sphériques et exponentiels) ou discontinu (effet de pépite).

A.6.2 Modèles anisotropiques

Un modèle est anisotrope lorsque la variabilité spatiale change avec la direction d'échantillonnage. La modélisation de l'anisotropie dépend et du module $|\mathbf{h}|$, et de la direction θ du vecteur \mathbf{h} . La présentation suivante se limite au cas bi-dimensionnel construit à l'aide d'un vecteur $\mathbf{h} = (h_x, h_y)^T$. Nous abordons en premier lieu l'anisotropie géométrique, où la *portée* varie en fonction de l'angle θ . Nous abordons ensuite

l'anisotropie zonale, où le *seuil* varie en fonction de l'angle θ . Nous contruisons finalement un modèle régional linéaire qui permet de sommer différents modèles.

Anisotropie géométrique

L'anisotropie est géométrique lorsque les semi-variogrammes directionnels ont le même modèle, le même seuil, mais possèdent une portée différente. Le diagramme des portées versus la direction d'analyse est alors représenté par une ellipse dont le demi-axe majeur de l'ellipse correspond à la direction qui possède le maximum de continuité (c.-à-d. la plus grande portée). L'angle θ est par convention évalué à partir de la verticale (h_y) en sens horaire. Le demi-axe mineur de l'ellipse est perpendiculaire au demi-axe majeur et possède un angle $\phi = \theta + 90^\circ$. Les deux semi-variogrammes qui sont évalués en θ et ϕ peuvent être lissés par un des modèles admissibles. Les portées a_θ et a_ϕ correspondent aux axes de l'ellipse et le facteur d'anisotropie λ_a est défini comme le rapport des portées,

$$\lambda_a = \frac{a_\phi}{a_\theta} < 1. \quad (\text{A.57})$$

La correction d'anisotropie géométrique consiste à transposer les coordonnées spatiales $\mathbf{h} = (h_x, h_y)^T$ en un nouveau vecteur $\mathbf{h}' = (h'_\phi, h'_\theta)^T$ et de manière à lier le semi-variogramme anisotrope $g(\mathbf{h})$ à un semi-variogramme isotrope $g_t(|\mathbf{h}'|)$ contenu à l'intérieur d'un nouveau système de coordonnées. Nous écrivons $|\mathbf{h}'|$ de sorte que,

$$|\mathbf{h}'| = \sqrt{h'^2_\phi + h'^2_\theta}. \quad (\text{A.58})$$

La transformation procède en deux étapes, soit,

1. par une rotation horaire :

$$\mathbf{h}_\theta = \begin{bmatrix} h_\phi \\ h_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}, \quad (\text{A.59})$$

2. ainsi qu'une mise à l'échelle :

$$\mathbf{h}' = \begin{bmatrix} h'_\phi \\ h'_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_\phi \\ h_\theta \end{bmatrix}, \quad (\text{A.60})$$

où $\lambda_a = \frac{a_\phi}{a_\theta} < 1$.

Anisotropie zonale

L'anisotropie zonale se traduit par une variation du seuil du semi-variogramme en fonction de l'angle d'échantillonnage θ . Le semi-variogramme dans la direction du demi-axe mineur ϕ possède une plus longue portée a_ϕ et un seuil plus élevé que pour toutes autres directions. Ce type d'anisotropie est modélisé en sommant un modèle isotropique de transition $g_1(|\mathbf{h}|)$ avec un modèle « zonal » $g_2(h_\phi)$ qui ne dépend que de la distance h_ϕ , dans la direction représentant la plus forte variance. Nous écrivons,

$$g(\mathbf{h}) = g_1(|\mathbf{h}|) + g_2(h_\phi), \quad (\text{A.61})$$

où a_ϕ est la portée du modèle g_2 . L'anisotropie zonale $g_2(h_\phi)$ est corrigée en deux étapes tel qu'un cas limite d'anisotropie géométrique précédemment établie,

1. La rotation des axes du système de coordonnées en sens horaire est effectuée de sorte que l'ordonnée (c.-à-d. la verticale) pointe en direction du seuil le plus élevé. De façon similaire à l'anisotropie géométrique, le nouveau vecteur de coordonnées $(h_\phi, h_\theta)^T$ est construit de sorte que,

$$\mathbf{h}_\theta = \begin{bmatrix} h_\phi \\ h_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}. \quad (\text{A.62})$$

2. Les axes sont ensuite mis à l'échelle de manière à ce que le modèle zonal n'agisse pas dans la direction θ caractérisée par une plus forte continuité. Ceci revient à poser une portée a_θ infiniment longue. De cette façon, le facteur d'anisotropie λ_a s'annule. Ainsi,

$$\mathbf{h}' = \begin{bmatrix} h'_\phi \\ h'_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_\phi \\ h_\theta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.63})$$

A.6.3 Modèle linéaire de régionalisation

Dans nombres de situations, plus d'un modèle de semi-variogramme $g(\mathbf{h})$ est nécessaire. La combinaison des modèles est appelée une structure gigogne. Cependant, ce ne sont pas toutes les combinaisons de modèles de semi-variogrammes et covariogrammes qui sont admissibles. Il est suggéré de construire une F.A. comme une combinaison linéaire de modèles admissibles. Soit $Z(\mathbf{u})$ une F.A., combinaison linéaire de $(L + 1)$ F.A. indépendantes $G^l(\mathbf{u})$. Nous écrivons cette combinaison sous la forme suivante,

$$Z(\mathbf{u}) = \sum_{l=0}^L a^l G^l(\mathbf{u}) + m, \quad (\text{A.64})$$

où $m = \mathcal{E}\{Z(\mathbf{u})\}$ est l'espérance de la combinaison linéaire, où $\mathcal{E}\{G^l(\mathbf{u})\} = 0 \forall l$ et où,

$$\text{Cov}\{G^l(\mathbf{u}), G^{l'}(\mathbf{u} + \mathbf{h})\} = \begin{cases} c_l(\mathbf{h}), & \text{si } l = l', \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

