

**DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE  
DE TRANSPORT-DIFFUSION APPLICABLE AUX  
REJETS URBAINS DE TEMPS DE PLUIE**

Mémoire présenté comme exigence partielle  
du grade Maître ès Sciences (M. Sc.)

par

Sophie Bédard ing. jr.

Institut national de la recherche scientifique, INRS-Eau  
2800, rue Einstein, Case postale 7500, SAINTE-FOY (Québec), G1V 4C7

Mars 1997



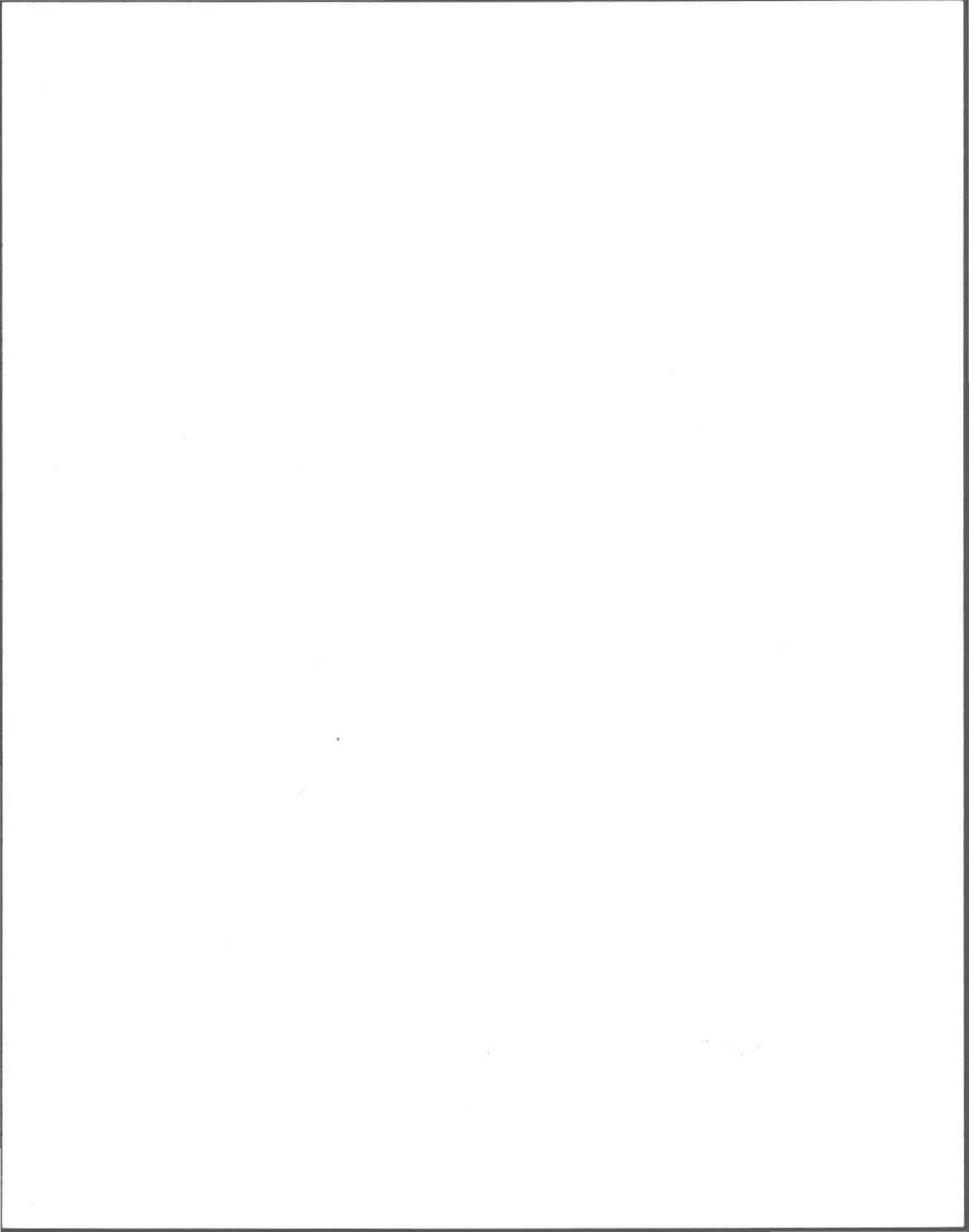
## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier très sincèrement Michel Leclerc, mon directeur de recherche, pour m'avoir permis de réaliser ce projet. Sa confiance, son enthousiasme et sa conviction ont été une source de motivation exceptionnelle.

J'adresse aussi tous mes remerciements à Pierre Lavallée pour son étroite collaboration. Son expertise a permis d'orienter le projet dans une direction des plus prometteuses; du début à la fin, il a cru en l'aboutissement du projet et nous a fourni son support.

Tout au long de mes travaux, j'ai pu compter sur l'aide infiniment précieuse de Yves Secretan et de Paul Boudreau. Sans leurs conseils judicieux, leur disponibilité et leur patience, le projet aurait difficilement pu être mené à terme. De plus, travailler à leur côté a été pour moi une expérience extrêmement enrichissante. Je tiens aussi à souligner la participation très appréciée de Jean Morin et Bernard Doyon. Merci!

Il m'importe en terminant de remercier mes deux plus fidèles supporters: mille fois merci à ma mère et à Pierre pour l'appui qu'ils m'ont apporté tout au long de cette démarche.



## RÉSUMÉ

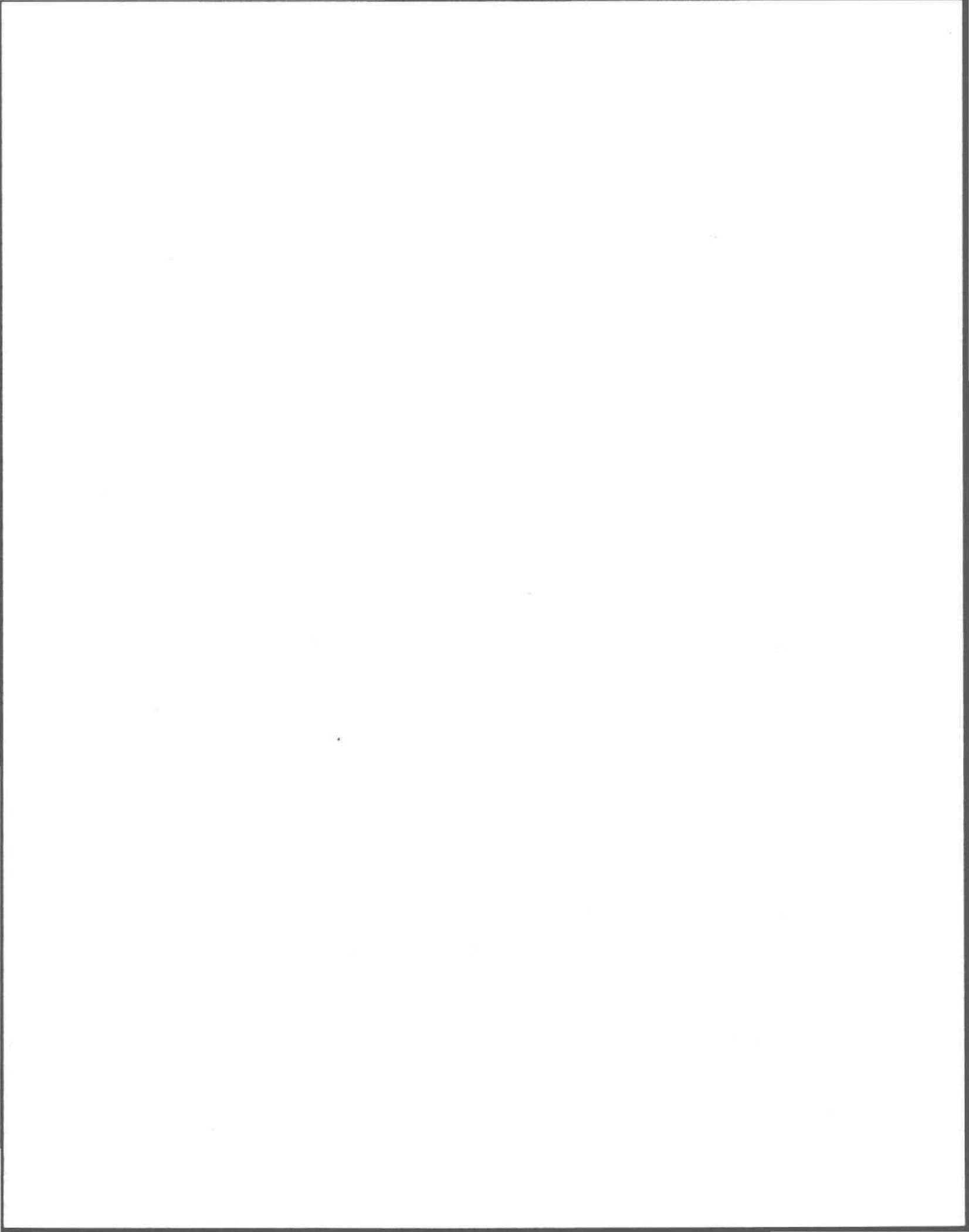
La gestion des eaux usées par temps de pluie constitue actuellement une priorité de l'assainissement urbain. Afin de déterminer des règles de contrôle applicables aux débordements des réseaux d'égout unitaires et pluviaux, il est nécessaire d'en identifier clairement les impacts sur le milieu récepteur. Dans ce contexte, un modèle numérique a été développé pour simuler la propagation des eaux de débordement au sein d'écoulements fluviaux.

Le modèle est basé sur la résolution eulérienne de l'équation de transport-diffusion appliquée aux principaux facteurs de pollution mis en jeu. Ces facteurs sont traités en tant que variables d'état du modèle. Pour chacune, différents mécanismes de réaction agissant comme puits et sources de matière sont implantés dans l'équation. Le modèle parvient à représenter la distribution dans l'espace et dans le temps des contaminants déversés et à évaluer la variation de paramètres de qualité de l'eau.

La résolution numérique de l'équation de transport-diffusion-réaction fait appel à la méthode des éléments finis. Une approximation sur des éléments triangulaires linéaires (T3) et un schéma de discrétisation de type Galerkin caractérisent le modèle numérique. La méthode itérative GMRES est employée pour la résolution du système matriciel non linéaire.

Pour fin de validation, plusieurs tests académiques sont effectués. Il s'agit de tests standards ou spécifiquement adaptés au contrôle de modèles ayant les particularités de l'outil développé. En plus de vérifier la conformité du code informatique, les tests effectués permettent de contrôler la précision des résultats et d'étudier les facteurs influençant la résolution numérique.

Finalement, la rivière des Prairies est choisie comme site pour appliquer le modèle. Ce cours d'eau de la région montréalaise est fortement sollicité par les débordements de réseaux d'égout de type unitaire et leur contrôle est essentiel en vue de restaurer et protéger les usages du milieu. Après construction d'un modèle numérique de terrain et modélisation de l'hydrodynamique de la rivière pour certains événements de référence, un essai de diffusion de traceur est reproduit par simulation. Les concentrations calculées sont comparables aux valeurs mesurées, ce qui permet d'envisager l'application du modèle à des situations réelles de débordement.



# TABLE DES MATIÈRES

Remerciements.....	ii
Résumé.....	iii
Liste des tableaux.....	vii
Liste des figures.....	viii
1. Introduction.....	1
1.1 Problématique.....	1
1.2 Objectif du travail.....	3
2. Revue bibliographique.....	5
2.1 Analyse des rejets urbains de temps de pluie.....	5
2.1.1 Composition des rejets de temps de pluie.....	6
2.1.2 Impacts sur le milieu récepteur.....	9
2.1.2.1 Impacts liés aux solides en suspension.....	11
2.1.2.2 Désoxygénation du milieu récepteur.....	12
2.1.2.3 Contamination bactérienne.....	14
2.1.2.4 Aspects hydrauliques.....	15
2.1.3 Choix des variables d'état.....	16
2.2 Lois de comportement.....	18
2.2.1 Solides en suspension.....	19
2.2.1.1 Échanges avec le fond.....	21
2.2.1.2 Approche basée sur la notion d'équilibre.....	22
2.2.1.3 Approche basée sur l'évaluation directe des flux.....	24
2.2.1.4 Modèle ELAsed.....	26
2.2.1.5 Vitesse de sédimentation.....	27
2.2.1.6 Traitement de la floculation.....	28
2.2.1.7 Concepts retenus pour la modélisation.....	30
2.2.2 Oxygène dissous.....	31
2.2.2.1 Variation naturelle de l'oxygénation du milieu.....	31
2.2.2.2 Processus de dégradation de la matière organique.....	32
2.2.2.3 Modèles d'oxygène dissous.....	35
2.2.2.4 Concepts retenus pour la modélisation.....	37
2.2.3 Contamination bactérienne.....	39
2.2.3.1 Cinétiques de dégradation.....	40
2.2.3.2 Phénomènes de sorption des microorganismes.....	42
2.2.3.3 Concepts retenus pour la modélisation.....	43

2.2.4.1	Processus de sorption.....	45
2.2.4.2	Volatilisation.....	50
2.2.4.3	Cinétiques de dégradation.....	52
2.2.4.4	Diffusion vers les sédiments.....	54
2.2.4.5	Sédimentation et remise en suspension.....	55
2.2.4.6	Concepts retenus pour la modélisation.....	56
3	Modèle mathématique.....	57
3.1	Modèle hydrodynamique.....	57
3.2	Développement de l'équation de transport-diffusion.....	60
3.2.1	Domaine d'application du modèle pour le transport des solides en suspension.....	62
3.3	Modèle de transport-diffusion.....	63
3.3.1	Traitement de la diffusivité.....	66
3.3.2	Conditions aux limites.....	68
3.3.3	Puits et sources.....	71
3.4	Méthodologie de résolution.....	72
3.4.1	Approche eulérienne.....	72
3.4.2	Méthode de résolution numérique.....	73
4	Modèle numérique.....	75
4.1	Principes variationnels.....	76
4.1.1	Méthode des résidus pondérés.....	76
4.1.2	Forme intégrale faible.....	77
4.1.3	Discrétisation de la forme intégrale.....	78
4.2	Forme matricielle.....	82
4.2.1	Intégration de la forme matricielle.....	84
4.3	Discrétisation temporelle.....	85
4.4	Résolution du système algébrique.....	86
4.4.1	Méthode itérative.....	86
4.4.2	Préconditionnement.....	87
4.5	Éléments de programmation.....	87
5	Validation analytique.....	91
5.1	Contrôle de la programmation.....	92
5.1.1	Contrôle de base.....	92
5.1.2	Test de conformité de l'élément.....	93
5.1.3	Test de convergence.....	95
5.2	Tests de précision en régime stationnaire.....	98
5.2.1	Advection d'une distribution gaussienne.....	99
5.2.2	Advection d'un front de concentration.....	103
5.2.2.1	Matières en suspension non cohésives.....	105
5.2.2.2	Matières en suspension cohésives.....	106
5.2.2.3	Contaminant dissous.....	106

5.2.2.5 Oxygène dissous et DBO.....	110
5.3 Tests de précision en régime transitoire.....	110
5.3.1 Diffusion d'un front de concentration.....	110
5.3.2 Advection d'un front de concentration.....	116
5.3.3 Rotation d'une distribution gaussienne.....	120
5.4 Discussion.....	124
6 Application à la rivière des Prairies.....	127
6.1 Description du site étudié.....	128
6.2 Description de la campagne de mesures.....	131
6.2.1 Mesures courantométriques.....	131
6.2.2 Mesures de diffusion d'un traceur.....	131
6.3 Modèle de terrain.....	132
6.3.1 Traitement des données.....	132
6.3.2 Construction du maillage.....	133
6.4 Modélisation hydrodynamique.....	134
6.4.1 Événements à représenter.....	134
6.4.2 Description des conditions de simulation.....	137
6.4.2.1 Maillage.....	137
6.4.2.2 Conditions aux limites.....	137
6.4.2.3 Coefficient de frottement.....	140
6.4.2.4 Viscosité.....	140
6.4.2.5 Autres conditions.....	140
6.4.3 Analyse des résultats.....	141
6.5 Application du modèle de transport-diffusion.....	146
6.5.1 Description du problème à représenter.....	146
6.5.2 Description des conditions de simulation.....	147
6.5.2.1 Condition d'injection.....	147
6.5.2.2 Maillage.....	149
6.5.2.3 Conditions aux limites.....	152
6.5.2.4 Coefficients de diffusion.....	153
6.5.2.5 Résolution numérique.....	153
6.5.3 Analyse du comportement du modèle.....	154
6.5.3.1 Influence de la condition d'injection.....	154
6.5.3.2 Influence du maillage.....	158
6.5.3.3 Influence de la condition limite aux berges.....	159
6.5.3.4 Influence de la diffusivité.....	161
6.5.4 Discussion des résultats.....	167
7 Conclusion.....	171
8 Bibliographie.....	175
Annexe A Procédures d'intégration de l'équation de transport-diffusion.....	183
A.1 Intégration temporelle.....	183

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1: Concentration moyenne pour différents facteurs de pollution présents dans des eaux usées d'origines diverses.....	8
Tableau 2.2: Caractérisation des eaux de débordement du réseau de la communauté urbaine de Québec. ....	8
Tableau 2.3: Caractéristiques des eaux usées par temps sec et par temps de pluie dans un collecteur de réseau unitaire. ....	9
Tableau 2.4. Pourcentage de la pollution fixée aux particules solides pour des mesures en bassin de rétention et en réseau unitaire. ....	12
Tableau 2.5 Facteurs de pollution associés aux débordements des réseaux unitaires en temps de pluie. ....	16
Tableau 5.1: Taux de convergence calculés pour différentes applications de l'équation de transport-diffusion. ....	98
Tableau 5.2. Comparaison de différents schémas numériques pour l'advection d'un profil gaussien dans un champ de vitesse circulaire. ....	101
Tableau 5.3. Résumé des tests d'advection d'un front de concentration en régime stationnaire. ....	104
Tableau 5.4. Influence des paramètres de simulation sur les résultats de la diffusion transitoire d'un front de concentration. ....	113
Tableau 5.5. Comparaison de différents schémas numériques pour l'advection transitoire d'une distribution gaussienne dans un champ de vitesse circulaire.....	121
Tableau 6.1: Sites de débordement étudiés et caractéristiques locales de l'écoulement. ....	129
Tableau 6.2: Débit instantané correspondant aux mesures de courantométrie et de diffusion sur la rivière des Prairies. ....	136
Tableau 6.3: Comparaison des niveaux d'eau mesurés et calculés à la station de Cartierville. ....	141
Tableau 6.4: Valeur moyenne des écarts entre vitesses mesurées et simulées autour des émissaires de débordement. ....	143
Tableau 6.5: Caractéristiques des maillages employés pour simuler la propagation du traceur en aval de l'émissaire E3.....	151

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1: Mécanismes intervenant lors du transport des solides en suspension....	20
Figure 3.1: Repère et conventions du modèle hydrodynamique.....	58
Figure 3.2: Flux massiques sur un volume élémentaire. ....	60
Figure 4.1: Transformation géométrique sur un élément T3. ....	79
Figure 4.2: Algorithme général. ....	89
Figure 5.1: Domaine d'application du test de conformité de l'élément.....	94
Figure 5.2: Courbes de convergence pour deux applications de l'équation de transport-diffusion. ....	97
Figure 5.3: Advection stationnaire d'une distribution gaussienne dans un champ de vitesse circulaire. ....	100
Figure 5.4: Résultats de l'advection stationnaire d'une distribution gaussienne portés sur une grille orthogonale; conditions limites de Cauchy sur les flux entrant et Neuman sur les flux sortant. ....	102
Figure 5.5: Advection et dégradation d'un contaminant dissous dans un champ de vitesse unidirectionnel. ....	107
Figure 5.6: Advection de métaux lourds adsorbables dans un champ de vitesse unidirectionnel en présence de matières en suspension. ....	109
Figure 5.7: Influence de la discrétisation à proximité de la frontière à concentration imposée; $D_{xx}=10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s , période simulée: 1200 secondes. ....	114
Figure 5.8: Influence du coefficient de diffusivité à proximité de la frontière à concentration imposée; $D_{xx}=0.01$ m <sup>2</sup> /s ; période simulée: 60 secondes. ....	114
Figure 5.9: Influence du coefficient de diffusivité à proximité de la frontière à concentration imposée; $D_{xx}=0.005$ m <sup>2</sup> /s ; période simulée: 120 secondes. ....	115
Figure 5.10: Influence du coefficient de diffusivité à proximité de la frontière à concentration imposée; $D_{xx}=0.001$ m <sup>2</sup> /s ; période simulée: 600 secondes. ....	115
Figure 5.11: Advection transitoire d'un front d'onde dans un champ de vitesse unidirectionnel. ....	116
Figure 5.12: Résultats de l'advection d'un front d'onde dans un champ de vitesse unidirectionnel. ....	118
Figure 5.13: Influence du nombre de Courant sur la norme de l'erreur pour l'advection transitoire d'un front d'onde.....	119

Figure 5.14: Advection transitoire d'une distribution gaussienne dans un champ de vitesse circulaire. ....	122
Figure 5.15: Résultats de l'advection transitoire d'une distribution gaussienne portés sur une grille orthogonale; conditions limites de Cauchy sur les flux entrant et de Neuman sur les flux sortant. ....	123
Figure 6.1: Domaine modélisé et position des émissaires. ....	130
Figure 6.2: Maillage généré sur un tronçon de rivière en aval de l'émissaire E3.....	135
Figure 6.3: Aménagement du barrage de la rivière des Prairies. ....	139
Figure 6.4: Résultats de la simulation hydrodynamique sur le tronçon de rivière situé en aval de l'émissaire E3 (débit: 1210 m <sup>3</sup> /s). ....	144
Figure 6.5: Résultats de la simulation hydrodynamique sur le tronçon de rivière situé en aval de l'émissaire E6 (débit: 1210 m <sup>3</sup> /s). ....	145
Figure 6.6: Localisation des points d'échantillonnage de rhodamine et concentrations moyennes mesurées. ....	148
Figure 6.7: Influence du mode d'injection sur la variation longitudinale de la concentration. ....	156
Figure 6.8: Influence du mode d'injection sur la valeur des concentrations calculées. ....	157
Figure 6.9: Influence du niveau de raffinement du maillage sur la variation longitudinale de la concentration.....	160
Figure 6.10: Influence de la condition limite à la berge sur la valeur des concentrations calculées. ....	162
Figure 6.11: Influence de la diffusivité sur les résultats de simulation avec le maillage 3 et $\beta=0.02$ .....	164
Figure 6.12: Panache simulé pour l'injection de rhodamine à l'émissaire E3 en conditions optimales de simulation.....	169

# **1 INTRODUCTION**

---

## **1.1 Problématique**

En 1978, le gouvernement du Québec lançait son Programme d'assainissement des eaux avec pour objectifs de restaurer la qualité des lacs et cours d'eau et d'en récupérer le plein usage. Après quelques années d'opération, il est maintenant possible d'analyser les bénéfices du programme et d'identifier les nouvelles priorités à établir.

En milieu urbain, l'avènement des ouvrages d'assainissement des eaux usées n'a pu qu'améliorer la qualité de l'environnement. La grande majorité des municipalités québécoises se sont dotées de structures d'épuration des eaux résiduaires ou sont en voie de le faire. Les charges polluantes déversées aux cours d'eau ont ainsi diminué considérablement. Bien que ces réalisations s'avèrent dans l'ensemble bénéfiques, une problématique persiste autour de la gestion des eaux usées en temps de pluie.

Au Québec, les réseaux d'assainissement de type unitaire desservent environ 80% de la population. Ces réseaux véhiculent à la fois les eaux usées pluviales et sanitaires. En période de temps sec, la station d'épuration à la tête d'un tel réseau reçoit l'ensemble des eaux usées sanitaires à un débit limité. Toutefois, lors d'une averse, les eaux de ruissellement viennent s'ajouter aux eaux sanitaires et la station d'épuration ne peut généralement pas assumer la totalité de l'augmentation du débit à traiter. S'il n'existe pas de bassin pour l'emmagasinement temporaire du surplus, les eaux usées excédentaires sont directement rejetées au milieu récepteur.

En milieu urbain, les débordements des réseaux d'assainissement constituent une forme importante de pollution des eaux et font obstacle à la restauration des usages. Bien que la qualité des eaux usées déversées en temps de pluie diffère de celle prévalant en

temps sec, ces eaux demeurent lourdement polluées. Elles sont principalement composées de matières en suspension, de matière organique biodégradable, de microorganismes, de nutriments et de micropolluants toxiques.

L'importance des impacts des rejets de temps de pluie sur la qualité du milieu récepteur est indéniable. À court terme, l'apport d'une masse d'eau fortement contaminée peut produire des effets de pollution visuelle, d'anoxie, de contamination bactérienne et toxique. À plus long terme, c'est-à-dire à la suite d'une succession de débordements sur un même site, les rejets conduisent à l'enrichissement des sédiments par accumulation de matière organique biodégradable et de micropolluants toxiques. Ces contaminants se retrouvant principalement sous forme particulaire dans les effluents de débordement, ils sédimentent en bordure ou en aval des émissaires. En plus de contaminer les organismes benthiques, les toxiques sont susceptibles d'être relargués dans la colonne d'eau. Quant à la matière organique, sa décomposition biochimique exerce une demande en oxygène qui abaisse en tout temps le seuil de base en oxygène dissous mesuré dans le milieu récepteur.

Plusieurs facteurs justifient l'analyse détaillée de la propagation des eaux issues d'émissaires de débordement de réseaux d'égout. L'impact d'un épisode de débordement sur un site donné étant lié aux caractéristiques de l'effluent et du milieu récepteur, il est difficile à priori d'en prévoir l'importance. Comme le dépassement des critères de qualité vient restreindre les usages du milieu, il s'avère intéressant de pouvoir estimer l'ampleur et la durée de la perturbation en des points stratégiques. De plus, une meilleure connaissance des impacts peut mettre en évidence les besoins d'intervention en matière de gestion et de contrôle des débordements. Dans ce contexte, le développement d'un outil de modélisation numérique applicable à cette problématique apparaît comme une alternative intéressante aux outils d'analyse classiques tels les campagnes de traçage. L'avantage du modèle numérique réside dans sa souplesse, sa mobilisation rapide et dans la possibilité d'aller beaucoup plus en profondeur au niveau de l'analyse des impacts.

## 1.2 Objectif du travail

L'objectif du présent travail consiste à élaborer un modèle numérique simulant la propagation des contaminants issus des rejets urbains de temps de pluie. Le modèle servira d'outil pour l'analyse des impacts des débordements de réseaux unitaires. De type advection-diffusion-réaction, le modèle est développé à partir de Dispersim (Padilla et al., 1997), un simulateur de panaches d'effluents basé sur la résolution eulérienne de l'équation de transport appliquée au milieu fluvial.

Les impacts des rejets de temps de pluie peuvent être évalués sur la base de la variation de paramètres de qualité du milieu et de critères environnementaux spécifiques aux usages à protéger. Une échelle événementielle est choisie pour l'analyse des impacts, ce qui signifie que l'on se limitera à l'étude des phénomènes observés à court terme. Considérant l'apport ponctuel d'une masse d'eau contaminée, le modèle doit évaluer la valeur locale de la concentration pour les différents contaminants mis en jeu. Ces derniers sont traités en tant que variables d'état du modèle.

Au sein de l'écoulement, les contaminants déversés sont soumis à différents mécanismes biologiques, physiques ou chimiques qui assurent leur transformation ou leur disparition. Ces mécanismes agissent en tant que puits et sources de matière et leur implantation dans la formulation mathématique du modèle constitue un des principaux intérêts du travail. Étant donné les interactions potentielles entre les différents contaminants, la structure algorithmique du modèle doit permettre une résolution simultanée des équations de transport-diffusion-réaction spécifiques aux variables d'état considérées.

En raison de l'envergure des impacts attribuables aux débordements de temps de pluie, il est nécessaire d'établir les aspects du problème apparaissant prioritaires dans un contexte de modélisation. Ainsi, les variables d'état à traiter et les phénomènes à modéliser

doivent être fixés au départ. À cette fin, une revue bibliographique permet, dans un premier temps, d'analyser en profondeur les rejets de temps de pluie et leurs impacts. Dans une seconde partie, la revue bibliographique rapporte les diverses lois de comportement associées aux variables d'état que l'on a choisi de modéliser.

Les fondements mathématiques et numériques du modèle font l'objet des chapitres 3 et 4. Sa validation analytique est présentée au chapitre 5. La recherche est complétée par une application à la rivière des Prairies, ce cours d'eau séparant l'île de Montréal et l'île Jésus (Laval).

## **2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE**

---

Le présent chapitre propose une revue de la bibliographie traitant des rejets urbains de temps de pluie et de la modélisation des facteurs de pollution qui leur sont associés. Dans un premier temps, une analyse détaillée des rejets urbains de temps de pluie est présentée. Différentes études caractérisant les effluents et décrivant leurs impacts sont rapportées. L'objectif consiste à en dégager les variables d'état qu'il convient d'intégrer au modèle afin de représenter adéquatement la problématique des débordements de réseaux unitaires.

La seconde partie du chapitre traite des lois de comportement associées aux variables sélectionnées. On donne un aperçu des modèles développés en vue de représenter leur comportement dans la masse d'eau en mouvement. L'objectif est d'identifier, pour chaque variable d'état, les phénomènes à considérer et le formalisme mathématique à employer pour les modéliser.

### **2.1 Analyse des rejets urbains de temps de pluie**

La définition des rejets urbains de temps de pluie englobe les débordements des réseaux d'égout unitaires aussi bien que les rejets d'eaux pluviales de réseaux séparatifs (Chocat et al., 1986 cité par CEGEO, 1993). Toutefois, la présente recherche est principalement axée sur les débordements de réseaux unitaires. Ce choix est justifié par la prédominance des réseaux d'égout unitaires dans les municipalités québécoises.

Les rejets urbains de temps de pluie sont intermittents et font obligatoirement suite à des événements pluvieux (CEGEO, 1993). Outre les conditions climatiques, la fréquence de ces débordements dépend de facteurs structuraux tels le dimensionnement du réseau d'assainissement et la capacité de la station de traitement rattachée. Pour la ville de Québec, Lavallée (1989) évalue à environ trente le nombre moyen d'épisodes de débordement à

survenir durant la période allant de mai à septembre. Cela correspond en moyenne à un débordement à tous les quatre jours. Considérant que la perturbation du milieu récepteur peut persister jusqu'à 48 heures après le début de l'événement, la période de temps pendant laquelle la qualité du milieu est adéquate est très brève.

Bien que longtemps négligée, la pollution associée aux débordements de réseaux unitaires est maintenant reconnue comme une cause de dégradation de la qualité des cours d'eau en milieu urbain. Lors d'épisodes de débordement, la charge organique et bactériologique provenant des eaux usées sanitaires s'avère généralement beaucoup trop élevée pour être tolérable et sans conséquence sur l'environnement. De plus, ces eaux sanitaires sont combinées aux eaux de ruissellement de surface qui sont quant à elles lourdement chargées en micropolluants toxiques. Plusieurs auteurs dont Thévenot (1993) et Klemetson (1985) ont étudié la composition des eaux de ruissellement urbain et démontré l'importance de leur charge polluante. En période de pluie, les eaux de ruissellement lessivent les surfaces imperméables et entraînent avec elles des quantités importantes de solides, de métaux, d'hydrocarbures et d'espèces chimiques diverses. Rejetées au milieu sans traitement, elles ont inévitablement des conséquences néfastes sur la qualité de l'eau.

### **2.1.1 Composition des rejets de temps de pluie**

D'après Thévenot, la composition des eaux usées déversées en temps de pluie se résume aux éléments suivants:

- les matières solides en suspension;
- les solides flottants;
- la matière organique oxydable;
- les microorganismes éventuellement pathogènes;
- les nutriments;
- les micropolluants minéraux (métaux lourds);

- les micropolluants organiques (hydrocarbures aliphatiques, HAP, BPC, pesticides, solvants).

Tous ces facteurs de pollution sont observables à des concentrations variables dans les surverses de réseaux unitaires. Les eaux pluviales des réseaux séparatifs sont quant à elles caractérisées par de très fortes charges en matières solides et en micropolluants. Les tableaux 2.1 et 2.2 présentent des compositions typiques de rejets pluviaux pour des réseaux séparatifs et unitaires. Ces résultats sont tirés de campagnes de mesures américaines et québécoises.

Le tableau 2.3 permet de comparer les caractéristiques des eaux véhiculées par les réseaux unitaires par temps sec et par temps de pluie. De façon générale, on constate que les concentrations moyennes en matières en suspension (MES), nitrates et métaux sont supérieures lors d'épisodes pluvieux. Par contre, étant donné l'effet de dilution engendré par les eaux pluviales, les eaux usées de temps sec sont plus concentrées en demande biochimique en oxygène (DBO5), demande chimique en oxygène (DCO), azote organique, phosphore et hydrocarbures. D'après Charron (1990), la comparaison des rapports DCO/DBO5 permet de conclure à une biodégradabilité plus difficile des eaux usées de temps de pluie.

Tableau 2.1: Concentration moyenne pour différents facteurs de pollution présents dans des eaux usées d'origines diverses (Ellis, 1986 rapporté par CEGEO,1993).

	<b>DBO (mg/l)</b>	<b>MES (mg/l)</b>	<b>Azote totale (mg/l)</b>	<b>Phosphore total (mg/l)</b>	<b>Plomb (mg/l)</b>	<b>Coliformes totaux (nb/100ml)</b>
Eau pluviale	10 - 250	3 - 11000	3 - 10	0.2 - 1.7	0.03 - 3.1	$10^3 - 10^8$
Débordement de réseau unitaire	60 -200	100 - 1100	3 - 24	1 - 11	0.4	$10^5 - 10^7$
Effluent traité d'une station d'épuration	20	20	30	10	-	$10^4 - 10^8$

Tableau 2.2: Caractérisation des eaux de débordement du réseau de la communauté urbaine de Québec (campagne de mesures de 1982, Consultants BPR, rapporté par CEGEO, 1993).

	<b>Débordement de réseau unitaire Concentration instantanée (mg/l)</b>
Matières en suspension	20 - 640
DCO	30 - 510
Phosphore total	0.2 - 6.3
Phosphore soluble	0.03 - 2.9
Coliformes fécaux	$4 \times 10^4 - 7 \times 10^6$ UCF/100 ml
Cuivre	0.03 - 0.3
Plomb	0.04 - 0.7
Zinc	0.2 - 1.3

Tableau 2.3: Caractéristiques des eaux usées par temps sec et par temps de pluie dans un collecteur de réseau unitaire (étude du réseau de Mantes-La-Ville, France, rapporté par Charron, 1990).

<b>Facteur de pollution</b>	<b>Concentration moyenne journalière de temps sec (mg/l)</b>	<b>Concentration moyenne véhiculée par temps de pluie (mg/l)</b>
DBO5	397	116
DCO	734	436.9
MES	379	572.5
Azote Kjeldahl	71.7	23.7
Nitrates	< 0.04	1.2
Ammonium	73.2	15.3
Phosphore total	74.2	21.4
Détergents	11.1	2.3
Hydrocarbures	9.2	6.1
Plomb	0.16	0.44
Zinc	1	1.4
Cadmium	0.01	0.01

### 2.1.2 Impacts sur le milieu récepteur

Tel que suggéré par CEGEO (1993), on doit distinguer deux types d'impacts attribuables aux rejets d'eaux usées de temps de pluie: les impacts immédiats et les impacts différés. Les impacts immédiats sont ceux subis par le milieu pendant une période de temps inférieure à l'intervalle entre deux événements pluvieux. Le terme différé fait référence à un impact dont la durée est supérieure au temps de déversement et à l'intervalle entre deux pluies.

Les effets généralement observés dans la période qui suit le début d'un épisode de débordement sont:

- l'augmentation de la turbidité;

- la diminution du taux d'oxygène dissous;
- l'apparition d'azote sous forme de  $\text{NH}_4$  provenant des eaux sanitaires;
- l'établissement de colonies bactériennes potentiellement pathogènes;
- l'augmentation des concentrations en micropolluants.

Ces impacts sont souvent qualifiés d'effet choc ou de contamination aigüe. Ils se manifestent sur une courte période de temps mais peuvent être observés sur une distance importante. Un débordement peut aussi avoir des répercussions immédiates sur l'hydrodynamique du milieu. Tout dépendant de l'ordre de grandeur du débit de l'effluent par rapport à celui du cours d'eau récepteur, les caractéristiques hydrodynamiques du milieu peuvent être temporairement perturbées par l'apport d'un volume d'eau considérable. À titre d'exemple, une pluie décennale peut générer des débits de pointe aussi élevés que 200 l/s par habitant, soit des débits de 20 m<sup>3</sup>/s pour un bassin versant de 1 km<sup>2</sup>. Pour le territoire de la ville de Québec (170 000 habitants) qui comporte au moins 10 bassins versants unitaires de superficie supérieure à 1 km<sup>2</sup>, le volume total d'eau potentiellement déversée au milieu récepteur devient énorme.

Le caractère répétitif des épisodes de débordement peut être à l'origine d'impacts à plus long terme. Les effets cumulatifs et rémanents des débordements peuvent devenir très contraignants. Des événements fréquents de faible intensité peuvent ainsi avoir des effets tout aussi dommageables qu'un événement exceptionnel. De plus, le brusque changement de la qualité du milieu qui survient périodiquement peut constituer un stress supplémentaire pour les espèces aquatiques.

Les impacts à plus long terme consistent en l'envasement, le colmatage ou l'élévation du lit de la rivière, l'enrichissement des sédiments en matière organique et minérale et l'accumulation dans les sédiments de contaminants persistants. Ce dernier aspect est à l'origine de la bioaccumulation des toxiques dans la chaîne alimentaire. L'étude des impacts différés nécessite la prise en compte de la fréquence des événements pluvieux

causant un débordement et s'effectue par bilan sur une saison ou une autre période de temps comparable.

### 2.1.2.1 Impacts reliés aux solides en suspension

La pollution engendrée par les débordements de réseaux unitaires est fortement associée aux solides en suspension (Mouchel, 1993). Ces solides démontrent une très forte tendance à fixer les contaminants de nature organique et métallique et deviennent ainsi des vecteurs de pollution. De plus, le rejet de quantités importantes de matières solides se traduit par une augmentation de la turbidité de l'eau et limite l'activité photosynthétique du milieu (CEGEO, 1993).

Le tableau 2.4 présentent les résultats obtenus par Chebbo et Bachoc (1993) en rapport à la pollution particulaire des rejets pluvieux. On y constate que la DBO<sub>5</sub>, la DCO, les hydrocarbures et les métaux peuvent être fixés aux solides dans une proportion supérieure à 80%. De plus, les auteurs ont démontré que la décantation en bassin de retenue pouvait permettre de réduire de plus de 80% la pollution relative aux solides en suspension, à la DCO et à la DBO. En ce qui concerne l'azote, les hydrocarbures et le plomb, l'abattement moyen de la pollution par décantation s'élève respectivement à 60, 69 et 74%. Toutefois, des études récentes revoient à la baisse la fraction particulaire de la charge organique. La présence de sédiments déjà dégradés, présents dans les réseaux avant la pluie et remis en suspension par l'évacuation de celle-ci, ainsi que les eaux sanitaires pourraient contribuer à augmenter la biodisponibilité de la matière organique et par le fait même, la fraction soluble.

Les particules solides véhiculées par les eaux usées de temps de pluie ont des granulométries et des vitesses de sédimentation élevées. D'après Benoist et Lijklema (1990), de 30 à 50% des solides contenus dans les débordements de réseaux unitaires sont de nature à sédimenter à proximité des émissaires.

Tableau 2.4. Pourcentage de la pollution fixée aux particules solides pour des mesures en bassin de rétention et en réseau unitaire (Chebbo et Bacchoc,1993).

	DCO	DBO5	NTK	Hydro-carbures	Plomb
Bassin de rétention d'eaux pluviales (Bordeaux)	84- 89%	> 77 - 95%	57 - 82%	> 86%	79 - 96%
Bassin de rétention de réseau unitaire (Seine, St-Denis)	88%	83%	48 %	-	99%
Collecteur de réseau unitaire (Marseille)	83 - 92%	91%	70 - 80%	82 - 99%	99.5-100%

Dans leur étude sur la modélisation des impacts reliés aux rejets de temps de pluie, Beck et al. (1988) insistent sur l'importance prioritaire qui doit être accordée au transport des matières solides en suspension. Les auteurs affirment qu'un effort doit être réalisé dans le but de représenter adéquatement les mécanismes de transport, de déposition et d'érosion des solides. Par la suite, des cinétiques d'adsorption-désorption des contaminants pourront y être rattachées.

### 2.1.2.2 Désoxygénation du milieu récepteur

Les rejets urbains de temps de pluie sont anoxiques et la dégradation de la matière organique qu'ils contiennent mobilise l'oxygène dissous disponible. Leur dilution dans la masse d'eau se répercute ainsi par un déficit en oxygène dissous qui peut s'avérer dramatique pour la faune aquatique. Certaines espèces piscicoles sensibles au taux d'oxygénation du milieu peuvent mourir par asphyxie. La situation est particulièrement critique lorsque la totalité de la masse d'eau est désoxygénée et que les poissons ne peuvent trouver de zones intactes pour se réfugier.

La dégradation bactérienne sous conditions anoxiques peut aussi contribuer à détériorer la qualité du milieu par la génération d'odeurs nauséabondes. De plus, l'établissement de conditions réductrices (attribuable au déficit en oxygène) favorise le relargage des contaminants accumulés dans les sédiments.

Le déficit en oxygène associé à une surverse d'orage est un phénomène temporaire dont la durée et la répartition spatiale dépendent des caractéristiques de l'événement de ruissellement et des particularités hydrodynamiques du cours d'eau. À cet égard, la modélisation de la propagation du panache d'effluent peut être utile pour identifier l'impact d'un événement particulier et la capacité de restauration du milieu.

Selon Hvitved-Jacobsen (1982), en situation de débordement, l'origine du déficit en oxygène se résume aux facteurs suivants:

- l'apport et la dilution d'eaux usées anoxiques;
- la dégradation de la matière organique soluble;
- la dégradation de la matière organique particulaire et benthique.

Les deux premiers facteurs causent une diminution immédiate des concentrations en oxygène dissous. Puisqu'elle n'est pas immédiate, la dégradation de la matière organique particulaire et benthique contribue à différer l'état de désoxygénation et son importance est considérable.

La durée d'exposition du milieu à un taux d'oxygène dissous déficitaire et l'étendue de la zone affectée constituent des aspects prioritaires en vue d'identifier l'envergure de l'impact d'un rejet.

### 2.1.2.3 Contamination bactérienne

L'impact des organismes bactériens et viraux sur la qualité des eaux de surface est considérable. La présence de colonies bactériennes dans un cours d'eau est souvent associée au risque de contacter différentes maladies dont la gravité est variable (Thomann et Mueller, 1987). L'atteinte d'un niveau de contamination inacceptable restreint très souvent les usages de l'eau, plus particulièrement les usages à contact direct tel que la baignade. L'insalubrité des cours d'eau se répercute aussi sur l'alimentation en eau potable. En vue d'être consommable, une eau fortement contaminée nécessite des traitements sophistiqués et onéreux.

C'est généralement en terme de coliformes fécaux ou de coliformes totaux que l'on mesure la contamination bactérienne. Les coliformes totaux font référence à un groupe très large de bactéries isolées aussi bien dans les sols (pollués ou non pollués) que dans les excréments humains et animaux. Le groupe des coliformes fécaux est plus restreint; il comprend uniquement les organismes originant du tube digestif (*Escherichia Coli* entre autres). La probabilité d'observer des organismes pathogènes (*Salmonella*, *Shigella*, *V. Cholera*) pouvant être corrélée avec la densité de coliformes fécaux, ce paramètre devient un indicateur de la salubrité du milieu.

Les eaux usées d'origine domestique sont chargées de bactéries. La présence d'excréments humains en est la cause principale. En temps de pluie, les débordements des réseaux unitaires se répercutent très souvent par le dépassement des normes tolérables en matière de contamination bactérienne. D'après des mesures réalisées sur la rivière Saint-Charles à Québec à la suite d'événements pluvieux, Villeneuve et al. (1992) rapportent l'observation de concentrations en bactéries d'origine fécale qui dépassent largement les seuils de tolérance. Des valeurs de l'ordre de 50 000 coliformes par 100 ml ont été mesurées dans la rivière alors que les concentrations maximales tolérables pour la baignade sont de 200 coliformes par 100 ml.