Cette dernière condition exprime l'indépendance mutuelle des $L + 1$ F.A. $G^l(\mathbf{u})$ lorsque comparées deux-à-deux. La décomposition linéaire se traduit par une fonction de covariance de la F.A. $Z(\mathbf{u})$ qui elle aussi est une combinaison linéaire de $L + 1$ fonctions de

covariances $c_l(\mathbf{h})$. Nous écrivons la fonction de covariance $C(\mathbf{h})$,

$$C(\mathbf{h}) = \text{Cov}\{Z(\mathbf{u}), Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})\} = \sum_{l=0}^L \sum_{l'=0}^L a^l a^{l'} \text{Cov}\{G^l(\mathbf{u}), G^{l'}(\mathbf{u} + \mathbf{h})\} = \sum_{l=0}^L a^{2l} c_l(\mathbf{h}), \quad (\text{A.66})$$

puisque les $L + 1$ F.A. $G^l(\mathbf{h})$ sont mutuellement indépendantes. Le modèle de covariance s'écrit aussi pour $a^{2l} = b^l$,

$$C(\mathbf{h}) = \sum_{l=0}^L b^l c_l(\mathbf{h}) \geq 0, \quad (\text{A.67})$$

où b^l est le seuil positif du modèle de covariance $c_l(\mathbf{h})$. Les fonctions de covariance sont aussi des modèles admissibles. En terme de variogramme, nous posons $g_l(\mathbf{h})$ soit le semi-variogramme de la F.A. $G^l(\mathbf{u})$, possédant un semi-variogramme croisé nulle entre deux F.A. $G^l(\mathbf{u})$ et $G^{l'}(\mathbf{u})$, ainsi,

$$\mathcal{E}\left\{\left(G^l(\mathbf{u}) - G^l(\mathbf{u} + \mathbf{h})\right) \cdot \left(G^{l'}(\mathbf{u}) - G^{l'}(\mathbf{u} + \mathbf{h})\right)\right\} = \begin{cases} g_l(\mathbf{h}), & \text{si } l = l', \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (\text{A.68})$$

On écrit alors le semi-variogramme $\gamma(\mathbf{h})$ comme une combinaison linéaire positive des modèles de semi-variogramme $g_l(\mathbf{h})$, soit,

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \mathcal{E}\left\{\left(Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})\right)^2\right\} = \sum_{l=0}^L b^l g_l(\mathbf{h}) \geq 0. \quad (\text{A.69})$$

A.7 Krigeage

La présente section est tirée des travaux de Goovaerts (1997, voir chap. 5, p. 125). La notation est légèrement modifiée afin de respecter la cohérence du présent document. Nous exposons les modèles de krigeage simple ainsi que de krigeage ordinaire.

A.7.1 Paradigme du krigeage

L'objectif est d'évaluer un attribut aux endroits ne possédant aucune valeur connue \mathbf{u} , à partir des valeurs disponibles sur un domaine d'étude \mathcal{A} . Soit un ensemble de N valeurs connues $\{z(\mathbf{u}_n), n = 1, \dots, N\}$ d'un attribut continu z . L'estimateur de krigeage $Z^*(\mathbf{u})$ est défini comme étant un estimateur de régression linéaire que nous écrivons,

$$Z^*(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^N \lambda_n(\mathbf{u}) \left(Z(\mathbf{u}_n) - m(\mathbf{u}_n) \right), \quad (\text{A.70})$$

où $\lambda_n(\mathbf{u})$ est un poids assigné à la donnée $z(\mathbf{u}_n)$. $Z(\mathbf{u}_n)$. Les quantités notées $m(\mathbf{u})$ et $m(\mathbf{u}_n)$ sont les espérances mathématiques des V.A. $Z(\mathbf{u})$ et $Z(\mathbf{u}_n)$, respectivement. Le nombre de points de données utilisées et leur poids diffère possiblement pour chaque localisation à estimer. En pratique, seul les valeurs connues dans un voisinage $W(\mathbf{u})$ sont retenues. L'interprétation de la valeur inconnue $z(\mathbf{u})$ et de la donnée connue $z(\mathbf{u}_n)$ comme étant des réalisations de V.A. $Z^*(\mathbf{u})$ et $Z(\mathbf{u})$ permet de définir un estimateur d'erreur, telle une autre V.A. $Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u})$. Le krigeage est ainsi utilisé pour estimer une V.A. en un point, en minimisant l'estimation de l'erreur, celle-ci étant donnée par la variance $\sigma_E^2(\mathbf{u})$ que nous écrivons,

$$\sigma_E^2(\mathbf{u}) = \text{Var} \left\{ Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u}) \right\}. \quad (\text{A.71})$$

sous la contrainte de non-biais de l'estimateur,

$$\mathcal{E}\{Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u})\} = 0. \quad (\text{A.72})$$

Nous discernons trois modèles de krigeage à un attribut ; soit le krigeage « simple », où $m(\mathbf{u})$ est constante et connue sur tout le domaine \mathcal{A} ; le krigeage « ordinaire », où $m(\mathbf{u})$ est considérée inconnue et possiblement variable localement sur le domaine, d'un voisinage $W(\mathbf{u})$ à l'autre ; et finalement le krigeage de « tendance », où la valeur inconnue des moyennes locales $m(\mathbf{u}')$ est variable à l'intérieur de chaque voisinage $W(\mathbf{u})$. Dans le cadre de cette étude, nous ne référons qu'au krigeage simple et ordinaire, alors que nous invitons le lecteur intéressé à consulter les travaux de Goovaerts (1997, voir chap. 5, § 5.3 et suivantes, p. 132) pour de plus amples détails sur les autres types de krigeage existants.

A.7.2 Krigeage simple

La modélisation d'une moyenne $m(\mathbf{u})$ stationnaire permet d'écrire l'estimateur linéaire de l'éq. (A.70) tel qu'une combinaison linéaire de $(N(\mathbf{u}) + 1)$ éléments d'information : la moyenne plus les $N(\mathbf{u})$ V.A. $Z(\mathbf{u}_n)$,

$$Z^*(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u}) Z_n(\mathbf{u}) + m \left(1 - \sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u}) \right), \quad (\text{A.73})$$

où les Z_n sont les valeurs connues à l'intérieur du domaine et où les facteurs de pondération λ_n sont obtenus afin de minimiser l'erreur sur la variance $\sigma_E^2(\mathbf{u}) = \text{Var}\{Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u})\}$, sous la contrainte de non-biais (voir éq. (A.72)). L'estimateur de krigeage simple est non-biaisé puisque l'erreur moyenne est nulle. D'utiliser l'éq. (A.73) donne,

$$\mathcal{E}\{Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u})\} = m - m = 0. \quad (\text{A.74})$$