#### 2.1.2.4 Aspects hydrauliques

Les rejets urbains pluviaux peuvent entraîner des modifications au régime hydraulique du cours d'eau récepteur. La situation est particulièrement critique dans un milieu à faible vitesse d'écoulement, les pluies d'intensité élevée pouvant engendrer des débits débordés comparables au débit du cours d'eau. L'hydrodynamique du milieu est alors perturbée pour la durée de l'événement.

Si à court terme ils perturbent les caractéristiques de l'écoulement, les événements pluvieux fréquents peuvent, au fil du temps, causer l'érosion des berges, l'envasement du lit et la remise en suspension de sédiments contaminés. En situation d'événement pluvieux exceptionnel, l'apport des eaux de ruissellement peut causer des inondations (CEGEO).

Les phénomènes hydrauliques associés aux surverses d'orages sont généralement d'amplitude élevée mais de courte durée. Une modification temporaire des vitesses et des hauteurs d'eau peut être observée. Clamagirand et Gaillard (1986) ont développé un modèle simulant l'impact des apports pluviaux sur le régime hydraulique de la Seine en étiage. Ils ont démontré par simulation que les débits et vitesses augmentaient considérablement lors des déversements. La variation pouvait atteindre jusqu'à 100% de la valeur initiale. Cet effet choc était par contre très limité dans le temps et avait peu d'influence sur les paramètres de qualité du milieu.

Les impacts hydrauliques sont reliés aux caractéristiques du milieu. Dans le cas de la Seine, le débit d'étiage variant autour de 50 m<sup>3</sup>/s, il n'est pas surprenant qu'un apport pluvial puisse perturber l'écoulement. Par contre, pour un cours d'eau ayant un débit élevé (le Saint-Laurent ou la rivière des Prairies par exemple), on peut prévoir, si on considère un mélange complet, que l'effet sera moindre.

### 2.1.3 Choix des variables d'état du modèle

Cette première partie de la revue bibliographique a permis d'identifier les différents facteurs de pollution impliqués dans les débordements de réseaux unitaires et d'en étudier les impacts sur le milieu récepteur. Le tableau 2.5 résume ces facteurs et leurs impacts. Les interactions entre différents facteurs de pollution y sont mis en évidence.

Tableau 2.5 Facteurs de pollution associés aux débordements des réseaux unitaires en temps de pluie.

Facteur de pollution	Impacts sur le milieu récepteur	Facteurs reliés
Solides flottants	- Pollution visuelle - Accumulation sur les berges	
Solides en suspension	- Turbidité de l'eau - Fixation de polluants - Envasement des sédiments	
Matière organique oxydable	- Consommation immédiate d'oxygène - Demande benthique en oxygène	Oxygène dissous Solides
Nutriments	- Consommation d'oxygène ( $\text{NH}_4$ ) - Mortalité piscicole ( $\text{NH}_3$ ) - Eutrophisation (phosphore) - Contraintes pour les prises d'eau potable ( $\text{NO}_3$ )	Oxygène dissous Formes d'azote entre elles
Contaminants bactériens	- Pollution bactériologique - Transmission de maladies	Solides Micropolluants
Micropolluants minéraux	- Contamination des espèces planctoniques et benthiques - Mortalité piscicole - Bioaccumulation	Solides
Micropolluants organiques	- Contamination des espèces planctoniques et benthiques - Mortalité piscicole - Bioaccumulation	Solides

À ce stade, il est nécessaire d'identifier les facteurs qui présentent une importance prédominante et qui sont susceptibles d'illustrer la problématique observée dans nos cours d'eau. C'est dans cette optique que les paramètres de qualité suivants sont retenus en tant que variables d'état du modèle:

- les solides en suspension;
- l'oxygène dissous;
- la matière organique oxydable;
- les contaminants bactériens;
- les micropolluants (minéraux ou organiques).

L'oxygène dissous et la matière organique devant obligatoirement être traités ensemble, quatre groupes de variables d'état seront considérés.

Cette liste de variables d'état du modèle n'est certainement pas exhaustive. Elle se situe à l'intérieur d'un premier effort de modélisation des impacts à brève échéance des débordements de réseaux unitaires. La structure du modèle prévoit l'ajout ultérieur de variables d'état.

## 2.2 Lois de comportement

Dans un cours d'eau en régime d'écoulement fluvial turbulent, les phénomènes d'advection et de diffusion assurent le transport des contaminants, qu'ils soient dissous dans la masse d'eau ou en suspension.

Par advection, les contaminants sont véhiculés au fil du courant. Fisher et al. (1979) définit l'advection comme le transport par le courant dans un système fluvial ou côtier. Cette forme de transport se distingue de la convection qui est définie par le même auteur comme le transport vertical induit par des instabilités hydrostatiques généralement associées à un gradient thermique. De son côté, la diffusion turbulente permet de distribuer les contaminants à travers la masse d'eau.

L'advection et la diffusion turbulente sont des phénomènes conservatifs. À ces comportements s'ajoutent différents mécanismes de transformation qui forment la composante non conservative.

Tout apport anthropique à un cours d'eau contribue à rompre l'équilibre du milieu et provoque une réaction naturelle de restauration. Selon la nature du rejet, différents mécanismes biologiques, chimiques ou physiques s'effectuent de façon à rétablir les conditions prévalant initialement. Cependant, la restauration complète de la qualité du milieu n'est pas toujours possible. Certains contaminants difficilement dégradables s'accumulent dans le milieu et exercent un effet toxique pendant une longue période. De plus, les mécanismes de restauration naturelle mobilisent l'oxygène du milieu, ce qui devient souvent un problème considérable pour les espèces aquatiques et pour la qualité globale du milieu.

Les réactions assurant l'élimination des contaminants peuvent être regroupés dans les catégories génériques suivantes:

- biodégradation et bioassimilation des contaminants dissous et particulaires par les organismes planctoniques;
- dégradation chimique des contaminants dissous;
- diffusion des contaminants dissous ou colloïdaux à l'interface eau-sédiments;
- sédimentation des contaminants particulaires;
- biodégradation des contaminants déposés par les organismes benthiques.

Les mécanismes qui entraînent la disparition ou la transformation de contaminants non conservatifs doivent être pris en considération à l'intérieur de la formulation mathématique d'un modèle de transport-diffusion. Ces réactions constituent des puits ou des sources de matière qui doivent être comptabilisés à l'intérieur d'un bilan global.

Dans la suite du chapitre, on présente, pour chacun des quatre groupes de variables d'état du modèle, une revue des lois de comportement pouvant être employées pour modéliser les puits et sources de matière.

### **2.2.1 Solides en suspension**

La figure 2.1 tirée de Guichard et Mouchel (1993) schématise les différents mécanismes qui interviennent lors du transport des solides en suspension. Les formes caractéristiques des profils de vitesse et de concentration  $y$  sont aussi présentées. En plus de l'advection et de la diffusion turbulente, la force gravitationnelle agit sur les solides et entraîne leur sédimentation. Tout dépendant de leurs propriétés cohésives, les particules solides peuvent flocculer et former des agrégats de dimensions importantes. Le mécanisme de floculation peut modifier considérablement les caractéristiques hydrodynamiques des particules. L'importance de la floculation au sein du transport d'une suspension sera reliée au caractère cohésif des particules considérées.

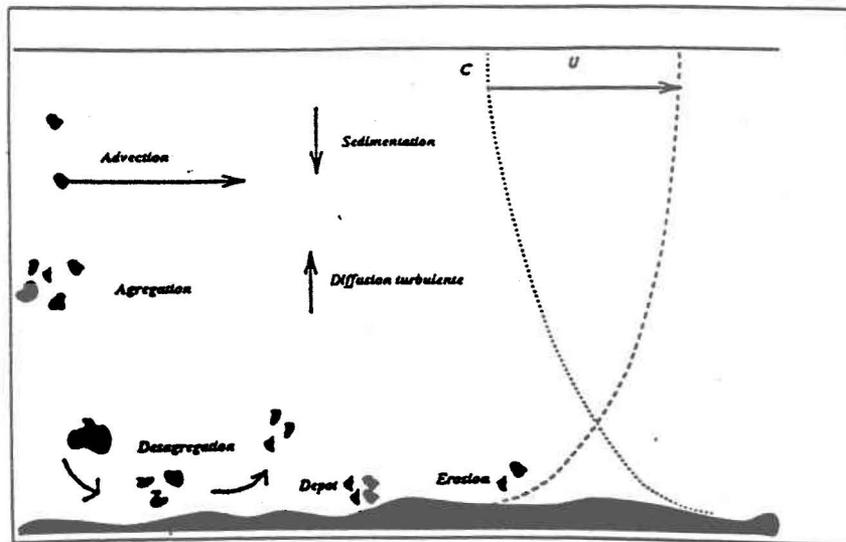


Figure 2.1: Mécanismes intervenant lors du transport des solides en suspension.

C'est généralement sur la base du diamètre que l'on distingue les particules cohésives des particules non cohésives. D'après Tanguy (1989), les particules de diamètre inférieur à 63  $\mu\text{m}$  sont considérées comme cohésives. En raison de leurs faibles dimensions, elles subissent des forces électrochimiques de surface. Ces forces de cohésion provoquent l'aggrégation de particules élémentaires en floques à contenu élevé en eau. Puisque les particules agglomérées ont des dimensions supérieures, leur vitesse de chute augmente.

Les particules plus grossières (diamètre supérieur à 63  $\mu\text{m}$ ) sont faiblement affectées par les forces de cohésion et peuvent être considérées comme non cohésives. Elles ne démontrent pas de tendance à la floculation. Contrairement aux particules cohésives, elles peuvent être facilement caractérisées, notamment par leur densité, leur diamètre et leur forme. Considérant une certaine incertitude, la vitesse de chute peut être évaluée.

À l'opposé, les propriétés d'une particule cohésive dépendent de la nature du solide et de la composition de l'eau. La connaissance des mécanismes de base contrôlant le transport des solides cohésifs est incomplète et les résultats obtenus à ce sujet sont très empiriques et spécifiques aux sites étudiés.

### **2.2.1.1 Échanges avec le fond**

Les processus de transfert de solides à l'interface eau-sédiments sont complexes et ne sont que partiellement compris. De nombreuses études ont été menées en vue d'acquérir une meilleure connaissance des mécanismes contrôlant le dépôt des particules et l'érosion du fond. Des hypothèses contradictoires ont été proposées relativement à la déposition et à la remise en suspension. Le caractère simultané ou successif de ces mécanismes n'est toujours pas établi formellement.

Dans une étude récente appliquée aux sédiments cohésifs, Lau and Krishnappan (1994) concluent à l'impossibilité d'avoir simultanément érosion et déposition tel que l'avaient proposé Mehta and Parthéniades (1985). Leurs résultats démontrent que les agrégats qui se déposent sont ceux qui peuvent subir le cisaillement élevé du lit. Ils ne peuvent être remis en suspension que par une augmentation des contraintes de cisaillement. Ces résultats mettent en évidence l'importance d'évaluer le cisaillement critique qui détermine la limite entre la déposition ou l'érosion.

Deux types d'approche sont rencontrées pour modéliser les transferts de matière avec le fond. La première fait appel à la notion d'équilibre de la suspension. Elle nécessite l'estimation de la concentration prévalant en régime stationnaire à un niveau de référence situé très près du fond. La seconde consiste à évaluer directement les flux de déposition et d'érosion à l'interface et à en calculer le flux résultant.

### 2.2.1.2 Approche basée sur la notion d'équilibre

En situation de régime permanent et de flux de matière en équilibre au fond (déposition = érosion), l'hypothèse de conservation de la masse dans la colonne d'eau permet de développer le profil de matière en suspension classique de Rouse (Guichard et Mouchel, 1993):

$$\frac{C(z)}{C(z=a)} = \left[ \left( \frac{a}{H-a} \right) \left( \frac{H-z}{z} \right) \right]^m \quad [2.1]$$

$$m = \frac{Sw_s}{\kappa u_*} \quad [2.2]$$

$H$ : hauteur d'eau;

$s$  : nombre de Schmidt turbulent;

$w_s$  : vitesse de sédimentation;

$\kappa$  : constante de von Karman;

$u_*$  : vitesse de cisaillement de fond.

Le niveau de référence est généralement pris à une hauteur correspondant à quelques centièmes de la hauteur d'eau totale (de 0.01H à 0.05H). À ce niveau, il est

possible d'évaluer une concentration d'équilibre qui rend le flux de déposition égal au flux d'érosion. Parmi les différentes relations permettant d'estimer la concentration d'équilibre, la formulation de van Rijn (1984) proposée par Garcia and Parker (1991) a été retenue.

La relation de van Rijn pour le calcul de la concentration d'équilibre comporte un ensemble d'équations qui permet d'estimer une concentration volumétrique adimensionnelle prévalant à un niveau de référence en situation d'équilibre. Un minimum de  $0.01H$  est suggéré comme niveau de référence.

$$C_{ae} = 0.015 \frac{D_{50} T}{a D_*^{0.3}} \quad [2.3]$$

avec:

$$T = \frac{u_*'^2 - u_{*cr}^2}{u_{*cr}^2} \quad [2.4]$$

$$D_* = D_{50} \left[ \frac{(s-1)g}{\nu^2} \right] \quad [2.5]$$

$$u_*' = \frac{u \sqrt{g}}{18 \log \left( \frac{4H}{D_{90}} \right)} \quad [2.6]$$

$C_{ae}$  : concentration d'équilibre au niveau de référence;

$D_{50}$  : diamètre médian du substrat;

$D_{90}$  : diamètre représentatif du décile supérieur du substrat;

$u_*'$  : vitesse de cisaillement associée à la friction du lit sédimentaire;

$u_{*cr}$  : vitesse de cisaillement critique associée à l'initiation du mouvement des sédiments;

$g$  : accélération gravitationnelle;

$\nu$  : viscosité cinématique;

$H$  : hauteur d'eau totale.

Le paramètre  $T$  peut être vu comme une contrainte de cisaillement normalisée. La concentration d'équilibre peut être utilisée pour évaluer les flux convectifs et diffusifs entre la colonne d'eau et la couche de fond. Tanguy (1989) suggère d'exprimer le flux résultant à l'interface eau-sédiments comme la différence entre la valeur réelle du flux convectif et sa valeur à l'équilibre:

$$\Delta S = D_a + E_a = -\alpha w_s (C_a - C_{ae}) \quad [2.7]$$

$\Delta S$  : flux de matière résultant à l'interface eau-sédiments;  
 $D_a$  : flux de matière par déposition au niveau de référence;  
 $E_a$  : flux de matière par érosion au niveau de référence.

Le paramètre  $\alpha$  représente une probabilité de déposition. L'avantage de cette méthode provient du fait qu'aucune supposition d'équilibre n'est requise.

### 2.2.1.3 Approche basée sur l'évaluation directe des flux

La formulation de Krone rapportée par Shen and al. (1993), Lee and al. (1994) et par Teisson (1992) propose des critères de déposition et de remise en suspension basés sur la vitesse de cisaillement appliquée au fond. Contrairement aux méthodes basées sur les conditions d'équilibre, elle ne nécessite pas d'établir un niveau de référence pour l'évaluation des échanges. Elle est particulièrement bien adaptée aux représentations bidimensionnelles horizontales.

Un taux de déposition,  $S_d$ , est évalué à partir d'une probabilité d'adhérence au lit des particules déposées. Elle s'applique uniquement dans le cas d'un cisaillement inférieur au cisaillement critique de déposition. Ce dernier représente le cisaillement maximal sous lequel les particules déposées peuvent demeurer fixées au lit.

$$S_d = -P_d w_s C \quad \text{pour } u_* \leq u_{*d,c} \quad [2.8]$$

$$P_d = \left( 1 - \frac{u_*}{u_{*d,cr}} \right) \quad [2.9]$$

$S_d$  : taux de déposition;  
 $P_d$  : probabilité de déposition;  
 $u_{*d,cr}$  : vitesse de cisaillement critique de déposition.

Le taux de déposition est considéré nul lorsque le cisaillement appliqué dépasse la valeur critique. Le cisaillement critique de déposition est fonction du type de grains traités. Des valeurs proposées par Krone (1977) et par Herdendorf (1978) ont été utilisées par Lee and al. (1994) pour des sables fins, limons et argiles.

Une formulation comparable est appliquée au processus d'érosion du lit. Le cisaillement critique d'érosion constitue une limite inférieure nécessaire pour initier le mouvement des particules constituant le lit.

$$S_e = M_e \left( \frac{u_*}{u_{*,cr}} - 1 \right) \quad \text{pour } u_* \geq u_{*,cr} \quad [2.10]$$

$S_e$ : taux d'érosion

$u_{*,cr}$ : vitesse de cisaillement critique d'érosion.

Le paramètre  $M_e$  doit être évalué expérimentalement à partir d'une formulation du type:

$$M_e = aC^b \quad [2.11]$$

Le cisaillement critique pour l'érosion dépend des caractéristiques du lit. La variation de la structure et de la composition du lit affectent sa valeur. L'utilisation d'un tel critère d'érosion nécessite de modéliser l'évolution du lit. Des modèles par couches superposées sont proposés par Teisson (1992) et par Lee and al. (1994).

Pour la déposition et la remise en suspension, le cisaillement affectant la couche de fond doit être évalué et comparé au cisaillement critique de déposition et d'érosion. Il est alors possible de déterminer si on se trouve en situation de déposition ou d'érosion et d'évaluer le terme d'échange convectif ou diffusif correspondant. Le cisaillement de fond s'évalue par la relation suivante:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_*}{\rho}} = \frac{g^{1/2} n \left| \vec{V} \right|}{H^{1/6}} \quad [2.12]$$

$\tau_*$  : contrainte de cisaillement de fond;

$\rho$  : masse volumique de l'eau;

$n$  : coefficient de Manning;

$\left| \vec{V} \right|$  : module de vitesse.

#### 2.2.1.4 Modèle ELAsed

Barros and Baptista (1989) proposent le modèle ELAsed (modèle Eulérien-Lagragien pour la sédimentation) pour le transport des sédiments en estuaire. L'équation de transport-diffusion intégrée verticalement est appliquée à quatre classes de solides en suspension.

Pour une classe granulométrique donnée, le flux par déposition est exprimé en fonction de la vitesse de sédimentation et de la différence entre la concentration réelle et une concentration seuil,  $C_s$ , non décantable et caractérisant le type de solide et le milieu :

$$S_d = -w_s(C - C_s) \quad [2.13]$$

Bien que la concentration seuil soit fortement liée au site étudié, les valeurs typiques sont situées entre 15 et 30 mg/l.

Le modèle considère la possibilité d'avoir érosion et déposition simultanée. Il exprime le flux érosif à partir du cisaillement critique applicable à chaque classe de particules:

$$S_e = \beta(\tau_* - \tau_{cr})^n \quad [2.14]$$

Le coefficient d'érosion  $\beta$  et l'exposant  $n$  caractérisent le type de solides. Pour des sédiments très cohésifs, le phénomène de consolidation défavorise l'érosion et on suggère pour le coefficient d'érosion des valeurs de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-6}$ .

### 2.2.1.5 Vitesse de sédimentation

Toute expression du flux de déposition de sédiments en suspension fait intervenir la vitesse de sédimentation. Développée à partir d'un bilan de force sur une particule sphérique en chute libre, la loi de Stokes est la relation la plus souvent utilisée pour évaluer la vitesse de sédimentation de particules non cohésives:

$$w_s = \frac{(s-1)gd^2}{18\nu} \quad [2.15]$$

$$s = \frac{\rho_s}{\rho_f} \quad [2.16]$$

$\rho_s$  : masse volumique de la particule solide;  
 $\rho_f$  : masse volumique du fluide;  
 $g$  : accélération gravitationnelle;  
 $d$  : diamètre particulaire;  
 $\nu$  : viscosité cinématique du fluide.

Cette équation s'applique plus particulièrement au cas d'écoulement laminaire autour de particules très fines. van Rijn (1984) propose de l'utiliser pour des particules de diamètre compris entre 30 et 100  $\mu\text{m}$ . Tout dépendant du régime d'écoulement, des variations de cette équation de base peuvent être employées. Leur domaine d'application est défini à partir du nombre de Reynolds de la particule ou de ses dimensions:

$$w_s = \frac{10\nu}{d} \left[ \sqrt{1 + \frac{0.01(s-1)gd^3}{\nu^2}} - 1 \right] \quad \text{pour } 100\mu\text{m} \leq d \leq 1000\mu\text{m} \quad [2.17]$$

$$w_s = 1.1 \sqrt{(s-1)gd} \quad \text{pour } d \geq 1000\mu \quad [2.18]$$

Ces équations s'appliquent à une particule isolée véhiculée dans un fluide pur. Dans le cas d'une suspension, la sédimentation est entravée par la présence de nombreuses particules. La vitesse de chute doit être corrigée en tenant compte d'une concentration volumétrique adimensionnelle  $c$ :

$$w_{s_s} = w_s (1 - c)^n \quad [2.19]$$

où  $w_{s_s}$  = vitesse de chute de la suspension.

Cette formulation proposée par McNawn et Lin a été reprise par plusieurs auteurs dont Tanguy (1989) et van Rijn (1984). La valeur de l'exposant peut être établie en fonction du nombre de Reynolds de la particule.

$$\begin{aligned} n &= 4.65 \quad \text{pour } Re_p \leq 1 \\ n &= 2.32 \quad \text{pour } Re_p \geq 1000 \end{aligned}$$

Une valeur intermédiaire de 4 est généralement utilisée.

#### 2.2.1.6 Traitement de la floculation

À l'intérieur d'une suspension, le phénomène d'agrégation des solides de faibles dimensions conduit à la formation de floques facilement décantables. À l'état floculé, les particules très fines peuvent démontrer des vitesses de chute plusieurs fois supérieures aux vitesses théoriques des particules indépendantes. Les floques formés ont un contenu élevé en eau.

Dans une étude sur les solides de rejets pluviaux, Chebbo et Bachoc (1992) démontrent l'importance de la floculation sur la décantation des particules véhiculées par les réseaux d'assainissement combinés et pluviaux. Pour les particules de diamètre inférieur à 50  $\mu\text{m}$ , les vitesses de chute observées surpassent considérablement les vitesses calculées à l'aide de la relation de Stokes. Le facteur de dépassement de la vitesse théorique peut aller jusqu'à 3 ou 4.

La floculation est un phénomène complexe dont la représentation mathématique est difficile et basée sur des lois empiriques. En milieu naturel, la salinité, la température et la concentration de sédiments en suspension sont des facteurs favorisant la floculation des particules cohésives.

Tel que rapporté par Migniot (1989), la floculation peut être caractérisée par un facteur  $F$  défini comme le rapport entre la vitesse de chute en milieu floculant et la vitesse de chute des particules indépendantes non floculées. Le facteur de floculation varie approximativement comme l'inverse du carré du diamètre équivalent des particules élémentaires (en microns):

$$F = Kd^{-1.8} \quad [2.20]$$

Le coefficient  $K$  varie en fonction de la concentration et de la salinité du milieu. Teisson (1992) propose d'utiliser une valeur égale à 250. L'utilisation du facteur de floculation permet de corriger la vitesse de chute théorique des particules cohésives floculées. Celles-ci auront ainsi une vitesse de chute d'autant plus grande que leur diamètre sera faible:

$$w_{sf} = w_s F \quad [2.21]$$

$w_{sf}$  : vitesse de chute des particules floculées.

Teisson (1992) suggère aussi la relation de Krone qui corrèle la vitesse de chute des particules cohésives à la concentration de sédiments en suspension. Pour des concentrations modérées (entre 0.3 et 10 g/l), la vitesse de chute augmente avec la concentration:

$$w_{sf} = kC^{4/3} \quad [2.22]$$

$k$  : coefficient empirique.

Pour des valeurs supérieures de la concentration, la sédimentation est entravée et il est recommandé d'utiliser un modèle tridimensionnel de l'écoulement pour représenter le phénomène.

### 2.2.1.7 Concepts retenus pour la modélisation

Compte tenu des applications envisagées, une modélisation du transport des matières en suspension et de leur sédimentation combinée à une caractérisation du lit de sédiments est jugée suffisante. L'intérêt étant porté ici sur les impacts immédiats des rejets de temps de pluie, les changements au niveau du lit de sédiments peuvent être négligés. En effet, malgré le fait que les phénomènes de sédimentation et d'érosion jouent un rôle significatif à l'intérieur d'un modèle de transport de solides en suspension et que l'érosion du lit de sédiments est à la source de la remise en suspension de particules déposées, une modélisation détaillée de la structure et de la composition du lit n'est nécessaire que lorsque l'on cherche à représenter l'évolution des fonds. Ce serait le cas si l'on s'intéressait aux impacts à long terme des rejets pluviaux. Les modifications du lit engendrées par une succession d'événements pourraient alors être estimées par bilan sur la période.

Une formulation mathématique inspirée du modèle de Krone est donc retenue pour modéliser la déposition des matières en suspension. Le flux de déposition sera calculé à partir des contraintes de cisaillement critiques et des vitesses de sédimentation des classes granulométriques à considérer (équations 2.8 et 2.9). Considérant le nombre de Reynolds particulaire, les vitesses de sédimentation seront calculées d'après les relations 2.15, 2.17 et 2.18. De plus, pour les solides cohésifs, le facteur de floculation de Mignot pourra être évalué avec l'équation 2.20.

## 2.2.2 Oxygène dissous

### 2.2.2.1 Variation naturelle de l'oxygénation du milieu

Dans un cours d'eau qui ne subit aucune influence anthropique, une variation diurne naturelle de l'oxygène dissous est observable. Les mécanismes de photosynthèse et de respiration de la communauté aquatique en sont responsables. De plus, la diffusion de l'oxygène atmosphérique à la surface de l'eau assure une réoxygénation naturelle de la masse d'eau. En excluant les termes reliés au transport et à la diffusion, le bilan d'oxygène dissous,  $\Delta S$ , peut être formulé de la façon suivante:

$$\Delta S = K_a(C_{sat} - C) + P - R \quad [2.23]$$

$C$  : concentration en oxygène dissous;

$C_{sat}$  : concentration à saturation;

$K_a$  : constante de réaération atmosphérique;

$P$  : taux de production par photosynthèse;

$R$  : taux de respiration.

Lorsqu'un cours d'eau est soumis à des apports anthropiques ou naturels de composés oxydables, des processus de biodégradation entrent en jeu et exercent un effet déterminant sur l'oxygénation du milieu. Dans le cas de rejets d'eaux usées d'origine urbaine, la consommation d'oxygène liée à la dégradation du carbone et de l'azote organique peut causer un déficit en oxygène dissous. De plus, l'apport d'une masse d'eau déjà anoxique contribue aussi à abaisser la concentration en oxygène du milieu.

La matière organique qui compose un rejet urbain est généralement mesurée en termes de demande biochimique en oxygène (DBO). Ce paramètre permet d'évaluer directement la quantité d'oxygène nécessaire à la biodégradation de la matière organique. On distingue parfois la demande en oxygène associée à la biodégradation du carbone organique (CDBO) et des composés azotés (NDBO). Puisque la croissance des colonies bactériennes nitrifiantes nécessite un temps d'incubation supérieur, la biodégradation du carbone organique précède la nitrification et la CDBO s'exerce avant la NDBO.

Il est aussi possible d'avoir recours à la demande chimique en oxygène (DCO) afin d'évaluer la matière organique oxydable. La DCO est représentative de l'ensemble des composés oxydables chimiquement et biochimiquement. Elle est mieux adaptée aux cas des effluents à contenu élevé en espèces chimiques peu biodégradables. Pour caractériser des eaux usées véhiculées par les réseaux pluviaux et unitaires, Ellis (1986) suggère d'utiliser la DCO. Il justifie son point de vue par le contenu élevé en solides minéraux et en toxiques qui peut potentiellement inhiber la biodégradation. L'utilisation de la DCO peut par contre conduire à une surestimation de la consommation d'oxygène. Certains composés oxydables par des méthodes chimiques ne peuvent pas être dégradés par des processus naturels et persistent pendant très longtemps sous leur forme initiale.

Les mécanismes de respiration et de production par photosynthèse décrivent la variation de la concentration en oxygène en situation d'équilibre sur la base journalière. En situation de rejet urbain pluvial, l'équilibre est rompu et les processus de dégradation bactérienne ont un effet prédominant sur la consommation d'oxygène. À ce niveau, la respiration algale a relativement peu d'influence. D'après CEGEO (1993), le couvert nuageux prévalant généralement lors d'un épisode de débordement et la turbidité de l'eau associée à la diffusion du panache minimisent l'effet de la photosynthèse. Il est donc possible de décrire l'évolution du déficit en oxygène en ne considérant que les processus de dégradation bactérienne et de réaération atmosphérique.

Puisqu'ils sont déterminants relativement à la chute des concentrations en oxygène dans un milieu soumis à un rejet urbain, les processus de dégradation de la matière organique sont analysés en détails au prochain paragraphe.

#### **2.2.2.2 Processus de dégradation de la matière organique**

La matière organique contenue dans les rejets urbains de temps de pluie est présente sous forme dissoute et particulaire. C'est par des processus distincts que s'effectue l'élimination de la colonne d'eau de ces deux formes de matière organique. Afin de

représenter la dégradation de la matière organique et la consommation de l'oxygène dissous, il est nécessaire de les considérer séparément.

Tel que présenté par Harremoës (1982), trois mécanismes différents sont à l'origine de l'élimination de la matière organique:

- la biodégradation de la matière dissoute par les microorganismes;
- la fixation de la matière dissoute et colloïdale;
- la sédimentation de la matière particulaire.

La fixation de la matière dissoute fait référence aux processus de sorption sur les sédiments en suspension et déposés ainsi que sur les organismes vivants (biosorption).

Ces mécanismes d'élimination de la matière organique résultent en deux types d'effets sur la concentration en oxygène dissous:

- Une diminution quasi immédiate des concentrations en oxygène dissous liée à la biodégradation de la matière dissoute et à l'absorption par les organismes vivants. La consommation d'oxygène s'effectue simultanément avec l'élimination de la matière organique, il en résulte une chute rapide des concentrations en oxygène. L'effet subsiste le temps du passage du panache d'effluent.
- Une diminution différée des concentrations en oxygène dissous liée à la dégradation benthique de la matière organique sédimentée. La consommation d'oxygène continue de se manifester après l'élimination de la matière organique de la colonne d'eau et une diminution d'oxygène est observée bien après le passage du panache d'effluent.

Hvitved-Jacobsen (1982) s'est penché sur l'importance relative de ces deux mécanismes de consommation de l'oxygène du milieu récepteur et a pu démontrer la prédominance de l'effet différé pour plusieurs cours d'eau danois.

Pour la rivière Saint-Charles à Québec, Lavallée (1989) a constaté que le déficit en oxygène atteignait un sommet trois jours après l'événement pluvieux. La demande benthique en oxygène s'avère donc un paramètre essentiel à l'analyse de la désoxygénation du milieu.

En vue de modéliser le processus de dégradation de la matière organique carbonée, Thomann and Mueller (1987) proposent une approche basée sur la distinction des formes dissoutes et particulaires de la DBO. Considérant  $L_d$  et  $L_p$ , respectivement la DBO dissoute et la DBO particulaire, la DBO totale est donnée par:

$$L = L_d + L_p \quad [2.24]$$

En posant l'hypothèse que seule la forme dissoute est oxydée dans la colonne d'eau et que la forme particulaire est éliminée par sédimentation, on peut écrire:

$$\frac{dL}{dt} = -K_d L_d - \frac{w_s L_p}{H} \quad [2.25]$$

$K_d$  : coefficient de dégradation de la matière organique dissoute;

$w_s$  : vitesse de sédimentation des matières solides;

$H$  : hauteur d'eau.

Cette formulation ne permet toutefois pas de relier la demande benthique en oxygène à la quantité de matière organique particulaire déposée au fond. Toutefois, l'influence individuelle d'un épisode de débordement sur la demande benthique globale apparaît négligeable et le taux de consommation d'oxygène par les sédiments peut être considéré comme un régime permanent.

### 2.2.2.3 Modèles d'oxygène dissous

La littérature rapporte de nombreux modèles d'oxygène dissous applicables pour les rejets en rivière d'eaux usées d'origine urbaine. Ils sont classiquement basés sur les travaux de Streeter-Phelps qui décrivent la réponse naturelle d'un cours d'eau à un apport de matière organique. L'équation classique de transport-diffusion est appliquée pour représenter la distribution spatiale des concentrations. Dans leur forme la plus complète, ces modèles tiennent compte des facteurs suivants comme puits et sources d'oxygène:

- la réaération atmosphérique;
- la photosynthèse;
- la respiration;
- la DBO;
- la demande benthique en oxygène.

À titre d'exemple, mentionnons le modèle QUAL2 (Medina, 1986) qui considère l'influence de tous ces facteurs sur l'oxygénation du cours d'eau. Dans la formulation mathématique unidimensionnelle de ce modèle, l'équation de transport-diffusion est résolue pour les variables d'état suivantes: l'oxygène dissous, la DBO, la demande benthique en oxygène, l'ammonium, les nitrites et nitrites, les phosphates et la biomasse phytoplanktonique. Ces variables étant interliées par des flux réciproques, le modèle consiste en un système d'équations à résoudre simultanément.

Une représentation aussi détaillée des processus influençant l'oxygénation du milieu n'est pas toujours requise. Tout dépendant de l'application à laquelle le modèle est destiné ainsi que des caractéristiques du cours d'eau et du rejet, plusieurs variations et simplifications sont possibles.

*Modèle du NWRW (van Sluis, 1993)*

Le modèle de qualité du NWRW (Pays-Bas) pour l'évaluation des impacts des débordements de réseaux unitaires sur le bilan d'oxygène est de type Streeter-Phelps. La particularité du modèle provient de la distinction entre la DBO dissoute et particulaire. À partir de mesures de DBO associées aux matières en suspension, la DBO dissoute est évaluée par une relation empirique.

Le modèle prend en compte les processus suivants:

- mélange initial près du point de rejet;
- dilution de l'effluent avec le débit de base du cours d'eau;
- sédimentation;
- bioconversion et biodégradation des contaminants.

La sédimentation de la DBO particulaire est à l'origine de la demande benthique en oxygène. Les résultats du modèle démontrent la nécessité d'inclure au bilan d'oxygène les comportements distincts de la DBO dissoute et particulaire. Il est alors possible de représenter les effets immédiats et différés de la biodégradation sur le taux d'oxygénation du milieu.

*Modèle DOSMO (Shaarup-Jensen and Hvitved-Jacobsen, 1990)*

Ce modèle vise à évaluer l'impact des rejets urbains de temps de pluie sur les concentrations en oxygène de cours d'eau au Danemark. Une représentation unidimensionnelle de l'écoulement en rivière est utilisée pour résoudre les équations de St-Venant et de transport. Le phénomène de dispersion est négligé.

Une distinction est portée entre la consommation immédiate et différée de l'oxygène du milieu. La consommation immédiate est décrite en fonction de la dégradation de la matière organique dissoute, par l'intermédiaire d'une cinétique de premier ordre. La

consommation différée est aussi décrite par une telle cinétique mais cette fois, c'est la matière organique adsorbée qui entre en jeu. Cette dernière est évaluée par un bilan de matière autour de la matière organique particulaire.

En vue d'évaluer la concentration d'oxygène dissous résultante, l'expression de ces taux de consommation est combinée à l'équation de Streeter-Phelps. L'originalité du modèle provient de la manière de traiter la consommation immédiate et la consommation différée au niveau de la résolution. Pour un épisode de débordement dont la durée est  $T_a$ , la représentation unidirectionnelle de l'écoulement permet de restreindre la consommation immédiate d'oxygène au point  $x$  à la période suivante:

$$t \leq \frac{x - x_o}{u} + T_a$$

Quant à la période de consommation différée, elle survient après le passage du panache d'effluent au point  $x$ , c'est-à-dire pour:

$$t \geq \frac{x - x_o}{u} + T_a$$

$x_o$  : point de rejet de l'effluent.

#### 2.2.2.4 Concepts retenus pour la modélisation

La formulation retenue pour évaluer le taux d'oxygène dissous résiduel s'inspire des principes rapportés par Thomann and Mueller (1987) et Harremoës (1982). La matière organique y sera représentée par une demande biochimique en oxygène globale. La consommation d'oxygène dissous associée à la dégradation du carbone organique et des formes d'azote seront ainsi regroupée à l'intérieur d'un seul processus. De plus, étant donné son influence négligeable en situation de débordement, la réoxygénation par photosynthèse et la respiration planctonique ne sont pas pris en compte. Le bilan d'oxygène est donc calculé en fonction des processus suivants:

- dégradation de la DBO dissoute;
- demande benthique en oxygène;
- réaération atmosphérique.

La DBO est choisie comme variable d'état représentative de la matière organique oxydable. Son évolution doit donc être décrite. En plus de la dégradation des formes solubles à l'intérieur de la colonne d'eau, on tiendra compte aussi de la déposition de la DBO particulaire.

Puisque les impacts sont étudiés à l'échelle événementielle, la DBO qui est déposée au fond a peu d'influence à court terme sur la demande benthique en oxygène. On pose donc l'hypothèse d'une demande benthique constante, caractérisant le site étudié. Cette hypothèse est bien adaptée à la problématique des milieux subissant de façon répétitive les rejets d'émissaires de débordement. À long terme toutefois, ce facteur devrait tenir compte d'interventions ou des facteurs saisonniers (les crues par exemple) susceptibles de l'influencer à la baisse comme à la hausse.

### 2.2.3 Contamination bactérienne

La plupart des modèles de qualité traitant la contamination bactérienne utilisent les coliformes fécaux comme indicateur. La disponibilité des mesures de coliformes fécaux et l'interprétation facile des résultats justifient ce choix. Comme unité de mesure de la contamination par les coliformes fécaux, on a généralement recours au dénombrement des individus présents dans un échantillon de 100 ml (UCF/100 ml).

En milieu naturel, plusieurs facteurs contribuent à la décroissance des microorganismes. Selon Thomann and Mueller (1987), les facteurs suivants influencent la dynamique bactérienne:

- luminosité;
- température;
- salinité;
- prédation;
- disponibilité des nutriments;
- toxicité;
- sédimentation / remise en suspension.

La luminosité et la température sont reconnus comme les facteurs ayant le plus d'influence sur la disparition des coliformes fécaux. Le mécanisme de sédimentation des particules discrètes, agglomérées ou associées aux solides contribue aussi à l'élimination des coliformes de la colonne d'eau. Les bactéries sédimentées ne perdent toutefois pas leur potentiel contaminant. Au niveau benthique, l'accumulation d'organismes bactériens devient contraignante puisqu'ils peuvent être remis en suspension par dragage ou par l'action du courant, du vent, de la navigation ou des baigneurs.

### 2.2.3.1 Cinétiques de dégradation

Les cinétiques de dégradation des coliformes sont plutôt rapides et peuvent être évaluées à l'échelle horaire. Ainsi, l'étude de la contamination bactérienne cadre bien avec le contexte d'étude de l'effet à court terme des rejets urbains pluviaux.

L'équation de transport-diffusion a été fréquemment utilisée pour représenter la propagation des coliformes fécaux en rivière. Thomann and Mueller (1987) suggèrent de représenter la décroissance de la population par une cinétique de premier ordre. Un taux global de décroissance bactérienne est utilisé pour représenter la diminution de la population due aux effets combinés de la luminosité, de la sédimentation et de la mortalité naturelle:

$$\Delta S = -K_B B \quad [2.26]$$

$\Delta S$  : taux de disparition de la population de coliformes fécaux;

$K_B$ : coefficient de décroissance bactérienne;

$B$ : concentration en coliformes fécaux.

Cette formulation simplifiée de la cinétique de décroissance de la contamination bactérienne a été employée à maintes reprises comme puits de matière dans des modèles de transport-diffusion. Spaulding and Liang (1990) l'ont utilisée dans un modèle de qualité en estuaire appliqué aux débordements des réseaux unitaires et aux effluents des stations d'épuration. Des valeurs de  $K_B$  variant entre 0 et 1 jour<sup>-1</sup> ont conduit à des résultats concordant relativement bien avec les observations.

Dans un modèle de qualité en rivière appliqué aux rejets par temps de pluie, Bedford and al. (1983) ont représenté la décroissance des coliformes par cette cinétique globale d'ordre premier. Le modèle unidirectionnel purement advectif considèrerait l'effet de

la turbulence et de la température sur le taux de décroissance bactérienne. Ce taux était évalué à l'aide d'une relation empirique du type:

$$K_B = aQ^b\theta^{(T-20)} \quad [2.27]$$

Cette cinétique simplifiée est aussi considérée dans le modèle QUAL2 pour le traitement de la distribution des coliformes fécaux dans un écoulement.

En se basant sur l'approche de Thomann and Mueller (1987), Auer and al. (1993) proposent des cinétiques spécifiques pour chacun des trois facteurs considérés comme prioritaires soient la mortalité naturelle liée à la température, la luminosité et la sédimentation. Un coefficient global de disparition peut alors être évalué:

$$K_B = k_{T^0} + k_l + k_s \quad [2.28]$$

$k_{T^0}$  : coefficient de mortalité des coliformes fécaux en fonction de la température;

$k_l$  : coefficient de mortalité des coliformes fécaux associé à la luminosité;

$k_s$  : coefficient de disparition des coliformes fécaux associé à la sédimentation.

Afin d'évaluer l'effet de la température sur le taux de mortalité naturelle, ils utilisent l'équation 2.27, c'est-à-dire la relation classique d'Arrhénius basée sur le taux observable à 20 °C. Le taux de décroissance attribuable à la luminosité est évalué à partir de l'intensité lumineuse effective:

$$k_l = \alpha I \quad [2.29]$$

$I$  : irradiance;

$\alpha$  : constante de proportionnalité.

Lorsque la profondeur est la dimension dominante comme c'est le cas en lac ou en réservoir, un coefficient d'extinction lumineuse doit être utilisé pour représenter la variation de l'irradiance sur la verticale.

Le taux de décroissance relatif à la sédimentation s'évalue simplement à partir de la vitesse de sédimentation et de la profondeur:

$$k_s = \frac{w_s}{H} \quad [2.30]$$

### 2.2.3.2 Phénomène de sorption des microorganismes

Les modèles précédents ne tiennent pas compte de façon spécifique de l'agglomération et de la sorption des coliformes sur les solides en suspension. Ces phénomènes sont englobés à l'intérieur du taux de sédimentation. Auer and al. (1993) suggèrent par contre de calculer des vitesses de sédimentation pour différentes classes granulométriques d'organismes bactériens. Des particules sédimentant sous forme agglomérée ou indépendante peuvent alors être traitées.

Une étude réalisée par Schillinger and Gannon (1985) sur la contamination bactérienne issue des surverses d'orages démontre l'importance de l'adsorption sur les solides en suspension. Ils évaluent à un pourcentage variant entre 16 et 47% la proportion des bactéries sorbées aux solides. Parmi l'ensemble de bactéries répertoriées, les coliformes fécaux démontrent la plus faible tendance à la sorption et demeurent surtout dans la colonne d'eau où ils se dégradent naturellement. D'autres bactéries pathogènes vont par contre s'accumuler dans les sédiments et menacer la salubrité du milieu à plus long terme.

Bien que les processus de sorption des bactéries aient une importance considérable sur leur distribution dans un cours d'eau, ils sont difficilement modélisables. Très peu de formulations mathématiques ont été développées pour illustrer le comportement sorptif des microorganismes et leur tendance à s'agglomérer.

À l'intérieur d'un modèle de transport-diffusion, l'évaluation d'un flux à partir d'une vitesse de sédimentation moyenne constitue une approche simple et réaliste pour traiter la déposition des bactéries coliformes. La relation avec les différentes classes de solides en

suspension ne peut cependant pas être considérée en raison de la complexité et de la variabilité du phénomène.

### **2.2.3.3 Concepts retenus pour la modélisation**

Tel que proposé au chapitre précédent, on aura recours aux coliformes fécaux comme variable d'état représentative de la contamination bactérienne.

Les principaux phénomènes affectant les contaminants bactériens ont été décrits dans la présente section. L'interaction des solides en suspension et des micropolluants toxiques sur les populations de bactéries a été présentée. Toutefois, les phénomènes de sorption sur les solides et d'inhibition des bactéries par les toxiques étant difficilement évaluable, ils ne seront pas considérés spécifiquement par le modèle. On tiendra compte d'un taux global de disparition qui réunit les effets de sédimentation, de luminosité, de température, de prédation et de décroissance naturelle des populations, ce qui conduit à un résultat sécuritaire du point de vue de la gestion des débordements. La cinétique d'ordre premier décrite par l'équation 2.26 sera employée.