L'erreur d'estimation $Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u})$ peut être vue comme une combinaison linéaire des $N(\mathbf{u}) + 1$ F.A. « résiduelles », notées $R(\mathbf{u})$ et $R(\mathbf{u}_n)$, soit,

$$\begin{aligned}
 Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u}) &= \left(Z^*(\mathbf{u}) - m \right) - \left(Z(\mathbf{u}) - m \right), \\
 &= \sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u}) R(\mathbf{u}_n) - R(\mathbf{u}), \\
 &= R^*(\mathbf{u}) - R(\mathbf{u}),
 \end{aligned} \tag{A.75}$$

où $R(\mathbf{u}_n) = Z(\mathbf{u}_n) - m$ et $R(\mathbf{u}) = Z(\mathbf{u}) - m$. L'erreur de variance peut donc être vu comme une double combinaison linéaire des valeurs résiduelles de covariance,

$$\begin{aligned}
 \sigma_E^2 &= \text{Var}\{R^*(\mathbf{u})\} + \text{Var}\{R(\mathbf{u})\} - 2\text{Cov}\{R^*(\mathbf{u}), R(\mathbf{u})\}, \\
 &= \sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \sum_{m=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u}) \lambda_m(\mathbf{u}) C_R(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m) + C_R(0) - 2 \sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u}) C_R(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}), \\
 &= Q\left(\lambda_n(\mathbf{u}), n = 1, \dots, N(\mathbf{u})\right).
 \end{aligned} \tag{A.76}$$

où $C_R(\mathbf{h}) = \text{Cov}\{R(\mathbf{u}), R(\mathbf{u} + \mathbf{h})\} = \mathcal{E}\{R(\mathbf{u}) + R(\mathbf{u} + \mathbf{h})\}$ est la covariance des résidus $R(\mathbf{u}) = Z(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u})$. Ces derniers sont interprétés comme la décomposition du modèle de F.A.. L'espérance des résidus $\mathcal{E}\{R(\mathbf{u})\} = 0$. L'erreur de variance développée à l'éq. (A.76) est de forme quadratique $Q(\cdot)$ pour les $N(\mathbf{u})$ facteurs de pondération $\lambda_n(\mathbf{u})$. Les poids qui minimisent l'erreur de variance sont obtenus en posant nulle chaque première dérivée partielle de $N(\mathbf{u})$, soit,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial Q(\mathbf{u})}{\partial \lambda_n(\mathbf{u})} = \sum_{m=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_m(\mathbf{u}) C_R(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m) - C_R(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}) = 0, \tag{A.77}$$

Ce système est un système à $N(\mathbf{u})$ équations linéaires, connu sous le nom de système de krigeage simple. La stationnarité de la moyenne nous assure que la fonction de covariance résiduelle $C_R(\mathbf{h})$ égale la fonction de covariance stationnaire $C(\mathbf{h})$ de la F.A. $Z\mathbf{u}$, ce qui nous permet de réécrire le système de krigeage (éq. (A.77)) en terme de la covariance de Z , tel que,

$$\sum_{m=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_m(\mathbf{u}) C(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m) = C(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}). \tag{A.78}$$

La variance minimale d'erreur, aussi appelée variance de krigeage simple, est obtenue en substituant l'éq. (A.78) dans l'éq. (A.76). Nous obtenons,

$$\sigma_E^2(\mathbf{u}) = C(0) - \sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u})C(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}). \quad (\text{A.79})$$

L'estimateur de krigeage simple est un interpolateur exact, c'est à dire que les valeurs mesurées utilisées dans la modélisation par krigeage sont reproduites.

A.7.3 Krigeage ordinaire

En pratique, la moyenne locale d'un modèle peut varier de manière significative sur tout le domaine d'étude. Le krigeage ordinaire permet de tenir compte de telles variations en limitant le domaine de stationnarité à des voisinages $W(\mathbf{u})$, centrés en \mathbf{u} . L'estimateur linéaire de l'éq. (A.70) est donc une combinaison linéaire d'une moyenne locale constante $m(\mathbf{u})$ et de $N(\mathbf{u})$ V.A. $Z(\mathbf{u}_n)$,

$$Z^*(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u})Z(\mathbf{u}_n) + m(\mathbf{u}) \left(1 - \sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u}) \right). \quad (\text{A.80})$$

La moyenne locale inconnue $m(\mathbf{u})$ est obtenue de l'estimateur linéaire en forçant la somme des poids de krigeage à l'unité. L'estimateur de krigeage ordinaire $Z^*(\mathbf{u})$ peut donc être écrit comme une combinaison linéaire des $N(\mathbf{u})$ V.A. $Z(\mathbf{u}_n)$,

$$Z^*(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u})Z(\mathbf{u}_n), \text{ et} \quad (\text{A.81})$$

et,

$$\sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u}) = 1. \quad (\text{A.82})$$

Les $N(\mathbf{u})$ poids $\lambda_n(\mathbf{u})$ sont évalués en minimisant la variance d'erreur, tout en respectant la contrainte de non-biais (voir éq. (A.72)). L'estimateur de krigeage ordinaire est non-

biaisé puisque l'erreur moyenne est nulle,

$$\mathcal{E}\left\{Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u})\right\} = \sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u})m(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u}) = m(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u}) = 0. \quad (\text{A.83})$$

L'erreur de variance est minimiser sous la contrainte de non-biais de l'éq. (A.82), en utilisant le Lagrangien $L(\mathbf{u})$, qui est une fonction des facteur de pondération $\lambda_n(\mathbf{u})$ et du paramètre de Lagrange, noté $2\mu(\mathbf{u})$,

$$L\left(\lambda_n(\mathbf{u}), n = 1, \dots, N(\mathbf{u}); 2\mu(\mathbf{u})\right) = \sigma_E^2(\mathbf{u}) + 2\mu(\mathbf{u}) \left(\sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u}) - 1 \right). \quad (\text{A.84})$$

Les poids optimaux $\lambda_n(\mathbf{u})$ sont obtenus en posant nulles les $N(\mathbf{u}) + 1$ dérivées partielles,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L(\mathbf{u})}{\partial \lambda_n(\mathbf{u})} = \sum_{m=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_m(\mathbf{u})C_R(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m) - C_R(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{A.85})$$

et,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L(\mathbf{u})}{\partial \mu_n(\mathbf{u})} = \sum_{m=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_m(\mathbf{u}) - 1 = 0. \quad (\text{A.86})$$