## 2.2.4 Contamination toxique

Qu'ils soient de nature minérale (cuivre, zinc, plomb) ou organique (hydrocarbures aliphatiques ou aromatiques, HAP, BPC), les composés chimiques déversés en milieu naturel sont soumis à différents processus physiques, chimiques et biologiques. Outre l'advection et la diffusion, les phénomènes suivants assurent leur élimination graduelle de la colonne d'eau:

- l'adsorption-désorption des composés sous forme dissoute et particulaire;
- la sédimentation nette des composés particuliers;
- la diffusion à l'interface eau-sédiments;
- la dégradation chimique, photochimique et biologique;
- la volatilisation.

L'importance relative de ces processus varie d'un contaminant à l'autre. Pour des composés à haute tension de vapeur, la volatilisation constitue la voie d'élimination prédominante et l'importance des processus de sorption est moindre. C'est généralement le cas des hydrocarbures légers. Par contre, pour les métaux ou pour les composés organiques hydrophobes, l'adsorption a une importance déterminante.

Les micropolluants issus des rejets urbains pluviaux sont de nature variée mais peuvent être regroupés en trois catégories:

- les métaux lourds;
- les composés organiques;
- les espèces conservatives (chlore, calcium, sodium).

Les espèces conservatives n'étant pas soumises à des processus de dégradation, les phénomènes de transport par advection et par diffusion sont les seuls mécanismes à considérer pour la modélisation.

En milieu aqueux, les micropolluants peuvent être présents sous forme dissoute ou particulaire. Puisque ces deux formes sont soumises à des processus différents, il est essentiel d'évaluer la répartition de l'espèce chimique sous chacune. Le mécanisme de sorption étant à la base de la répartition d'un contaminant en phase liquide et solide, il est étudié en détails. Par la suite les mécanismes de volatilisation, de dégradation, de diffusion et de sédimentation sont discutés.

#### 2.2.4.1 Processus de sorption

##### *Répartition des formes dissoute et particulaire*

La répartition d'un contaminant sous forme dissoute et particulaire découle de sa tendance à l'adsorption sur les matières solides et de la disponibilité de ceux-ci. La concentration globale d'un contaminant s'exprime par la somme des concentrations des deux formes:

$$C = C_d + C_p \quad [2.31]$$

$$C_p = f_p C \quad [2.32]$$

$$C_d = f_d C \quad [2.33]$$

$C_d$  : concentration de la forme dissoute;  
 $C_p$  : concentration de la forme particulaire;  
 $f_d$  : fraction du contaminant sous forme dissoute ;  
 $f_p$  : fraction du contaminant sous forme particulaire.

Les cinétiques d'adsorption et de désorption déterminent la proportion de la forme dissoute et particulaire. En général, un taux initial d'adsorption élevé est observé. Par la suite, les composés adsorbés sur la surface externe des particules diffusant lentement vers l'intérieur, le processus est considérablement ralenti.

Pour une grande gamme de composés chimiques, un équilibre entre l'adsorption et la désorption s'établit rapidement. Dans la plupart des modèles mathématiques, on assume

que les cinétiques d'adsorption initiale sont très rapides et que les conditions d'équilibre sont atteintes instantanément. En plus de simplifier les modèles, ces considérations permettent d'éviter d'avoir à employer des coefficients d'adsorption et de désorption pour lesquels on dispose de peu d'informations. Parmi les modèles de transport de contaminants qui supposent l'établissement instantané de conditions d'équilibre, on retrouve entre autres le modèle présenté par Shen and al. (1993).

Le processus physico-chimique de sorption s'illustre par l'équation suivante:



Dans un milieu homogène, les taux de variation de chacune des formes s'expriment respectivement par:

$$\frac{\partial C_d}{\partial t} = -k_a C_d + k_d C_p \quad [2.35]$$

$$\frac{\partial C_p}{\partial t} = k_a C_d - k_d C_p \quad [2.36]$$

$k_a$  : coefficient d'adsorption;  
 $k_d$  : coefficient de désorption.

À l'équilibre, ces taux de variation sont nuls et on peut écrire:

$$\frac{k_a}{k_d} = \frac{C_p}{C_d} \quad [2.37]$$

Le coefficient de partition d'un soluté est défini comme le rapport à l'équilibre entre la masse de soluté adsorbé à la masse d'adsorbant sur la concentration de soluté en solution. Ce coefficient de partition doit avoir des unités qui correspondent à l'inverse des

unités de concentration. Si l'adsorbant potentiel se limite aux sédiments en suspension dans la colonne d'eau, on a:

$$K_p C_{sed} = \frac{C_p}{C_d} \quad [2.38]$$

$K_p$  : coefficient de partage;

$C_{sed}$  : concentration totale de sédiments en suspension.

Cette relation indique que pour un produit du coefficient de partage et de la concentration de sédiments en suspension supérieur à l'unité, la fraction particulaire est prédominante et le taux de désorption est inférieur au taux d'adsorption. Ce phénomène est souvent observé pour des composés organiques hydrophobes en contact avec des sédiments à haute teneur en carbone organique.

L'équation 2.38 peut aussi s'écrire:

$$\frac{C_p}{C_{sed}} = K_p C_d \quad [2.39]$$

Tel que présenté par Jaffé and Ferrara (1983), cette forme décrit une isotherme d'adsorption de Freundlich linéaire. Une telle isotherme est typique pour des toxiques organiques présents à faible concentration en milieu naturel.

Lorsqu'il est justifié d'assumer l'établissement de conditions d'équilibre, la fraction de contaminant particulaire peut être évaluée en fonction du coefficient de partage et de la concentration de sédiments. Elle s'obtient en isolant  $C_p$  de l'équation 2.39 et en le substituant dans l'expression de la fraction particulaire:

$$f_p = \frac{C_p}{C} = \frac{C_p}{C_p + C_d} = \frac{K_p C_{sed} C_d}{K_p C_{sed} C_d + C_d} = \frac{K_p C_{sed}}{1 + K_p C_{sed}} \quad [2.40]$$

De la même façon, la fraction dissoute s'exprime par:

$$f_d = \frac{1}{1 + K_p C_{sed}} \quad [2.41]$$

Ces expressions démontrent que la fraction de contaminants adsorbée augmente avec la concentration de solides en suspension et avec la valeur du coefficient de partage.

Jaffé et Ferrara (1983) ont étudié l'applicabilité de modèles qui considèrent un équilibre de sorption ou bien une cinétique de désorption. Leurs résultats démontrent que la cinétique de désorption a une influence négligeable lorsque la concentration de solides en suspension et le coefficient de partage sont élevés ou que les taux d'élimination (par volatilisation ou dégradation) sont faibles. Pour des composés hautement volatils tel le chloroforme, la prise en compte d'une cinétique de désorption apparaît essentielle alors que pour d'autres, l'hypothèse d'un équilibre de sorption est tout à fait appropriée. Ainsi, l'approche à employer doit être déterminée cas par cas.

#### *Évaluation du coefficient de partage*

La valeur du coefficient de partage est généralement reliée à la nature de l'espèce chimique adsorbable et des solides en suspension. Pour les composés organiques hydrophobes, le coefficient de partage est aussi fonction du contenu en carbone des solides adsorbants.

D'après les travaux de Thomann (1985) rapportés par Thomann and Mueller (1987), les coefficients de partage pour différents métaux lourds (cuivre, zinc, cadmium, chrome, plomb et nickel) sont pratiquement égaux. En première approximation, ils peuvent être calculés à partir de la relation suivante:

$$K_p = \frac{2.5 \times 10^5}{C_{sed}} \quad [2.42]$$

En substituant cette relation dans l'expression de la fraction dissoute,  $f_d$ , cette dernière prend une valeur constante, indépendante de la concentration de solides en suspension. Ainsi, pour la majorité des métaux lourds, la proportion de contaminant sous forme dissoute se situerait autour de 80%. Toutefois, ces résultats concordent peu avec les valeurs observées lors de campagnes de mesures pour des rejets de temps de pluie. Celles-ci rapportent des proportions de métaux lourds sous forme particulaire s'élevant généralement au-dessus de 80%.

Pour les contaminants de nature organique, la valeur du coefficient de partage est le plus souvent exprimée à partir de la distribution relative du contaminant entre l'octanol et l'eau ( $K_{ow}$ ) et de sa solubilité dans l'eau.

La distribution relative d'un composé organique entre l'octanol et l'eau représente le rapport des concentrations dissoutes dans les deux solvants. Elle permet d'évaluer le coefficient de partage octanol-eau. Selon Karickhoff (1984), ce dernier est relié à la fraction de carbone organique des solides en suspension et le coefficient de partage solide-eau s'exprime:

$$K_p = 0.617f_{oc}K_{ow} \quad [2.43]$$

$f_{oc}$  : fraction de carbone organique des solides en suspension.

Différentes expressions empiriques permettent de relier  $K_{ow}$  à la solubilité du composé dans l'eau, la plus courante étant celle de Chiou and al. (1977) que propose Shen and al.(1993):

$$\log K_{ow} = 5.0 - 0.67 \log S_w \quad [2.44]$$

Un processus sorptif peut aussi s'établir directement entre les contaminants dissous et le lit de sédiments. On peut vraisemblablement assumer que les coefficients de partage de la colonne d'eau et du lit de sédiments sont égaux.

### *Application aux rejets urbains pluviaux*

Les particules solides véhiculées en temps de pluie dans les réseaux d'égout et déversées aux cours d'eau sont de dimensions et de nature très variées. Les contaminants peuvent alors démontrer des tendances à s'adsorber préférentiellement sur certains types de solides. Peu d'informations sont disponibles relativement à l'adsorption de ces contaminants. Des auteurs tels Chebbo et Bachoc (1992) et Kletmetson (1985) se sont penchés sur la question et s'accordent à dire que c'est prioritairement sur les solides de faibles dimensions que s'adsorbent les contaminants toxiques, la matière organique et les nutriments. Selon, Chebbo et Bachoc, les hydrocarbures démontrent par contre une tendance à s'associer aux particules plus grosses.

### *Formulation du processus de sorption*

La prise en compte du processus de sorption dans un modèle de transport-diffusion est particulière. Lorsque l'équation de transport-diffusion est appliquée à la concentration globale de contaminant, ce processus ne constitue pas une source ou un puits de matière puisque la masse globale est conservée. La fraction dissoute et la fraction particulaire doivent être évaluées prioritairement, en considérant le coefficient de partage et la concentration de solides en suspension auxquels le contaminant est susceptible de se fixer. Elles seront ensuite prises en compte pour la résolution de l'équation de transport-diffusion.

#### **2.2.4.2 Volatilisation**

Les composés chimiques qui exercent une tension de vapeur élevée sont sujets à l'évaporation lorsqu'ils sont déversés en milieu naturel. Très souvent, ces composés sont peu solubles dans l'eau et ont une faible tension de surface. Ils s'étalent à la surface de l'eau en formant un film mince facilement volatilisable.

On considère normalement que seule la fraction dissoute peut être volatilisée. L'expression du flux de matière à l'interface air-eau fait appel à la théorie du transfert massique entre une phase liquide et gazeuse. Cette théorie développée au début du siècle par Lewis and Whitman est présentée par Hines and Maddox (1991). Elle assume que toute la résistance au transfert de matière se trouve dans un film liquide et un film gazeux à l'interface. Ainsi, les concentrations interfaciales sont à l'équilibre et peuvent être évaluées à partir de la loi d'Henry.

Le flux de contaminant par volatilisation s'évalue alors à partir d'un coefficient global de transfert de matière et de la concentration d'une part et d'autre de la surface de l'eau:

$$S_v = k_l \left( \frac{C_g}{H_e} - f_d C \right) \quad [2.45]$$

$S_v$ : flux de volatilisation;

$k_l$ : coefficient global de transfert de matière entre l'eau et l'air ;

$C_g$ : concentration du film gazeux;

$H_e$ : constante de la loi d'Henry.

Dans la plupart des cas, la concentration du film gazeux peut être supposée nulle. Considérant la résistance au transfert de matière de chacune des phases, le coefficient global d'échange de matière s'exprime par:

$$\frac{1}{k_l} = \frac{1}{K_l} + \frac{1}{K_g H_e} \quad [2.46]$$

$K_l$ : coefficient de transfert de matière à travers le film liquide;

$K_g$ : coefficient de transfert de matière à travers le film gazeux.

La constante de la loi d'Henry constitue un coefficient de partage entre la phase liquide et gazeuse. Elle s'évalue à partir de la pression de vapeur et la solubilité du composé:

$$H_e = \frac{P_{vap}}{S(RT)} \quad [2.47]$$

$P_{vap}$  : pression de vapeur;

$S$  : solubilité dans l'eau;

$R$  : constante universelle des gaz;

$T$  : température.

### 2.2.4.3 Cinétiques de dégradation

En milieu aquatique, plusieurs types de réactions de dégradation peuvent contribuer à l'élimination ou à la transformation des composés toxiques. Les processus suivants sont les plus souvent rapportés:

- la photolyse;
- l'hydrolyse;
- l'oxydation biologique (biodégradation);
- la réduction.

Le processus de biodégradation est généralement prédominant. Cependant, dans certains cas, la toxicité des espèces chimiques déversées peut inhiber l'action biologique accentuant ainsi la persistance de la contamination.

Thomann and Mueller suggèrent de représenter les processus de dégradation par un coefficient global,  $K_d$ , tenant compte des mécanismes de photolyse, d'hydrolyse et de biodégradation:

$$K_d = K_p + K_h + K_b \quad [2.48]$$

$K_p$  : coefficient de dégradation associée à la photolyse;

$K_h$  : coefficient de dégradation associée à l'hydrolyse;

$K_b$  : coefficient de biodégradation.

On assume généralement que seule la fraction dissoute est soumise à ces processus de dégradation. La dégradation des contaminants particuliers étant beaucoup plus lente,

elle peut être négligée. La perte de contaminant par dégradation s'exprime ainsi par une cinétique de premier ordre:

$$S_d = -K_d f_d C \quad [2.49]$$

### *Photolyse*

Par l'action de l'énergie solaire, les liens de formation d'une substance chimique peuvent être brisés. Le taux de dégradation photochimique est généralement évalué à partir d'une cinétique de premier ordre considérant un coefficient de dégradation photochimique fonction de l'absorbance du composé ( $\epsilon_\lambda$ ), de l'intensité lumineuse ( $L_\lambda$ ) et du quantum ( $\phi$ ) (Shen and al., 1993):

$$K_p = \epsilon_\lambda L_\lambda \phi \quad [2.50]$$

Dans certains cas, la réaction de photolyse peut générer des composés de toxicité inférieure ou supérieure à celle du composé de départ.

### *Hydrolyse*

L'hydrolyse est une réaction chimique entre un composé organique et l'eau. Comme dans le cas de la photolyse, le produit de la réaction peut être plus ou moins toxique. La réaction d'hydrolyse dépend des concentrations molaires d'ions  $H^+$  et  $OH^-$  et ces dernières doivent être prise en compte pour l'évaluation de la constante de réaction. En milieu naturel, la réaction peut être catalysée par des enzymes et peut ainsi être comparée à un processus de biodégradation.

Thomann and Mueller (1987) proposent la relation suivante pour la constante de réaction d'hydrolyse:

$$K_h = K + K_a [H^+] + K_b [OH^-] \quad [2.51]$$

$K$  : constante de réaction à neutralité;  
 $K_a$ : constante de réaction en milieu acide;  
 $K_b$ : constante de réaction en milieu basique.

### *Biodégradation*

En raison de la richesse et de la diversité des populations microbiennes présentes dans un cours d'eau, la biodégradation joue un rôle déterminant dans l'élimination des toxiques.

Lorsqu'une population est adaptée au composé chimique d'origine anthropique, elle peut l'utiliser comme source d'énergie. Elle assure ainsi sa disparition. En se basant sur l'équation de Monod pour la croissance bactérienne, le coefficient de biodégradation peut être estimé par la relation suivante:

$$K_b = \frac{\mu_{\max}}{yK_s} \quad [2.52]$$

$\mu_{\max}$ : taux de croissance spécifique maximum;  
 $y$ : coefficient de croissance bactérienne;  
 $K_s$ : constante de demi-saturation.

$K_b$  doit être corrigé pour tenir compte des variations de température. L'équation d'Arrhénius est généralement employée.

#### **2.2.4.4 Diffusion vers les sédiments**

À l'interface eau-sédiments, un flux diffusif de contaminants dissous est observable. Il est causé par le gradient de concentration entre la colonne d'eau et l'eau interstitielle des sédiments. Puisque la diffusion turbulente dans la colonne d'eau est plusieurs fois supérieure à celle des sédiments qui est de nature moléculaire, la résistance au transfert massique provient uniquement de la phase sédimentaire. Thomann and Mueller (1987) rapportent la formulation de Di Toro pour le coefficient de diffusion eau-sédiments,  $K_j$ :

$$K_f = 19\phi M^{-\frac{2}{3}} \quad [2.53]$$

$M$  : masse moléculaire du contaminant;  
 $\phi$  : porosité des sédiments.

Le flux diffusif s'évalue à partir du gradient de concentration à l'interface. La concentration de contaminant dans l'eau interstitielle,  $C_{sed}$ , doit être connue.

$$S_{dif} = K_f \left( \frac{C_{sed}}{\phi} - f_d C \right) \quad [2.54]$$

#### 2.2.4.5 Sédimentation et remise en suspension

Le transport des contaminants particuliers est entièrement dépendant des processus affectant les solides en suspension auxquels ils sont associés. En se déposant au fond, ces solides entraînent avec eux les contaminants adsorbés. Bien qu'ils soient éliminés de la colonne d'eau, ces contaminants demeurent problématiques. Ils peuvent être assimilés par les espèces benthiques et transférés aux niveaux trophiques supérieurs. De plus, les contaminants déposés sont susceptibles d'être remis en suspension par le phénomène d'érosion du lit.

Le flux de sédimentation des contaminants adsorbés peut être évalué à partir de la vitesse de chute des particules solides. En considérant une vitesse de remise en suspension des solides déposés, Shen et al. estiment un flux net de sédimentation et de remise en suspension:

$$\Delta S = w_s f_p C - w_e C_{sed_p} \quad [2.55]$$

$C_{sed_p}$  : concentration sédimentaire particulière;  
 $w_e$  : vitesse de remise en suspension des sédiments .

#### 2.2.4.6 Concepts retenus pour la modélisation

La formulation du comportement des micropolluants que l'on propose d'intégrer au modèle de transport-diffusion s'inspire fortement des travaux de Shen and al. (1993). Certains processus d'importance moindre sont toutefois laissés de côté et les concepts considérés se résument à:

- la sorption sur les matières en suspension;
- la dégradation chimique et biochimique;
- la volatilisation;
- la sédimentation.

Étant donné l'influence déterminante des solides en suspension sur le devenir des micropolluants, le modèle doit considérer en parallèle ces deux variables. L'équation de transport-diffusion devra être appliquée simultanément aux solides en suspension et aux micropolluants.

Le mécanisme d'adsorption-désorption sera évalué à partir du principe d'équilibre du partage. Considérant la valeur du coefficient de partage de l'espèce chimique et la concentration de solides en suspension, les fractions dissoute et particulaire seront calculées à l'aide des équations 2.40 et 2.41. La forme particulaire sera alors soumise à un processus de sédimentation identique à celui appliqué aux solides en suspension.

La disparition des contaminants par des processus chimiques et biochimiques sera évaluée d'après une cinétique de premier ordre qui fait référence à un taux global de dégradation. Finalement, pour les composés de nature organique, un flux de volatilisation pourra être évalué à partir de l'équation 2.45.

## **3 MODÈLE MATHÉMATIQUE**

---

Le modèle mathématique de propagation des rejets urbains de temps de pluie repose sur l'équation conventionnelle de transport-diffusion incluant les sources et les puits de matière. Cette équation doit être appliquée aux variables d'état sélectionnées au chapitre précédent et le comportement spécifique à chacune doit être considéré. La résolution numérique de cette équation est présentée au chapitre 4.

La connaissance des propriétés hydrodynamiques de l'écoulement est essentielle à la modélisation des phénomènes de transport advectif et diffusif. À cette fin, un modèle hydrodynamique est employé pour générer le champ de vitesse, les hauteurs d'eau et la diffusivité sur le domaine étudié. Il convient donc de débiter ce chapitre en introduisant les bases du modèle hydrodynamique qui sera utilisé. Par la suite, le développement de la forme bidimensionnelle de l'équation de transport-diffusion est présenté. Le modèle mathématique de transport-diffusion est ensuite décrit en détails. La présentation de certaines particularités associées à la résolution numérique termine le chapitre.

### **3.1 Modèle hydrodynamique**

La résolution simultanée des équations de conservation de la matière et de la quantité de mouvement constitue une approche classique pour la modélisation des écoulements à surface libre. La forme et le nombre d'équations à résoudre sont déterminés par le nombre de dimensions devant être représentées par le modèle.

Pour les écoulements caractérisés par une prédominance des dimensions horizontales sur la profondeur (canaux, rivières, ou fleuves), il est généralement convenable de poser l'hypothèse d'un mélange complet sur la verticale. De cette façon, on considère des valeurs des variables d'état moyennées sur la profondeur de l'écoulement.

Cette hypothèse est appliquée au modèle hydrodynamique comme au modèle de transport-diffusion. La figure 3.1 illustre le repère et les conventions respectées.

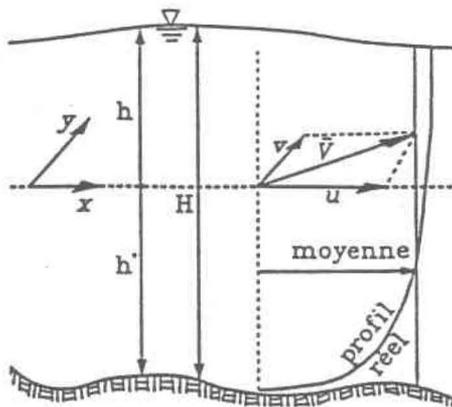


Figure 3.1. Repère et conventions du modèle hydrodynamique.

Le modèle bidimensionnel horizontal de l'écoulement est obtenu en intégrant temporellement et verticalement les formes tridimensionnelles des équations de continuité et du mouvement. Ces procédures d'intégration sont tout à fait semblables à celles qui seront présentées en annexe pour l'équation de transport-diffusion. En posant des hypothèses de pression hydrostatique et de fluide incompressible, on obtient:

*Équation de continuité*

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uH}{\partial x} + \frac{\partial vH}{\partial y} = 0 \quad [3.1]$$

*Équations du mouvement*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = F_x \quad [3.2]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = F_y \quad [3.3]$$

$$F_x = -\frac{gn^2|V|u}{H^{4/3}} + f_c v + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{C_w \rho_a |W| W_x}{\rho H} \quad [3.4]$$

$$F_y = -\frac{gn^2|V|v}{H^{4/3}} - f_c u + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) + \frac{C_w \rho_a |W| W_y}{\rho H} \quad [3.5]$$

$C_w$  : coefficient de traînée du vent;

$f_c$  : facteur de Coriolis;

$F_x, F_y$  : forces résultantes en x et y;

$g$  : accélération gravitationnelle;

$h$  : cote du plan d'eau par rapport à un référentiel de niveau;

$h'$  : cote bathymétrique;

$H$  : profondeur totale;

$n$  : coefficient de frottement de Manning;

$u, v$  : composantes de la vitesse selon x et y moyennées sur la verticale;

$|V|$  : module de la vitesse du courant;

$W_x, W_y$  : composantes de la vitesse du vent;

$|W|$  : module de la vitesse du vent;

$\rho$  : masse volumique de l'eau;

$\rho_a$  : masse volumique de l'air;

$\tau_{ij}$  : contraintes de Reynolds.

Les contraintes de Reynolds permettent de représenter les phénomènes de diffusion turbulente dont l'importance est largement supérieure à la diffusion moléculaire. En notation de Einstein, elles s'expriment de la façon suivante:

$$\tau_{ij} = \mu_T \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, \quad [3.6]$$

$\mu_T$  : viscosité cinématique turbulente.

La méthode des éléments finis a été retenue pour la résolution des équations du modèle hydrodynamique. À partir des caractéristiques physiques du cours d'eau (bathymétrie, nature du substrat et des plantes aquatiques), le domaine étudié est discrétisé en éléments triangulaires à taille ajustable. Les variables d'état, c'est-à-dire la vitesse en x et en y ainsi que le niveau d'eau, sont calculées sur chacun des noeuds du maillage. Les vitesses sont interpolées quadratiquement alors que les hauteurs d'eau le sont linéairement.

### 3.2 Développement de l'équation de transport-diffusion

Par bilan des flux massiques sur un élément volumique (figure 3.2), on parvient à développer la forme générale de l'équation de transport-diffusion. On pose l'hypothèse d'un contaminant non conservatif réparti uniformément dans une masse d'eau en mouvement. En plus des flux de matière par advection et par diffusion, des mécanismes de production ou de dégradation sont considérés globalement. On suppose qu'ils s'exercent de façon homogène dans l'espace et dans le temps.

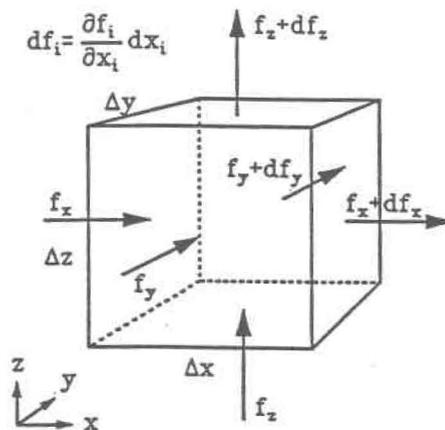


Figure 3.2. Flux massiques sur un volume élémentaire

La notation suivante est adoptée:

- $u_i C$ : flux advectif traversant le plan perpendiculaire à l'axe  $i$ ;
- $f_i$ : flux diffusif traversant le plan perpendiculaire à l'axe  $i$ ;
- $\phi$ : taux de production ou de dégradation de matière par des cinétiques quelconques.

La formulation mathématique du principe de conservation de la matière s'exprime ainsi:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial C}{\partial t} = \left[ (f_x + uC)_x - (f_x + uC)_{x+\Delta x} \right] \Delta y \Delta z + \left[ (f_y + vC)_y - (f_y + vC)_{y+\Delta y} \right] \Delta x \Delta z + \left[ (f_z + wC)_z - (f_z + wC)_{z+\Delta z} \right] \Delta x \Delta y + \phi (\Delta x \Delta y \Delta z) \quad [3.8]$$

En rendant infinitésimales les dimensions de l'élément et en divisant par le volume, on obtient la forme différentielle de l'équation:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial uC}{\partial x} - \frac{\partial vC}{\partial y} - \frac{\partial wC}{\partial z} - \frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial f_y}{\partial y} - \frac{\partial f_z}{\partial z} + \phi \quad [3.9]$$

En considérant un coefficient de diffusion moléculaire isotrope  $D_m$ , les flux diffusifs peuvent être représentés par une loi de Fick:

$$f_i = -D_m \frac{\partial C}{\partial x_i} \quad [3.10]$$

En substituant les expressions des flux diffusifs dans l'équation du bilan et en réarrangeant, on obtient:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \frac{\partial wC}{\partial z} = D_m \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + \phi \quad [3.11]$$

Cette expression constitue la forme tridimensionnelle générale de l'équation de transport-diffusion pour un contaminant non conservatif. Elle est valable pour des valeurs instantanées continues des variables d'état. Puisqu'en pratique une échelle de temps discrétisée est considérée, il est nécessaire de pondérer les variables sur un intervalle de temps suffisamment long pour éliminer les fluctuations aléatoires associées à la turbulence. À cette fin, on procède à l'intégration temporelle de l'équation de transport-diffusion. De plus, étant donné l'hypothèse d'un mélange complet sur la profondeur, l'équation doit être intégrée sur la verticale. La démonstration de ces deux méthodes d'intégration est présentée en annexe.

Après intégration temporelle et verticale, l'équation de transport-diffusion peut être écrite sous la forme suivante:

$$\frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial uHC}{\partial x} + \frac{\partial vHC}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} HD_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} HD_y \frac{\partial C}{\partial y} + \Delta S \quad [3.12]$$

Ici,  $\Delta S$  constitue un terme global de puits et de sources de matière. Sa formulation est spécifique à chacune des variables d'état considérés.

### 3.2.1 Domaine d'application du modèle pour le transport des solides en suspension

Les phénomènes de sédimentation et de remise en suspension ont une importance déterminante sur le transport des matières solides au sein de l'écoulement. Bien que ces phénomènes soient orientés selon la verticale, il est possible de les représenter à l'intérieur d'un modèle bidimensionnel horizontal. Certaines conditions restreignent cependant l'utilisation de valeurs moyennes verticales pour la représentation de ces flux.

Les flux de matière par sédimentation et érosion sont fonction des concentrations prévalant à l'interface eau-sédiments. En vue d'appliquer un modèle bidimensionnel horizontal, la concentration moyennée sur la profondeur doit être très proche de la concentration à la limite inférieure du domaine et le profil de concentration doit être pratiquement uniforme. Tanguy (1989) présente le domaine d'application d'un modèle à 2 dimensions horizontales pour le transport des suspensions. Il le limite aux cas de matériaux non cohésifs très fins et de profil de concentration en équilibre en tout point sur la verticale, c'est-à-dire un bilan érosion-déposition nul. Teisson (1991) élargit ce domaine d'application aux particules cohésives fines à faible vitesse de chute et aux concentrations modérées de solides en suspension.

En situation de débordement, un apport massif de matières en suspensions survient et la disponibilité de sédiments peut devenir supérieure à la capacité de transport de

l'écoulement. Il en résulte une déposition rapide des particules grossières suivie de l'établissement d'un équilibre. Il apparaît donc envisageable de traiter le transport des particules fines cohésives et non cohésives par une modélisation bidimensionnelle horizontale.

### 3.3 Modèle de transport-diffusion

L'équation qui résulte de l'intégration verticale doit être modifiée de manière à prendre en compte les sollicitations locales. Le terme de sollicitations fait référence aux injections ponctuelles ou diffuses de fluide. Cependant, dans le contexte d'un modèle numérique, il est aussi associé aux pertes ou gains locaux de fluides qui découlent de l'irrégularité du champ de vitesse.

Le traitement des sollicitations conduit à l'obtention de deux formulations différentes de l'équation de transport-diffusion: une formulation conservative et une formulation non conservative. Le choix de la formulation à utiliser repose uniquement sur les caractéristiques du champ de vitesse considéré. Un champ de vitesse est dit conservatif si le principe de conservation de la matière est respecté localement et globalement. À l'opposé, un champ de vitesse est non conservatif si en certains endroits, les bilans de masse d'eau ne sont pas fermés adéquatement. Ce phénomène s'énonce mathématiquement sous la forme d'une divergence non nulle du champ de vitesse à l'échelle considérée.

Les modèles numériques peuvent parfois produire des champs de vitesse non conservatifs: même si le bilan de matière global ou sectoriel est respecté, des pertes ou gains de matière sont observés localement. La discrétisation du domaine en est en grande partie responsable.

En s'inspirant du développement présenté par Galeati et Gambolati (1989) pour le phénomène de transport-diffusion dans un milieu poreux, il est possible de dériver les formulations conservative et non conservative de l'équation de transport-diffusion:

*formulation conservative*

$$\begin{aligned} \frac{\partial HC}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D_{xx} \frac{\partial HC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} D_{xy} \frac{\partial HC}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} D_{xy} \frac{\partial HC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_{yy} \frac{\partial HC}{\partial y} \\ - \frac{\partial u HC}{\partial x} - \frac{\partial v HC}{\partial y} + QHC^0 + \Delta S \end{aligned} \quad [3.13]$$

*formulation non conservative*

On considère ici un champ de vitesse non conservatif pour lequel l'expression de la divergence est:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x,y) \quad [3.14]$$

En substituant cette expression à l'intérieur de l'équation 3.13, on obtient:

$$\begin{aligned} H \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D_{xx} H \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} D_{xy} H \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} D_{xy} H \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_{yy} H \frac{\partial C}{\partial y} \\ - u H \frac{\partial C}{\partial x} - v H \frac{\partial C}{\partial y} + QHC^0 - QHC + \Delta S \end{aligned} \quad [3.15]$$

$D_{ij}$  : composantes du tenseur de dispersion;  
 $Q$  : débit volumique injecté par unité de volume ;  
 $C^0$  : concentration injectée.

On remarque tout d'abord que les termes diffusifs utilisés font appel à la structure complète d'un tenseur de dispersion. Ils permettent donc de représenter distinctement les phénomènes dispersifs suivant les quatre composantes tensorielles.

La différence essentielle entre ces deux formulations se situe au niveau de la gestion des pertes et des gains de fluide. Considérant une formulation non conservative, la divergence locale non nulle du champ de vitesse se traduit par une perte ou un gain de fluide à la concentration du milieu. Elle engendre ainsi une perte ou un gain au niveau de la masse globale de contaminant plutôt qu'au niveau de la concentration. Ainsi, si un volume d'eau à la concentration  $C^0$  est injecté et que son influence sur le champ de vitesse n'est pas prise en compte, on doit fournir au modèle la quantité d'eau impliquée,  $Q$ . Cette eau est alors traitée à la concentration du milieu. De cette façon, on évite l'apparition de gradients locaux artificiels trop élevés.

À l'opposé, avec la formulation conservative, la divergence non nulle du champ de vitesse entraîne des pertes ou des gains de fluide à l'état pur, c'est-à-dire sans concentration. On peut alors observer une concentration ou une dilution du contaminant et ainsi générer des gradients de concentration indésirables. Ainsi, il s'avère préférable de restreindre l'utilisation de la formulation conservative aux problèmes pour lesquels le champ de vitesse est conservatif.

D'après ces constatations, la formulation non conservative apparaît mieux adaptée à la modélisation des rejets de temps de pluie. Puisque les vitesses et les niveaux d'eaux utilisés en entrées du modèle sont le résultat d'une modélisation numérique, un champ de vitesse non conservatif est à prévoir. De plus, les volumes d'eau impliqués lors des débordements des réseaux d'assainissement pouvant être considérables, leur influence sur l'hydrodynamique du milieu devra parfois être prise en compte.

L'équation 3.15 est à la base du modèle mathématique de transport-diffusion appliqué aux débordements de réseaux unitaires. Le traitement de la diffusivité, les conditions limites et les puits et sources de matière viennent compléter la structure de ce modèle.

### 3.3.1 Traitement de la diffusivité

Le choix des paramètres de diffusivité constitue une étape déterminante dans l'application d'un modèle de transport-diffusion. En général, les modèles bidimensionnels décrivent le phénomène de dispersion dans le plan horizontal par les processus suivants:

- l'interaction entre le substrat et l'écoulement qui engendre une contrainte turbulente de fond;
- les instabilités horizontales associées aux gradients de vitesse et aux cisaillements latéraux.

Ces processus sont des propriétés de l'écoulement et peuvent être évalués par l'entremise d'une modélisation hydrodynamique. Le modèle hydrodynamique employé ici les évalue en tant que diffusivité de fond et diffusivité transversale turbulente. Tel que proposé lors de la démonstration de l'intégration verticale (annexe A.2), les différents niveaux de diffusion peuvent être regroupés sous une seule dispersion horizontale globale. Les deux termes de diffusivité peuvent être combinés en un seul coefficient qui est projeté sur les plans x et y de façon à générer un tenseur de dispersion.

#### *Diffusivité de fond*

Il est bien connu que la rugosité du lit de la rivière ralentit l'écoulement près du fond et engendre un profil de vitesse vertical de type logarithmique. Le cisaillement appliqué à l'interface induit une certaine turbulence sur toute la colonne d'eau. Cette dernière agit sur le mélange horizontal des solutés ou des suspensions (Fisher, 1979).

La diffusivité de fond est généralement évaluée à l'aide de la formule de Taylor:

$$D_f = Ku^*H \quad [3.16]$$

$K$  : constante variant entre 0.135 et 0.17;  
 $u^*$  : vitesse de cisaillement.

Une valeur de 0.15 est souvent employée pour  $K$ .

### *Diffusivité turbulente horizontale*

Au sein d'un écoulement naturel, la dispersion associée aux contraintes de cisaillement latérales peut être évaluée à partir du concept de longueur de mélange. Développé à l'origine pour décrire le mouvement, ce concept permet de représenter le processus de mélange induit par la turbulence. Considérant une longueur caractéristique, la diffusivité turbulente horizontale est calculée à partir des gradients de vitesse:

$$D_n = \beta l_m \sqrt{2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \quad [3.17]$$

$\beta$  : constante de calibration;

$l_m$  : longueur de mélange caractéristique.

Selon Leclerc et al. (1992), la constante de calibration doit être ajustée de façon à ce que la diffusivité résultante respecte le registre de valeur proposé par la littérature (Fisher, 1979) soit:

$$0.15 \leq \left( \frac{D_n}{u^* H} \right) \leq 0.75$$

Ces bornes ont été établies pour des cours d'eau légèrement à moyennement méandrés. Le rapport peut prendre localement des valeurs nettement supérieures, en particulier autour d'obstacles ou de singularités.

### *Tenseur de dispersion*

En vue d'obtenir une diffusivité globale du milieu, la diffusivité de fond est combinée à la diffusivité turbulente horizontale. On assume que cette diffusivité globale

s'exerce à la fois longitudinalement et transversalement. De façon à pouvoir inclure une certaine anisotropie, des facteurs de pondération sont introduits.

Finalement, les composantes du tenseur de dispersion sont évaluées à l'aide des relations suivantes:

$$D_{xx} = D_x \cos^2 \theta + D_y \sin^2 \theta \quad [3.18]$$

$$D_{xy} = (D_x - D_y) \sin \theta \cos \theta \quad [3.19]$$

$$D_{yy} = D_x \sin^2 \theta + D_y \cos^2 \theta \quad [3.20]$$

$D_x$  : diffusivité longitudinale;

$D_y$  : diffusivité transversale;

$\theta$  : angle du module de vitesse par rapport à l'axe des x.

### 3.3.2 Conditions aux limites

L'application des conditions aux limites du domaine est essentielle à la résolution de l'équation de transport-diffusion. Lorsque le problème est transitoire, des conditions initiales doivent aussi être considérées.

Le choix des conditions aux limites peut jouer un rôle important sur la précision et la stabilité de la solution. Il est nécessaire d'établir des conditions aux limites représentatives de la physique du problème et qui assurent une résolution numérique adéquate. Un choix de conditions aux limites trop rigides peut être à la source d'oscillations parasites de la solution.

Dans les paragraphes qui suivent, la notation suivante est utilisée:

$\Omega$  : le domaine entier considéré;

$\Omega_i$  : un sous-domaine  $i$  de  $\Omega$ ;

$\Gamma$  : la frontière bornant le domaine  $\Omega$  ;  
 $\Gamma_i$  : une portion  $i$  de la frontière  $\Gamma$ .

### *Conditions initiales*

Afin de résoudre un problème transitoire, il est nécessaire de poser la ou les concentrations prévalant au moment où débute la simulation. Pour une concentration initiale uniforme sur le domaine, on écrit:

$$C(x, y, t = 0) = C_0 \quad \text{sur } \Omega \quad [3.21]$$

### *Condition limite de Dirichlet*

La condition limite de Dirichlet impose la valeur de la concentration sur une portion de frontière ou du domaine:

$$C(x, y, t) = C_1 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \text{ou sur } \Omega_1 \quad [3.22]$$

Elle est employée lorsque la solution exacte est connue en certains points du domaine.

### *Condition limite de Neuman*

Une condition limite de Neuman prescrit un flux diffusif donné dans la direction normale à une frontière. Le long des frontières imperméables, la condition de Neuman doit être posée avec un flux diffusif nul. On a alors:

$$D_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} n_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad [3.23]$$

$n_i$  : vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur du domaine.

À défaut d'une spécification autre, une telle condition limite est prise en compte automatiquement par la formulation non conservative.

*Condition limite de Cauchy*

Le débit et la concentration d'un fluide pénétrant dans un domaine d'écoulement sont généralement connus. Dans un tel cas, il est possible d'appliquer la condition limite de Cauchy:

$$\left(-D_{ij}H\frac{\partial C}{\partial x_j}\right)n_i = q_n H(C^* - C) \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad [3.24]$$

$C^*$  : concentration à l'extérieur du domaine.

Pour une frontière imperméable,  $q_n$ , le débit normal à la frontière est nul et on revient à une condition de Neuman.

Les conditions limites de Cauchy s'avèrent généralement les plus adéquates pour la représentation des flux entrants.

*Condition de flux diffusif ouvert*

Les frontières à débit sortant peuvent être traitées comme des limites ouvertes lorsque le flux n'est pas connu. Dans ce cas, le long de la frontière, on peut laisser le flux diffusif extérieur égal à celui à l'intérieur du domaine:

$$K_{ij}\frac{\partial C^*}{\partial x_j}n_i = K_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}n \quad \text{sur } \Gamma_4 \quad [3.25]$$

Cette condition de flux ouvert transmet le flux diffusif et gère les pertes et gains de fluide sans changement de concentration. Elle apparaît adéquate pour traiter les limites aval ou sorties d'un domaine ainsi que les frontières supposées perméables sans toutefois que le champ de vitesse ne permette un échange de masse de fluide (les flux d'eau parallèle aux frontières par exemple).

### 3.3.3 Puits et sources

La revue bibliographique présentée au chapitre 2 a permis de définir les variables d'état à inclure dans le modèle et les puits et sources à considérer pour représenter leur comportement. Pour chaque variable d'état, le terme de puits et sources doit être introduit à l'intérieur de l'équation de transport-diffusion. Considérant la notation et les lois de comportement proposées, les termes puits et sources sont résumés. À l'exception du cas particulier de la DBO, la concentration de la variable d'état est notée  $C$ .

$$\text{Solides en suspension:} \quad \Delta S = -w_s \left[ 1 - \frac{\tau^*}{\tau_{cr, sed}} \right] C \quad [3.26]$$

$$\text{DBO:} \quad \Delta S = -K_d H f_d L - w_s f_p L \quad [3.27]$$

$L$  : demande biochimique en oxygène.

$$\text{Oxygène dissous:} \quad \Delta S = K_a H (C_{sat} - C) - K_d H f_d L - L_s \quad [3.28]$$

$L_s$  : demande benthique (consommation d'oxygène des sédiments par unité de surface et de temps).

$$\text{Coliformes fécaux:} \quad \Delta S = -K_d H C \quad [3.29]$$

$$\text{Micropolluants non conservatifs:} \quad \Delta S = -K_d f_d C - k_l f_d C - w_s f_p C \quad [3.30]$$

Les équations 3.27 et 3.28 illustrent clairement la relation de dépendance entre la concentration d'oxygène dissous et la DBO. Toutefois, il existe aussi d'autres types de couplage entre variables d'état. En effet, la DBO particulaire et les micropolluants sont liés aux solides en suspension en ce qui a trait à la répartition sous forme dissoute et particulaire et au calcul des vitesses de chute et flux de sédimentation. Ces dépendances

entre variables d'état nécessitent d'élaborer une stratégie particulière de résolution de l'équation de transport-diffusion. Cela fait l'objet de la prochaine section.

### 3.4 Méthodologie de résolution

La formulation mathématique des termes puits et sources de l'équation de transport-diffusion conduit au couplage de certaines variables d'état du modèle. La DBO et les micropolluants sont dépendants des solides en suspension alors que l'oxygène dissous est relié à la DBO. Dans ces cas particuliers, l'équation de transport-diffusion doit être appliquée en parallèle aux variables liées, c'est-à-dire qu'un système d'équations dépendantes doit être résolu. Il s'avère donc essentiel d'établir un modèle numérique adapté à cette particularité du problème à résoudre. Comme il sera présenté ci-après, la prise en compte des interactions entre variables d'état peut être facilitée par une approche de résolution eulérienne.

#### 3.4.1 Approche eulérienne

La résolution numérique de l'équation de transport-diffusion peut se faire suivant deux approches mathématiques distinctes: l'approche lagrangienne et l'approche eulérienne. La différence entre ces approches repose essentiellement sur le repère choisi pour la description du mouvement (Leclerc et al., 1992).