Le système de krigeage ordinaire inclut $N(\mathbf{u}) + 1$ équations linéaires à $N(\mathbf{u}) + 1$ inconnus. Les $N(\mathbf{u})$ poids $\lambda_n(\mathbf{u})$ et le paramètre de Lagrange $\mu(\mathbf{u})$ qui sert de contrainte sur les facteurs de pondération,

$$\sum_{m=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_m(\mathbf{u})C_R(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m) = C_R(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}), \text{ et } \sum_{m=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_m(\mathbf{u}) = 1. \quad (\text{A.87})$$

Même si la moyenne $m(\mathbf{u})$ est supposée être stationnaire seulement dans les voisinages de $W(\mathbf{u})$, en pratique, la covariance résiduelle est à la covariance globale qui elle est évaluée à partir de toutes les données disponibles, ce qui mène au système suivant,

$$\sum_{m=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_m(\mathbf{u})C(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m) = C(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}), \text{ et } \sum_{m=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_m(\mathbf{u}) = 1. \quad (\text{A.88})$$

L'erreur de variance minimale de krigeage ordinaire résultante est obtenué en substituant les $N(\mathbf{u})$ équations précédentes dans le système de krigeage ordinaire (du type de l'éq. (A.76)), pour obtenir,

$$\sigma_E^2(\mathbf{u}) = C(0) - \sum_{n=1}^{N(\mathbf{u})} \lambda_n(\mathbf{u})C(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}) - \mu(\mathbf{u}). \quad (\text{A.89})$$

Le système de krigeage ordinaire est d'ordinaire préféré au krigeage simple puisque ne requiert ni la connaissance, ni la stationnarité de la moyenne sur l'ensemble de domaine \mathcal{A} .

A.8 Simulation séquentielle bayésienne

Cette section présente l'algorithme de simulation séquentielle bayésienne. Tel que précédemment mentionné, la simulation séquentielle est un outil flexible, facile d'utilisation et peu coûteux en ressource informatique. De plus, sa version bayésienne lui confère la capacité de tenir compte simultanément d'une part d'une distribution de *vraisemblance* des données expérimentales et d'autre part d'une distribution *a priori* contraignant la variabilité spatiale.

A.8.1 Simulation séquentielle

Soit $\{Z(\mathbf{u}'_j), j = 1, \dots, N_j\}$, un ensemble de variable aléatoire (V.A.) définies en N_j positions \mathbf{u}' à l'intérieur du domaine \mathcal{A} (Goovaerts, 1997, voir chap. 8, p. 369). Ces positions n'ont pas à être sous la forme d'une grille régulière. L'objectif est de générer plusieurs réalisations conjointes de ces N V.A.. Les réalisations s'écrivent,

$$\{z^{(l)}(\mathbf{u}'_j), j = 1, \dots, N_j\}, \quad \forall l = 1, \dots, N, \quad (\text{A.90})$$

et elles sont conditionnelles à l'ensemble des échantillons mesurés $\{z(\mathbf{u}_n), n = 1, \dots, N\}$. Nous considérons en premier la simulation conjointe des valeurs de z en deux positions,

soit \mathbf{u}'_1 et \mathbf{u}'_2 . Un ensemble de couples de réalisations $\{z_{(l)}(\mathbf{u}'_1), z_{(l)}(\mathbf{u}'_2), l = 1, \dots, L\}$ est généré en échantillonnant la F.D.P. conditionnelle bi-variée, que nous écrivons,

$$F(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2; z_1, z_2 | (N)) = \mathcal{P}\{Z(\mathbf{u}'_1) \leq z_1, Z(\mathbf{u}'_2) \leq z_2 | (N)\}. \quad (\text{A.91})$$

Une approche alternative est donnée par le théorème de Bayes qui stipule qu'une quelconque F.D.P. conditionnelle peut être exprimée comme le produit de F.D.P. univariées. Mathématiquement,

$$F(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2; z_1, z_2 | (N)) = F(\mathbf{u}'_2; z_2 | (N + 1)) \cdot F(\mathbf{u}'_1; z_1 | (N)), \quad (\text{A.92})$$

où $|(N + 1)$ signifie que le conditionnement est donné pour la N -ième valeur $z(\mathbf{u}_n)$ ainsi qu'à la réalisation $Z(\mathbf{u}'_1) = z_{(l)}(\mathbf{u}'_1)$. La précédente décomposition permet de générer des couples de points $\{z_{(l)}(\mathbf{u}'_1), z_{(l)}(\mathbf{u}'_2)\}$ en deux étapes : on tire d'abord aléatoirement une valeur $z_{(l)}(\mathbf{u}'_1)$ à l'intérieur de la F.D.P. conditionnelle $F(\mathbf{u}'_1; z_1 | (N))$, on conditionne ensuite la F.D.P. conditionnelle en \mathbf{u}'_2 en comptant la réalisation $z_{(l)}(\mathbf{u}'_1)$ parmi l'ensemble de N données originales. L'idée est de remplacer la F.D.P. conditionnelle bi-variée par un échantillonnage séquentiel de deux F.D.P. conditionnelles univariées, d'où le nom de « simulation séquentielle ». Le principe de simulation séquentielle est généralisé à plus de deux positions en appliquant récursivement le théorème de Bayes. Les F.D.P. conditionnelles à N_j points sont écrites telles que le produit de N_j F.D.P. conditionnelles univariées, c'est à dire que,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_{N_j}; z_1, \dots, z_{N_j} | (N)) &= F(\mathbf{u}'_{N_j}; z_{N_j} | (N + N_j - 1)) \\ &\cdot F(\mathbf{u}'_{N_j-1}; z_{N_j-1} | (N + N_j - 2)) \\ &\dots \cdot F(\mathbf{u}'_2; z_2 | (N + 1)) \cdot F(\mathbf{u}'_1; z_1 | (N)), \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

où par exemple, $F(\mathbf{u}'_{N_j}; z_{N_j} | (N + N_j - 1))$ est la F.D.P. conditionnelle de $Z(\mathbf{u}'_{N_j})$ étant donné l'ensemble des N valeurs originales est les $N_j - 1$ réalisations de $Z(\mathbf{u}'_j)$, $j = 1, \dots, N_j - 1$. La précédente décomposition permet la réalisation d'un vecteur aléatoire

$\{Z(\mathbf{u}'_j), j = 1, \dots, N_j\}$ en N_j étapes, soit,

1. Modélisation de la F.D.P. à la position \mathbf{u}'_1 , conditionnelle aux N données originales $z(\mathbf{u}_n)$; $F(\mathbf{u}'_1; z|(N)) = \mathcal{P}\{Z(\mathbf{u}'_1) \leq z|(N)\}$.
2. Tirage aléatoire de la F.D.P. conditionnelle d'une réalisation $z_{(l)}(\mathbf{u}'_1)$ qui devient un point de donnée conditionnel pour les prochains tirages.
3. Modélisation de la F.D.P. conditionnelle de $Z(\mathbf{u}'_i)$, au i -ième point \mathbf{u}'_i visité, étant donné les N données originales et les $i - 1$ réalisations $z_{(l)}(\mathbf{u}'_j), j = 1, \dots, i - 1$; $F(\mathbf{u}'_i; z|(N + i - 1)) = \mathcal{P}\{Z(\mathbf{u}'_i) \leq z|(N + i - 1)\}$.
4. Tirage aléatoire de la F.D.P. conditionnelle d'une réalisation $z_{(l)}(\mathbf{u}'_i)$, qui devient une donnée conditionnante pour tous les tirages subséquents.
5. Répétition des deux dernières étapes jusqu'à ce que tous les N_j points aient été visités. L'ensemble résultant de valeurs simulées $\{z_{(l)}(\mathbf{u}'_j), j = 1, \dots, N_j\}$ représente une réalisation de la fonction aléatoire $\{Z(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathcal{A}\}$ sur les N_j positions \mathbf{u}'_j . Un nombre L de réalisations est obtenu en reprenant le processus L fois et en utilisant un parcours de simulation différent pour chaque réalisation.

A.8.2 Simulation séquentielle bayésienne

La prochaine étape est la construction du F.D.P. représentative des coefficients d'approximation du modèle analogue ainsi que du modèle géophysique synthétique. Dans le cadre de ce projet de recherche, la simulation séquentielle bayésienne est pré-

conisée. Cette approche permet de construire une F.D.P. en tenant compte à nouveau du théorème de Bayes (Dubreuil Boisclair *et al.*, 2011). Tel qu'expliqué plus haut, le théorème de Bayes stipule que la probabilité $\mathcal{P}(A|B)$ qu'un événement A existe, sous condition qu'un événement B soit réalisé, est proportionnelle au produit $\mathcal{P}(B|A) \cdot \mathcal{P}(A)$ (Doyen & Den Boar, 1996). Nous posons $A \rightarrow p_{t+1}$ et $B \rightarrow g_{t+1}$ pour obtenir $f(p_{t+1}|g_{t+1}) \propto f(g_{t+1}|p_{t+1})f(p_{t+1})$. Ici, $f(p_{t+1}|g_{t+1})$ est une distribution *a posteriori* issue d'une densité de probabilité conjointe de *vraisemblance* entre les coefficients d'approximation du modèle analogue ainsi que de $f(p_{t+1})$, une distribution *a priori* obtenue en paramétrant par krigeage ordinaire une distribution normale. Dans ce cas-ci, la distribution *a posteriori* correspond à la fois aux relations spatiales des coefficients d'approximation géophysiques synthétiques et aux relations statistiques d'étalonnage entre les coefficients d'approximation du modèle analogue. Plus spécifiquement, la première étape de l'approche consiste à générer une densité de probabilité au moyen d'un noyau d'interpolation non-paramétrique, entre les coefficients d'approximation des images du modèle analogue. Ensuite, pour chaque coefficient d'approximation du modèle géophysique synthétique, une densité de probabilité de vraisemblance est extraite du noyau et mise en mémoire. La deuxième étape consiste à simuler par simulation séquentielle gaussienne (fonction *a priori* gaussienne paramétrisée par krigeage simple) et à chaque séquence de multiplier la fonction *a priori* à la fonction de vraisemblance avant de tirer aléatoirement une valeur de coefficients d'approximation.

A.8.2.1 Noyau d'interpolation

Une fonction aléatoire $f(x)$ de densité de probabilité conjointe peut être construite à l'aide d'un estimateur de noyau de densité, ce dernier étant une représentation non-paramétrique d'une fonction de j variables aléatoires qui ne tienne compte d'aucun *a priori* fonctionnel de densité (Martinez & Martinez, 2008, voir chap. 7, § 9.3, p. 322). Soit $x_i, i=1, 2, \dots, n$, un échantillon tiré d'une distribution quelconque qui possède une

fonction de densité $f(x)$ que nous souhaitons évaluer. Son estimateur non-paramétrique $F(x)$ est défini tel que,

$$F(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h_f}\right), \quad (\text{A.94})$$

où $K(t)$ est le noyau qui satisfait à l'égalité suivante,

$$\int K(t) dt = 1. \quad (\text{A.95})$$

Ici, $h = t_{k+1} - t_k$ est l'incrément des k tranches du noyau d'épaisseur t . Le paramètre h_f définit le « lissage » de la fonction de densité de probabilité. Lorsque la fenêtre d'interpolation h_f est petite, la fonction de densité de probabilité peut varier beaucoup. À l'inverse, lorsque la fenêtre d'interpolation est large, la fonction de densité de probabilité est douce. Différentes méthodes peuvent être utilisées afin de déterminer la fenêtre d'interpolation optimale. Globalement ces méthodes dépendent de l'écart-type σ des valeurs de la distribution interpolée. Par exemple, il est proposé dans Martinez & Martinez (2008) une loi de « référence »,

$$h_f = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/5} \sigma n^{-1/5}, \quad (\text{A.96})$$

Nous posons ensuite $K_h(t) = K(t/h_f)/h_f$ et réécrivons l'éq. A.94 de sorte que,

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_f}(x - x_i). \quad (\text{A.97})$$

Bien qu'il existe des exceptions, le noyau est en règle générale une fonction de densité de probabilité symétrique qui peut être défini de différentes façons. Le tableau A.1 montre les différents noyaux admis. Pour le cas multi-dimensionnel, nous posons ici que l'échantillonnage contient n échantillons et que chaque observation est un vecteur $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$, de longueur l . L'estimateur de noyau multi-dimensionnel s'écrit donc,

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{nh_{f1} \dots h_{fd}} \sum_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^d K\left(\frac{x_j - x_{ij}}{h_{fj}}\right) \right\}, \quad (\text{A.98})$$

où x_{ij} est la i -ième observation de la j -ième variable (dimension). La table A.1 présente différents noyaux couramment utilisés, autres que le noyau d'ondelette présenté à la

section 2.3.4. Finalement, à l'aide du noyau d'interpolation, il est possible de construire une densité de probabilité entre les coefficients d'approximation du modèle analogue.