L'approche lagrangienne consiste à résoudre l'équation de transport-diffusion à travers l'espace des déplacements. Elle considère un repère lié à un ensemble de points mathématiques représentatifs de la contamination. Ces pseudo-particules sont déplacées dans le champ de vitesse et la concentration est obtenue par post-traitement. Le mouvement des particules dans l'espace est continu, ce qui permet de suivre le déplacement de la masse d'eau contaminée. La méthode lagrangienne a l'avantage d'éliminer la dispersion numérique parasite qui survient dans des conditions de transport à advection dominante ou dans les

milieux fortement anisotropes. Par contre, elle ne permet pas de faire face aux problèmes de non-conservation locale de la masse. De plus, le calcul de la concentration est laborieux. Il ne peut être réalisé qu'à certaines étapes limitées en nombre, voire à la toute fin de la simulation du mouvement des particules. Cette caractéristique limite sévèrement l'utilisation du modèle lagrangien lorsque la connaissance des concentrations est requise tout au long de la période simulée, par exemple dans le cas d'interactions multispécifiques.

De son côté, l'approche eulérienne prend en considération un repère fixe où les variations temporelles de la concentration peuvent être observées. En effet, la résolution admet pour inconnue la concentration. L'avantage de cette approche en rapport à l'évaluation de termes puits et sources réside dans la disponibilité continue de la concentration. À chacun des pas effectués vers la solution du problème, une valeur temporaire de la concentration est disponible pour les calculs. L'approche lagrangienne est pour sa part limitée par l'hypothèse de volume négligeable occupé par le débit d'injection vis-à-vis du débit du milieu récepteur. L'approche eulérienne admet plus facilement un débit d'injection plus significatif. Une telle problématique est rencontrée lors de débordements de réseaux unitaires dans un cours d'eau à faible débit. Toutefois, dans un tel cas, quelle que soit l'approche retenue, un champ de vitesse éventuellement non-stationnaire et prenant en compte l'injection est requis.

Ces considérations relatives à la disponibilité de la concentration et à l'influence des débordements au niveau hydrodynamique justifient l'emploi d'une démarche eulérienne pour la résolution de l'équation de transport-diffusion.

### 3.4.2 Méthode de résolution numérique

Le modèle de transport-diffusion qui fait l'objet du présent travail s'inscrit dans un large programme de développement de modèles numériques appliqués aux écoulements fluviaux. La méthode des éléments finis ayant entre autres été employée avec succès pour la résolution des équations de Saint-Venant (modèle hydrodynamique) et de transport-diffusion, il apparaît naturel de continuer dans la même voie (Leclerc, 1995, Khelifa, 1992, Franca and al., 1992, Galeati et Gambolati, 1989).

La souplesse dans le traitement de la géométrie du domaine et la possibilité de raffiner la discrétisation dans les zones de forts gradients sont les aspects les plus intéressants de la méthode des éléments finis pour la simulation des écoulements à surface libre. La présente application permettra d'explorer les possibilités qu'offre la méthode dans le contexte d'un système de variables d'état liées par le biais de cinétiques d'ordre égal ou supérieur à un.

La fiabilité et la performance de la méthode des éléments finis ont été démontrées à plusieurs reprises dans plusieurs domaines de l'ingénierie. De plus, l'évolution de la méthode a conduit au développement d'algorithmes de résolution limitant l'espace mémoire requis. L'amélioration des processeurs mathématiques a permis de réduire considérablement les temps de calcul et d'implanter les programmes sur des ordinateurs facilement accessibles. Le modèle de transport-diffusion présenté ici a été développé à partir d'un micro-ordinateur à processeur 486 sur une plate-forme IBM-OS/2.

## 4 MODÈLE NUMÉRIQUE

---

Les équations aux dérivées partielles qui décrivent les phénomènes de transport de la quantité de mouvement et de la matière sont des représentations continues du milieu physique. À l'exception des géométries simples où les conditions d'écoulement sont contrôlées, ces équations ne peuvent être résolues analytiquement. Une approche de résolution numérique est habituellement utilisée.

Les méthodes numériques permettent de trouver une solution approchée aux problèmes décrits par des équations aux dérivées partielles. Ces méthodes nécessitent une discrétisation des équations dans l'espace et le temps. La solution n'est donc évaluée qu'en certains points du domaine d'écoulement. La précision de la solution est évidemment fonction de la densité de la discrétisation.

La méthode des éléments finis passe par l'application de principes variationnels en vue de développer une formulation intégrale du problème à solutionner. La discrétisation de cette formulation génère un système algébrique que l'on doit résoudre en vue d'obtenir la solution au problème.

Dans le présent chapitre, les étapes de résolution par la méthode des éléments finis sont appliquées successivement à la formulation non conservative de l'équation de transport-diffusion. Cette démarche permet d'établir un algorithme adapté aux particularités de l'équation et de développer la structure qui devra être programmée .

## 4.1 Principes variationnels

### 4.1.1 Méthode des résidus pondérés

Considérons le système d'équations formé par l'application de l'équation de transport-diffusion à un groupe des variables ciblées pour représenter la problématique d'un débordement. Sous représentation vectorielle<sup>1</sup>, il s'exprime:

$$\{\dot{C}\} + [L]\{C\} + [F]\{C\} = 0 \text{ sur } \Omega \quad [4.1]$$

$\{C\}$  : vecteur de variables d'état du modèle ( $\langle C_1, C_2, \dots, C_n \rangle$ );

$\dot{C}$  : dérivée de la concentration par rapport au temps  $\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)$ ;

$L$  : opérateur global de dérivation;

$F$  : terme représentant les sollicitations, sources et puits.

Le problème adressé consiste à trouver une solution  $\{C\}$  qui satisfait l'équation 4.1 et les conditions aux limites posées. Étant donné cette solution, on définit le vecteur résidu  $\{R(C)\}$ :

$$\{R(C)\} = \{\dot{C}\} + [L]\{C\} + [F]\{C\} \quad [4.2]$$

Évidemment, le résidu s'annule lorsque  $\{C\}$  est solution de l'équation.

La méthode des résidus pondérés consiste à trouver des fonctions  $C$  qui annulent la formulation intégrale  $W(C)$  décrite par l'expression [4.3], pour toute fonction de pondération  $\psi$  (Dhatt et Touzot, 1989):

$$W(C) = \int_{\Omega} \langle \psi \rangle \{R(C)\} d\Omega \quad [4.3]$$

$\langle \psi \rangle$  : vecteur de fonctions de pondération de l'espace fonctionnel  $E_{\psi}$

1.  $\{ \}$  : vecteur colonne

$\langle \rangle$  : vecteur ligne

$[ ]$  : matrice

Il s'agit d'une méthode de projection qui consiste à annuler la projection du résidu  $\{R\{C\}$  sur l'ensemble des fonctions de pondération. On annule alors l'intégrale sur le domaine de l'erreur pondérée par  $\langle \psi \rangle$ .

### 4.1.2 Forme intégrale faible

La forme intégrale de l'équation scalaire de transport-diffusion s'écrit sous forme condensée:

$$W = \int_{\Omega} \psi(x, y) \left( H \frac{\partial C}{\partial t} + u H_i \frac{\partial C}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} H \frac{\partial C}{\partial x_j} + f(C) \right) d\Omega = 0 \quad [4.4]$$

Ici, le terme  $f(C)$  est employé pour représenter globalement les sollicitations, les sources et les puits.

Une solution  $C$  doit satisfaire aux conditions de dérivabilité imposées par l'équation, c'est-à-dire être dérivable deux fois. Cette condition pouvant devenir contraignante, on cherche généralement à abaisser l'ordre maximal de dérivation apparaissant dans la formulation intégrale. On y parvient en intégrant par parties certains termes dont la composante diffusive. Une forme intégrale dite faible est alors obtenue.

Galeati and Gambolati (1989) suggèrent d'appliquer l'intégration par parties uniquement aux termes dispersifs de manière à obtenir la forme faible suivante:

$$W = \int_{\Omega} \left( \psi(x, y) \left( H \frac{\partial C}{\partial t} + u_i H \frac{\partial C}{\partial x_i} + f(C) \right) + K_{ij} H \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) d\Omega - \oint_S \psi \left( K_{ij} H \frac{\partial C}{\partial x_j} n_i \right) dS \quad [4.5]$$

Bien qu'elle diminue les conditions de dérivabilité de la solution, la forme faible impose des conditions de dérivabilité sur les fonctions de pondération. Cependant, elle présente l'avantage de considérer à même la formulation intégrale les conditions limites de type Cauchy ou Neuman.

### 4.1.3 Discrétisation de la forme intégrale

La formulation intégrale de l'équation de transport-diffusion décrit un système continu. Le nombre de degrés de liberté du système, c'est-à-dire le nombre de paramètres nécessaires pour définir la variable d'état à un temps donné, est infini.

En prévision de sa résolution par une méthode numérique, l'équation 4.5 doit obligatoirement être discrétisée. À cette fin, les espaces infinis des fonctions solutions et des fonctions de pondération doivent être remplacés par des sous-espaces finis ou discrets. Cette discrétisation du système nous contraint toutefois à n'obtenir qu'une solution approximative du problème.

La discrétisation préalable à l'application de la méthode des éléments finis s'effectue en deux étapes:

- 1) l'approximation nodale
- 2) le choix des fonctions de pondération

#### *Approximation nodale*

L'approximation par éléments finis constitue une méthode d'approximation nodale par sous-domaines. Elle ne fait intervenir que des valeurs attachées aux noeuds des éléments, les sous-domaines, et à leurs frontières. On construit ainsi des fonctions approchées continues sur chaque élément et d'un élément à l'autre. L'ensemble des éléments forme le maillage.

Afin de représenter le problème bidimensionnel du transport-diffusion, on choisit un élément triangulaire linéaire à trois noeuds (T3). Ce choix est motivé par la simplicité de l'élément et par son efficacité démontrée face à ce type de problème (Padilla and al., 1997).

L'approximation par éléments finis fait appel à la notion d'élément de référence. Cet élément, défini dans l'espace de référence  $(\xi, \eta)$ , est caractérisé par une géométrie très simple. Il peut être transformé en chacun des éléments réels de même type par le biais d'une transformation géométrique bijective. Cette transformation doit être telle que les noeuds de l'élément réel et de référence concordent ainsi que les frontières. La figure 4.1 illustre la transformation géométrique pour un élément T3.

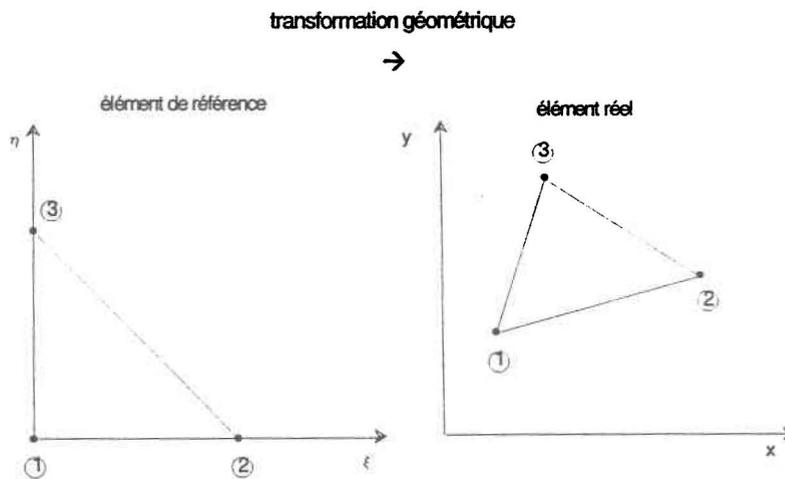


Figure 4.1: Transformation géométrique sur un élément T3.

L'approximation de la concentration aux noeuds de l'élément T3 s'exprime par le produit vectoriel suivant:

$$C = \langle N(x,y) \rangle \{C_i\} = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{C_i\} \quad [4.6]$$

$\langle N(x,y) \rangle$ : fonctions d'interpolation définies dans l'espace réel;  
 $\langle N(\xi, \eta) \rangle$ : fonction d'interpolation définies dans l'espace de référence;  
 $\{C_i\}$ : valeur de la concentration aux noeuds de l'élément.

L'élément T3 utilisé est isoparamétrique, c'est-à-dire que les fonctions qui décrivent la transformation géométrique sont identiques aux fonctions d'interpolation.

L'avantage de travailler avec l'élément de référence est de n'avoir à définir qu'une seule approximation pour tous les éléments de même type. En effet, les fonctions d'interpolation définies dans l'espace de référence sont indépendantes de la géométrie de l'élément réel et sont identiques pour tous. Pour l'élément T3, les fonctions d'interpolation sont les suivantes:

$$\langle N(\xi, \eta) \rangle = \langle 1 - \xi - \eta, \xi, \eta \rangle \quad [4.7]$$

$$0 \leq \xi \leq 1$$

$$0 \leq \eta \leq 1$$

Afin d'appliquer à l'élément de référence les opérations définies sur l'élément réel, la matrice Jacobienne de la transformation doit être prise en compte. Pour une fonction  $f(x, y)$  définie dans l'espace réel, on aura:

$$\int_{V^e} f(x, y) dV^e = \int_{V^r} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \det J dV^r \quad [4.8]$$

$V^e$  : domaine de l'élément réel;

$V^r$  : domaine de l'élément de référence;

$\det J$  : déterminant de la matrice Jacobienne.

La matrice Jacobienne de la transformation inverse  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$  est définie par:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad [4.9]$$

L'obtention des dérivées en termes de  $(\xi, \eta)$  fait appel aux règles de dérivation en chaîne. On a ainsi:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad [4.10]$$

### *Fonctions de pondération*

Différentes méthodes sont envisageables en vue de définir les fonctions de pondération employées dans la formulation intégrale:

- méthode de collocation par points;
- méthode de collocation par sous-domaines;
- méthode de Galerkin;
- méthode de Petrov-Galerkin.

La méthode de Galerkin est la plus commune. Elle consiste à utiliser des fonctions de pondération égales à la première variation de l'inconnue du problème:

$$\psi = \delta C \quad [4.11]$$

La méthode de Galerkin conduit à des schémas de discrétisation centrés. De tels schémas attribuent une pondération équivalente à tous les noeuds du domaine. Cette caractéristique rend la méthode de Galerkin tout à fait appropriée pour des opérateurs symétriques tel l'opérateur de diffusion (le Laplacien). Par contre, elle se prête moins bien au traitement de l'opérateur d'advection qui n'est pas symétrique. La méthode de Galerkin utilisée dans des problèmes où le transport advectif est dominant conduit parfois à de fortes oscillations parasites. Toutefois, un choix judicieux des conditions de simulation permet d'en limiter l'ampleur.

Les méthodes de type Petrov-Galerkin ( $\psi \neq \delta C$ ) sont décentrées. De façon générale, elles se prêtent mieux aux problèmes advectifs, en particulier si l'on attribue une pondération qui tient compte du sens de l'écoulement. Cependant, ce sont des méthodes plus complexes et qui requièrent un effort numérique supplémentaire (Brooks and Hughes, 1980).

Dans ce contexte, il nous apparaît plus convenable de travailler avec une pondération de Galerkin et de tenter d'identifier les facteurs susceptibles d'améliorer la précision et la stabilité du schéma de résolution en situation d'advection dominante.

## 4.2 Forme matricielle

L'approximation de la solution et de ses dérivées sur chacun des éléments du domaine discrétisé s'exprime à partir de la fonction d'interpolation  $N$  et de ses dérivées:

$$C = \langle N(x,y) \rangle \{C_i\} \quad [4.12]$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = \langle N_{,x_i}(x,y) \rangle \{C_i\} \quad [4.13]$$

Les fonctions de pondération sont approximées de la même façon:

$$\psi = \delta C = \langle N(x,y) \rangle \{\delta C_i\} \quad [4.14]$$

L'application de ces approximations nodales à chacun des termes de la forme intégrale faible (équation 4.5) conduit à l'obtention du système matriciel suivant:

$$[M]\{\dot{C}\} + [K]\{C\} = \{F\} \text{ pour } [K] \text{ linéaire} \quad [4.15]$$

$$[M]\{\dot{C}\} + [K(C)]\{C\} = \{F\} \text{ pour } [K] \text{ non linéaire} \quad [4.16]$$

Cette expression fait intervenir trois termes importants soit la matrice masse  $[M]$ , la matrice rigidité  $[K]$  et le vecteur de sollicitations  $\{F\}$ . La matrice rigidité est toutefois considérée sous la forme de son produit avec le vecteur solution. Il est à noter que dans le contexte de la présente application, les non-linéarités rencontrées proviennent des termes de puits et de source de l'équation de transport-diffusion.

Ce système matriciel est construit à partir de la sommation des formes intégrales élémentaires. Ses trois composantes sont décrites en détails ci-dessous.

*Matrice masse*

$$[M] = \sum_e \int_{\Omega^e} \{N\}\langle N \rangle \{H\}\langle N \rangle dx dy \quad [4.17]$$

*Matrice rigidité*

$$\begin{aligned}
 [K]\{C\} = \{K(C)\} = & \sum_e \int_{\Omega^e} (\{N, x\}\langle N \rangle \{H\}\langle N \rangle \{K_{xx}\}\langle N, x \rangle + \\
 & \{N, x\}\langle N \rangle \{H\}\langle N \rangle \{K_{xy}\}\langle N, y \rangle + \\
 & \{N, y\}\langle N \rangle \{H\}\langle N \rangle \{K_{xy}\}\langle N, x \rangle + \\
 & \{N, y\}\langle N \rangle \{H\}\langle N \rangle \{K_{yy}\}\langle N, y \rangle) \{C\} dx dy \quad (\text{dispersion}) \\
 & + \sum_e \int_{\Omega^e} (\{N\}\langle N \rangle \{uH\}\langle N, x \rangle + \{N\}\langle N \rangle \{vH\}\langle N, y \rangle) \{C\} dx dy \quad (\text{adv.}) \\
 & + \sum_e \int_{\Omega^e} \{N\}\langle N \rangle \{QHC\} dx dy \quad (\text{sollicitations}) \\
 & + \sum_e \int_{\Omega^e} \{N\}\langle N \rangle \{f(C)\} dx dy \quad (\text{puits/sources}) \\
 & - \sum_e \int_{\Gamma^e} \{N\}\langle N \rangle \{q_n HC\} d\Gamma_3 \quad (\text{limites de Cauchy}) \\
 & - \sum_e \int_{\Gamma^e} (\{N\}\langle N \rangle \{H\}\langle N \rangle \{K_{xx}\}\langle N, x \rangle + \\
 & \{N\}\langle N \rangle \{H\}\langle N \rangle \{K_{xy}\}\langle N, y \rangle + \\
 & \{N\}\langle N \rangle \{H\}\langle N \rangle \{K_{xy}\}\langle N, x \rangle + \\
 & \{N\}\langle N \rangle \{H\}\langle N \rangle \{K_{yy}\}\langle N, y \rangle) n_i \{C\} d\Gamma_4 \quad (\text{limites de flux ouvert})
 \end{aligned}$$

[4.18]

*Vecteur sollicitations*

$$\{F\} = \sum_e \int_{\Omega^e} \{N\} \langle N \rangle \{QHC^0\} dx dy \quad (\text{sollicitations})$$

$$- \sum_e \oint_{\Gamma^e} \{N\} \langle N \rangle \{q_n HC^*\} d\Gamma_3 \quad (\text{limites de Cauchy})$$

[4.19]

Il est à noter qu'ici les termes de sollicitations et les termes de puits et sources ont du être considérés séparément.

### 4.2.1 Intégration de la forme matricielle

Étant donné l'approximation sur un élément T3, il est possible de calculer analytiquement toute les intégrales décrites précédemment. Cette propriété de l'élément T3 est avantageuse puisqu'elle évite d'avoir à recourir à l'intégration numérique, ce qui nécessiterait l'ajout d'une boucle supplémentaire à l'algorithme d'assemblage du système et alourdirait la résolution du problème.

Les intégrales composant les équations 4.17, 4.18 et 4.19 doivent être redéfinies sur l'élément de référence et peuvent alors être évaluées analytiquement une fois pour toute. L'intégration des produits de fonctions est relativement simple. Cependant étant donné sa lourdeur, la forme globale résultant de l'intégration n'est pas présentée ici. On note simplement qu'elle fait intervenir les métriques de l'élément de référence qui sont définis ainsi:

$$\xi_{x_i} = \det J \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \quad [4.20]$$

$$\eta_{x_i} = \det J \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad [4.21]$$

$$\sigma_{x_i} = -(\xi_{x_i} + \eta_{x_i}) \quad [4.22]$$

Pour chaque côté de l'élément réel triangulaire, les métriques  $\xi_x, \eta_x, \sigma_x, \xi_y, \eta_y$  et  $\sigma_y$  représentent les composantes normales aux axes  $x$  et  $y$ .

Le système matriciel global (équation 4.16) s'obtient par la sommation des formes élémentaires sur tous les éléments du domaine.

### 4.3 Discrétisation temporelle

Les problèmes de transport-diffusion décrits par la forme eulérienne peuvent être résolus en régime stationnaire ou transitoire. La propagation d'un tributaire naturel à l'intérieur du cours d'eau principal constitue généralement un phénomène stationnaire. Par contre, la propagation d'effluents industriels ou urbains, tout particulièrement les débordements de temps de pluie, sont des problématiques transitoires.

En régime stationnaire, le système matriciel 4.16 est simplifié par la disparition de la matrice masse. Le problème consiste à résoudre le système matriciel non linéaire suivant:

$$\{K(C)\} = \{F\} \quad [4.23]$$

La résolution des problèmes transitoires passe par la discrétisation temporelle du système global. À cette fin, plusieurs schémas de discrétisation sont envisageables:

- Euler explicite;
- Euler implicite ou semi-implicite;
- Runge-Kutta d'ordre  $n$ ;
- Méthodes de type prédicteur-correcteur.

Les schémas d'Euler sont les plus simples et les plus communs. La forme matricielle discrétisée qui en découle s'exprime:

$$\alpha \Delta t \{K(C_{t+\Delta t})\} + [M]\{C_{t+\Delta t}\} = \Delta t \{F\} + (1 - \alpha) \Delta t \{K(C_t)\} + [M]\{C_t\} \quad [4.24]$$

Le type de schéma dépend de la valeur du coefficient  $\alpha$  qui varie entre 0 et 1 :

- $\alpha = 0$  : schéma implicite;
- $\alpha = 1$  : schéma explicite;
- $0 < \alpha < 1$  : schéma semi-implicite;
- $\alpha = 0.5$  : schéma de Crank-Nicholson.

Un schéma d'Euler semi-implicite est employé ici. Au pas de temps  $t + \Delta t$ , le terme de droite est connu alors que le terme de gauche ne l'est pas. On cherche alors à résoudre un système équivalent à :

$$[K_{nl}(C)]\{C\} = \{F_0\} \quad [4.25]$$

où :

$[K_{nl}(C)]$  : une matrice non linéaire;

$\{F_0\}$  : un vecteur regroupant l'ensemble des termes connus au temps  $t + \Delta t$ .

## 4.4 Résolution du système algébrique

### 4.4.1 Méthode itérative

Le système décrit par l'équation 4.25 est non linéaire et ne peut être résolu directement. On doit recourir à une méthode itérative qui permet d'annuler le résidu défini par :

$$\{R_{t+\Delta t}\} = \{F_0\} - [K_{nl}(C)]\{C\} \quad [4.26]$$

Par itération successive, on cherche la solution  $\{C\}$  qui annule le résidu.

La méthode itérative GMRES (Generalized Minimal RESidual, Saad and Schultz, 1986) a été retenue pour la résolution du système non linéaire. C'est une méthode de résolution par sous-espaces de Krylov qui fait appel à l'algorithme d'Arnoldi pour la

génération d'une base orthonormée du sous-espace. À partir d'une solution initiale  $\{C_0\}$ , GMRES cherche à chaque itération à résoudre le système matriciel linéaire suivant:

$$[K(C_0)]\{C\} = \{F_0\} \quad [4.27]$$

La méthode GMRES converge en un nombre déterminé d'itérations. L'avantage majeur de la méthode est qu'elle ne nécessite aucun calcul ou stockage de matrices: elle considère l'action d'une matrice sur un vecteur ce qui réduit considérablement l'espace mémoire mobilisé.

#### 4.4.2 Préconditionnement

Le choix d'une solution de départ éloignée de la solution exacte crée un choc numérique qui peut compromettre la convergence du problème. Il s'avère avantageux de preconditionner le système à résoudre de façon à réduire l'influence de la solution initiale. La technique consiste à multiplier le système par une matrice de preconditionnement notée  $[D]$ :

$$[D][K(C_0)]\{C\} = [D]\{F_0\} \quad [4.28]$$

Puisqu'elle donnerait directement la solution, la matrice idéale serait:

$$[D] = [K]^{-1} \quad [4.29]$$

On cherche donc une matrice qui s'approche le plus possible  $[K]^{-1}$ . À cette fin, une matrice de type pas de temps locaux est à privilégier (Secretan, 1991).

## 4.5 Éléments de programmation

Le cadre informatique soutenant le modèle de transport-diffusion est inspiré du programme MEF présenté par Dhatt et Touzot (1989) et par Secretan (1991). Il respecte une structure modulaire identique et fait appel aux mêmes blocs fonctionnels de base. Le langage de programmation employé est le Fortran 77 standard.

Dans un contexte d'éléments finis, on appelle *élément* la partie du code informatique qui exécute l'ensemble des tâches élémentaires. Cela réfère à tout ce qui se rattache à l'assemblage du résidu. Ici, l'élément de transport-diffusion est implanté au sein d'un programme général d'application de la méthode des éléments finis.

La figure 4.2 présente sous forme algorithmique l'élément de transport-diffusion et la méthode de résolution qui l'entoure. Notons que pour un problème transitoire, la démarche illustrée est intégrée à l'intérieur d'une boucle temporelle.

Tel que décrit au chapitre 3, les termes puits et sources qui font la particularité du modèle sont fonction de la concentration des variables d'état. Ces variables sont les degrés de liberté du système. Pour faciliter leur prise en compte à l'intérieur du résidu, les termes puits et sources sont traités en tant que propriétés nodales du système et évalués explicitement à partir des concentrations calculées à l'itération précédente.

Dans la structure actuelle du modèle, la forme faible élémentaire est entièrement calculée pour chaque degré de liberté. L'assemblage respecte ainsi une certaine méthodologie et la programmation s'en trouve simplifiée. Pour optimiser le temps d'exécution, il est toutefois envisageable de calculer la partie commune du terme advectif et diffusif à l'extérieur de la boucle sur les degrés de liberté.

**1. Lecture et organisation des données**

- construction des tables de coordonnées et de connectivités
- lecture des propriétés physiques
- lecture des sollicitations et conditions limites
- saisie de la solution initiale  $\{C_0\}$

**2. Assemblage du système matriciel global**

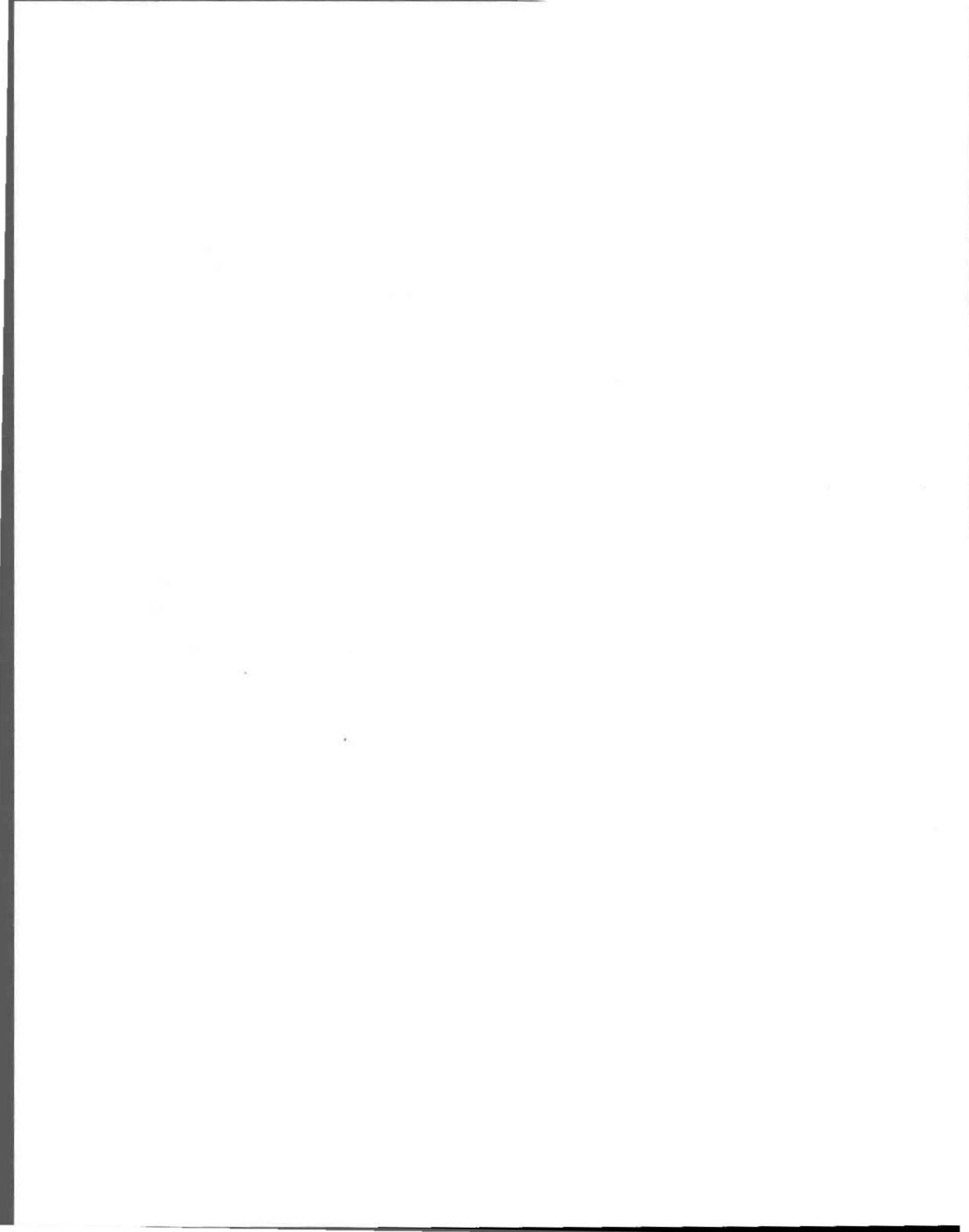
- calcul des propriétés nodales
- boucle sur les éléments:
  - recherche des connectivités
  - calcul des métriques
  - boucle sur les degrés de liberté:
    - calcul de la forme faible élémentaire
    - assemblage du résidu  $\{F\} - [K_m(C_0)]\{C\}$

**3. Résolution du système d'équation**

- boucle sur les degrés de liberté:
  - calcul de la matrice de préconditionnement
  - résolution du système  $\{F\} = [K_m(C_0)]\{C\}$  par GMRES pour  $j \approx 1, m$  itérations:
    - calculer une solution approchée  $\{C_j\}$
    - calculer la norme
    - si norme < tolérance: fin ; sinon retour à 2 avec  $\{C_0\} = \{C_j\}$

**4. Post-traitement et impression des résultats**

Figure 4.2. Algorithme général



## 5 VALIDATION ANALYTIQUE

---

La validation constitue une étape essentielle au développement d'un modèle numérique. Le modèle doit entre autres subir une série de tests analytiques qui visent à démontrer sa consistance et sa stabilité.

Afin de valider un modèle de type éléments finis, il est souhaitable de respecter une méthodologie particulière. L'idée consiste à effectuer des tests standards ou personnalisés dont le niveau de difficulté augmente progressivement. Les aspects de base sont d'abord vérifiés et on s'assure ainsi que le modèle réponde bien à des problèmes simples avant de le confronter à des plus complexes.

Une démarche de validation en trois étapes est appliquée au modèle de transport-diffusion. Ces étapes sont les suivantes:

- 1) Contrôle de la programmation
- 2) Contrôle de la précision du modèle
- 3) Comparaison des résultats à des mesures de terrain

Les deux premières étapes font l'objet du présent chapitre. Afin de compléter la validation du modèle, des résultats tirés d'une campagne de traçage sur la rivière des Prairies sont utilisés. Une description détaillée de cette dernière phase de validation est présentée au chapitre 6.

Les phénomènes advectif et diffusif ayant déjà fait l'objet d'un exercice de validation (Padilla and al., 1996), l'emphase sera mise sur les termes puits et sources. Notons que les tests académiques décrits ci-dessous font intervenir des ordres de grandeur des concentrations, des paramètres et des coefficients qui ne sont pas nécessairement représentatifs des phénomènes pouvant survenir en milieu naturel.

## 5.1 Contrôle de la programmation

L'étape de contrôle de la programmation consiste à vérifier la conformité des algorithmes implantés. On cherche à démontrer que l'élément développé est conforme et que les caractéristiques de la méthode d'approximation et de discrétisation par éléments finis sont bien respectées.

### 5.1.1 Contrôle de base

Le modèle développé vise à représenter un système de variables d'état dépendantes dont les comportements sont gouvernés par une même équation scalaire de transport-diffusion à laquelle se greffe un terme puits et sources spécifique. Cela se traduit au niveau de la formulation éléments finis par un nombre de degrés de liberté par noeud égal au nombre de variables d'état considérées. Pour assembler et solutionner le système d'équations résultant, l'algorithme global doit effectuer une boucle sur ces degrés de liberté.

L'objectif du premier contrôle est de s'assurer que le programme effectue correctement la boucle de résolution sur les degrés de liberté et que le système d'équation est bien construit. Pour cela, on vérifie simplement que pour  $n$  variables d'état identiques soumises aux mêmes conditions de simulation, le modèle calcule bien  $n$  solutions identiques. Des simulations sont ainsi effectuées dans différentes conditions. Leur description détaillée est toutefois sans intérêt pour le lecteur.

Comme il se doit, on démontre que pour les  $n$  variables traitées, le modèle conduit à l'obtention d'une solution unique, et ce, quelque soit le nombre ou le type de variables d'état. Le test permet donc de conclure que la programmation de la boucle sur les variables d'état est correcte. Il s'agit cependant de l'unique conclusion que l'on puisse tirer de ce test.

### 5.1.2 Test de conformité de l'élément

La méthode des éléments finis assure une solution approchée qui converge vers la solution exacte lorsque la taille des éléments diminue. L'approximation utilisée doit toutefois respecter les conditions suivantes:

- une base polynomiale complète jusqu'à l'ordre maximal des dérivées impliquées
- une continuité entre éléments pour la fonction approchée et ses dérivées

L'élément est dit conforme lorsque la continuité est assurée en tout point du domaine. Le test décrit ici est spécifiquement conçu pour vérifier la conformité de l'élément développé. Il est fondé sur un principe de base de l'approximation par éléments finis qui veut que la méthode fournisse une solution exacte lorsque la fonction d'approximation sur chaque élément est constituée d'une base polynomiale complète d'ordre supérieur ou égal à la fonction à reproduire.

Le modèle de transport-diffusion étant discrétisé à partir d'éléments triangulaires linéaires, on doit vérifier qu'il solutionne exactement un problème d'ordre un. Ainsi, le test est effectué sur un domaine rectangulaire comportant quatre noeuds extérieurs et un noeud intérieur à position variable (figure 5.1). Un polynôme d'ordre premier est choisi comme solution exacte et imposé aux noeuds externes:

$$C(x,y) = 1 + x + y \quad [5.1]$$

Étant donné cette solution, l'équation de transport-diffusion en régime stationnaire se résume à l'expression suivante:

$$-u - v + QC - \Delta S = 0 \quad [5.2]$$

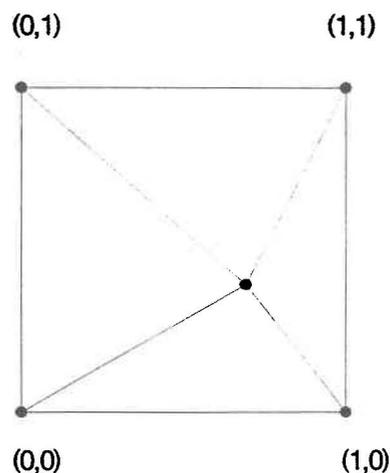


Figure 5.1: Domaine d'application du test de conformité de l'élément.

Le test consiste à résoudre le problème pour différentes combinaisons de valeurs des vitesses, sollicitations et termes puits et sources. On doit alors vérifier que la solution calculée au noeud interne (le seul degré de liberté du problème) corresponde à la solution exacte au zéro machine près.

La conformité de l'élément a été vérifiée pour les applications suivantes:

- la forme de base sans terme puits et sources
- une variable d'état avec un mécanisme de sédimentation
- une variable d'état avec une cinétique d'ordre un
- deux variables d'état liées avec un mécanisme de sédimentation
- deux variables d'état liées avec une cinétique d'ordre un
- trois variables d'état liées avec un mécanisme de sédimentation et une cinétique d'ordre un

Dans toutes ces situations, le modèle reproduit de manière exacte la solution attendue au noeud interne, et ce, peu importe sa position. On démontre ainsi la conformité de l'élément de transport-diffusion développé. Encore une fois, la description détaillée et les résultats de ces tests présentent peu d'intérêt et ne sont pas rapportés.

### 5.1.3 Test de convergence

Tout modèle discret introduit inévitablement une certaine erreur d'approximation. Il est toutefois essentiel de s'assurer que l'approximation développée converge, c'est-à-dire que l'erreur diminue avec le raffinement du maillage.

Une approximation par éléments finis est convergente dans la norme 0 de  $L_2$  si, pour un domaine  $\Omega$  discrétisé uniformément avec une maille  $h$ , la relation suivante est respectée:

$$\|e\| = \|u - \bar{u}\|_0 = \sqrt{\int_{\Omega} (u - \bar{u})^2 d\Omega} \leq ch^2 \quad [5.3]$$

- $e$  : erreur d'approximation;
- $u$  : solution exacte;
- $\bar{u}$  : solution calculée;
- $c$  : constante.
- $L_2$ : espace des fonctions à valeur réelle définies sur  $\Omega$ .

La convergence est alors quadratique et pour une dimension de la maille qui tend vers zéro, la pente de la courbe de convergence ( $\ln\|e\|$  en fonction de  $\ln h$ ) tend vers 2. Notons que cette formulation de la norme sera employée dans la suite du chapitre pour étudier la précision du modèle.

En choisissant comme solution une fonction non linéaire qui ne peut être évaluée exactement par le modèle, une erreur d'approximation est introduite. Le test de convergence consiste à étudier le comportement de cette erreur lorsque le domaine est maillé de plus en plus finement.

La solution exacte choisie ici est une fonction de type exponentiel:

$$C(x,y) = e^{-x-y} \quad [5.4]$$

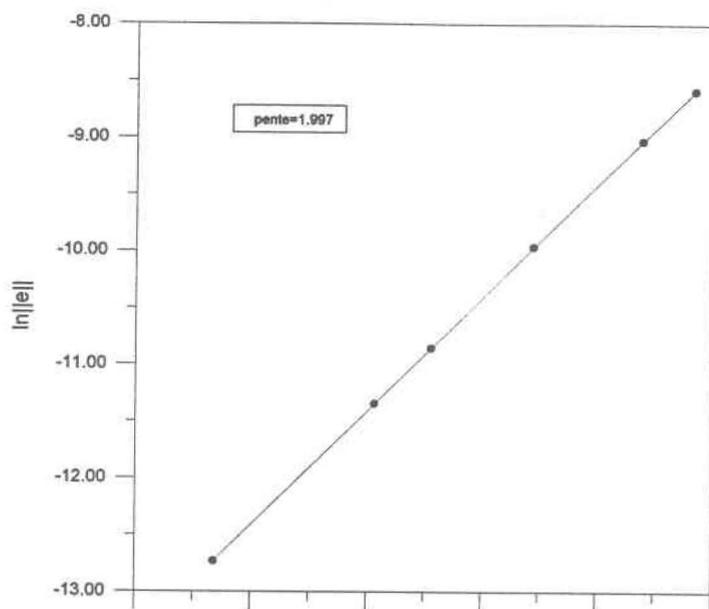
Le test est effectué pour les six cas présentés au paragraphe 5.1.2. Les conditions suivantes sont respectées:

- domaine décrit par  $x, y \in [0, 1]$  m
- maille variant de 0.015625 à 0.5 m
- conditions limites de Dirichlet sur toute la frontière:  $C = e^{-x-y}$
- $D_{xx} + D_{yy} = -u - v$ ;  $QC = -\Delta S$

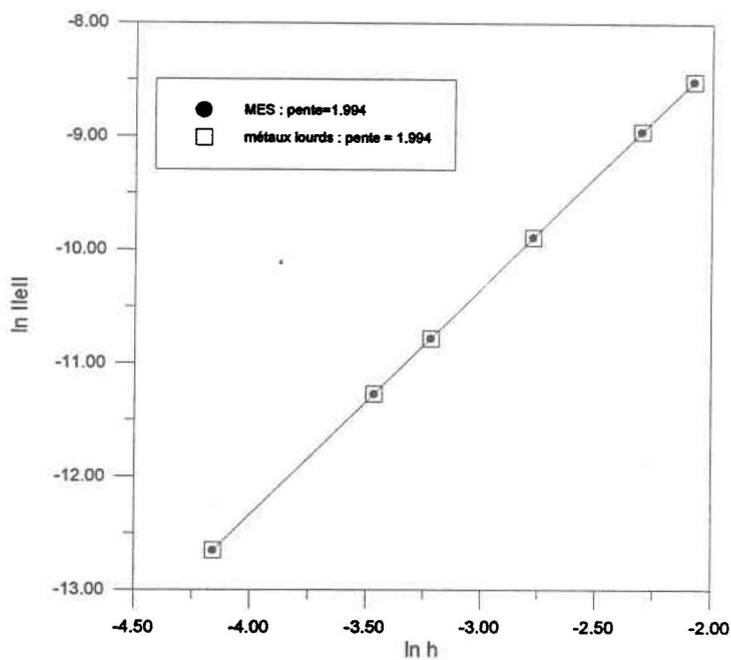
Ainsi, en régime stationnaire, la formulation non conservative de l'équation de transport-diffusion devient:

$$D_{xx} + D_{yy} + u + v - QC - \Delta S = 0 \quad [5.5]$$

La figure 5.2 présente les courbes de convergence obtenues pour deux cas simulés alors que le tableau 5.1 résume les taux de convergence calculés. Les résultats démontrent que la convergence est bien quadratique et ce, peu importe la nature du terme puits et sources et le nombre de variables d'état. Bien que la solution du problème à trois variables liées démontre un taux de convergence supérieur à 2, il n'est pas possible à ce stade de conclure à un effet d'accélération de la convergence par les cinétiques implantées.



a) Une variable d'état avec cinétique de dégradation d'ordre un.



b) Deux variables d'état: matières en suspension et métaux adsorbables.

Figure 5.2: Courbes de convergence pour deux applications de l'équation de transport-diffusion.

Tableau 5.1: Taux de convergence pour différentes applications de l'équation de transport-diffusion.

Nombre de degrés de liberté	Type de variables d'état	Nature du terme puits/source	Taux de convergence
1	quelconque	aucun	1.996
1	contaminant dissous	dégradation d'ordre 1	1.997
1	solides en suspension	sédimentation	1.998
2	oxygène dissous	consommation	1.994
	DBO	dégradation d'ordre 1	1.994
2	solides en suspension	sédimentation	1.994
	contaminant adsorbable	sédimentation	1.994
3	solides en suspension	sédimentation	2.141
	oxygène dissous	consommation	2.156
	DBO	dégradation d'ordre 1 et sédimentation	2.159

## 5.2 Tests de précision en régime stationnaire

Pour un problème donné, la précision de l'approximation est démontrée en comparant la solution calculée à la solution analytique. Un modèle numérique étant conçu pour trouver une solution approchée à un problème qui ne peut être résolu analytiquement, l'identification d'une solution exacte n'est possible que dans certains cas hautement simplifiés. Ainsi, pour évaluer la précision du modèle de transport-diffusion, il est nécessaire de se limiter à des problèmes très simples tel un domaine à géométrie régulière où le champ de vitesse est unidirectionnel et constant. Les paramètres de simulation doivent être entièrement contrôlés.

### 5.2.1 Advection d'une distribution gaussienne

L'advection d'une distribution de concentration gaussienne dans un champ de vitesse circulaire est un test standard qui permet d'évaluer la performance d'un schéma centré en situation de nombre de Peclet élevé, c'est-à-dire lorsque le transport advectif prédomine.

Le test consiste à convecter sur un domaine rectangulaire une distribution de concentration gaussienne imposée sur un segment vertical (figure 5.3 a ). La distribution est décrite par les équations suivantes (Franca and al., 1992; Khelifa, 1992):

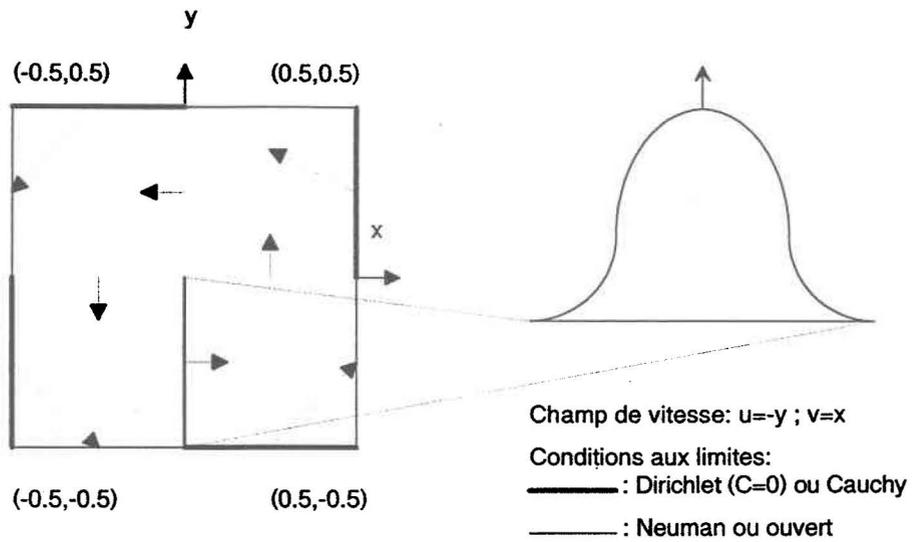
$$C(x,y) = \cos^2\left(2\pi\sqrt{x^2+y^2} + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pour } 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 0.5 \quad [5.6]$$

$$C(x,y) = 0 \quad \text{pour } 0.5 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \infty \quad [5.7]$$

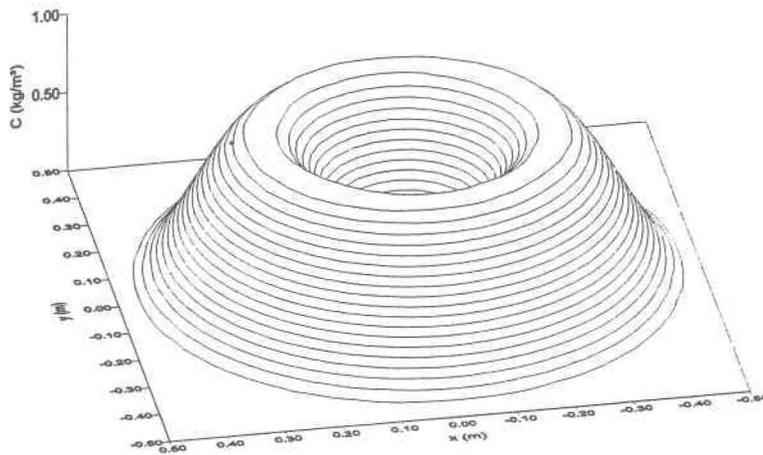
Tel qu'illustré à la figure 5.3 a, différentes conditions aux limites peuvent être imposées. Pour les frontières à flux entrant, des conditions de Dirichlet ou de Cauchy sont envisageables. Par contre, sur les frontières à flux sortant, des conditions de Dirichlet, Neuman ou de flux diffusif ouvert peuvent être appliquées.

Considérant un régime permanent, un champ de vitesse circulaire et une variable d'état conservative, l'advection du profil doit reproduire la cloche tridimensionnelle illustrée à la figure 5.3 b. Par comparaison des concentrations calculées et attendues, il est possible d'évaluer la perte massique qui résulte du transport advectif.

Le tableau 5.2 résume les résultats obtenus. Pour des valeurs de la solution exacte situées entre 0 et 1, on calcule des écarts maximums de l'ordre du millièème pour des conditions limites autres que celles de Dirichlet. Pour ce dernier type de conditions, on constate que l'écart est presque 10 fois supérieur, ce qui démontre la précision moindre qui découle de leur emploi. Dans l'ensemble, des pertes massiques inférieures à 1% sont



## a) Conditions de simulation



## b) Solution analytique

Figure 5.3: Advection stationnaire d'une distribution gaussienne dans un champ de vitesse circulaire.

observées. La figure 5.4 présente la distribution calculée en considérant des conditions limites de Cauchy sur les flux entrant et de Neuman sur les flux sortant. Les résultats sont portés sur une grille orthogonale qui ne correspond toutefois pas au maillage de calcul. Malgré quelques déformations locales, la distribution analytique est reproduite de façon satisfaisante et traduit bien l'ordre de grandeur de l'erreur.

Tableau 5.2. Comparaison de différents schémas numériques pour l'advection d'un profil Gaussien dans un champ de vitesse circulaire.

Formulation	Maillage (noeuds)	Conditions aux limites	Erreur absolue maximale	Norme L2 de l'erreur
Non conservative élément T3 , schéma de Galerkin	29x29	Dirichlet	0.0290	0.014
		Cauchy-Neuman	0.0041	0.003
		Cauchy-ouvert	0.0041	0.003
Conservative élément T3 schéma de Galerkin (Padilla et al., 1997)	29x29	Dirichlet	0.0630	0.013
		Cauchy-ouvert	0.0050	0.003
Non conservatif élément T6, schéma de Douglas-Wang (Khelifa,1992)	29x29	Dirichlet	0.01	---

Bien qu'il démontre la supériorité de la condition de Cauchy pour représenter les flux entrant, le test ne permet pas de déterminer laquelle des conditions limites de Neuman ou de flux diffusif ouvert est la plus appropriée pour la représentation des flux sortant. En effet, pour ce problème, les deux types de conditions mènent à des résultats identiques.

La comparaison avec les résultats obtenus avec un schéma de Douglas-Wang permet de conclure qu'en situation d'advection dominante, l'emploi de conditions limites

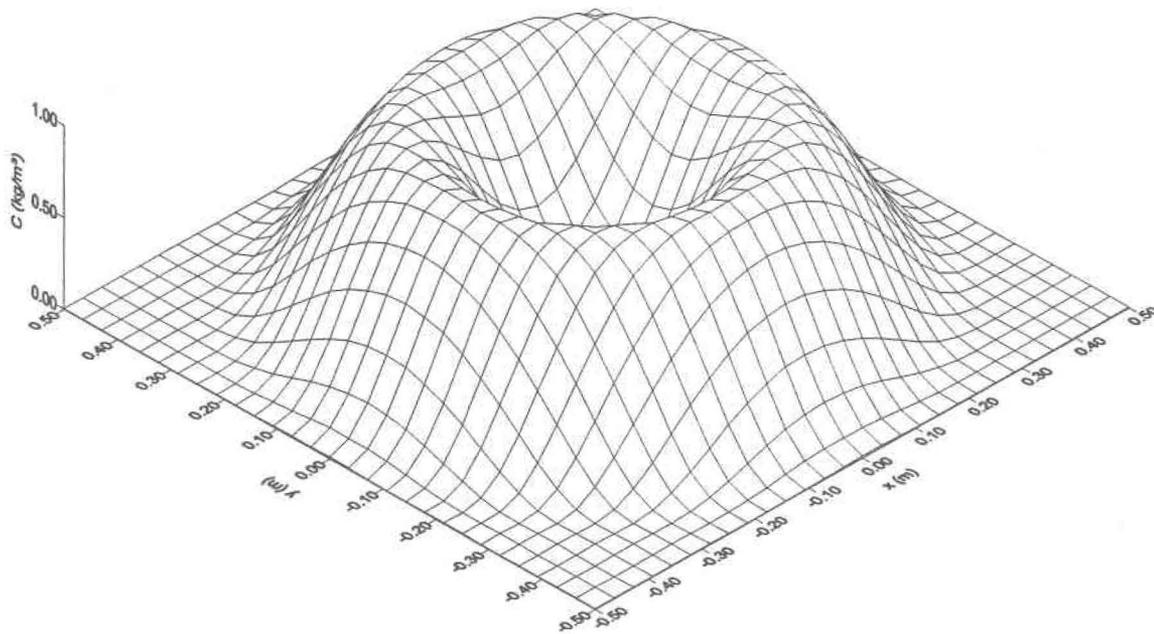


Figure 5.4 : Résultats de l'advection stationnaire d'une distribution gaussienne portés sur une grille orthogonale; conditions limites de Cauchy sur les flux entrant et Neuman sur les flux sortant.

bien adaptées au problème permet de rendre le schéma centré tout aussi performant qu'un schéma décentré.

### 5.2.2 Advection d'un front de concentration

L'advection unidirectionnelle d'un front de concentration dans un canal rectangulaire est employée ici comme cadre pour la validation des termes puits et sources. Dans des conditions d'écoulement contrôlées, une solution analytique peut être évaluée et il devient possible de vérifier si le modèle représente adéquatement les phénomènes.

Le test proposé consiste à propager dans la direction longitudinale un contaminant dont la concentration  $C_0$  est imposée sur le plan latéral  $x=0$ . Le champ de vitesse est uniforme et dirigé selon l'axe  $x$  alors que la diffusion longitudinale est négligeable devant le phénomène advectif. Dans ces conditions, les gradients transversaux s'annulent et l'équation de transport est ramenée à la forme suivante:

$$u \frac{dC}{dx} = \Delta S \quad [5.8]$$

Tout dépendant de la forme que prend le terme puits et sources, l'équation peut être solutionnée analytiquement pour une ou deux variables d'état. L'exercice de validation est appliqué aux cinétiques associées aux variables suivantes:

- matières en suspension (cohésives et non cohésives)
- contaminant dissous dégradable
- matières en suspension et métaux adsorbables
- oxygène dissous et DBO

Dans chacun de ces cas, les conditions de simulation suivantes sont respectées:

- domaine rectangulaire de 5 m par 1 m
- maillage de 101 par 11 noeuds
- condition limite à la frontière amont: Dirichlet (concentration imposée)
- condition limite à la frontière aval et sur les contours: flux diffusif ouvert
- $u = 1.0$  m/s;  $v = 0.0$  m/s

- $H = 1 \text{ m}$
- $D_{xx} = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}; D_{xy} = D_{yy} = 0.0 \text{ m}^2/\text{s}$

Dans les paragraphes qui suivent, les différents problèmes traités sont discutés. Le tableau 5.3 fait la synthèse des simulations effectuées et de leurs résultats.

Tableau 5.3. Résumé des tests d'advection d'un front de concentration en régime stationnaire.

Nombre de variables d'état	Type de variables d'état	Concentration imposée à $x=0$ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	Paramètres de simulation	Erreur absolue maximale	Norme L2 de l'erreur
1	Solides en suspension (non cohésifs)	$C_0=1.0$	$d_s = 50\mu\text{m}$ masse vol.= $2.5\text{g}/\text{cm}^3$ $n = 0.0$	7.63E-06	1.11E-06
1	Solides en suspension (cohésifs)	$C_0=1.0$	$k_s: 0.0002$	6.79E-07	5.00E-07
1	Contaminant dissous	$C_0=1.0$	$K_d: \ln 2 \text{ s}^{-1}$	1.57E-07	5.93E-05
2	Solides en suspension et Métaux	$C_{s0}=10.0$ $C_{m0}=1.0$	$w_s: 0.01 \text{ m/s}$ $K_d: 0.0 \text{ s}^{-1}$ $K_p: 100$	5.58E-07 5.58E-07	7.21E-07 7.21E-08
2	Oxygène et DBO	$C_{OD0}=12.0$ $C_{DBO0}=100.0$	$K_a: 0.0 \text{ s}^{-1}$ $K_d: 0.01 \text{ s}^{-1}$ $L_s: 0.012$ $\text{kg}/\text{m}^2/\text{s}$	5.58E-07 5.60E-07	7.21E-06 7.22E-06

### 5.2.2.1 Matières en suspension non cohésives

Pour des solides non cohésifs transportés au sein d'un écoulement, l'expression de la vitesse de sédimentation et du phénomène de ralentissement de la chute par l'effet de masse confère au terme puits une structure non linéaire complexe. En effet, en considérant une probabilité de déposition maximale, on a :

$$\Delta S = -w_s C \left(1 - \frac{C}{Q_s}\right)^n \quad [5.9]$$

Ici, la valeur de  $n$  dépend du nombre de Reynolds particulaire. Pour que cette équation admette une solution analytique, l'exposant  $n$  doit être entier. Considérant la loi de van Rijn, une solution exacte existe seulement si la valeur du nombre de Reynolds particulaire est comprise dans l'intervalle suivant :

$$1 \leq Re_p \leq 1000$$

On a alors :

$$u \frac{dC}{dx} = -w_s C \left(1 - \frac{C}{Q_s}\right)^4 \quad [5.10]$$

La solution de l'équation a été obtenue à partir du processeur symbolique du logiciel Mathcad™. Elle s'exprime :

$$-\frac{1}{w_s} \left[ \ln C - \ln(Q_s - C) + \frac{Q_s}{(Q_s - C)} + \frac{Q_s^2}{2(Q_s - C)^2} + \frac{Q_s^3}{3(Q_s - C)^3} \right] = 0 \quad [5.11]$$

Cette solution étant donnée implicitement, la méthode Newton-Raphson est employée pour évaluer la concentration en chacun des noeuds du maillage. Une légère erreur est alors introduite dans la solution exacte. Néanmoins, elle apparaît négligeable et les valeurs obtenues par simulation peuvent être comparées à ces valeurs tenues pour exactes. La norme de l'erreur qui résulte de cette comparaison est de l'ordre de  $10^{-6}$  et est jugée satisfaisante.

### 5.2.2.2 Matières en suspension cohésives

Le modèle de Krone applicable aux sédiments cohésifs définit un terme puits qui s'exprime:

$$\Delta S = -k_s C^{7/3} \quad [5.12]$$

La solution analytique du problème advectif s'obtient aisément:

$$C = \left( C_0^{-4/3} + \frac{4}{3} k_s x \right)^{-3/4} \quad [5.13]$$

La simulation du problème conduit à une norme de l'erreur de l'ordre de  $10^{-7}$ . L'approximation est donc adéquate.

### 5.2.2.3 Contaminant dissous

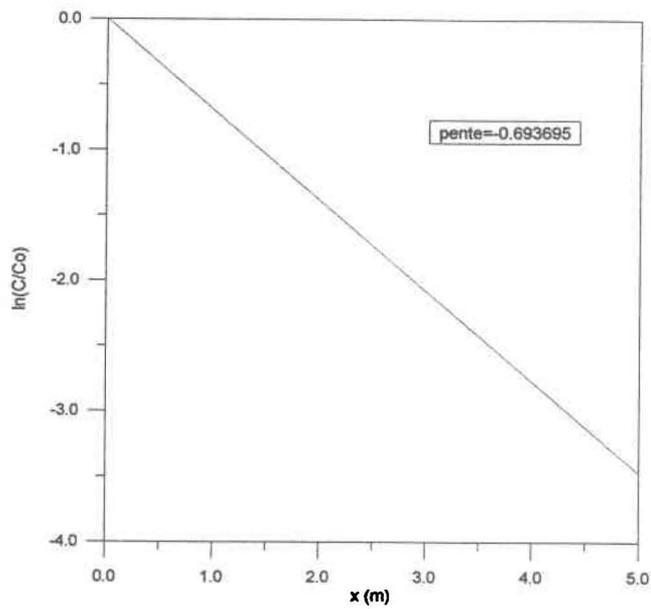
Afin de représenter le phénomène de transport advectif d'un contaminant dégradable, on fait appel ici au concept de "demi-vie". Pour un contaminant soumis à un mécanisme de dégradation d'ordre premier, le temps de demi-vie est donné par:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{K_d} \quad [5.14]$$

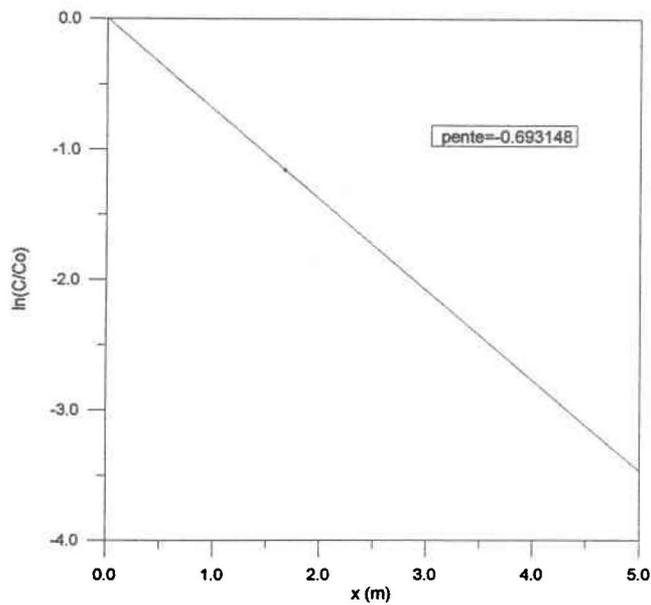
Considérant la dimension du domaine et la vitesse d'écoulement, le coefficient de dégradation est fixé de manière à ce que la concentration de contaminant diminue d'un facteur 2 à chaque mètre parcouru. Ainsi, il faut poser:

$$K_d = \ln 2 \quad [5.15]$$

Dans ces conditions, la relation entre  $\ln\left(\frac{C}{C_0}\right)$  et  $x$  présente une pente égale à  $K_d$ . La figure 5.5 en témoigne: la régression sur les valeurs calculées est illustrée pour le plan  $y=0$  et le plan médian. On observe que la valeur de la pente concorde très bien avec la valeur du coefficient de dégradation, en particulier pour le plan médian. Pour le plan  $y=0$ ,



a) Plan  $y=0.0$  ;  $K_d = \ln 2$



b) Plan  $y=0.5$  ;  $K_d = \ln 2$

Figure 5.5: Advection et dégradation d'un contaminant dissous dans un champ de vitesse unidirectionnel.

l'influence de la condition limite de contour augmente légèrement l'erreur. Sur l'ensemble du domaine, la norme de l'erreur est de l'ordre de  $10^{-5}$ , ce qui est toutefois supérieur à ce que l'on obtient avec d'autres formes de puits et sources.

#### 5.2.2.4 Solides en suspension et métaux adsorbables

On considère le transport advectif de métaux lourds en présence de sédiments en suspension. Les sédiments étant soumis au processus advectif et à un mécanisme de déposition à une vitesse connue, leur concentration s'exprime par:

$$C_s = C_{s_0} \exp\left(\frac{-w_s x}{u}\right) \quad [5.16]$$

Pour le contaminant adsorbable, l'équation de transport se réduit à :

$$u \frac{dC}{dx} = -f_p w_s C - f_d K_d C \quad [5.17]$$

où

$$f_p = \frac{K_p C_s}{K_p C_s + 1} \quad [5.18]$$

Afin de simplifier le problème, la valeur du coefficient de dégradation de la forme dissoute est négligée. Ainsi, en substituant 5.16 et 5.18 dans 5.17, on peut résoudre et trouver la solution analytique suivante:

$$C = \frac{C_0}{1 + \frac{1}{K_p C_{s_0}}} \left[ \exp\left(\frac{-w_s x}{u}\right) + \frac{1}{K_p C_{s_0}} \right] \quad [5.19]$$

La figure 5.6 présente la courbe de décroissance calculée pour le plan y médian. Pour la gamme de valeurs attribuées aux paramètres de simulation, la fraction particulaire atteint près de 100% et la décroissance de la concentration en métaux est linéaire plutôt qu'exponentielle. Les normes d'erreur présentées au tableau 5.3 sont très faibles et la

relation de dépendance des métaux lourds semble bien reproduite. Par contre, quelques difficultés sont rencontrées lors de résolution du problème. La présence d'un degré de liberté additionnel semble dans ce cas ralentir la convergence. Alors que les problèmes décrits précédemment étaient résolus avec 20 itérations, ce nombre doit être doublé afin d'obtenir une convergence adéquate. De plus, une sensibilité aux solutions initiales est observée: l'algorithme diverge lorsque des valeurs initiales éloignées des solutions exactes sont employées.

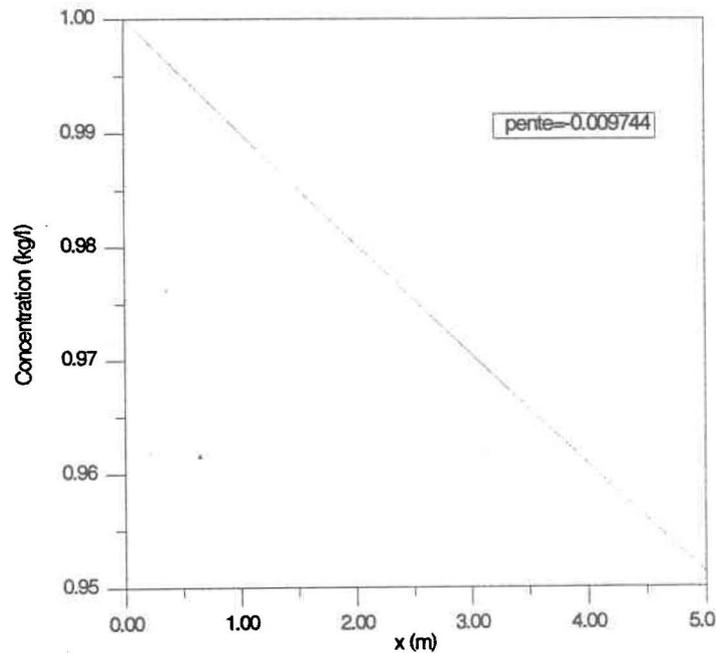


Figure 5.6: Advection de métaux lourds adsorbables dans un champ de vitesse unidirectionnel en présence de matières en suspension.

### 5.2.2.5 Oxygène dissous et DBO

Le taux d'oxygène dissous disponible est calculé à partir des mécanismes de consommation de l'oxygène et de réaération atmosphérique. En négligeant la forme particulière de la DBO et en considérant une demande benthique constante, les valeurs de la DBO et de la concentration en oxygène sont décrites par les équations suivantes:

$$C_{DBO} = C_{DBO_0} \exp\left(\frac{-K_d x}{u}\right) \quad [5.20]$$

$$C_{OD} = C_{OD_0} + C_{DBO_0} \left( \exp\left(\frac{-K_d x}{u}\right) - 1 \right) - L_s \quad [5.21]$$

$L_s$  : demande benthique [=] kg/m<sup>2</sup>/s

Encore une fois, la norme de l'erreur rapportée au tableau 5.3 indique une excellente représentation du phénomène. Toutefois, comme dans le cas des matières en suspension et des métaux lourds, la convergence est moins rapide que lors des simulations à une seule variable d'état et l'influence des valeurs initiales est très significative.

## 5.3 Tests de précision en régime transitoire

### 5.3.1 Diffusion d'un front de concentration

Le test décrit ci-dessous vise à évaluer la capacité de l'approximation développée à représenter la diffusion et la dégradation d'un contaminant en régime transitoire. Le domaine considéré pour la simulation est un bassin fermé à dimension longitudinale prédominante et à vitesse d'écoulement négligeable. Une concentration  $C_0$  d'un contaminant dissous dégradable est imposée au plan  $x=0$ . En l'absence de courant, le contaminant se propage exclusivement par diffusion moléculaire et se dégrade à un taux déterminé par  $K_d$ . Les variations dans la direction transversale étant négligeables, l'équation de transport-diffusion s'énonce:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - K_{xx} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_d C = 0 \quad [5.22]$$

En posant l'hypothèse d'un domaine semi-infini (longueur  $\gg \gg$  largeur) et les conditions initiales et aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} C(x, y, 0) &= 0, \\ C(0, y, t) &= C_0, \\ C(\infty, y, t) &= 0, \end{aligned}$$

Bird et al.(1960) proposent la solution analytique suivante:

$$\begin{aligned} C(x, y, t) &= \frac{C_0}{2} \exp\left(-x \sqrt{\frac{K_d}{K_{xx}}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4K_{xx}t}} - \sqrt{K_d t}\right) \\ &+ \frac{C_0}{2} \exp\left(x \sqrt{\frac{K_d}{K_{xx}}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4K_{xx}t}} + \sqrt{K_d t}\right) \end{aligned} \quad [5.23]$$

où *erfc*, la fonction erreur complémentaire est donné par:

$$\operatorname{erfc}(\phi) = 1 - \operatorname{erf}(\phi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\phi e^{-\xi^2} d\xi \quad [5.24]$$

Un domaine de 5 mètres de long par 1 mètre de large est considéré. Les contours latéraux sont décrits par une condition limite de Neuman. Puisque l'on ne s'intéresse qu'aux variations suivant l'axe des *x*, on limite la discrétisation à trois noeuds selon l'axe des *y*. L'influence des paramètres suivants est étudiée:

- maillage;
- condition limite à la frontière aval;
- pas de temps;
- coefficient de diffusion;
- coefficient de dégradation.

Les conditions de Dirichlet et de Neuman imposées à la frontière aval s'avèrent beaucoup trop rigides pour le problème à résoudre et un flux diffusif ouvert doit y être imposé. Le tableau 5.4 résume les résultats obtenus pour l'ensemble des simulations effectuées. Alors que le maillage, la condition limite à l'aval et la valeur du coefficient de

diffusion démontrent une influence importante sur la précision de la solution, le pas de temps et la valeur du coefficient de dégradation n'ont pas d'effet notable.

La simulation du phénomène transitoire entraîne un choc numérique localisé principalement sur les premières mailles du domaine. Dans les premiers instants simulés, la concentration passe de  $C_0$  à 0 sur la distance d'une maille et l'apparition d'oscillations est inévitable. Afin de réduire ces instabilités initiales, on a recours à un maillage à raffinement décroissant: la première maille de ce maillage est minimale et fixée à 0.005 m alors que les mailles subséquentes sont dimensionnées à partir d'un facteur multiplicatif exponentiel. Comme le démontre le tableau 5.5, ce maillage permet de réduire l'erreur commise. De plus, d'après la figure 5.7, on constate qu'il permet de reproduire plus justement la courbe théorique.

Le terme diffusif constitue en quelque sorte la force motrice du phénomène et on cherche à étudier l'influence du coefficient de diffusion sur la solution. À cette fin, on compare les solutions calculées avec différentes valeurs du coefficient de diffusion pour des états équivalents du système, c'est-à-dire pour une même quantité de matière diffusée. Ces états sont obtenus en fixant la période de simulation en fonction de la valeur du coefficient de diffusion. Les figures 5.8 à 5.10 présentent les résultats.

Sur les premières mailles du domaine, la diffusivité démontre une influence importante: la solution calculée présente des oscillations qui diminuent avec la valeur du coefficient de diffusion. De plus, le tableau 5.4 démontre que la précision de la solution diminue avec l'augmentation du coefficient de diffusion. Alors qu'une valeur de l'ordre de  $10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s permet de reproduire adéquatement la solution exacte, l'approximation est médiocre avec des valeurs supérieures du coefficient de diffusivité. Cet effet de la diffusivité est toutefois limité au voisinage de la frontière à concentration imposée, la solution se stabilisant après quelques mailles.

Tableau 5.4. Influence des paramètres de simulation sur les résultats de la diffusion transitoire d'un front de concentration.

Paramètre étudié	Maille (m)	Pas de temps (s)	Coefficient diffusion ( $m^2/s$ )	Coefficient dégradation ( $s^{-1}$ )	Norme $L_2$ de l'erreur	Erreur absolue maximale
Maillage	0.05	10	$10^{-6}$	$10^{-3}$	0.065	0.814
	0.025				0.047	0.753
	variable				0.013	0.144
Pas de temps	variable	1	$10^{-6}$	$10^{-3}$	0.013	0.016
		5			0.013	0.016
		10			0.013	0.016
		20			0.013	0.016
Coefficient de diffusion	variable	10	$10^{-2}$	0,00	2.091	0.610
			$10^{-3}$		0.068	0.723
			$10^{-4}$		0.013	0.149
Coefficient de dégradation	variable	10	$10^{-4}$	$10^{-2}$	0.069	0.158
				$10^{-4}$	0.068	0.158
				$10^{-6}$	0.068	0.158

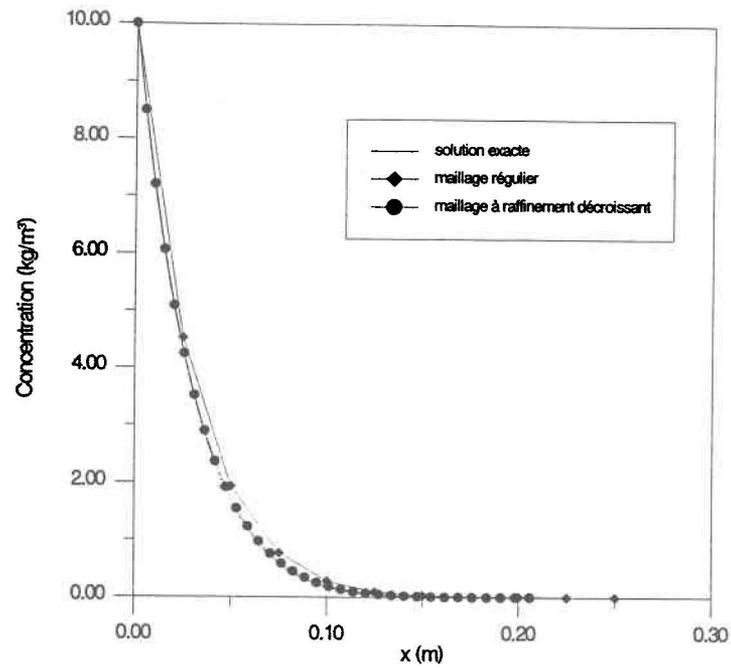


Figure 5.7: Influence de la discrétisation à proximité de la frontière à concentration imposée;  $D_{xx}=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , période simulée: 1200 secondes.

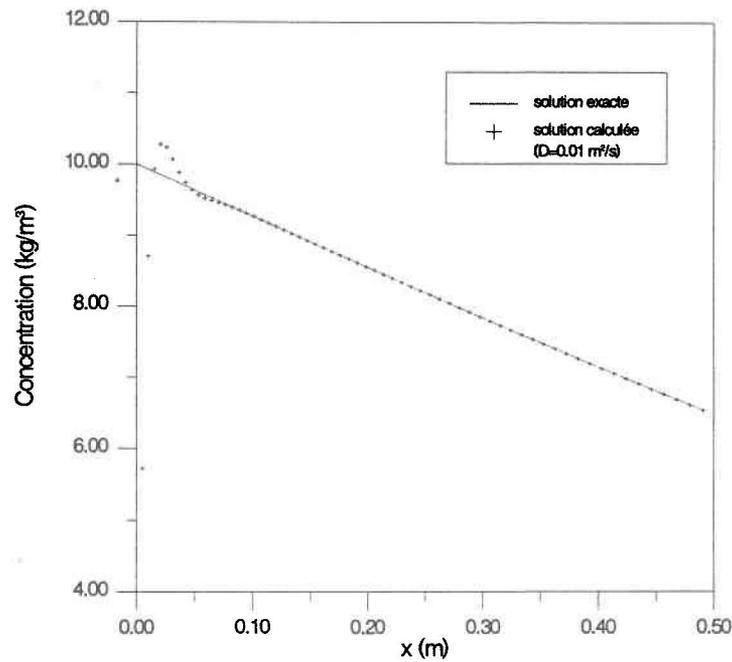


Figure 5.8: Influence du coefficient de diffusion à proximité de la frontière à concentration imposée;  $D_{xx}=0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ ; période simulée: 60 secondes

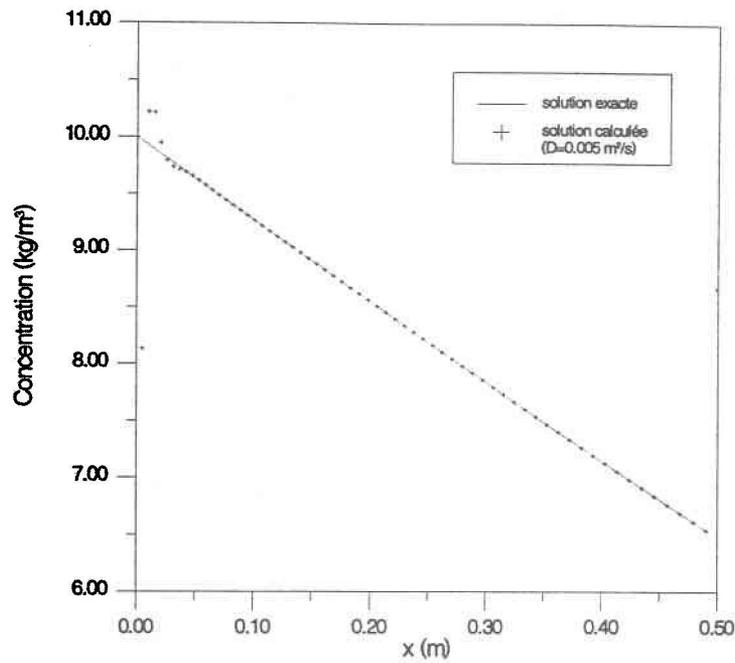


Figure 5.9: Influence du coefficient de diffusion à proximité de la frontière à concentration imposée;  $D_{xx}=0.005 \text{ m}^2/\text{s}$ ; période simulée: 120 secondes

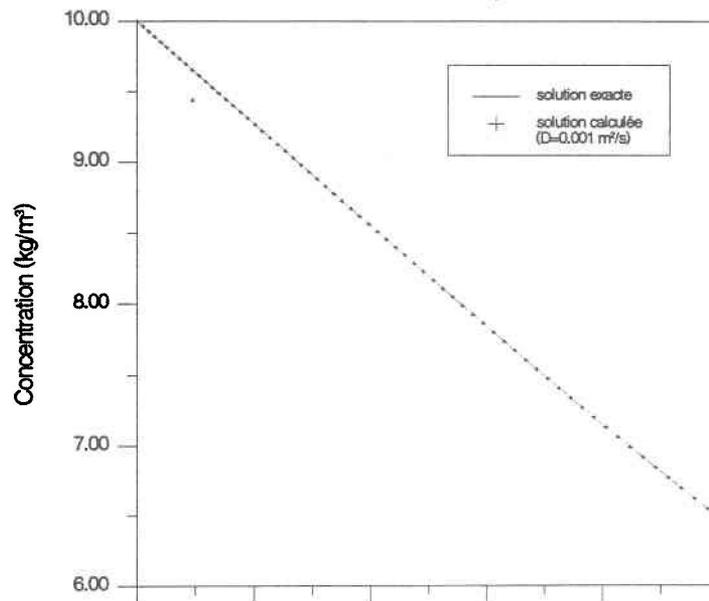


Figure 5.10: Influence du coefficient de diffusion à proximité de la frontière à concentration imposée;  $D_{xx}=0.001 \text{ m}^2/\text{s}$ ; période simulée: 600 secondes

Les résultats du test démontrent le type de difficultés pouvant être rencontrées autour d'un point d'application de sollicitations. Pour bien représenter le phénomène, le maillage doit être suffisamment raffiné et dans certains cas, il peut être nécessaire d'ajuster localement la valeur du coefficient de diffusion.

### 5.3.2 Advection d'un front de concentration

L'exercice présenté ici consiste à étudier la capacité du modèle à convecter une fonction discontinue sur un domaine simplifié. On cherche ainsi à évaluer la performance du schéma de Galerkin dans un problème transitoire où seul l'opérateur d'advection et une cinétique d'ordre premier entrent en jeu.

On considère un écoulement unidirectionnel dans un canal rectangulaire de longueur  $l$  où les variations dans la direction transversale sont négligeables. Tel qu'illustré à la figure 5.11, le problème consiste à propager un front d'onde décrit par l'équation suivante:

$$C(x,y)=Ax \quad [5.25]$$

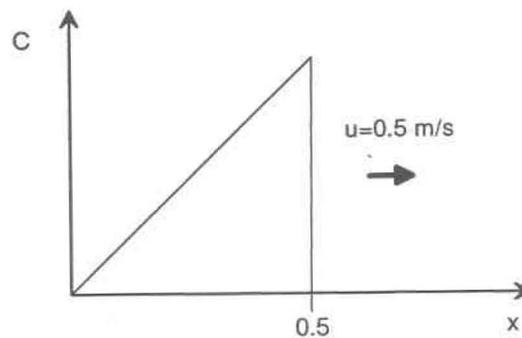


Figure 5.11: Advection transitoire d'un front d'onde dans un champ de vitesse unidirectionnel.

$A$  étant une constante arbitraire. L'équation différentielle représentant le problème est la suivante:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + K_d C = 0 \quad [5.26]$$

La solution analytique de ce problème s'exprime ainsi:

$$C(x, y) = A(x - ut) \exp\left(-\frac{K_d x}{u}\right) \quad [5.27]$$

Il est illusoire d'espérer que l'approximation développée puisse représenter adéquatement ce type de phénomène: le schéma de résolution centré n'est pas conçu pour propager une telle discontinuité. Puisque le problème suppose que sur la distance d'une maille la concentration passe d'une valeur élevée à une valeur nulle, un important choc numérique est imposé et l'apparition d'oscillations est inévitable. L'obtention d'une solution précise ne constitue donc pas l'objectif du test. On cherche plutôt à déterminer les paramètres pouvant influencer les résultats et à démontrer les limites de l'approximation.

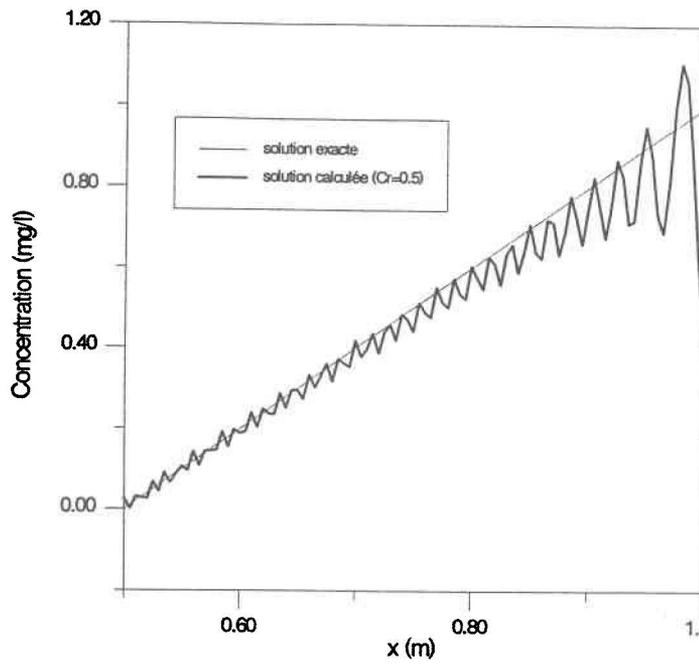
En matière de transport advectif, on a souvent recours au nombre adimensionnel de Courant pour évaluer le nombre de mailles franchies à l'intérieur d'un pas de temps:

$$Cr = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \quad [5.28]$$

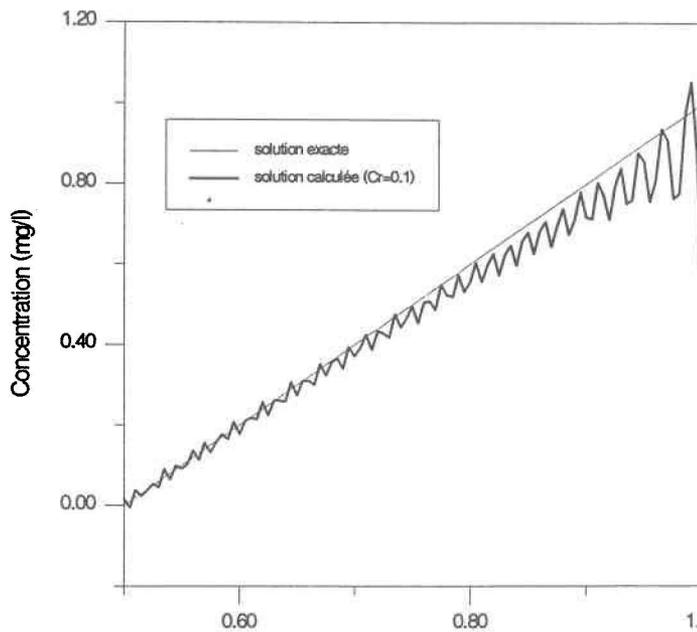
Le test est effectué pour différentes valeurs du nombre de Courant dans les conditions de simulation suivantes:

- maillage de 201 par 3 noeuds sur un domaine décrit par:  
 $x \in [0, 1]; y \in [0, 0.2]$
- $u = 0.5$  m/s ;  $l = 0.5$  m et  $A = 2.0$
- conditions limites de Dirichlet sur la frontière amont, Neuman sur les contours et un flux diffusif ouvert sur la frontière aval

La vitesse étant constante, la valeur du nombre de Courant est fixée à partir du pas de temps. La figure 5.12 présente les résultats pour la propagation sans dégradation du



a) nombre de Courant = 0.5;  $K_d=0.0$



b) Nombre de Courant = 0.1;  $K_d=0.0$

Figure 5.12: Résultats de l'advection d'un front d'onde dans un champ de vitesse unidirectionnel.

front sur une distance d'un demi-mètre. Tel que prévu, la solution numérique présente de très fortes oscillations. La nature de la fonction à propager fait en sorte que les valeurs à gauche et à droite d'un noeud génèrent un très fort gradient. Le schéma centré pondérant de façon équivalente l'influence de ces valeurs, une solution moyenne est calculée. Ainsi, la tendance de la fonction ne peut être reproduite adéquatement et la solution oscille énormément. Les résultats démontrent toutefois l'amortissement des oscillations avec la diminution du nombre de Courant. Cette diminution se traduit par une réduction du nombre d'éléments franchis par pas de temps, ce qui diminue la zone d'influence des noeuds voisins et améliore la performance du schéma. La variation de la norme de l'erreur en fonction du nombre de Courant est tracée à la figure 5.13.

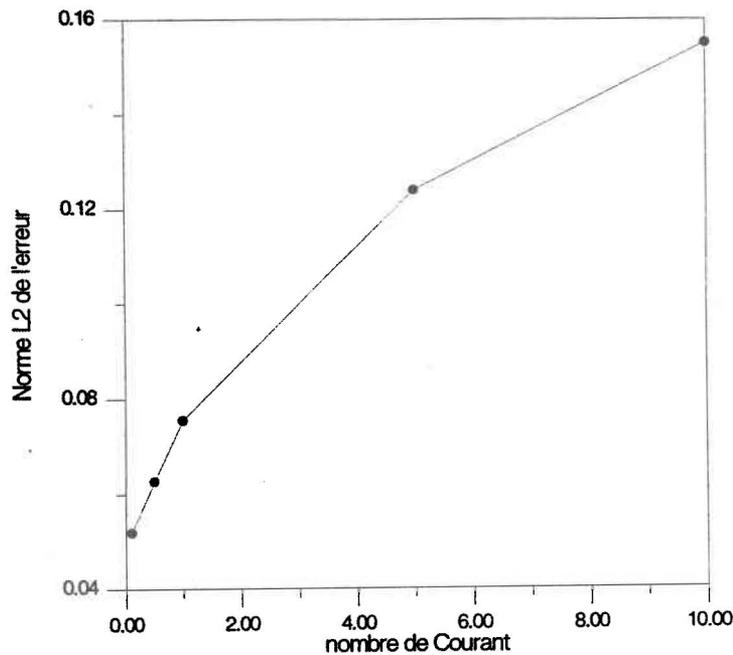


Figure 5.13: Influence du nombre de Courant sur la norme de l'erreur pour l'advection transitoire d'un front d'onde.

Bien qu'il soit purement académique, le problème simulé permet de constater les limites du schéma de Galerkin face aux problèmes advectifs. Afin d'atténuer les oscillations indésirables, le nombre de Courant doit être fixé à une valeur aussi faible que possible. Cela se traduit par l'emploi d'un pas de temps très court. Le test a aussi permis de constater que l'ajout d'une cinétique de premier ordre n'a pas d'influence notable sur la précision de la solution.