Exemples de noyaux d'interpolation de densité	
Noyaux	Définition
Gaussien	$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t^2/2)}, \quad -\infty < t < \infty$
Triangle	$K(t) = (1 - t), \quad -1 \leq t \leq 1$
Epanechnikov	$K(t) = \frac{3}{4}(1 - t^2), \quad -1 \leq t \leq 1$
Bi-pondéré	$K(t) = \frac{15}{16}(1 - t^2)^2, \quad -1 \leq t \leq 1$
Tri-pondéré	$K(t) = \frac{35}{32}(1 - t^2)^3, \quad -1 \leq t \leq 1$
Normal	$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2}, \quad -\infty < t < \infty$

Tableau A.1 – Exemples de noyaux d'interpolation de densité. Inspiré de Martinez & Martinez (2008).

Annexe B

Transformée de Fourier par fenêtre d'intégration

Cette annexe est tirée de Mallat (1989b). Nous abordons en premier lieu la définition de la transformée de Fourier par fenêtre d'intégration, sa notation ainsi que ses propriétés.

B.1 Définition

La transformée de Fourier d'une fonction $f(x)$, notée $\hat{f}(\omega)$ est la projection d'un signal dans l'espace de Fourier. Techniquement le signal est intégrée dans le temps ou l'espace de sorte que le signal soit projeté dans l'espace des fréquences. Cette transformation est réversible, cependant inexacte puisque l'information spatiale (ou temporelle) est perdue à la première transformation. De manière à retrouver cette localisation, il est proposé d'utiliser une fenêtre spatiale $g(x)$ s dans le processus d'intégration afin de

définir des régions d'intégration. Cette fenêtre se déplace le long de l'espace (ou du temps) pour couvrir un signal en entier. En une position u , pour une fréquence ω , la transformée de Fourier par fenêtre glissante d'une fonction $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ est définie telle que,

$$G\{f(\omega, u)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} g(x - u) f(x) dx. \quad (\text{B.1})$$

Cette équation mesure localement, autour du point u , l'amplitude de la composante sinusoïdale de fréquence ω . Lorsque la fonction $g(x)$ est gaussienne, on parle de la transformée par fenêtre de Gabor. Cette fonction est générale pour tout type de fonction. La fonction « fenêtre » est usuellement une fonction paire et l'énergie de ses transformées de Fourier respectives est concentrée à l'intérieur des bandes de basse-fréquence. Cela peut donc être vu comme une fonction de réponse d'un filtre passe-bas. Pour des fins de normalisation, nous supposons que l'énergie de $g(x)$ égale 1, soit $\|g\|^2$, la norme de $g(x)$:

$$\|g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 = 1. \quad (\text{B.2})$$

Nous notons ensuite,

$$g_{\omega_0, u_0}(x) = e^{i\omega_0 x} g(x - u_0). \quad (\text{B.3})$$

Une transformée de Fourier par fenêtre d'intégration (T.F.F.) peut aussi être interprétée comme le produit scalaire de la fonction $f(x)$ avec la famille de fonctions $g_{\omega, u}(x)_{(\omega, u) \in \mathcal{R}^2}$, soit,

$$G\{f(\omega, u)\} = \langle f(x), g_{\omega, u}(x) \rangle. \quad (\text{B.4})$$

En physique quantique, une telle famille de fonction est appelée un « ensemble d'état cohérents ». La transformée de Fourier de $g_{\omega, u_0}(x)$ est donnée par,

$$\hat{g}_{\omega_0, u_0}(\omega) = e^{-iu_0\omega} \hat{g}(\omega - \omega_0), \quad (\text{B.5})$$

où $\hat{g}(\omega)$ est la transformée de Fourier de $g(x)$. Une famille d'états cohérents correspond ainsi à une translation dans le domaine spatial (paramètre u) et dans le domaine de Fourier (paramètre ω) d'une fonction $g(x)$, ce qui rend possible l'analyse simultanée dans les deux domaines (voir fig. B.1).

Nous écrivons le lien entre une T.F.F. et une représentation spectrale. Soit σ_u l'écart-type de $g(x)$,

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |g(x)|^2 dx. \quad (\text{B.6})$$

Soit σ_ω l'écart-type de la transformée de Fourier de $g(x)$,

$$\sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{B.7})$$

La fonction $g_{\omega_0, u_0}(x)$ est centrée en u_0 et possède un écart-type dans le domaine spatial. Sa transformée de Fourier, donnée par l'éq. (B.5), est centrée en ω_0 et possède un écart-type σ_ω . En appliquant la relation de Parseval (voir éq. (2.16)) sur l'éq. (B.4), nous obtenons,

$$G\{f(\omega_0, u_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g_{\omega_0, u_0}^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \hat{g}_{\omega_0, u_0}^*(\omega) d\omega. \quad (\text{B.8})$$

La première intégrale montre que dans le domaine spatial, $G\{f(\omega_0, u_0)\}$ dépend essentiellement des valeurs de $f(x)$ pour tout $x \in [u_0 - \sigma_u, u_0 + \sigma_u]$. La seconde intégrale prouve que dans le domaine des fréquences, $G\{f(\omega_0, u_0)\}$ dépend des valeurs de $\hat{f}(\omega)$ pour tout $\omega \in [\omega_0 - \sigma_\omega, \omega_0 + \sigma_\omega]$. La surface et la forme de la résolution de cette cellule sont indépendantes de u_0 et ω_0 , comme le montre la figure B.1. Maintenant la relation d'incertitude, appliquée à la fonction $g(x)$, implique que,

$$\sigma_u^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{B.9})$$

La résolution de la cellule ainsi ne peut pas être plus petite que $2\sqrt{2\pi}$. La relation d'incertitude atteint sa limite supérieure si et seulement si la fonction $g(x)$ est gaussienne.

En étant gaussienne, la résolution est optimale à l'intérieur de l'espace de phase. Nous appelons cette transformation une transformée de Gabor.

Représentation de l'espace de phase

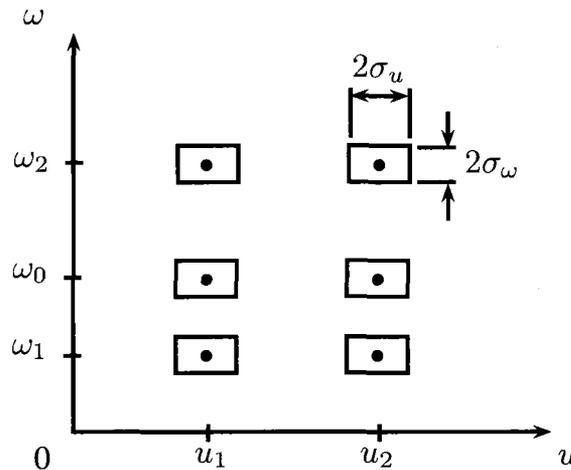


FIGURE B.1 – Représentation de l'espace de phase de Fourier. L'axe vertical donne la fréquence ω alors que l'axe horizontal présente la position spatiale u . La transformée de Fourier par fenêtre d'intégration $G\{f(\omega, u)\}$ fournit une description de $f(x)$ à l'intérieur d'une cellule de résolution $[u_0 - \sigma_u, u_0 + \sigma_u] \times [\omega_0 - \sigma_\omega, \omega_0 + \sigma_\omega]$. Inspirée de Mallat (1989b).

B.2 Propriétés

La transformée de Fourier par fenêtre d'interpolation (T.F.F.) est une isométrie (à un coefficient de proportionnalité près), c'est à dire que l'énergie est totalement conservée lors de la transformation de $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ vers $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^2)$, soit,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |G\{f(\omega, u)\}|^2 d\omega du. \quad (\text{B.10})$$

La fonction $f(x)$ est construite de $G\{f(\omega, u)\}$ suivant la relation,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G\{f(\omega, u)\} g(u-x) e^{i\omega x} d\omega du. \quad (\text{B.11})$$

Les équations (B.10) et (B.11) sont dérivées en appliquant la relation de Parseval (voir éq. (2.16)) et en utilisant la définition de $G\{f(\omega, u)\}$ de l'éq. (B.1).

Une T.F.F. est une représentation mathématique redondante. Au lieu d'évaluer $G\{f(\omega, u)\}$ pour toutes valeurs $(\omega, u) \in \mathcal{R}^2$, on échantillonne uniformément ω et u et la représentation peut rester stable et complète. Soit u_0 et ω_0 , deux intervalles d'échantillonnage dans chaque domaine. La T.F.F. discrète est définie $\forall n, m \in \mathcal{Z}$, telle que,

$$G_d\{f(m, n)\} = G\{f(m\omega_0, nu_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-im\omega_0 x} g(x - nu_0) f(x) dx. \quad (\text{B.12})$$

La discrétisation est uniforme dans l'espace de phase. Une T.F.F. discrète est équivalente à la division de l'axe des fréquences en des intervalles séparées de ω_0 . Dans chacun de ces intervalles, le signal est échantillonné à un taux de $1/u_0$. Intuitivement, les intervalles d'échantillonnage u_0 et ω_0 sont choisis pour couvrir l'espace de phase en entier, avec la résolution montrée à la figure B.1. Formellement, pour reconstruire une fonction $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ à partir d'un ensemble d'échantillons $(G_d\{f(n, m)\})_{(n,m) \in \mathcal{Z}^2}$, l'opérateur,

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{R}) \xrightarrow{G_d} \mathcal{I}^2(\mathcal{Z}^2), \quad (\text{B.13})$$

doit posséder un inverse fini et borné sur son intervalle. Chaque échantillon $G_d\{f(m, n)\}$ peut aussi être interprété tel qu'un produit scalaire dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$, soit,

$$G_d\{f(m, n)\} = \langle f(x), e^{im\omega_0 x} g(x - nu_0) \rangle = \langle f(x), g_{m\omega_0, nu_0}(x) \rangle. \quad (\text{B.14})$$

Les propriétés de la T.F.F. discrète dépendent donc de la famille de fonctions $(g_{m\omega_0, nu_0}(x))_{(n,m) \in \mathcal{Z}^2}$. Daubechies (1988) a démontré que pour obtenir un inverse G_d fini et borné, ω_0 et u_0 doivent satisfaire la relation suivante,

$$\omega_0 u_0 < 2\pi. \tag{B.15}$$

Lorsque $\omega_0 u_0 = 2\pi$, on atteint la fréquence de Nyquist où G_d n'a pas d'inverse fini et borné. Quand $\omega_0 u_0 < 2\pi$, l'intervalle de G_d est néanmoins une structure compliquée. Nous avons vu précédemment que les résolutions spatiales et spectrales d'une T.F.F. sont constantes. C'est à dire que cette information est localisée à l'intérieur d'un intervalle σ_u . L'écart-type σ_u de $g(x)$ devient la résolution de référence. Si le signal possède une discontinuité telle qu'une ligne, un bord, un coin, etc. (*an edge*) à l'intérieur de la fenêtre d'intégration, la précision ne peut excéder σ_u . C'est généralement le cas pour une image. De plus, si le signal est composé d'événements (*features*) qui sont d'échelles largement différentes, il est impossible d'avoir une résolution optimale pour analyser le signal.

Annexe C

Analyse morphométrique

La microstructure osseuse peut être caractérisée par des paramètres morphométriques standardisés (Parfitt *et al.*, 1987). Les mesures primaires sont les surfaces minéralisées, les périmètres osseux, les distances entre les trabécules qui forment le tissu osseux ainsi que le nombre de cellules osseuses présentes par pixel. Il existe ensuite les « indices dérivés », structurels ou cinétiques. Dans le cadre de cette étude, sont d'intérêt la structure des tissus osseux. La densité osseuse, appelée « nombre trabéculaire » (Tb.N [Longueur⁻¹]), est usuellement obtenue à l'aide de la relation,

$$\text{Tb.N} = \frac{\text{BV}}{\text{TV} \cdot \text{Tb.Th}} = \left(\frac{4\text{BV}}{\pi\text{TV}} \right)^{1/2} \text{Tb.Dm}^{-1} \simeq \frac{\text{BS}}{2\text{TV}}, \quad (\text{C.1})$$

où BV est le volume de tissu osseux, où TV est le volume de tissu spongieux, où Tb.Th est l'épaisseur trabéculaire, où Tb.Dm est le diamètre trabéculaire et où BS est la surface osseuse de l'os spongieux. La séparation entre les trabécules (Tb.Sp.), définie sur les côtés des trabécules plutôt qu'en leur centre, est évaluée telle que,

$$\text{Tb.Sp} = \frac{1}{\text{Tb.N}} - \text{Tb.Th}. \quad (\text{C.2})$$

Il doit être noté que ces paramètres sont évalués à partir d'un décompte de l'aire osseuse en pixel (B.Ar) et du périmètre osseux (B.Pm), alors que ces derniers sont effectués sur

Annexe C. Analyse morphométrique

les images en posant simplement un seuil de niveau de gris catégorisant la minéralisation osseuse. Les relations qui définissent ces paramètres sont ;

$$B.Pm = \frac{BS}{Tb.Th}, \quad (C.3)$$

et,

$$B.Ar = \frac{BV}{Tb.Th}. \quad (C.4)$$

Tel que nous pouvons le constater, l'analyse morphométrique intègre l'épaisseur du voxel. Les propriétés mesurées sont ainsi transposées en coupes bi-dimensionnelles.