### 5.3.3 Rotation d'une distribution gaussienne

La version transitoire du test d'advection d'une distribution de concentration gaussienne consiste à faire subir à une cloche tridimensionnelle une révolution complète sur le domaine décrit à la figure 5.14 a. À la suite de cette révolution, la distribution initiale doit normalement être recréée. Ainsi, la solution exacte du problème advectif n'est rien d'autre que l'application des conditions initiales qui sont données par (Khelifa, 1992):

$$C(x,y,0) = \frac{1}{4} \left(1 + \cos\left(\pi \frac{x-\frac{5}{30}}{0.2}\right)\right) \left(1 + \cos\left(\pi \frac{y+\frac{5}{30}}{0.2}\right)\right); \text{ pour } \left(x - \frac{5}{30}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{30}\right)^2 \leq 0.2^2 \quad [5.29]$$

$$C(x,y,0) = 0; \text{ ailleurs} \quad [5.30]$$

La figure 5.14 b illustre la distribution attendue pour un cas standard. Pour le champ de vitesse considéré, la période de révolution de  $2\pi$  secondes est discrétisée en 200 pas de temps. Le maillage utilisé comporte 31 noeuds sur chaque côté du domaine. De façon à recréer un phénomène advectif, la valeur du coefficient de diffusion est fixée à  $10^{-7}$  m/s<sup>2</sup>.

Dans un premier temps, le test est effectué de façon standard, c'est-à-dire pour une variable conservative. Par la suite, une cinétique de dégradation d'ordre premier est prise en compte. Pour une telle cinétique, le temps de demi-vie du contaminant traité est donné par

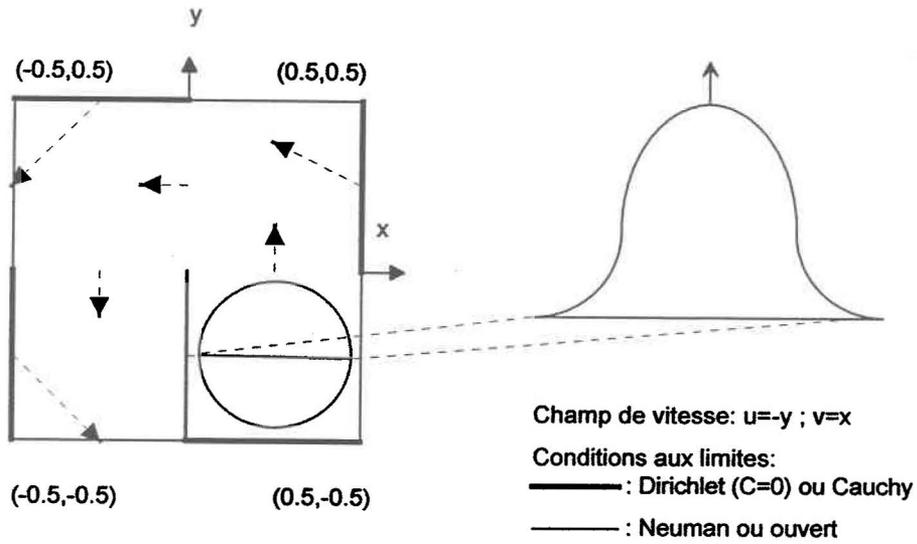
l'équation 5.14. De manière à retrouver une distribution réduite de moitié après une rotation complète, on donne au coefficient de dégradation la valeur suivante:

$$K_d = \frac{\ln 2}{2\pi} \quad [5.31]$$

Les distributions calculées avec des conditions limites de Cauchy-Neuman, avec et sans dégradation sont présentées à la figure 5.15 a et b. Encore ici, la grille pour la présentation des résultats ne correspond pas au maillage de calcul. On constate que le modèle reproduit bien la solution exacte et que la distribution n'est que légèrement déformée au cours de la révolution. Le tableau 5.5 présente les erreurs calculées pour les différentes simulations effectuées. Ces résultats confirment la fiabilité relative du schéma de résolution centré face aux problèmes advectifs. De plus, ils assurent une représentation adéquate de la perte de matière par le biais d'une cinétique de premier ordre.

Tableau 5.5. Comparaison de différents schémas numériques pour l'advection transitoire d'une distribution gaussienne dans un champ de vitesse circulaire.

Schéma	Conditions aux limites	Coefficient de dégradation (s <sup>-1</sup> )	Erreur absolue maximale	Norme L2 de l'erreur
Galerkine	Dirichlet	---	0.0325	0.0080
	Cauchy-Neuman	---	0.0290	0.0077
	Cauchy-ouvert	---	0.0290	0.0077
Douglas-Wang, éléments T6 (Khelifa,1992)	Dirichlet	---	0.03	---
Galerkine	Cauchy-Neuman	$\ln 2/t_{1/2}$	0.02	0,00



## a) Conditions de simulation

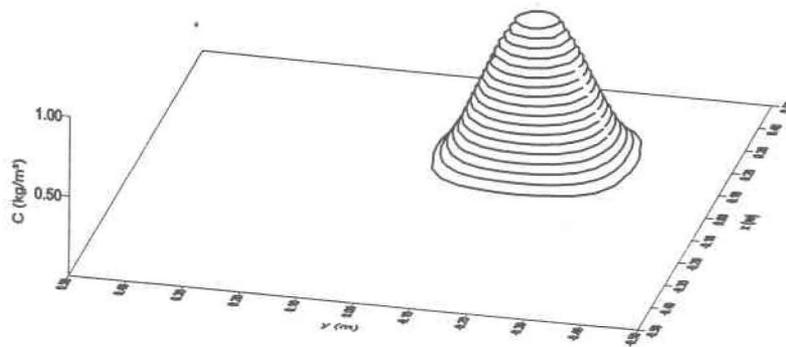
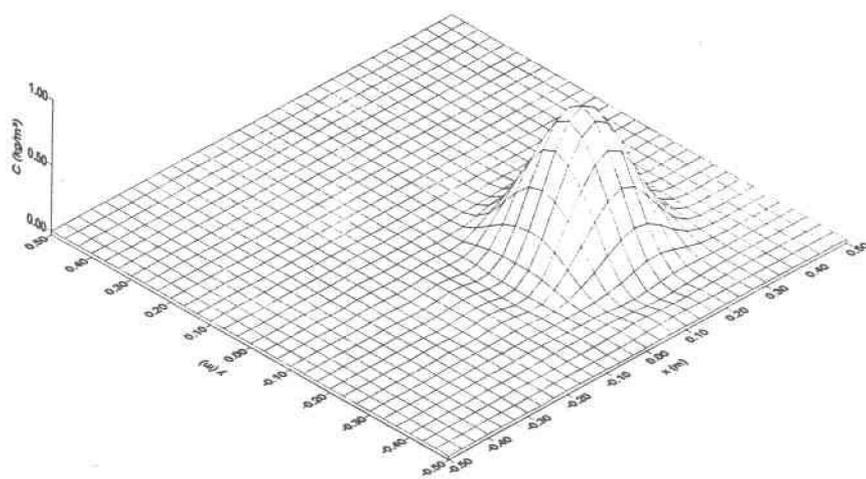
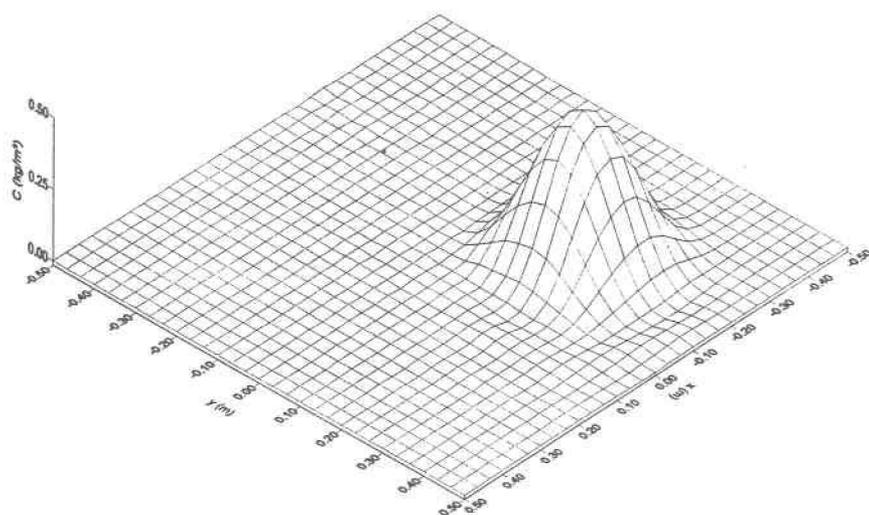
b) Solution analytique pour  $K_d=0$ 

Figure 5.14: Advection transitoire d'une distribution gaussienne dans un champ de vitesse circulaire.



a)  $K_d = 0.0 \text{ s}^{-1}$



b)  $K_d = \ln 2 / 2 \text{ s}^{-1}$

Figure 5.15: Résultats de l'advection transitoire d'une distribution gaussienne portée sur une grille orthogonale; conditions limites de Cauchy sur les flux entrant et de Neuman sur les flux sortant.

## 5.4 Discussion

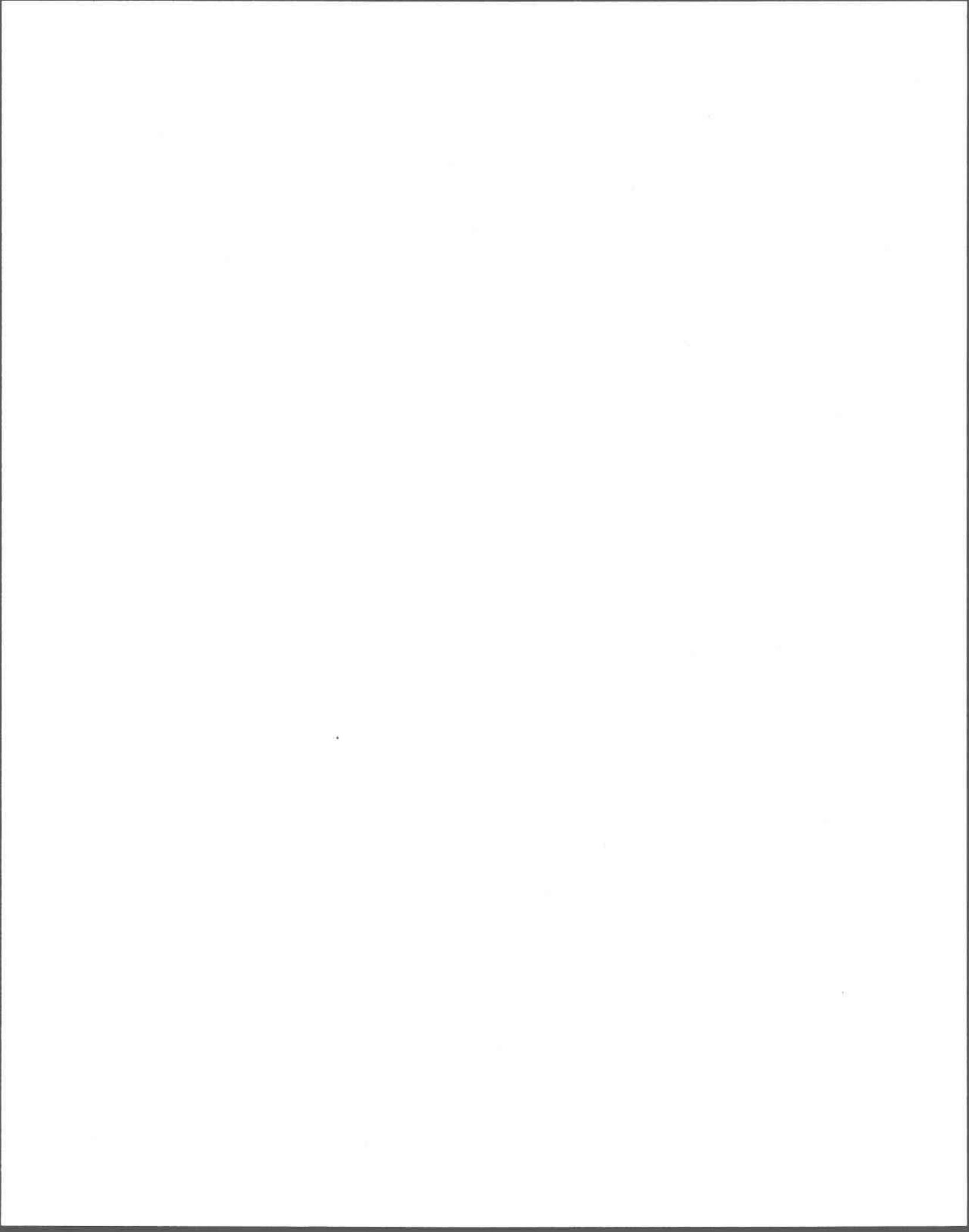
Les tests effectués à l'intérieur de la phase de validation analytique permettent d'avancer quelques conclusions sur le comportement et la performance du modèle de transport-diffusion. La première série de tests ayant démontré la conformité des algorithmes programmés, la précision du modèle a pu être analysée.

Pour les tests standards que constitue l'advection stationnaire et transitoire d'une distribution de concentration gaussienne, les résultats du modèle ont pu être comparés à d'autres approximations. Dans les conditions décrites, le modèle s'est montré tout aussi performant qu'un schéma décentré.

Les tests de propagation d'un front de concentration ont été spécifiquement développés en fonction des particularités du modèle à valider. Pour ces tests, il n'y a pas de comparaison possible des résultats avec d'autres types d'approximations et l'interprétation de l'ordre de grandeur des erreurs est tout à fait arbitraire. Les résultats obtenus pour l'advection d'un front de concentration permettent de conclure que le phénomène unidimensionnel stationnaire est conformément représenté par le schéma de résolution. Il en est de même pour l'implantation des cinétiques décrivant les termes puits et sources. Pour l'ensemble des cas étudiés, les concentrations calculées sont conformes aux valeurs attendues. La norme  $L_2$  et l'écart maximum entre les valeurs théoriques et calculées sont faibles dans tous les cas présentés. On retient par contre que les problèmes à variables d'état dépendantes semblent caractérisés par une convergence moins rapide et une influence importante des valeurs initiales.

En régime transitoire, le modèle a été soumis à des épreuves plus rudes qui ont permis d'identifier les facteurs pouvant améliorer la précision de la solution. On en dégage l'importance d'avoir un maillage et des conditions aux limites bien adaptés au problème à représenter. De plus, on constate que la valeur du pas de temps influence la solution d'un problème advectif alors qu'elle a peu d'effet pour un problème exclusivement diffusif.

Suite aux tests réalisés, on conclut que les termes puits et sources sont bien implantés dans l'équation de transport-diffusion et que la résolution à plusieurs variables est bien exécutée. Cependant, afin de s'assurer que les lois de comportement choisies représentent convenablement les phénomènes naturels, il faut envisager de comparer les résultats de simulation à des mesures de terrain ou de laboratoire.



## 6 APPLICATION À LA RIVIÈRE DES PRAIRIES

L'application du modèle de transport-diffusion a été jusqu'ici limitée à des problèmes purement académiques. Seuls des domaines à géométrie régulière, des écoulements uniformes et des conditions de simulation contrôlées ont été considérés. En vue de compléter la démarche de validation, il est essentiel d'étudier le comportement du modèle dans une situation réelle d'écoulement en rivière.

La rivière des Prairies, cours d'eau séparant l'île de Montréal et l'île Jésus (Laval), a été choisie comme site pour l'application du modèle. Située au milieu du bassin de population le plus dense du Québec, la rivière des Prairies est fortement sollicitée par l'activité humaine. Prises d'eau, barrage, marinas, parcs, frayères et zones de pêche récréative sont les principaux usages et aménagements qu'on y retrouve. Toutefois, les rejets aux émissaires des réseaux d'égout de la CUM et de la municipalité de Laval détériorent la qualité de l'eau de la rivière et entrent en conflit avec certains usages. La restauration ou le maintien de ces usages passe obligatoirement par le contrôle des rejets au cours d'eau.

Dans le cadre d'une étude sur les impacts des rejets de temps de pluie sur la rive nord de la rivière des Prairies, une campagne de mesures a été menée en 1992 pour le compte du Consortium Asseau, Gendron-Lefebvre. L'objectif visé consistait à étudier la propagation des masses d'eau débordées en temps de pluie. Des essais de courantométrie et de diffusion d'un traceur ont été effectués au droit d'émissaires de débordement du réseau d'égout de Laval. Les mesures prélevées serviront de référence pour la validation du modèle.

Avant de pouvoir appliquer le modèle de transport-diffusion à la rivière des Prairies, deux étapes préliminaires doivent être effectuées. La première étape consiste en l'élaboration d'un modèle de terrain. Le maillage d'éléments finis résultant de cette étape

permet ensuite de simuler l'hydrodynamique du cours d'eau de façon à évaluer les vitesses et niveaux d'eau nécessaires à l'utilisation du modèle de transport-diffusion. Ces deux étapes feront l'objet des sections 6.3 et 6.4. Une description des caractéristiques du site étudié et de la campagne de mesures est tout d'abord donnée aux sections 6.1 et 6.2.

## 6.1 Description du site à l'étude

La rivière des Prairies constitue un des quatre embranchements par lesquels les eaux de la rivière des Outaouais se jettent dans le fleuve St-Laurent, les autres étant la rivière des Mille Îles et les lacs St-Louis et des Deux Montagnes (TECSULT, 1995). Elle prend naissance à l'exutoire du lac des Deux Montagnes et s'écoule sur environ 50 km entre l'île Jésus et l'île de Montréal pour finalement se mélanger au fleuve St-Laurent.

Un écoulement relativement rapide caractérise la rivière des Prairies, son débit moyen se maintenant autour de 1000 m<sup>3</sup>/s. La rivière présente quelques zones de rapides dont ceux du Cheval Blanc et du Sault-aux-Récollets.

Afin de profiter du potentiel hydroélectrique qu'offre la rivière des Prairies, un barrage au fil de l'eau y a été aménagé en 1929. Actuellement exploitée par Hydro-Québec, la centrale de la rivière des Prairies génère 45 000 kw-h. Bien que cette production soit faible par rapport à l'ensemble du parc de production d'Hydro-Québec (environ 0.15%), elle assure un approvisionnement de base pour une partie de la région métropolitaine (Hydro-Québec, 1994).

Puisqu'elle visait à caractériser la propagation des eaux de débordement de la municipalité de Laval, la campagne de mesures servant de référence pour la validation du modèle a été limitée à la rive gauche de la rivière des Prairies. Les neuf points de rejet étudiés sont regroupés à l'intérieur d'un tronçon d'environ 16 km qui s'échelonne de l'île Paton au ruisseau Lapinière. C'est par ce dernier que transitent les eaux usées non traitées du bassin versant Centre du réseau d'égout de Laval. Le tableau 6.1 présente les sites

étudiés et les caractéristiques de l'écoulement observées directement en aval (Asseau, 1993).

Dans le cadre de la présente étude, nous avons choisi de modéliser la rivière des Prairies sur un tronçon s'étendant du pont Louis Bisson (autoroute 13) jusqu'au barrage d'Hydro-Québec. La position de cette frontière aval du domaine modélisé est inévitable en raison de l'effet du barrage sur l'écoulement naturel. Sur ce tronçon de près de 12 km, on retrouve sur la rive nord sept émissaires de débordement. Le domaine modélisé et la position des émissaires étudiés sont illustrés à la figure 6.1.

Tableau 6.1: Sites de débordement étudiés et caractéristiques locales de l'écoulement (Asseau, 1993).

Émissaire	Nom du site	Nature du courant	Vitesses (m/s)	
			max.	moy.
E1	92 <sup>e</sup> Avenue	Laminaire	0.45	0.35
E2	77 <sup>e</sup> Avenue	Laminaire, contre courant au bord	1.00	0.50
E3	69 <sup>e</sup> Avenue	Laminaire	>1.00	0.75
E5	Brien	Laminaire	1.30	-
E6	des Prairies Est	Laminaire	0.70	0.50
E7	J.J. Joubert	Laminaire, contre- courant au bord	0.50	0.35
E9	Papineau	Lent, trajectoires disparates	0.40	-
E11	Belleville	Contre-courant au bord	>0.80	0.50
E13	ruisseau Lapinière	Laminaire et très lent	0.13	<0.08

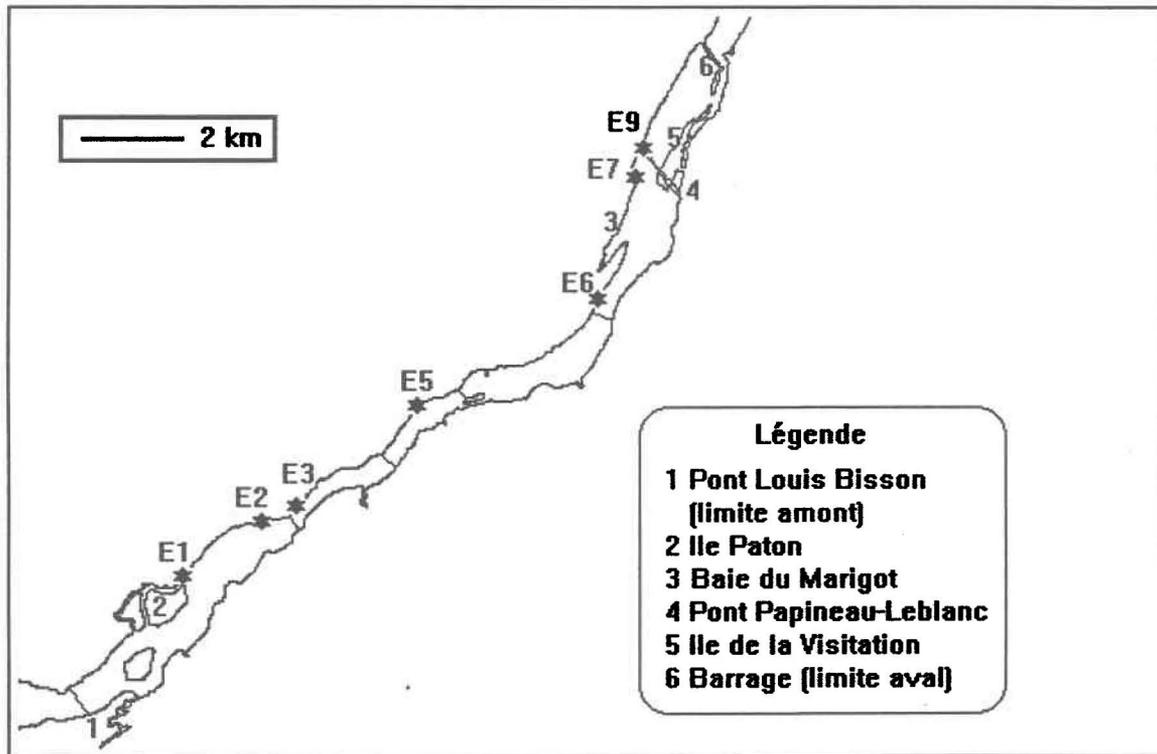


Figure 6.1: Domaine modélisé et position des émissaires.

## 6.2 Description de la campagne de mesures

La campagne de mesures de 1992 comportait deux étapes distinctes: la courantométrie et la diffusion d'un traceur. La méthodologie suivie est décrite ci-dessous pour chacune des étapes.

### 6.2.1 Mesures courantométriques

Des mesures courantométriques ont été prélevées en bordure de neuf points de rejet du réseau d'assainissement de Laval. Cette campagne de mesures s'est échelonnée du 14 au 20 octobre 1992.

Les mesures ont été prises à l'aide de flotteurs munis d'une dérive en croix. En chacun des points de rejet étudiés, des flotteurs étaient lâchés face à l'émissaire, à des distances de 30, 50 et 75 mètres de la rive. Le suivi des flotteurs à l'aide d'un système de positionnement à micro-ondes Del Norte 542 a permis d'établir leur trajectoire et leur vitesse de déplacement. Pour chacun des flotteurs, une trentaine de mesures ont été réalisées.

Ces mesures courantométriques sont mises à profit ci-après pour la validation du champ de vitesse calculé par le modèle hydrodynamique. Le positionnement des points de mesure étant donné suivant une projection MTM et un repère géodésique NAD 27, les lectures de position ont dû être corrigées de façon à correspondre à la projection UTM et au repère NAD 83 auxquels font référence les données bathymétriques. Cette transformation a été effectuée à l'aide du logiciel Lambert<sup>MD</sup>. Elle a été également appliquée à la position des mesures de diffusion.

### 6.2.2 Mesures de diffusion d'un traceur

Des campagnes de traçage à la rhodamine WT ont été effectuées les 22 et 23 octobre 1992 au droit des émissaires E6 et E3 du réseau de Laval. En bordure de chaque émissaire, une solution de rhodamine était injectée pendant 60 minutes dans des conditions

stationnaires. Des échantillons étaient prélevés à 1 mètre et à 3 mètres de profondeur sur des transects situés à 300 mètres et plus en aval du point d'injection. Les échantillons étaient ensuite analysés pour évaluer la concentration en rhodamine.

Les données recueillies consistent en des valeurs ponctuelles de la concentration de rhodamine ainsi que des délais entre le début de l'injection et la mesure. Elles sont employées pour la validation du modèle de transport-diffusion.

## **6.3 Modèle de terrain**

### **6.3.1 Traitement des données**

Afin d'appliquer le modèle hydrodynamique et le modèle de transport-diffusion, le domaine à l'étude doit être discrétisé sous la forme d'un maillage d'éléments finis. La construction de ce maillage a été effectuée à l'aide d'un logiciel nommé *Modeleur* et développé à l'INRS-Eau par l'équipe des professeurs Leclerc et Secretan. Ce logiciel est spécifiquement conçu pour la modélisation numérique de terrain et la préparation des fichiers de commande du modèle hydrodynamique. Le *Modeleur* considère les caractéristiques physiques de la rivière telles les cotes bathymétriques, la position des berges, la nature du substrat et des plantes aquatiques.

La bathymétrie de la rivière est à la base de la construction du maillage d'éléments finis. On a eu recours ici à des cotes bathymétriques (minutes hydrographiques) provenant d'une campagne de levés réalisée en 1987 pour le compte du Service Hydrographique Canadien. Ces données correspondent à des coordonnées spatiales exprimées en degrés latitudinaux et longitudinaux. Elles ont été ramenées en coordonnées UTM (projection orthogonale) afin d'être compatibles avec le *Modeleur*. Les lignes de berges ont été tirées de cartes marines du Service Hydrographique Canadien. Elles ont été numérisées à l'aide du logiciel *Atlas Draw*<sup>TM</sup> et ramenées à une forme identique aux cotes bathymétriques.

Le substrat et les plantes aquatiques influencent les écoulements fluviaux et doivent généralement être pris en compte pour la modélisation de l'hydrodynamique d'un cours d'eau. Ils ralentissent l'écoulement et se traduisent par un facteur de frottement. La nature du substrat peut varier notablement dans un cours d'eau naturel et le modèle de terrain doit idéalement pouvoir représenter ses caractéristiques locales. Cependant, en raison du manque d'information sur les substrats de la rivière des Prairies, un coefficient de frottement représentatif mais constant a dû être spécifié sur l'ensemble du domaine modélisé. Quant aux plantes aquatiques, leur influence sur l'écoulement de la rivière des Prairies est faible et elles n'ont pas été prises en compte dans le modèle de terrain.

### 6.3.2 Construction du maillage

Dans un premier temps, le Modeleur a été employé pour générer un maillage de Delaunay. Ce maillage relie les mesures ponctuelles que constituent les cotes bathymétriques et les lignes de berges. Les mesures bathymétriques étant généralement recueillies à des fins autres que la modélisation hydrodynamique (la navigation par exemple), le maillage de Delaunay est peu adapté à l'application envisagée. C'est pour cette raison qu'un maillage répondant aux exigences et aux besoins du modèle numérique est nécessaire. Les cotes bathymétriques mesurées doivent alors être interpolées aux noeuds du maillage de calcul qui s'avère souvent moins dense que les mesures.

Le maillage doit être construit en portant attention aux particularités du domaine telles les zones de rapides, les zones à fort gradient bathymétrique et autres singularités. De façon à saisir leur influence sur l'hydrodynamique, ces zones doivent être suffisamment discrétisées. De plus, en vue d'appliquer le modèle de transport-diffusion à la rivière des Prairies, un niveau de discrétisation élevé est nécessaire en bordure des émissaires de débordement.

Le Modeleur permettant d'établir un degré de raffinement variable, des mailles de 15 à 20 mètres ont été définies en bordure des émissaires et des autres sections importantes. Dans les zones de moindre intérêt, des mailles d'environ 40 mètres ont été utilisées. Un maillage global de 6426 noeuds et 11750 éléments T3 a ainsi été établi. Les mailles ont une longueur moyenne de 30 mètres et varient dans un registre de 9 à 62 mètres. La bathymétrie du Delaunay doit être transférée sur ce nouveau maillage, c'est-à-dire que les valeurs aux points de mesure sont interpolées aux noeuds. La figure 6.2 présente le maillage généré sur le tronçon de rivière situé en aval de l'émissaire de la 69<sup>e</sup> Avenue, soit le point E3. C'est sur cette zone que la propagation du traceur a été étudiée.

## **6.4 Modélisation hydrodynamique**

Au chapitre 3, les équations de conservation à la base du modèle hydrodynamique ont été présentées. Certains aspects liés à leur résolution numérique ont aussi été décrits. Le programme employé pour simuler l'hydrodynamique de la rivière des Prairies se nomme MEFLU et est issu des travaux de Boudreau et al. (1994) et de Leclerc and al. (1990). Ce modèle à bancs couvrant-découvrant a été utilisé sur une plate-forme Unix, soit sur une station de travail Sun Sparc 2. En plus de valider les outils, un objectif secondaire de l'exercice visait à développer une stratégie de simulation adaptée aux problèmes de transport-diffusion dans ce type de milieu.

### **6.4.1 Événements à représenter**

La présente application du modèle hydrodynamique MEFLU vise à recréer par simulation certains événements de référence pour lesquels des mesures courantométriques sont disponibles. L'objectif ne consiste pas à effectuer une analyse hydrodynamique complète, mais plutôt à calculer un champ de vitesse représentatif qui permettra de reproduire le plus justement possible la propagation du traceur par l'application du modèle de transport-diffusion.

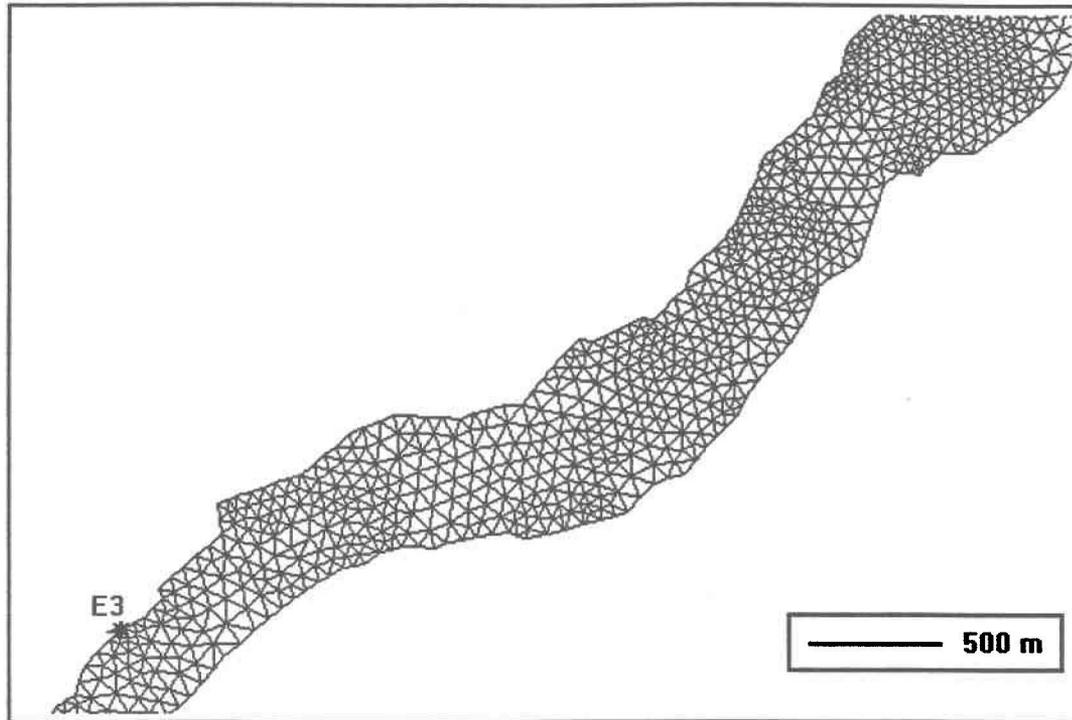


Figure 6.2: Maillage généré sur un tronçon de rivière en aval de l'émissaire E3.

Les événements de référence sont déterminés sur la base du débit mesuré à la station limnimétrique des rapides du Cheval Blanc (à l'extrémité amont de la rivière) et du niveau d'eau observé à la limite aval du domaine modélisé. Toutefois, dans ce cas-ci, la présence d'un barrage et l'application d'un plan de section prédéfini permettent de maintenir en tout temps un niveau d'eau constant à la frontière aval.

Le tableau 6.2 rapporte les débits instantanés enregistrés à 8:00 heures pour chaque jour de la prise des mesures de courantométrie et de diffusion. Il est à noter que des mesures courantométriques sont disponibles jusqu'au 20 octobre 1992. Les essais de diffusion menés les 22 et 23 octobre ne comprenaient pas de telles mesures.

À l'exception des valeurs correspondant aux sites E11 et E13 qui ne font pas partie du domaine modélisé, ces débits ont été simulés avec MEFLU. Dans ce contexte, si les résultats de simulation apparaissent conformes et s'ils se comparent bien aux observations, le modèle est réputé représentatif du tronçon. Dans un second temps, les caractéristiques hydrodynamiques associées aux essais de diffusion peuvent être calculées.

Tableau 6.2: Débit instantané correspondant aux mesures de courantométrie et de diffusion sur la rivière des Prairies (Station des rapides du Cheval blanc; numéro de référence 043301).

Date (octobre 1992)	Débit (m <sup>3</sup> /s)	Type de mesures effectuées	Site
14	987	courantométrie	E6, E7
15	957	courantométrie	E3, E9
16	954	courantométrie	E1
19	1015	courantométrie	E1, E2, E5
20	1120	courantométrie	E11, E13
22	1211	diffusion	E6
23	1211	diffusion	E3

## 6.4.2 Description des conditions de simulation

### 6.4.2.1 Maillage

Puisque le modèle hydrodynamique fait appel à une approximation quadratique des vitesses, une discrétisation en éléments T6 est nécessaire. Le maillage en T3 généré par le Modeleur doit donc être modifié: sur chacune des mailles, un noeud médian est ajouté. Le nombre de noeuds du maillage se voit ainsi multiplié par un facteur 4.

La technique de résolution matricielle à laquelle fait appel MEFLU nécessite un certain contrôle sur la structure de bande de la matrice à résoudre. En effet, en limitant sa largeur de bande, il est possible de réduire l'espace mémoire requis et d'en faciliter la résolution. Cette largeur de bande étant liée à l'ordre de numérotation des noeuds du maillage, l'attribution des numéros de noeuds doit respecter une certaine organisation séquentielle. Pour minimiser la largeur de bande, la différence des numéros de noeuds appartenant à un même élément doit être minimisée. À cette fin, un programme de rénumérotation est employé. Il permet de réduire d'un facteur 10 la largeur de bande associée au maillage de T6, le rendant ainsi adéquat pour l'emploi de MEFLU. Notons que l'uniformité du tronçon de rivière à modéliser facilite l'obtention d'une largeur de bande optimale.

### 6.4.2.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites décrites ci-dessous prévalent pour l'ensemble des simulations hydrodynamiques effectuées. Elles se résument à l'imposition de débits, de niveaux d'eau et de vitesses normales ou tangentielles.

À la frontière amont du domaine, un débit volumétrique est imposé. Ce débit est celui relevé à la station de mesures des rapides du Cheval Blanc pour chacun des événements de référence à simuler. Puisqu'un flux entrant est imposé sur cette frontière, les vitesses tangentielles sont fixées nulles. Sur les berges de la rivière et sur le contour des

îles, une condition limite de vitesse normale nulle est imposée. Une telle condition annule le flux dans la direction normale à la rive.

Les conditions aux limites appliquées autour de la frontière aval du domaine découlent de la gestion des eaux au barrage de la rivière des Prairies (figure 6.3). En conformité avec les données d'Hydro-Québec, le niveau d'eau est imposé sur la frontière aval, qui est décrite par le barrage principal et l'évacuateur de crue. La valeur imposée correspond au niveau d'eau que permet de maintenir le barrage. Le long du barrage, les vitesses normales sont imposées nulles alors que les vitesses tangentielles le sont le long de l'évacuateur principal.

Le barrage Simon-Sicard qui est situé en amont du barrage principal laisse passer un débit moyen de  $8.5 \text{ m}^3/\text{s}$ . Cette valeur est imposée sur le tronçon de frontière qui le représente. Des vitesses tangentielles nulles y sont aussi fixées. Deux déversoirs sont présents autour de l'île du Cheval-de-Terre mais le débit sortant y est négligeable en temps normal. Un flux nul et des vitesses normales nulles y sont donc imposés.

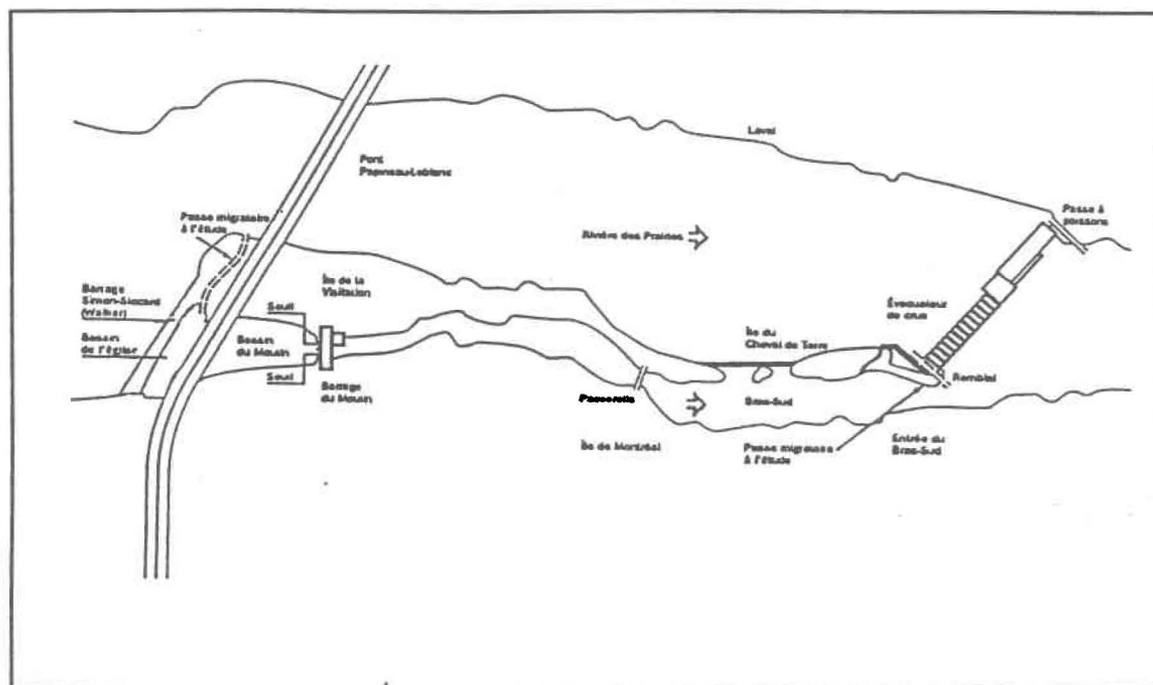


Figure 6.3: Aménagement du barrage de la rivière des Prairies (Hydro-Québec, centre d'interprétation de la centrale de la rivière des Prairies).

### 6.4.2.3 Coefficient de frottement

Le modèle hydrodynamique fait appel à une loi de frottement de type Manning pour représenter l'interaction du substrat sur l'écoulement. Étant donné le manque d'information relative au substrat de la rivière des Prairies, une valeur constante du coefficient de frottement est employée sur tout le domaine. En se basant sur les valeurs suggérées par la littérature (French, 1994; Thomann and Mueller, 1987) le  $n$  de Manning a été fixé à 0.025.

### 6.4.2.4 Viscosité

La viscosité turbulente de l'écoulement joue un rôle faible mais non négligeable sur le résultat de la simulation hydrodynamique. Elle influence le niveau d'eau calculé mais surtout la convergence du modèle. Le modèle MEFLU permet d'évaluer la viscosité turbulente à partir d'un concept de longueur de mélange. Un coefficient de pondération permet d'ajuster la valeur de la viscosité turbulente obtenue. Il est fixé de façon à ce qu'elle se situe approximativement entre 1 et 5  $m^2/s$ , ce qui constitue une valeur optimale pour assurer une bonne convergence du modèle (Boudreau et al., 1994; Leclerc et al., 1992).

### 6.4.2.5 Autres conditions

Les événements à simuler font référence à des conditions d'écoulement stationnaires. En effet, pour tous les cas devant être reproduits, en dépit du barrage, rien ne venait perturber l'écoulement régulier de la rivière durant l'événement simulé. Un régime stationnaire a donc été considéré. Les simulations ont été effectuées par itérations successives. Une tolérance de  $10^{-9}$  a été fixée. À chaque itération, la norme moyenne a été calculée sur les trois variables solution c'est-à-dire les vitesses en  $x$  et en  $y$  et le niveau d'eau. L'état est considéré convergé lorsque la norme maximale atteint  $10^{-4}$ .

### 6.4.3 Analyse des résultats

Les résultats du modèle hydrodynamique ont été analysés sur la base de la conservation de la matière et de la comparaison des niveaux d'eau et des vitesses calculées et mesurées. La direction des vecteurs de vitesse a aussi été contrôlée.

La conservation de la matière est vérifiée en calculant le débit volumique sur cinq transects de contrôle répartis le long du tronçon modélisé. Sur ces transects, le débit imposé à la frontière amont doit être retrouvé. Pour les quatre événements simulés, les débits calculés démontrent une conservation de matière de l'ordre de 99%, ce qui apparaît tout à fait acceptable. L'erreur ne se traduit pas nécessairement par une perte de matière, des valeurs supérieures au débit imposé étant aussi retrouvées.

La station de mesures de niveaux d'eau de Cartierville est la seule présente sur le tronçon étudié. Étant située environ au centre du domaine, elle permet de vérifier la conformité des niveaux d'eau calculés par le modèle. Pour chacun des événements simulés, le tableau 6.3 rapporte les niveaux relevés à Cartierville et calculés localement. Dans l'ensemble, les mesures de niveaux sont assez fidèlement reproduites, en particulier pour les événements à débit élevé. En effet, l'écart entre mesures et calculs diminue avec l'augmentation du débit. Notons que pour la période allant du 14 au 16 octobre, les débits mesurés étaient caractéristiques d'un état d'étiage dans la rivière des Prairies.

Tableau 6.3: Comparaison des niveaux d'eau mesurés et calculés à la station de Cartierville.

Date (octobre 1992)	Débit (m <sup>3</sup> /s)	Niveau d'eau mesuré (m)	Niveau d'eau calculé (m)	Écart (cm)
15-16	955	17,84	18,03	19
14	987	17,82	17,88	6
19	1015	17,93	17,91	2
22-23	1211	18,15	18,16	1

La comparaison des vitesses mesurées et simulées permet de vérifier la justesse des calculs en bordure des rives. Pour les différentes séries de mesures courantométriques, le tableau 6.4 donne les pourcentages d'écart moyen entre les modules de vitesse mesurés et calculés ainsi que les écarts type correspondants. Peu de conclusions peuvent être tirées de ces résultats, les écarts étant parfois acceptables ou parfois beaucoup trop élevés. Les valeurs calculées n'étant pas systématiquement supérieures ou inférieures aux mesures, aucune tendance générale ne peut être dégagée.

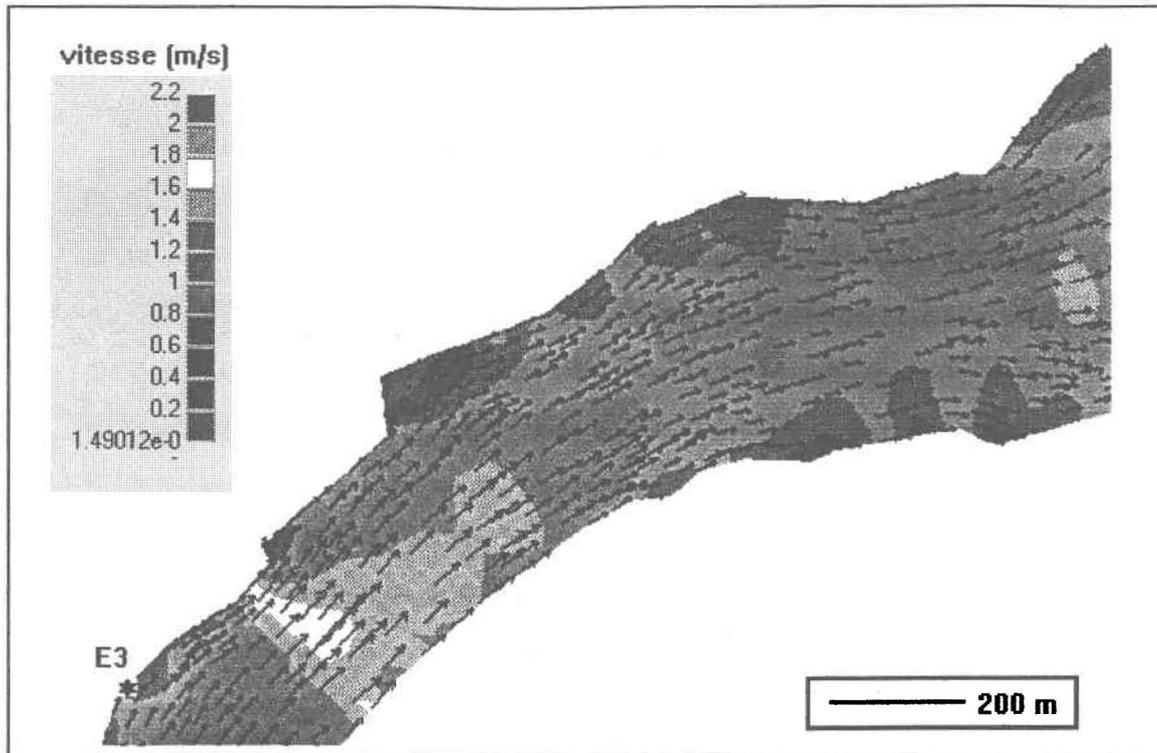
À proximité des berges, l'écoulement est lent et plus difficilement modélisable, certains phénomènes locaux entrant en jeu. De plus, la faiblesse de l'écoulement contribue à diminuer la précision des mesures de vitesse avec dériveurs. Cette comparaison ne permet donc pas de porter un jugement général sur la précision des champs de vitesse calculés. Toutefois, la cohérence entre mesures et calculs peut être vérifiée.

La visualisation des résultats sous forme de vecteurs et d'isosurfaces permet d'en compléter l'analyse. Dans tous les cas simulés, la direction des vecteurs apparaît tout à fait conforme à la physique du problème. Le champ de vitesse respecte très bien la forme du domaine et les particularités des frontières. Il en est de même pour les valeurs de la profondeur et des niveaux d'eau. Les figures 6.4 et 6.5 illustrent respectivement le champ de vitesse et les isosurfaces de profondeur d'eau pour l'événement relatif aux mesures de diffusion autour des émissaires E3 et E6. L'observation du champ de vitesse en aval de l'émissaire E6 permet déjà de percevoir la problématique causée par un panache d'effluent issu de ce point: la vitesse et la trajectoire du courant font en sorte que les masses d'eau contaminées stagnent à la hauteur de la baie du Marigot.

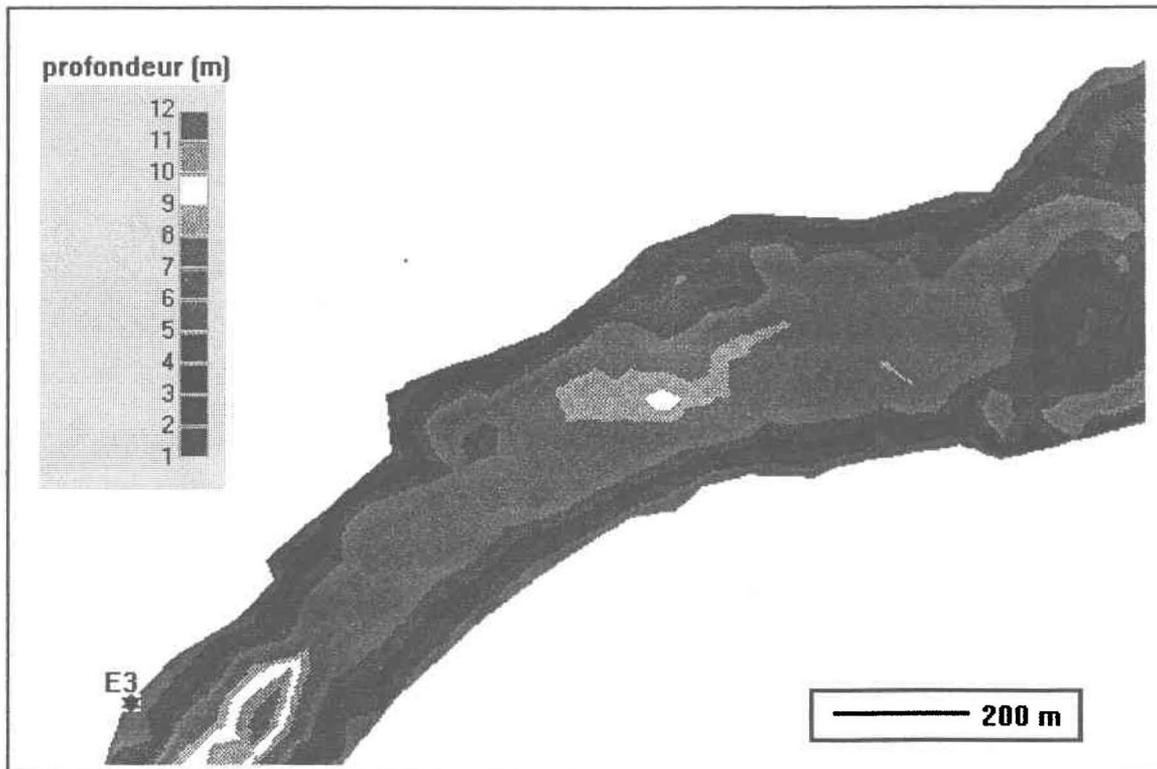
Tableau 6.4: Valeur moyenne des écarts entre les vitesses mesurées et simulées autour des émissaires de débordement.

Émissaire	Débit (m <sup>3</sup> /s)	Écart moyen sur les vitesses (%)	Écart type
E1	955	8	0,06
E3	955	47	0,28
E9	955	47	0,13
E6	987	49	0,15
E7	987	31	0,18
E1	1015	24	0,08
E2	1015	47	0,34

Considérant tous ces aspects, les résultats du modèle hydrodynamique apparaissent suffisamment précis pour servir à la simulation des phénomènes de transport-diffusion sur la rivière des Prairies. Toutefois, les expériences antérieures de simulation avec MEFLU démontrent qu'il est possible d'obtenir des résultats plus précis (typiquement 10% d'écart moyen) lorsque le substrat local intervient dans la paramétrisation du frottement. Il n'est pas exclu que l'imprécision relative du champ de vitesse obtenu ici puisse affecter ultérieurement la qualité des résultats de transport-diffusion.

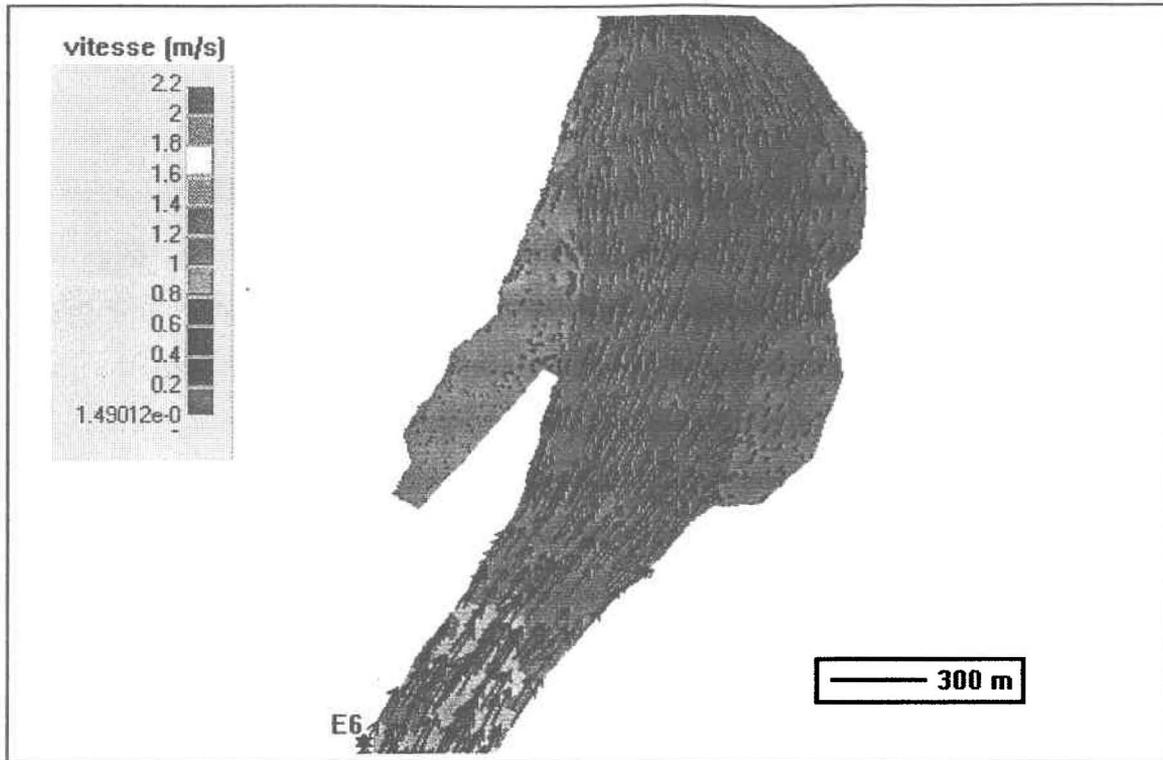


a) champ de vitesse

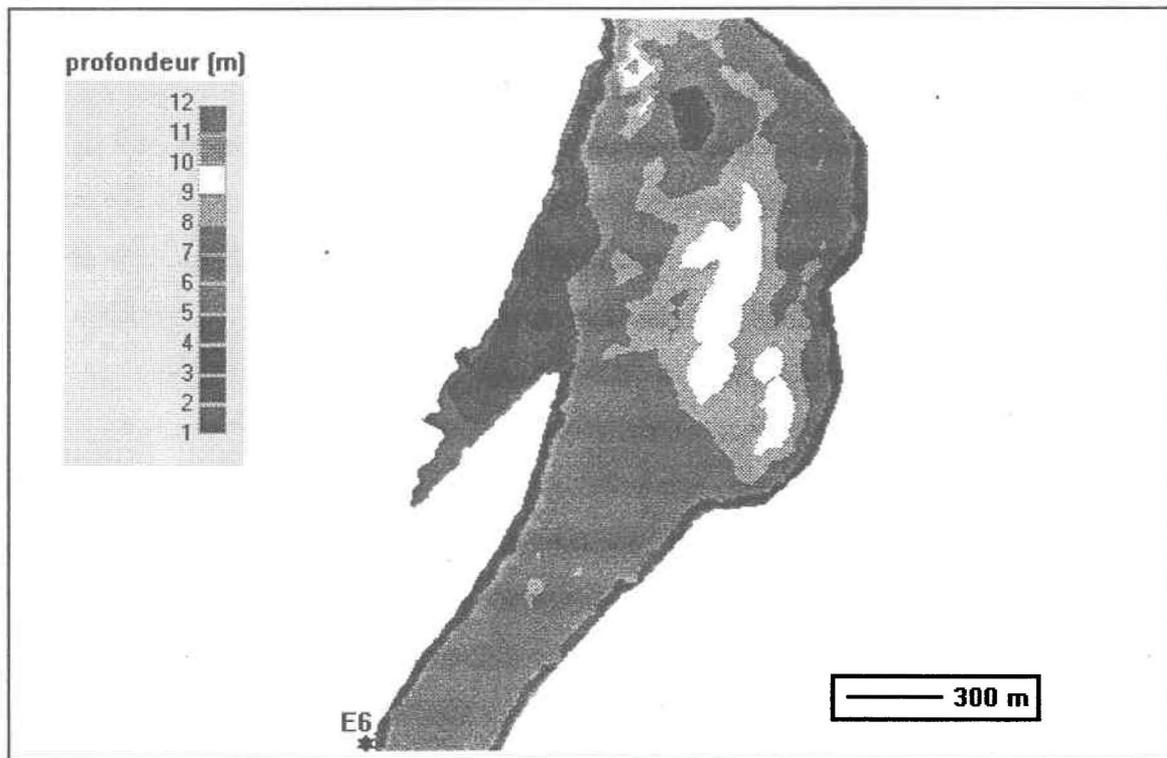


b) profondeur d'eau

Figure 6.4: Résultats de la simulation hydrodynamique sur le tronçon de rivière situé en aval de l'émissaire E3 (débit: 1210 m<sup>3</sup>/s).



a) champ de vitesse



b) profondeur d'eau

Figure 6.5: Résultats de la simulation hydrodynamique sur le tronçon de rivière situé en aval de l'émissaire E6 (débit: 1210 m<sup>3</sup>/s).

## 6.5 Application du modèle de transport-diffusion

### 6.5.1 Description du problème à représenter

L'essai de diffusion à la rhodamine au droit de l'émissaire E3 a été utilisé comme cas-test pour déterminer la meilleure stratégie d'application en situation réelle et éventuellement, valider le modèle de transport-diffusion dans ces conditions. Puisque la rhodamine est une espèce chimique conservative, les fonctions implantées dans le programme dans le but d'analyser les impacts des débordements ne peuvent pas être vérifiées ici. Elles ne pourront l'être qu'au prix d'un effort de terrain considérable qui s'avère hors de portée de notre recherche. Seuls les phénomènes advectif et diffusif ont donc été étudiés.

Les conditions réelles d'injection fournies en entrée du modèle sont les suivantes:

- concentration en rhodamine de la solution injectée : 39 100 mg/l ( $\pm 5\%$ )
- débit d'injection : 2.70 l/min

Une concentration en rhodamine de 0.39 mg/l a été mesurée à la base du point d'injection situé à dix mètres de la rive, révélant ainsi une dilution de 1 pour 100 000. La précision de cette mesure de concentration est toutefois discutable étant donné l'instabilité de la zone d'injection.

Ces conditions d'injection ont été maintenues pendant 60 minutes et ont conduit à l'observation d'un état stationnaire du panache de rhodamine. De façon à recréer cet état, les simulations ont été effectuées uniquement en régime stationnaire. Les résultats obtenus peuvent ainsi être interprétés comme la représentation d'un état quasi-permanent atteint au milieu de la période d'injection du traceur.

Les mesures de concentration en rhodamine sont ponctuelles et ne représentent qu'une portion limitée du domaine de propagation étudié. L'exercice de validation consiste

ici à comparer les résultats de simulation aux mesures. Étant donné l'imprécision intrinsèque aux mesures, l'analyse comparative ne s'appuie pas sur les mêmes critères de précision et la même stratégie que les tests théoriques menés précédemment. On cherche entre autres à déterminer les conditions de simulation qui reproduisent le mieux possible les mesures de traceur tout en respectant le principe de conservation de la matière. Les facteurs influençant la résolution numérique du problème sont analysés un à un dans le but d'observer le comportement du modèle dans une situation donnée.

La figure 6.6 illustre la position des points d'échantillonnage de rhodamine et la valeur moyenne de la concentration d'après les mesures à un mètre et à trois mètres de profondeur. Notons que le mélange complet sur la profondeur n'est observé qu'à partir du troisième transect de mesures, c'est-à-dire à plus de 500 mètres de l'injection.

## 6.5.2 Description des conditions de simulation

### 6.5.2.1 Condition d'injection

La technique employée pour traiter l'injection de traceur peut jouer un rôle significatif sur la solution calculée. Il est nécessaire d'établir une stratégie qui permet de représenter conformément le phénomène local d'apport de matière, surtout en ce qui concerne le mélange initial. Du point de vue numérique, on doit éviter l'imposition d'un choc qui pourrait compromettre la résolution du problème. Deux techniques sont envisageables pour simuler l'injection de rhodamine à l'émissaire E3.

#### *Sollicitation répartie ou condition de flux massique*

La structure du modèle offre la possibilité de traiter un apport de soluté comme une sollicitation répartie de type flux. Il suffit de connaître le débit massique injecté ponctuellement et de lui affecter une certaine surface d'influence. Cette surface est liée à la discrétisation locale du domaine. Pour un élément T3, la surface d'influence correspond au tiers de la surface des éléments connectés au noeud sollicité. Évidemment, la surface

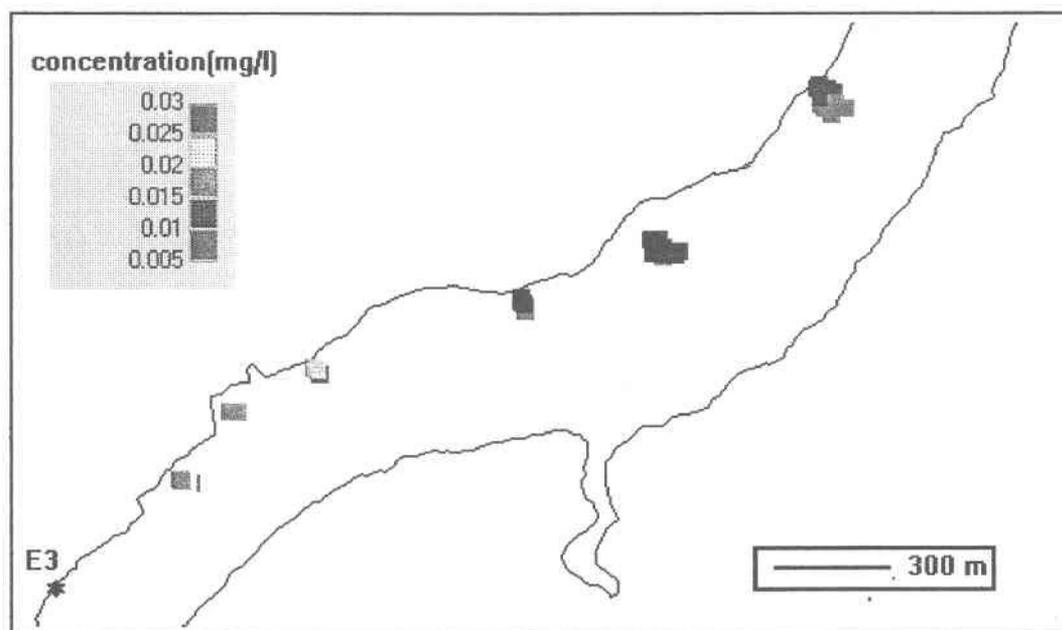


Figure 6.6: Localisation des points d'échantillonnage de rhodamine et concentrations moyennes mesurées.

d'influence sera d'autant plus grande que le maillage sera grossier, d'où l'importance d'avoir un raffinement suffisant autour du point d'injection.

### *Condition limite de Dirichlet*

En plus de la charge en rhodamine injectée, la concentration maintenue au point de rejet est connue. Il est alors possible de recourir à une condition limite de Dirichlet pour représenter l'injection du traceur: La concentration mesurée est tout simplement imposée localement. Toutefois, pour s'assurer de reproduire la charge injectée, il est nécessaire de tenir compte du volume d'eau dans lequel le soluté est déversé. On doit alors estimer la portion de débit de la rivière dans lequel la charge doit se répartir pour que la concentration imposée soit observée:

$$Q_i = \frac{C_e Q_e}{C_i} \quad [6.1]$$

$Q_i$ : débit volumique à l'intérieur duquel le soluté est réparti;  
 $C_i$ : concentration en rhodamine imposée localement;  
 $Q_e$ : débit d'injection;  
 $C_e$ : concentration en rhodamine à l'origine.

Pour les conditions d'injection au point E3, on estime à partir des résultats de la modélisation hydrodynamique à 4.5 m<sup>3</sup>/s le débit de répartition de la solution de traceur injectée. La concentration  $C_i$  doit donc être imposée sur un ensemble de noeuds délimitant un tel débit. On choisit ici de considérer un front d'injection sur lequel le débit cumulé à partir de la berge est équivalent à  $Q_i$ . Ici, le nombre de noeuds constituant le front est lié au degré de discrétisation du maillage.

#### **6.5.2.2 Maillage**

Puisque le modèle de transport-diffusion utilise les résultats aux noeuds du modèle hydrodynamique, il est préférable de conserver la même grille de calcul. L'équation de transport étant discrétisée sur des éléments T3, les éléments T6 du maillage de base sont

simplement subdivisés en quatre. De cette façon, toute l'information nodale caractérisant l'hydrodynamique du milieu est préservée.

L'erreur d'approximation sur un élément T3 étant proportionnelle au carré de la maille, il est possible d'améliorer la précision des calculs en ayant recours à une discrétisation plus fine du domaine. De plus, comme dans certaines zones stratégiques du domaine, un maillage trop grossier peut masquer des phénomènes locaux et conduire à des résultats faussés, il devient intéressant d'augmenter localement le niveau de discrétisation. À cette fin, une fonctionnalité de raffinement du maillage est disponible à l'intérieur du modèle de transport-diffusion. Elle permet de générer un maillage mieux adapté à la physique du problème à représenter.

La technique de raffinement de maillage utilisée est basée sur le calcul de l'erreur élémentaire. Cette erreur est déterminée à partir d'un développement en série de Taylor de la fonction autour d'un point du domaine. En négligeant l'influence des termes de degré supérieur à deux, l'erreur s'exprime en fonction des dérivées secondes. L'algorithme de raffinement consiste tout d'abord à calculer l'erreur sur chacun des éléments du domaine. Les éléments pour lesquels l'erreur dépasse un certain seuil sont subdivisés en quatre par l'ajout d'un noeud médian sur chacun des segments. Afin d'assurer la conformité du nouveau maillage, une bi-section est effectuée sur les éléments voisins qui ne nécessitaient pas de raffinement. Par la suite, les valeurs des degrés de liberté et des propriétés nodales sont interpolées sur les nouveaux noeuds.

À l'aide de la fonctionnalité de raffinement, deux nouveaux maillages ont été générés en vue de l'application du modèle à la rivière des Prairies. Le premier remaillage est obtenu en raffinant le maillage hydrodynamique de base sur un rayon d'une trentaine de mètres autour du point d'injection. La dimension moyenne des mailles pour cette zone passe ainsi de 15 à 5 mètres. Ce premier niveau de raffinement devait permettre de mieux représenter le patron de répartition de la matière autour de l'injection.

Dans la zone immédiatement en aval de l'injection, un raffinement est également nécessaire pour bien capter l'influence du traceur. Les seuils de tolérance de l'erreur sont donc ajustés localement en fonction des objectifs de représentation spatiale du panache simulé. Le nombre de noeuds participant au calcul au sein d'un transect constitue un critère d'évaluation explicite pour le degré de raffinement. On génère ainsi un maillage raffiné sur la zone de propagation du panache d'effluent. Ce second niveau de raffinement qui s'étend sur toute la zone d'intérêt visait donc à augmenter la précision générale des résultats. Le tableau 6.5 résume les caractéristiques des trois maillages avec lesquels les simulations ont été effectuées.

Tableau 6.5: Caractéristiques des maillages employés pour simuler la propagation du traceur en aval de l'émissaire E3.

	<b>Maillage 1: maillage de base</b>	<b>Maillage 2: 1er niveau de raffinement</b>	<b>Maillage 3: 2e niveau de raffinement</b>
Nombre de noeuds	24 604	24 658	27 264
Nombre d'éléments T3	47 000	47 018	52 030
Dimension des mailles autour de l'injection (m)	15	7	3
Dimension moyenne des mailles sur le panache d'effluent (m)	17	16	10
Dimension moyenne des mailles sur l'ensemble du domaine (m)	16	16	15

### 6.5.2.3 Conditions aux limites

#### *Limite amont*

Une condition limite de Cauchy est employée à la frontière amont du domaine modélisé. La concentration en rhodamine étant nécessairement nulle à l'entrée du domaine, le flux massique y est imposé nul.

#### *Limite aval*

Puisque qu'on ne connaît pas à l'avance le flux de rhodamine traversant la frontière aval du domaine, il est préférable d'y poser une condition limite de type flux diffusif ouvert. Le flux diffusif est ainsi transmis sans contrainte à travers la frontière.

Malgré la présence d'un barrage sur la moitié de la section, la condition de flux diffusif ouvert est imposée sur toute la largeur de la frontière. D'ailleurs, cette dernière est suffisamment loin de la zone d'intérêt pour que l'influence de la condition limite soit négligeable.

#### *Berges*

Deux types de conditions aux limites peuvent être appliquées sur les berges de la rivière. Ces conditions consistent en l'imposition d'un flux diffusif nul ou bien ouvert dans la direction normale à la frontière. Le premier cas correspond à une condition limite de Neuman, et vient forcer le flux diffusif à s'orienter parallèlement à la berge.

Au chapitre précédent, il a été démontré que la souplesse d'une condition limite de flux diffusif ouvert pouvait améliorer la solution calculée. Cette constatation étant exclusivement associée à un exemple académique, il est nécessaire de vérifier si la même tendance peut être observée dans un cas d'écoulement en rivière.

#### 6.5.2.4 Coefficients de diffusion

La valeur attribuée aux coefficients de diffusion exerce une influence significative sur la solution obtenue. En raison de l'emploi d'un schéma de discrétisation centré, on doit s'attendre à une performance supérieure du modèle en situation de diffusivité élevée. Cependant, un écoulement rapide comme celui de la rivière des Prairies est plutôt propice à une prédominance des phénomènes advectifs. Ces constatations justifient la réalisation d'une étude détaillée de l'influence de la valeur de la diffusivité sur les résultats de simulation.

Tel que décrit à la section 3.3, la diffusivité du milieu est déterminée par la simulation hydrodynamique. Sur la base de la valeur des contraintes turbulentes de Reynolds dans le plan horizontal et de l'intensité du mélange dans la couche limite verticale liée aux contraintes de frottement au fond, le modèle hydrodynamique évalue la valeur de la diffusivité de fond et de la diffusivité turbulente horizontale. Cette dernière est toutefois sujette à une certaine calibration: la constante de la loi de longueur de mélange ( $\beta$ ) doit être ajustée au problème considéré. A priori, la diffusivité turbulente est calibrée de façon à respecter l'intervalle de valeurs prescrites pour le rapport  $\frac{D_n}{u_*H}$ , soit de 0.15 à 0.75. Cette procédure a été validée au Lac St-Pierre lors d'un exercice de validation d'un modèle lagrangien également réalisé à l'aide d'un essai de diffusion d'un traceur (Leclerc et al., 1992).

#### 6.5.2.5 Résolution numérique

Le problème de propagation de rhodamine à partir de l'émissaire E3 a fait appel à une résolution stationnaire. Étant donné l'emploi de la méthode itérative GMRES pour la résolution du système algébrique, les conditions suivantes devaient être spécifiées:

- le nombre de préconditionnements;
- le type de matrice de préconditionnement;
- le nombre de redémarrages de la méthode;
- le nombre d'itérations (ou nombre de vecteurs).

Une matrice de pas de temps locaux (Secretan, 1991) a été employée pour le préconditionnement du système. Le préconditionnement est effectué à chaque redémarrage, ceci devant faciliter la convergence. Comme le nombre d'itérations à effectuer détermine l'espace mémoire requis pour la résolution du problème, il a été limité à 20 ou à 30. Le nombre de redémarrage a quant à lui été fixé en moyenne à 40. Cette valeur pouvait toutefois être augmentée lorsque l'état convergé était plus difficile à atteindre.

### 6.5.3 Analyse du comportement du modèle

#### 6.5.3.1 Influence de la condition d'injection

En vue d'établir la stratégie d'injection la mieux adaptée au problème à représenter, on compare les résultats obtenus pour une injection traitée en tant que sollicitation répartie (flux massique) et comme une condition limite de Dirichlet. Le cas étudié est le suivant:

- maillage 2 (1er niveau de raffinement du maillage de base)
- conditions limites aux berges: flux diffusif ouvert
- coefficient de calibration de la diffusivité horizontale:  $\beta=0.06$
- 60 redémarrages et 30 itérations

La résolution du problème avec les deux types de conditions d'injection révèle une différence appréciable au niveau de la convergence de la solution: la solution converge nettement plus vite lorsque la concentration est imposée. Après 40 redémarrages de la méthode GMRES, la simulation avec condition de Dirichlet présente une norme de l'ordre de  $10^{-6}$  comparativement à  $10^{-3}$  pour la simulation avec sollicitation répartie. Dans le premier cas, la concentration est connue au milieu de la zone d'injection, le choc numérique est donc faible et la solution se stabilise rapidement par propagation de la concentration imposée. Par contre avec la sollicitation massique concentrée au point d'injection, le noeud affecté recoit d'un seul coup un apport considérable et le modèle doit graduellement s'ajuster pour évaluer des concentrations qui permettent une répartition équitable de la matière.

La figure 6.7 présente la variation longitudinale de la concentration pour les deux modes d'injection. Ces concentrations qui correspondent à la valeur calculée au centre du panache sont comparées aux valeurs maximales (moyennes verticales) mesurées sur chaque transect d'échantillonnage. Bien entendu, la condition de Dirichlet permet de reproduire exactement la concentration mesurée à l'injection (imposition de la valeur mesurée comme condition limite au noeud d'injection). Toutefois, la diminution de la concentration est trop rapide et les valeurs sont sous-estimées ailleurs. À l'opposé, l'emploi d'une sollicitation répartie surestime la concentration au point d'injection mais conduit à des valeurs qui se comparent bien aux mesures en aval. Les résultats obtenus le long de deux transects de mesures sont présentés à la figure 6.8. Les histogrammes confirment la sous-estimation des concentrations découlant de l'utilisation d'une condition de Dirichlet.

Pour qu'une condition limite de Dirichlet à l'injection permette d'obtenir des valeurs de concentration comparables aux mesures, il serait nécessaire de mieux définir la largeur du front d'injection par rapport au débit affecté ou d'imposer une concentration supérieure. Or, en ajustant la condition d'injection de la sorte, on peut s'éloigner de la réalité physique que l'on cherche à représenter et la logique de la répartition de la matière injectée peut devenir arbitraire. C'est pourquoi pour la suite des simulations, nous avons choisi de travailler avec une sollicitation massique. En dépit d'une convergence moins rapide et d'une apparente perte de précision autour du point d'injection, l'emploi d'une telle sollicitation se rapproche beaucoup plus du phénomène d'injection ponctuelle de contaminant. De plus, pour la majorité des cas de rejet urbains ou industriels susceptibles d'être rencontrés dans la pratique, la concentration à la base du point d'injection n'est pas connue. L'application d'une condition de Dirichlet est alors difficilement envisageable en pratique.

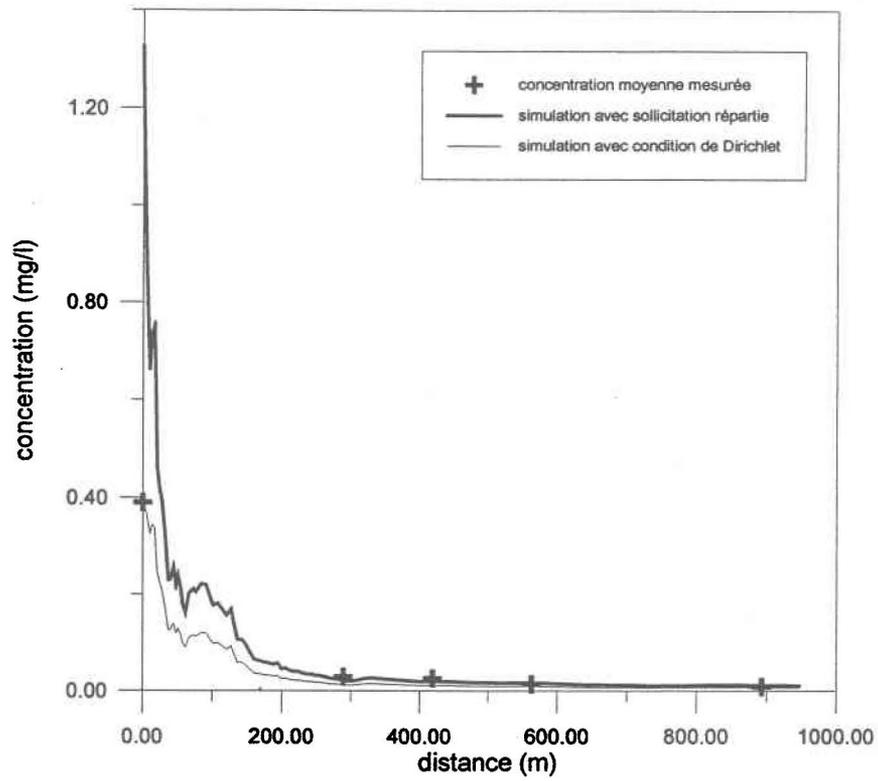
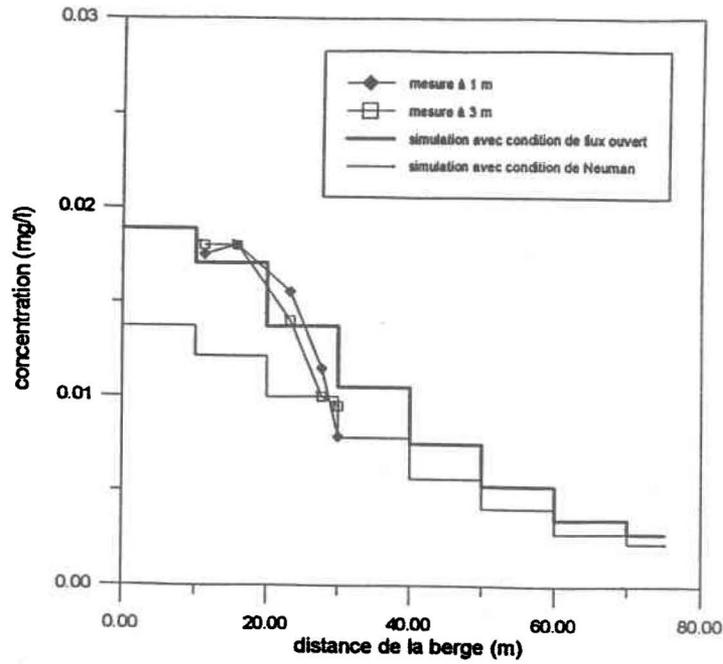
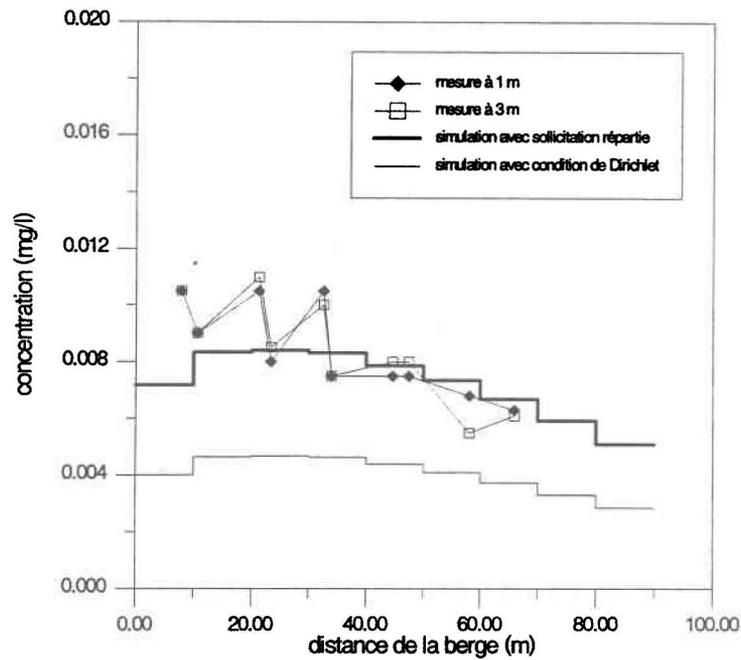


Figure 6.7: Influence du mode d'injection sur la variation longitudinale de la concentration.



a) 560 mètres en aval du point d'injection



b) 1500 mètres en aval du point d'injection

Figure 6.8: Influence du mode d'injection sur la valeur des concentrations calculées.

### 6.5.3.2 Influence du maillage

Afin d'observer l'influence du raffinement local du maillage sur la résolution du problème, la propagation du traceur est simulée avec les trois maillages de référence (tableau 6.5). Les conditions suivantes sont posées:

- condition d'injection: sollicitation massique
- coefficient de calibration de la diffusivité:  $\beta=0.02$
- conditions limites aux berges: flux diffusif ouvert
- 60 redémarrages de la méthode avec 30 itérations

L'influence de la discrétisation sur la convergence de la solution a déjà été démontrée avec les tests analytiques. On doit ainsi s'attendre à observer une convergence plus rapide et plus satisfaisante avec un maillage de plus en plus raffiné. La résolution du problème vient aussi indiquer que le maillage hydrodynamique initial n'était pas suffisamment dense pour converger vers une solution acceptable dans les conditions établies. En effet, la norme finale obtenue avec ce maillage était de l'ordre de  $10^{-2}$  et la solution ne pouvait être considérée comme convergée. La faiblesse du taux de convergence associé à ce maillage établi pour le calcul hydrodynamique confirme la nécessité de l'adapter au problème visé.

Les deux autres maillages assurent une convergence adéquate. Bien que la norme finale associée au maillage le plus raffiné soit la meilleure (0.0004 contre 0.0009), la différence n'est pas suffisante à ce niveau pour privilégier son utilisation. Étant donné l'augmentation du temps de calcul qu'il implique, son utilisation dépend plutôt de la puissance de calcul disponible et du temps d'attente acceptable.

La discrétisation ne semble pas démontrer d'influence notable sur la conservation de la matière. En effet, pour les deux maillages raffinés, on évalue sur des sections en aval de l'injection un pourcentage de variation du débit massique du soluté inférieur à 10%.

La variation longitudinale de la concentration calculée au centre du panache est présentée pour ces deux maillages à la figure 6.9. Comme le démontre cette figure, une différence appréciable entre les deux maillages raffinés est observée au niveau de l'ordre de grandeur des concentrations calculées à proximité de l'injection. On constate que le deuxième niveau de raffinement entraîne une diminution importante des concentrations. Étant donné l'équivalence des charges injectées, seule la diffusivité peut expliquer le phénomène: la valeur de la diffusivité nécessaire à l'obtention d'une solution adéquate est liée au degré de discrétisation. Ici, la diffusivité employée s'avère trop élevée pour le deuxième niveau de raffinement.

Les résultats obtenus démontrent qu'un raffinement du maillage hydrodynamique de base est nécessaire pour l'application envisagée. De plus, les deux niveaux de raffinement étudiés peuvent conduire à des résultats satisfaisants, du moins, à l'aval de la zone influencée par l'injection, à condition d'y adapter les conditions de simulation.

### **6.5.3.3 Influence de la condition limite aux berges**

Afin de déterminer laquelle des conditions limites de flux diffusif ouvert et de Neuman est la mieux adaptée au problème à résoudre, on compare les résultats de simulations effectuées avec l'une et l'autre. Les résultats comparés font référence aux conditions de simulation suivantes:

- condition d'injection: sollicitation répartie
- maillage 2
- coefficient de calibration de la diffusivité:  $\beta = 0.05$
- 60 redémarrages et 20 itérations GMRES

Aucune différence notable n'est observée entre les deux conditions limites pour ce qui a trait à la convergence de la méthode de résolution et à la conservation de la matière. Dans les deux cas simulés, la solution converge à la même vitesse et les bilans de matière démontrent des pertes massiques identiques.

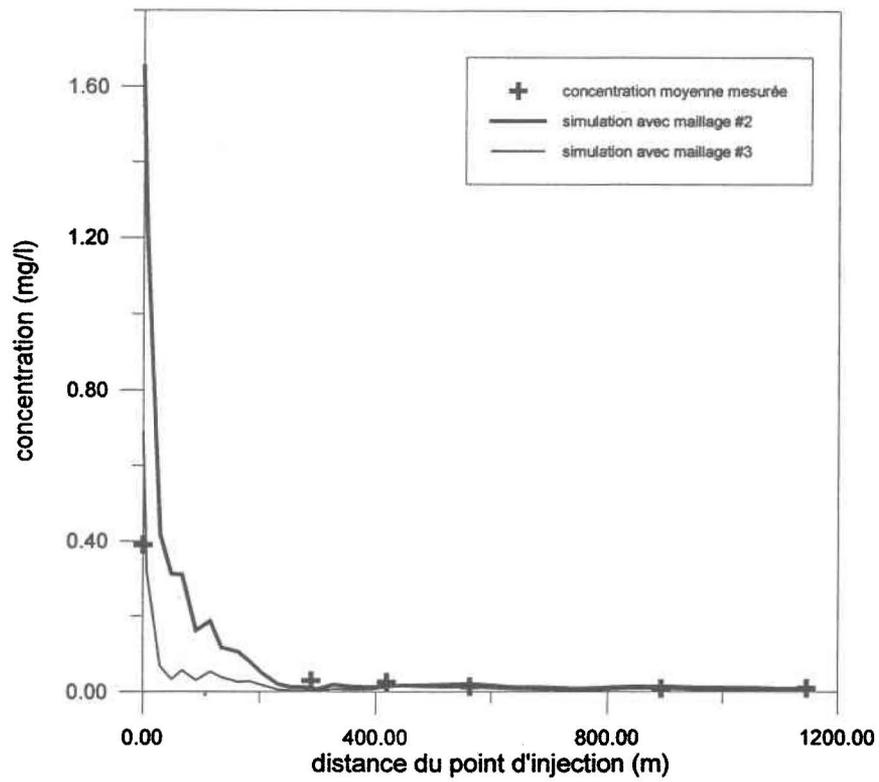


Figure 6.9: Influence du niveau de raffinement du maillage sur la variation longitudinale de la concentration.

Une légère influence de la condition limite sur la variation transversale de la concentration est observée en certains points. Alors que la condition limite de Neuman assure une décroissance de la concentration à partir de la berge, la condition limite de flux ouvert agit différemment. Puisqu'aucune contrainte n'est imposée le long de la berge, elle peut entraîner une diminution de la concentration au voisinage immédiat de la frontière. Cela s'explique par la présence d'un flux diffusif non nul. Ainsi, la concentration maximale peut être déplacée vers la droite. Cette influence n'est toutefois pas toujours perceptible comme en témoigne la figure 6.10. On constate sur cette même figure que le profil transversal obtenu avec une condition limite de Neuman présente une décroissance trop prononcée.

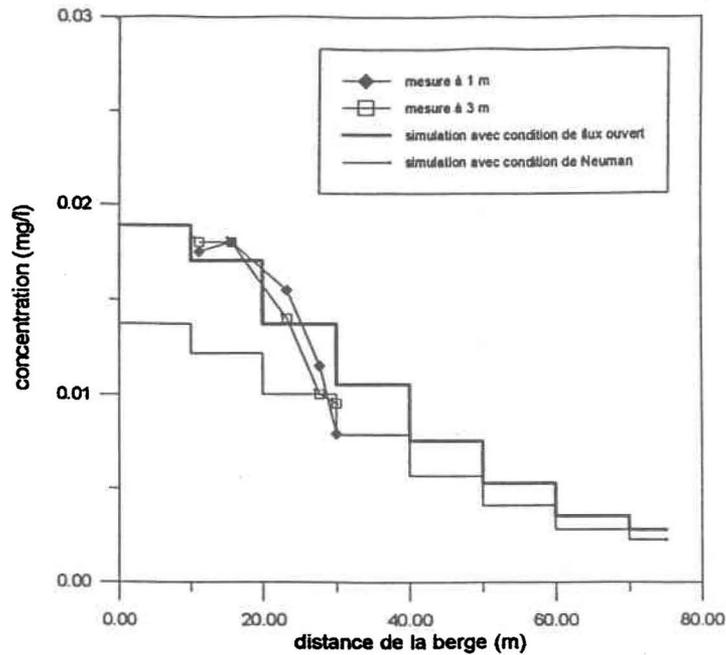
Les points de mesure de concentration étant pour la plupart situés à plus de 15 mètres de la berge, il n'est pas possible de déterminer quelle condition limite représente le mieux le phénomène local. Toutefois, la condition de flux diffusif ouvert reproduit plus justement le niveau des concentrations mesurées.