Annexe D

Codes Matlab

D.1 Boucle de simulation séquentielle bayésienne (boucleaseq.m)

Nous montrons ici les codes que nous avons développés pour effectuer une simulation séquentielle bayésienne.

```
1 \begin{lstlisting}
2 % Boucle introduite Ã l'interieur de l'algorithme de synthese de textures
3 % (voir textureSynthesis.m, \ref{annexe-texturesynthesis}, ligne 188)
4 %
5 .
6 % Pour la premiere boucle de synthese
7 if niter==1
8
9 % Ouverture des images
10 im1=load('simu_2.dat'); im2=load('poro_2.dat');
```

Annexe D. Codes Matlab

```
11 im3=load('simu_1.dat'); im4=load('poro_1.dat');
12
13 % Normalisation des images
14 Tim1=(im1-mean2(im1))./std2(im1); Tim2=(im2-mean2(im2))./std2(im2);
15 Tim3=(im3-mean2(im3))./std2(im3); Tim4=(im4-mean2(im4))./std2(im4);
16
17 % Creation des coefficients d'ondelettes pour les basses frequences
18 [Im1]=interchangeap(Nsc,Nor,acr0,lz,la,cmask,var0,p,niter,Tim1);
19 [Im2]=interchangeap(Nsc,Nor,acr0,lz,la,cmask,var0,p,niter,Tim2);
20 [Im3]=interchangeap(Nsc,Nor,acr0,lz,la,cmask,var0,p,niter,Tim3);
21 [Im4]=interchangeap(Nsc,Nor,acr0,lz,la,cmask,var0,p,niter,Tim4);
22
23 % Preparation des matrices de coefficients
24 [nu,nv]=size(Im1);
25 rim1=reshape(Im1,nu*nv,1); rim2=reshape(Im2,nu*nv,1);
26 rim3=reshape(Im3,nu*nv,1); rim4=reshape(Im4,nu*nv,1);
27
28 % ParamÃ©tres de travail
29 macro=rin1; micro=rin2; imagedepart=rin3;
30 imageobjectif=Tim4; stdcoef = std2(rin3);
31
32 % Sauvegarde des coefficients
33 save ('Im1', 'Im1', '-ascii', '-double', '-tabs');
34 save ('Im2', 'Im2', '-ascii', '-double', '-tabs');
35 save ('Im3', 'Im3', '-ascii', '-double', '-tabs');
36 save ('Im4', 'Im4', '-ascii', '-double', '-tabs');
37
38 % Variogramme
39 [a,b] = size(Im4); v0 = zeros(a,b);
40 x0 = zeros(a,b); y0 = zeros(a,b);
41
42 % Noyau d'interpolation
43 data2=[macro, micro];
44
45 % Grille [gridx,gridy]
46 [nn,pp] = size(data2); gridx=nn/20; gridy=nn/20;
```

Annexe D. Codes Matlab

```
47 [X,Y,Z]=cskern2d(data2,gridx,gridy);
48
49 % Génération des coefficients
50 coef = zeros(nu*nv,1); [nc,nd]=size(X(1,:));
51 dx=zeros(nd,1); [na,nb]=size(X(:,1));
52
53 % Itératifs permutés
54 ite=randperm(nu*nv); coefLoc = [];
55 iteR = reshape(ite,nu,nv); [kh,kv] = meshgrid(1:nv,1:nu);
56 gh = reshape(kh,nu*nv,1); gv = reshape(kv,nu*nv,1);
57 gg = [gv gh];
58
59 % Pour les nu*nv coefficients à simuler
60 for i=1:nu*nv;
61 dx=abs(imagedepart(ite(i))-X(1,1:na));
62 [ni,nj]=min(dx);
63
64 % Pour le premier point à simuler, utiliser seulement la FDC de vraisemblan
65 if i==1
66 xcdf = cumsum(Z(:,nj))./sum(Z(:,nj));
67
68 % Pour les autres points à simuler, utiliser aussi le krigeage
69 else
70 % Krigeage
71 model = [3 3 8 0;4 3 8 90]; cc = [3.0*10^(4);1.5*10^(4)];
72 my = round(mean2(imagedepart));
73 [x0s,s,sv]=cokri(coefLoc,gg(ite(i),:),model,cc,3,my,[1 1],[1 1],0,18,4,1);
74 moy = x0s(:,3); sig = s(:,3);
75
76 % Si la valeur krigée n'est pas Nan,
77 % on définit un gaussien (normpdf) avec moy et sig
78 if isnan(x0s(:,3))==0
79 CC = cumsum(Z(:,nj))./sum(Z(:,nj));
80 xpdf = normpdf(Y(:,1),moy,sqrt(abs(sig)));
81 xpdf=xpdf./(sum(xpdf)); kk=(Z(:,nj))./sum(Z(:,nj));
82 xc = xpdf.*kk; xcdf = cumsum(xc)./sum(xc);
```

Annexe D. Codes Matlab

```
83
84         % Si la valeur krigée est Nan, on prend seulement
85         % la distribution expérimentale
86         else
87             xcdf = cumsum(Z(:,nj))./sum(Z(:,nj));
88         end
89     else
90         xcdf = cumsum(Z(:,nj))./sum(Z(:,nj));
91     end
92 end
93
94 % Simulation sur la F.D.P. et sauvegarde du ième coefficient interpoler
95 lL=length(xcdf);    y1=X(1:lL,nj);
96 xi=rand(1);        xcdf=xcdf+rand(length(xcdf),1).*1e-8;
97 yi=interp1(xcdf',Y(1:lL,nj),xi);    coef(ite(i)) = yi;
98 coefLoc = [coefLoc;gg(ite(i),:) yi];    COEFFICIENTS = [coef];
99
100 % Reconstruire et imposer les coefficients simulés
101 Im=reshape(coef,nu,nv); im=Im;%reshape(Im,nu,nv); %%Im
102 immm=im;
103
104 % Pour niter>1
105 else
106 im=immm;
107 end
108 \end{lstlisting}
```

Notes

Notes