#### 6.5.3.4 Influence de la diffusivité

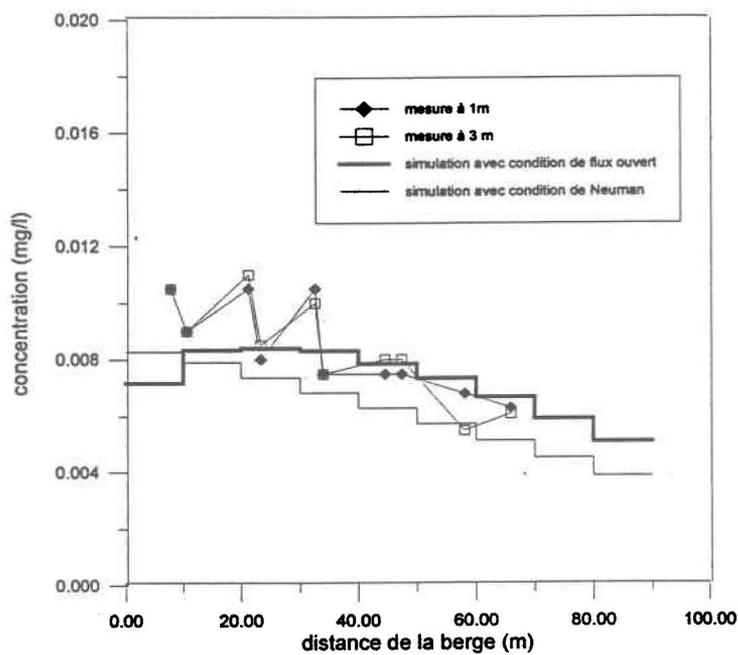
Les tests effectués en vue d'optimiser la valeur des coefficients de diffusion sont réalisés en parallèle avec les deux maillages raffinés (maillage 2 et 3). Les conditions de simulation suivantes sont appliquées:

- condition d'injection: sollicitation répartie (flux massique)
- conditions limites aux berges: flux diffusif ouvert

Afin de respecter l'intervalle de valeurs suggérées pour le rapport  $\frac{D_n}{u_*H}$ , le coefficient de calibration  $\beta$  doit varier de 0.002 à 0.01. Pour de telles valeurs de  $\beta$ , les composantes du tenseur de dispersion sont de l'ordre de  $10^{-2}$  m<sup>2</sup>/s. Toutefois, les simulations effectuées indiquent que le modèle ne fonctionne pas adéquatement dans des conditions de diffusivité aussi faibles, et cela, pour les deux maillages employés. En effet, avec ce niveau de diffusion, le problème converge difficilement et la solution obtenue comporte de nombreuses valeurs de concentration négatives non négligeables.



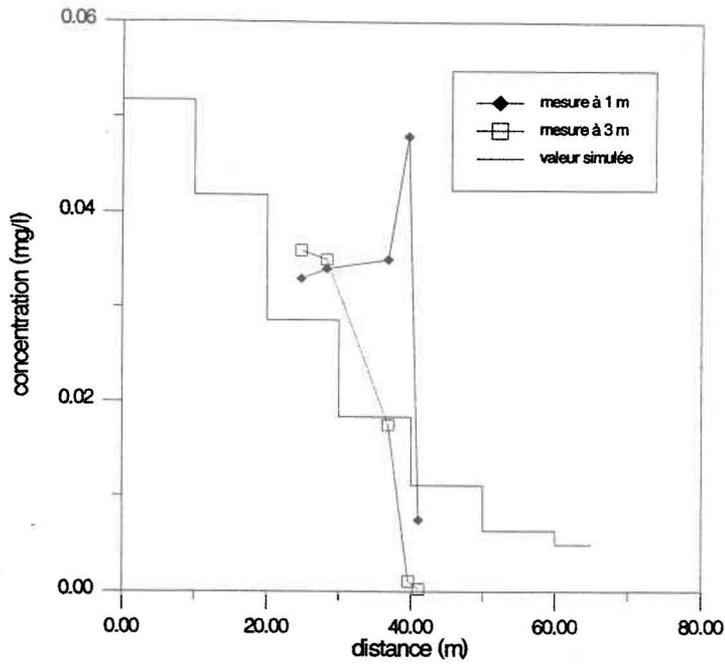
a) 560 mètres en aval du point d'injection



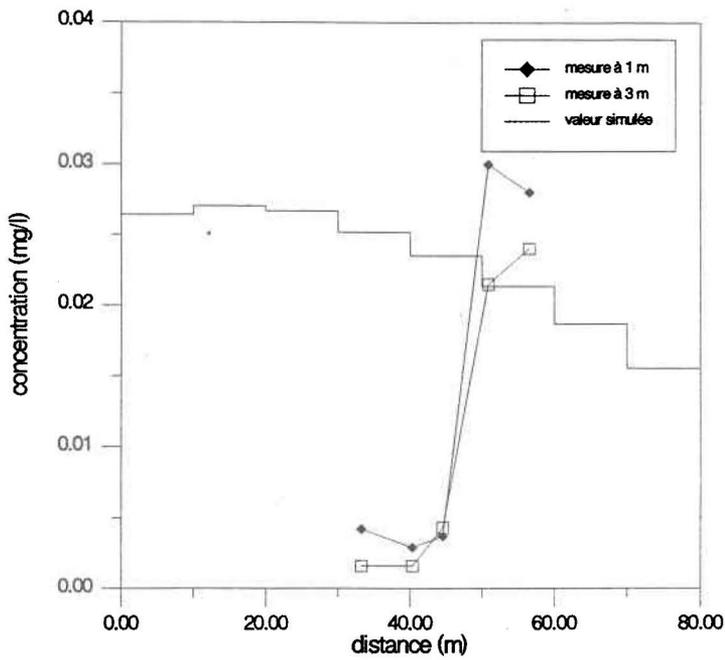
b) 1500 mètres en aval du point d'injection

Figure 6.10: Influence de la condition limite à la berge sur la valeur des concentrations calculées.

Des simulations ont été effectuées avec des valeurs du coefficient de calibration allant jusqu'à 0.1. Les composantes du tenseur de dispersion augmentent alors d'un ordre de grandeur. Les résultats démontrent que la valeur optimale de  $\beta$  dépend du degré de discrétisation. Avec le deuxième niveau de raffinement, la solution obtenue pour  $\beta=0.02$  est satisfaisante tandis qu'avec le premier, elle n'est pas suffisamment convergée: le coefficient  $\beta$  doit être augmenté jusqu'à une valeur de 0.06 pour obtenir une solution convergée avec celui-ci. Les figures 6.11 a à f, présentent les résultats obtenus avec le deuxième niveau de raffinement. On remarque que les histogrammes tracés à partir des concentrations calculées englobent assez bien les valeurs mesurées, à l'exception peut-être des transects pour lesquels le mélange vertical complet n'est pas atteint. Comme le modèle considère un mélange vertical instantané, les mesures rapportées aux figures 6.11 a et b peuvent difficilement être reproduites, et ce, peu importent les conditions de simulation.

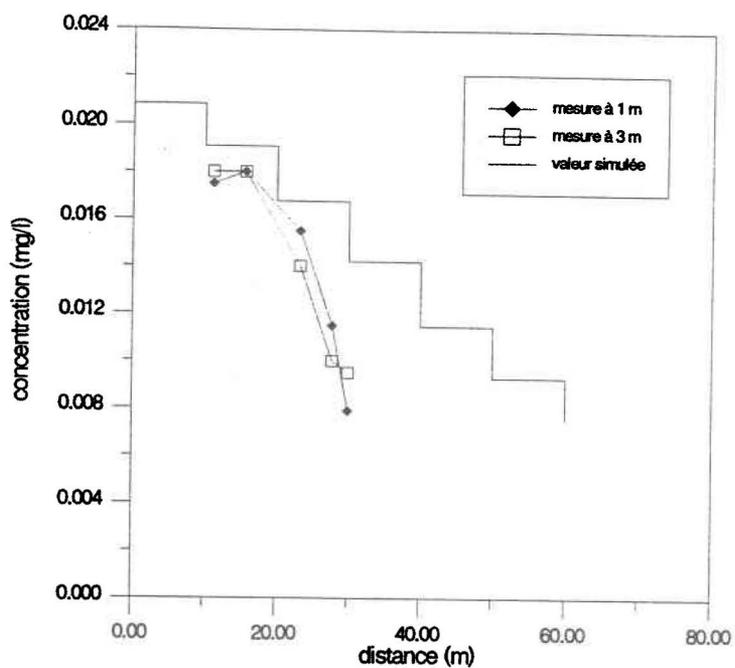


a) concentration à 300 mètres du point d'injection E3

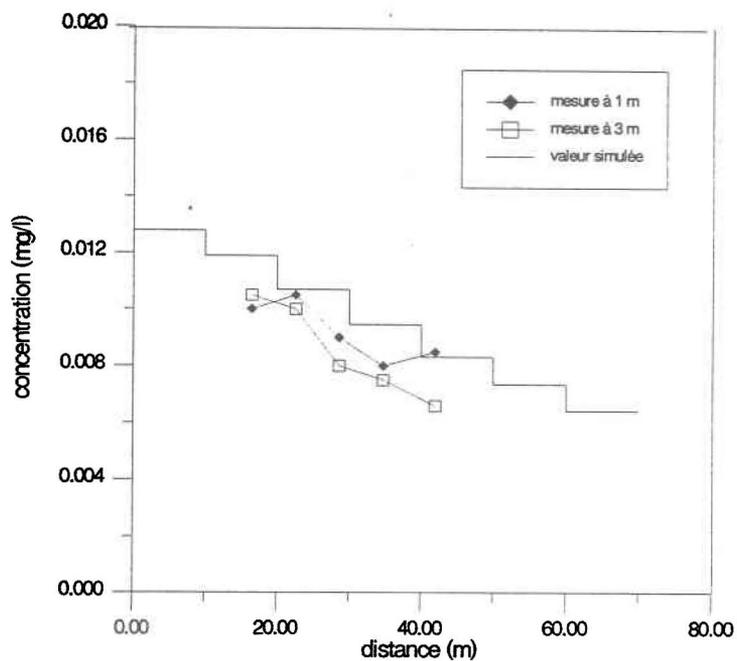


b) concentration à 420 mètres du point d'injection E3

Figure 6.11: Influence de la diffusivité sur les résultats de simulation avec le maillage 3 et  $\beta=0.02$ .

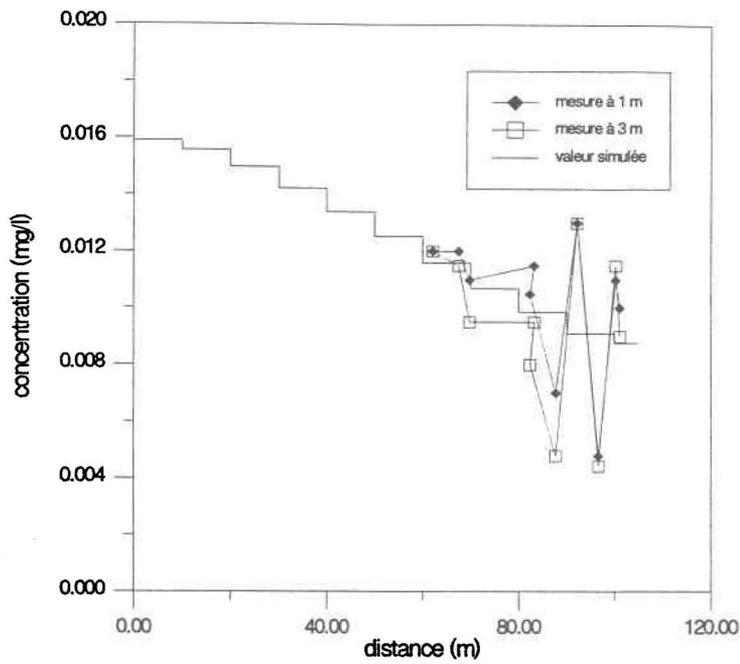


c) concentration à 560 mètres du point d'injection E3

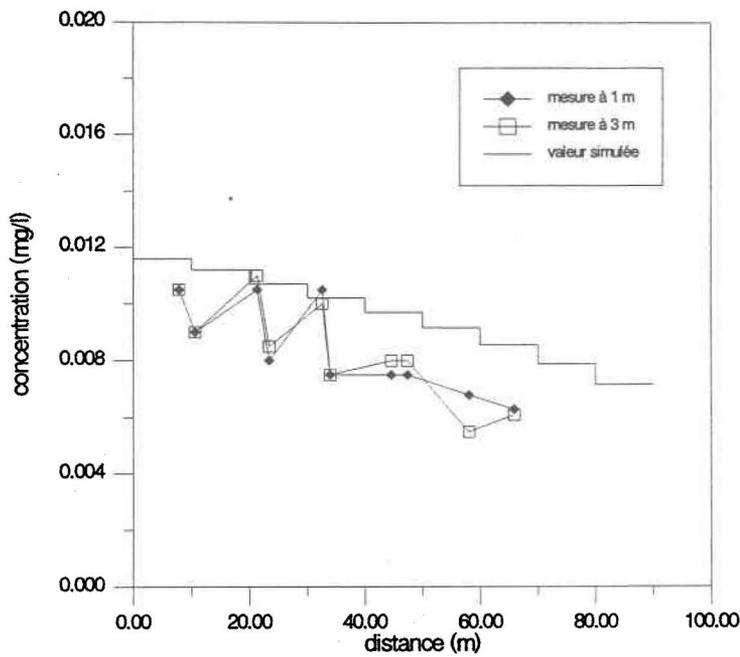


d) concentration à 900 mètres du point d'injection E3

Figure 6.11(suite)



e) concentration à 1150 mètres du point d'injection E3



f) concentration à 1500 mètres du point d'injection E3

Figure 6.11(suite)

En général, les ordres de grandeur des concentrations calculées sont bons et leur variation latérale et longitudinale est conforme.

Des valeurs de  $\beta$  supérieures à 0.01 font en sorte que la diffusivité turbulente dépasse les valeurs théoriques, le rapport moyen  $\frac{D_n}{u_*H}$  s'élevant à plus de 1.8. De telles valeurs sont toutefois nécessaires en vue de trouver une solution satisfaisante au problème de la rivière des Prairies. L'ajout d'une diffusivité artificielle apparaît inévitable en vue d'éliminer ces instabilités qui sont probablement imputables à l'utilisation d'un schéma de discrétisation centré. On remarque cependant que le raffinement du maillage permet de limiter la diffusivité artificielle à ajouter pour stabiliser la solution. Ainsi, il serait sans doute possible de raffiner le maillage à un degré tel que les valeurs de la diffusion turbulente puissent être ramenées aux valeurs théoriques. Par contre, l'effort numérique nécessaire à la résolution du problème en serait considérablement augmenté. L'utilisation d'une diffusivité artificielle constitue donc un compromis intéressant.

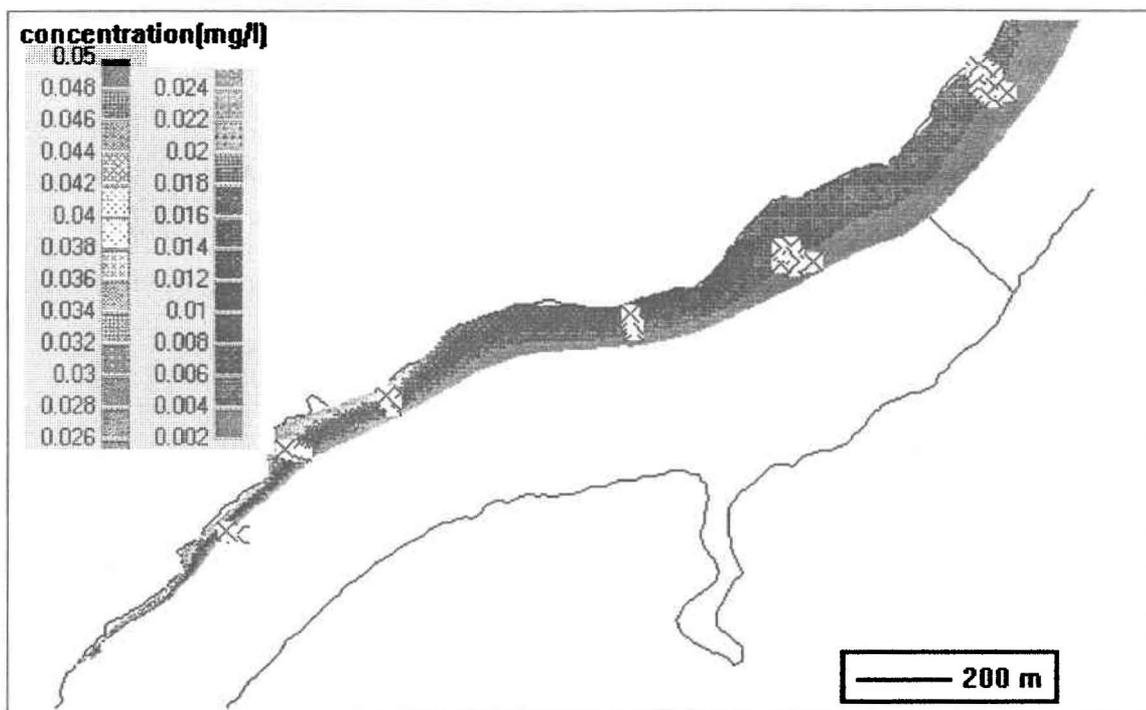
#### 6.5.4 Discussion des résultats

À la section précédente, les différents facteurs susceptibles d'influencer la résolution du problème de propagation du traceur dans la rivière des Prairies ont été étudiés. En plus d'analyser le comportement du modèle dans la situation donnée, les conditions de simulation permettant de représenter le plus fidèlement le problème ont été identifiées.

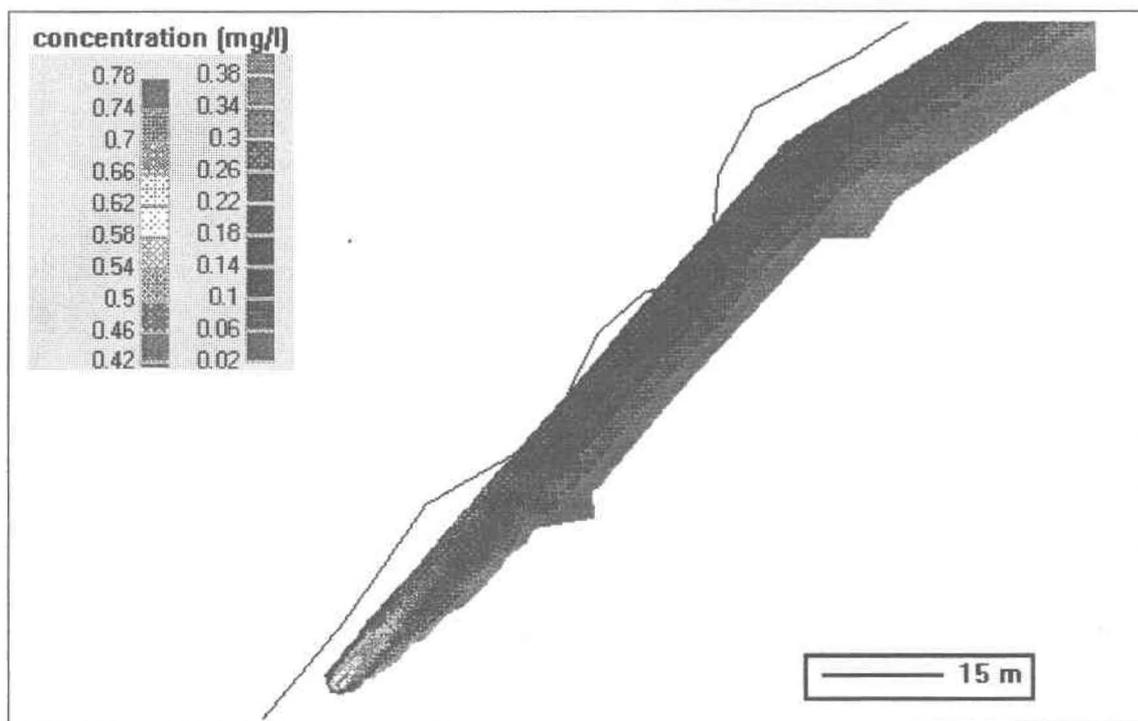
Les aspects déterminants dégagés de cette analyse ont trait à la discrétisation du domaine et à la diffusivité. Il apparaît clair que le maillage employé doit être suffisamment raffiné pour permettre de saisir la dispersion de la matière autour du point d'injection et sa propagation en aval. De plus, afin de ramener la diffusivité à un niveau représentatif de la réalité physique, l'utilisation d'un maillage très fin est également nécessaire.

Il y a lieu de mentionner qu'un gain appréciable sur les résultats de transport-diffusion aurait pu être apporté en améliorant le champ de vitesse modélisé, notamment par l'utilisation d'un coefficient de Manning correspondant à la nature du substrat local. Comme ce paramètre présente une influence considérable sur l'écoulement, la prise en compte au sein du modèle numérique de terrain de coefficients de frottement locaux imposés aux noeuds du maillage aurait sans doute permis d'augmenter la précision des résultats.

Les conditions de simulation les plus favorables à la reproduction du test de diffusion consistent en l'utilisation du deuxième niveau de raffinement du maillage de base, une diffusivité globale de l'ordre de  $10^{-1}$  m<sup>2</sup>/s et au traitement de l'injection par une sollicitation répartie. Tel que rapporté, les conditions limites aux berges n'exercent pas d'influence majeure sur la précision de la solution. Après 25 itérations et 40 redémarrages de la méthode de résolution, on obtient un état suffisamment convergé et une solution satisfaisante du point de vue de la conservation de la matière et des concentrations calculées. La figure 6.12 illustre le panache de rhodamine simulé dans ces conditions. Les isosurfaces de concentration calculée sont présentées à proximité du point d'injection du traceur (a) et sur tout le tronçon sur lequel sont situés les points de mesure (b). Tel qu'illustré aux figures 6.11, la comparaison avec les valeurs mesurées est satisfaisante. Ces résultats permettent de conclure que le modèle développé est capable de reproduire adéquatement les phénomènes de transport advectif et diffusif d'un traceur au sein d'un écoulement fluvial.

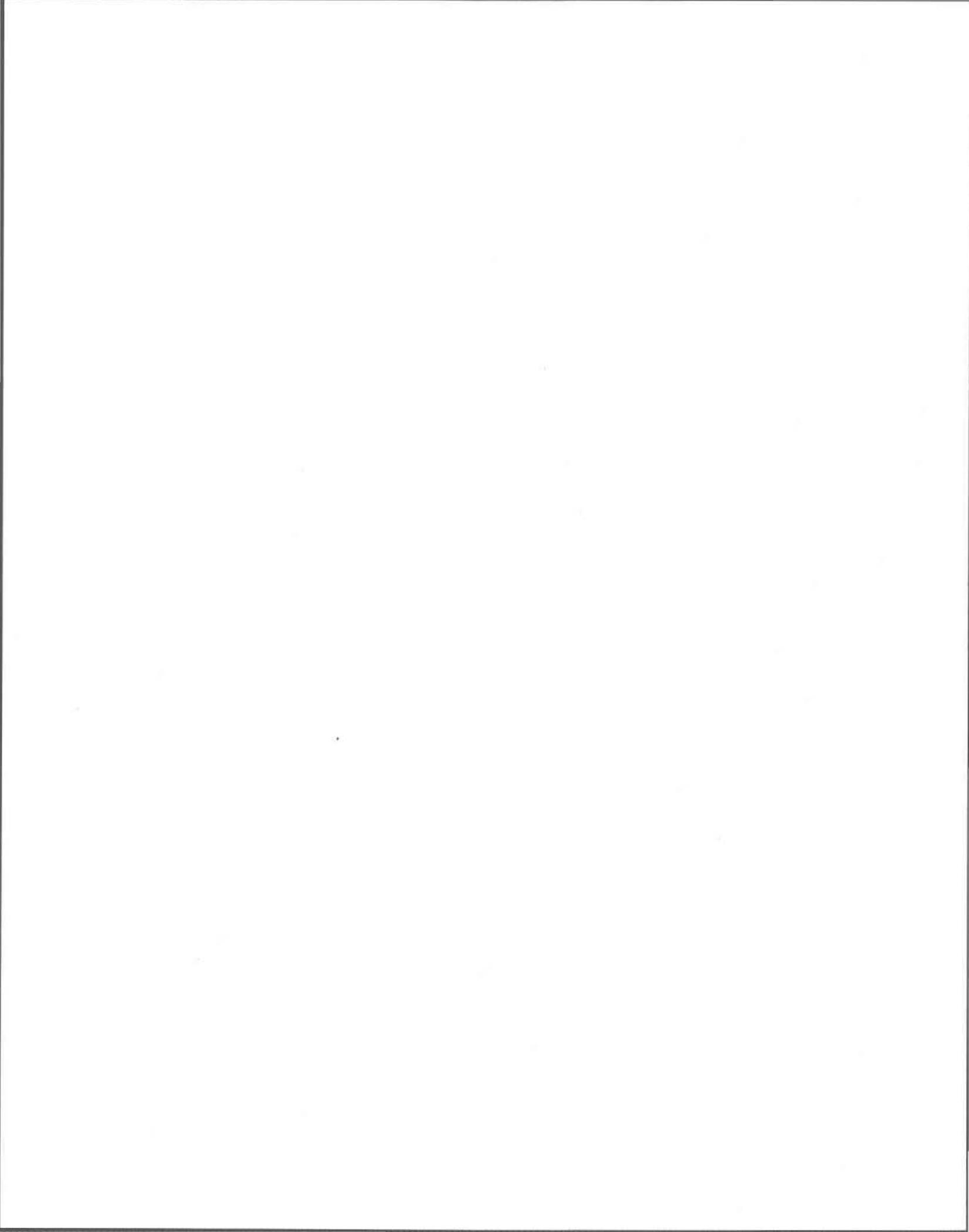


a) vue d'ensemble du panache avec positionnement des points de mesure



b) agrandissement autour du point d'injection

Figure 6.12: Panache simulé pour l'injection de rhodamine à l'émissaire E3 en conditions optimales de simulation.



## 7 CONCLUSION

---

Conformément à l'objectif fixé au départ, un modèle de transport-diffusion adapté à la problématique des rejets urbains de temps de pluie a été développé. Puisqu'il permet de simuler la répartition dans l'espace et dans le temps des contaminants mis en jeu, le modèle constitue un outil mathématique et numérique pour l'analyse des impacts liés à ce type de rejets.

Basé sur l'approche eulérienne de résolution de l'équation scalaire de transport-diffusion, le modèle élaboré présente certaines particularités au niveau du traitement des termes de puits et sources de matière. De façon à évaluer les impacts sur la qualité du milieu d'épisodes de débordement, le modèle prend en considération différents facteurs de pollution qu'il traite en tant que variables d'état. Dans l'état actuel du modèle, les facteurs de pollution pouvant être pris en compte sont les suivants:

- les matières solides en suspension
- l'oxygène dissous
- la DBO
- les coliformes fécaux
- les métaux lourds
- les toxiques organiques

L'ajout de nouvelles variables d'état est toutefois envisageable, par exemple l'ammoniac et les nutriments azotés pour lesquels des critères de qualité du milieu sont souvent fixés.

En raison des interactions qui peuvent rendre ces facteurs de pollution dépendant les uns des autres, une stratégie de résolution à variables d'état multiples a été conçue. Par l'application de tests de contrôle standards, la conformité de l'élément développé a pu être

vérifiée. De plus, pour des problèmes simplifiés ainsi qu'un cas de transport en rivière, la précision du modèle a été étudiée et s'est révélée satisfaisante.

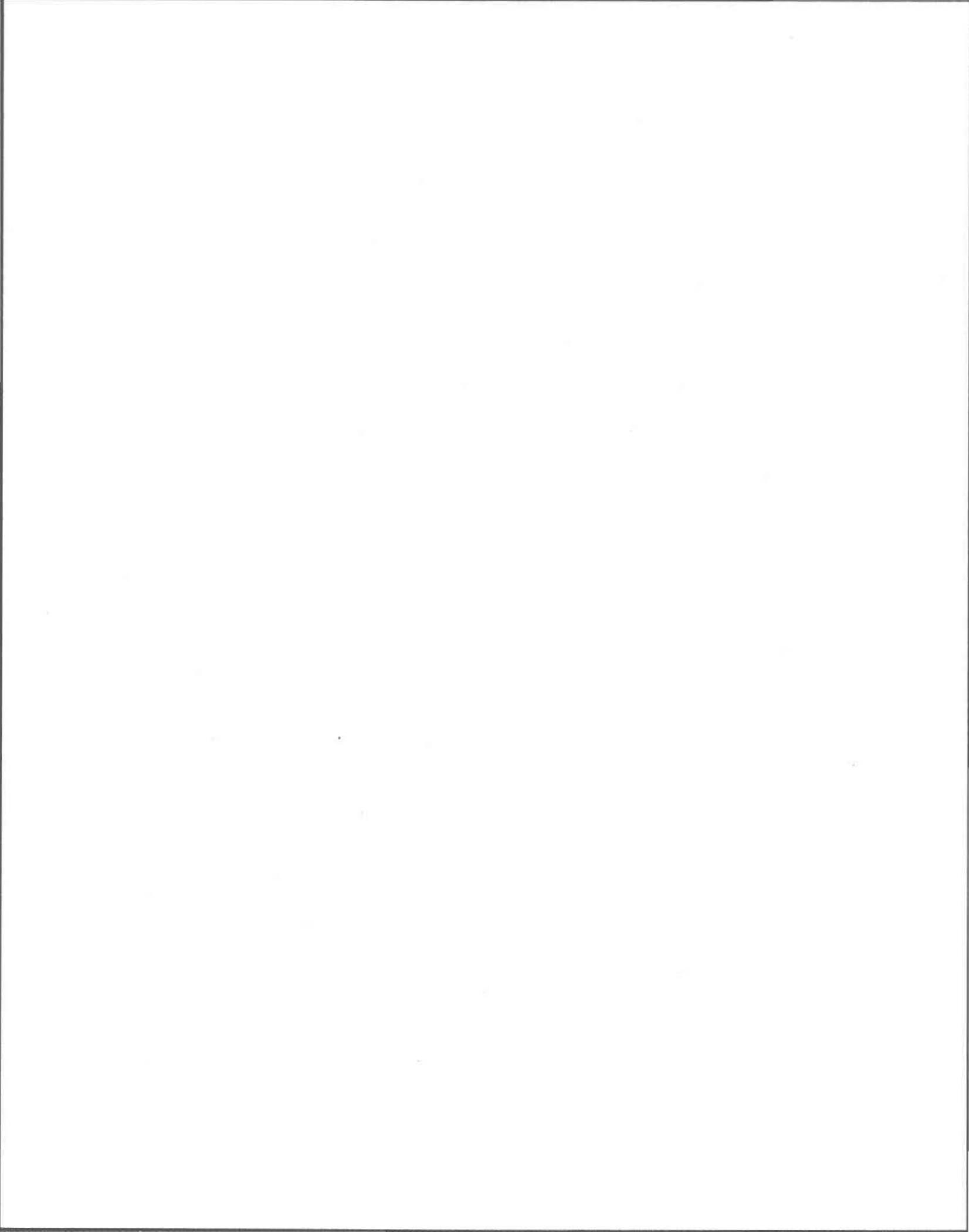
L'application du modèle à la rivière des Prairies a permis d'illustrer la démarche qui précède la simulation numérique des phénomènes de transport, c'est-à-dire la construction d'un maillage et la simulation de l'hydrodynamique. La convivialité et l'efficacité du Modeleur, de MEFLU et des différents programmes utilitaires disponibles ont fait en sorte que partant de simples cotes bathymétriques et de mesures de terrain, il a été possible d'employer le modèle de transport-diffusion sur un domaine aussi complexe que la rivière des Prairies. Notons toutefois que si l'étude de la propagation des rejets de temps de pluie doit être poussée plus loin, une analyse hydrodynamique plus approfondie est à envisager. Les substrats de la rivière des Prairies devront alors être caractérisés. Le niveau de précision obtenu avec des coefficients de frottement homogènes est un facteur d'incertitude dont la portée n'a pu être vérifiée dans le cadre de cette recherche.

Bien que dans l'ensemble le modèle de transport-diffusion produise de bons résultats, il a été démontré qu'il demeure plutôt sensible aux problèmes où l'advection est dominante. Même si cette faiblesse peut généralement être contournée par une adaptation des conditions de simulation, certaines modifications pourraient être envisagées en vue d'augmenter sa robustesse. Pensons entre autres au développement d'un schéma de discrétisation décentré ou à une approche de résolution par la méthode des caractéristiques.

Les différentes étapes de validation du modèle ayant été franchies avec succès, il est maintenant possible d'envisager son application à des situations réelles de débordement de réseaux d'assainissement. Bien que l'implantation des termes puits et sources ait été dûment validée analytiquement, il semble toutefois préférable de s'assurer qu'ils représentent adéquatement les phénomènes naturels survenant lorsque la surcharge d'un réseau d'égout est rejetée dans un cours d'eau. Pour ce faire, les résultats de simulation doivent être comparés à des valeurs mesurées. Étant donné la complexité que représente la réalisation

d'une campagne de mesures en rivière, la validation par comparaison à des mesures de laboratoire constitue une alternative intéressante.

En vue de faciliter l'application du modèle à la problématique des rejets de temps de pluie, le développement de certaines fonctionnalités doit être envisagé. En raison du caractère fortement transitoire des débordements, le modèle devra traiter directement les hydrogrammes et pollutogrammes décrivant l'événement à simuler. De plus, l'implantation du modèle à l'intérieur d'une interface graphique conviviale est souhaitable. Une telle interface pourrait faciliter la gestion des entrées et sorties et permettre de visualiser directement les résultats. Mis à disposition de gestionnaires de l'environnement, le logiciel résultant pourrait être employé à des fins telles que l'établissement de règles de contrôle des rejets de temps de pluie ou le dimensionnement des ouvrages d'assainissement.



## 8 BIBLIOGRAPHIE

---

ASSEAU inc.(1993). *Étude intégrée du fonctionnement des intercepteurs Centre et Marigot*. Diffusion des eaux de débordements de réseaux unitaires à la rivière des Prairies, Rapport final, Addenda étape 1, phase IIa, 92 p.

Auer, M. T. and S. L. Niehaus (1993). Modeling Fecal Coliform Bacteria - I: Field and Laboratory Determination of Loss Kinetics. *Water Resources*, 27(4): 693-701.

Bachoc, A., Chebbo, G. et Mouchel, J. M. (1993). La pollution des rejets pluviaux urbains son importance, ses caractéristiques, quelques éléments sur ses origines et son interception. Dans: *Rejets urbains par temps de pluie: Pollutions et nuisances*. Actes des troisièmes journées du DEA en Sciences et Techniques de l'environnement, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 14-15 mai 1992, pp. 9-21.

Barros, A. P. and A. N. Baptista (1990). An Eulerian-Lagrangian Model for Sediment Transport in Estuarine. In: *Estuarine and Coastal Modeling*, Proceeding of the Estuarine and Coastal Circulation and Pollution Transport Model Data Comparison Speciality Conference, M. L. Spaulding ed., Newport, november 1989, pp. 102-112.

Beck, M. B., Adeloje, A. J., Lessard, P., Finney, B. A. and L. Simon (1988). Stormwater Overflows: Modelling impacts on the Receiving Waters and the Treatment Plant. In: *Urban Discharges and Receiving Water Quality Impacts*, J. B. Ellis, Pergamon Press, London, pp. 87-105.

Bedford, K. W., Sykes R. M. and C. Libicki (1983). Dynamic Advective Water Quality Model for Rivers. *Journal of Environmental Engineering*, 109(3): 535-554.

Benoist, A. P. and L. Lijlklema (1990). Distribution of Sedimentation Rates of Suspended Solids and Heavy Metals in Combined Sewer Overflows. *Wat. Sci. Tech.*, 22(10/11): 61-68.

Bird, B. R., Stewart, W. E. and E. N. Lightfoot (1960). *Transport phenomena*. John Wiley & Sons, New-York, 780 p.

Boudreau, P., Leclerc, M. et G. R. Fortin (1994). Modélisation bidimensionnelle de l'influence des plantes aquatiques sur l'hydrodynamique du Lac St-Pierre, fleuve St-Laurent (Québec). *Rev. Can. Gén. Civ.* (article accepté pour publication).

Brooks, A. N. and T. J. R. Hughes (1980). Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Methods for Advection Dominated Flows. In: *Proceeding of the Third International Conference on Finite Element Method in Fluid Flow*, Banff, Canada.

Canale, R. P., Auer, M. T, Owens, E. M., Heidtke, T. M. and S. W. Effler (1993). Modeling Fecal Coliform Bacteria - II: Model Development and Application. *Water Resources*, 27(4): 703-714.

CEGEO Technologies inc. (1993). *Recommandation de critères environnementaux pour les rejets urbains par temps de pluie*. 44 p.

Charron, A. (1990). *Modélisation de l'aspect qualitatif du ruissellement urbain*. Mémoire de maîtrise. Université du Québec, INRS-Eau, 110 p.

Chebbo, G. et A. Bachoc (1993). Caractérisation des solides en suspension dans les rejets pluviaux urbains. Dans: *Rejets urbains par temps de pluie: Pollutions et nuisances*. Actes des troisièmes journées du DEA en Sciences et Techniques de l'environnement, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 45-57. 14-15 mai 1992.

Clamagirand, E. et J. Gaillard (1986). Impact des déversements d'orage sur la qualité de la Seine à l'étiage. *La Houille Blanche*, 3: 229-239.

Del Giudice, S., Comini, G. and C. Nonino (1992). A Physical Interpretation of Conservative and Non-Conservative Finite Element Formulations of Convective-Type Problems. *Int. J. Num. Met. Eng.*, 35 : 709-727.

Desbordes, M. and J. C. Hémain (1990). Further Research Needs for Impact Estimates of Urban Storm Water Pollution. *Wat. Sci. Tech.*, 22(10/11): 9-14.

Dhatt, G. et G. Touzot (1989). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Presses de l'Université Laval, Québec, 543 p.

Donéa, J. (1984). A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems, *Int. J. Num. Met. Eng.*, 20: 101-119.

Fisher, H. B., Imberger, J., List, E. J., Koh, R. C. Y. and N. H. Brooks (1979). *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, New-York, 483 p.

Franca, L. P., Frey, S. L. and T. J. R. Hughes (1992). Stabilized Finite Element Methods: Application to the Advective-Diffusif Model. *Comp. Methods App. Mech. Eng.*, 95: 253-276.

French, R. H. (1994). *Open-channel Hydraulics*. Mcgraw-Hill Int. Editions, Civil Engineering Series, New-York, 739 p.

Galeati, G. and G. Gambolati (1989). On Boundary Conditions and Point Sources in the Finite Element Integration of the Transport Equation. *Water Resources Research*, 25 (5): 847-856.

Garcia, M. and G. Parker (1991). Entrainment of Bed Sediment into Suspension. *Journal of Hydraulic Engineering*, 117(4): 414-435.

Géophysique GPR International inc. (1992). *Levés courantométriques sur la rive nord de la rivière des Prairies (Laval)*. Rapport M-92354. 10 p.

Guichard, M. A. et J. M. Mouchel (1993). Des méthodes d'observation des matières en suspension dans le milieu naturel. Dans: *Rejets urbains par temps de pluie: Pollutions et nuisances*. Actes des troisièmes journées du DEA en Sciences et Techniques de l'environnement, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 185-195. 14-15 mai 1992.

Harremoës, P. (1982). Immediate and Delayed Oxygen Depletion in Rivers. *Wat. Sci. Tech.*, 16:1093-1098.

Hines, A. L. and R. N. Maddox (1985). *Mass transfer: fundamentals and applications*. Prentice-Hall, New-Jersey, 542 p.

Holly, F. M. and J. M. Usseglio-Polatera (1984). Dispersion Simulation in Two-Dimensionnal Tidal Flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110 (7): 905-926.

Hvitved-Jacobsen, T. (1982). The Impact of Combined Sewer Overflows on the Dissolved Oxygen Concentration of a River. *Water Resources*, 16:1099-1105.

Hydro-Québec, (1994). *Document de référence pour les guides*; Centre d'interprétation de la centrale de la rivière des Prairies.

Jaffe, P.R. and R. A. Ferrara (1984). Modeling Sediment and Water Column Interactions for Hydrophobic Pollutants. *Water Resources*, 18(9): 1169-1174.

Jaffe, P. R. and R. A. Ferrara (1983). Desorption Kinetics in Modeling of Toxic Chemicals. *Journal of Environmental Engineering*, 109(4):859-867.

Jensen, M. and J. J. Linde-Jensen (1992). Improvement of Bathing Water Quality by Reduction of Urban Outlets: Case Study for the Beach of Rodvig, Denmark. *Wat. Sci. Tech.* 25(9): 101-113.

Karickhoff, S. W. (1984). Organic Pollutant Sorption in Aquatic Systems. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(6):707-735.

Khelifa, A. (1992). *Nouvelle approche en éléments finis pour la modélisation du phénomène de transport permanent et non permanent*. Mémoire de maîtrise. Faculté de sciences et de génie, Université Laval, 127 p.

Klemetson, S. L. (1985). Factors Affecting Stream Transport of Combined Sewer Overflow Sediments. *Journal WPCF*, 57(5): 390-397.

Lau, Y. L. and B. G. Krishnappan (1994). Does Reentrainment Occur during Cohesive Sediment Settling? *Journal of Hydraulic Engineering*, 120(2): 236-244

Lavallée, P. (1989). *La gestion des eaux usées en temps de pluie: L'impact sur le milieu récepteur des événements fréquents*. Thèse de doctorat. Université du Québec, INRS-Eau, 196 p.

Leclerc, M., Martin, G., Banton, O., Montmigny, M., Benoit, J. et P. Boudreau (1992). *Développement et validation analytique d'un modèle lagrangien de simulation des panaches d'effluents et de tributaires*. Fleuve St-Laurent - Modélisation intégrée du suivi de la qualité de l'eau du tronçon Tracy-Lac St-Pierre, Rapport #2, INRS-Eau, 158 p.

Leclerc, M., Boudreault, P., Fortin, G. L., et L. Cleary (1990). *Simulation des écoulements en eau libre du tronçon Tracy-Lac St-Pierre*. Fleuve St-Laurent- Modélisation intégrée du suivi de la qualité de l'eau du tronçon Tracy-Lac St-Pierre, Rapport #1, tome 1, INRS-Eau, 187 p.

Leclerc, M., Bellemare J. F., Dumas, G. and G. Dhatt (1990). A Finite Element Model of Estuarian and River Flows with Moving Boundaries. *Adv. Wat. Res.*, 4, 158-168.

Leclerc, M. (1985). *Modélisation tridimensionnelle des écoulements à surface libre par éléments finis: Application au lac St-Jean (Québec)*. Thèse de docteur-ingénieur. Université de Technologie de Compiègne, 294 p.

Lee, D. H., Bedford, K. W. and C. J. Yen (1994). Storm and Entrainment Effects on Tributary Sediment Loads. *Journal of Hydraulic Engineering*, 120(1): 81-103.

Medina, M. A.(1986). State-of-the-art, Physically-based and Statistically-based Water Quality Modeling. In: *Urban Runoff Pollution*, H.C. Torno, J. Marsalek et M. Desbordes Eds, NATO ASA Series, vol. G10, pp. 499-586

Mehta, A. J. et E. Partheniades (1975). Étude des caractéristiques de décantation des matériaux fins à l'état floculé. *Journal de Recherches Hydrauliques*, 13(4):361-381.

Migniot, C. (1989). Tassement et rhéologie des vases. *La Houille Blanche*, 1:11-29.

Mouchel, J. M. (1993). Impact des rejets de temps de pluie en Seine: quelques résultats tirés de la campagne de l'été 1991 du groupe "Orages" du Piren-Seine. Dans: *Rejets urbains par temps de pluie: Pollutions et nuisances*. Actes des troisièmes journées du DEA en Sciences et Techniques de l'environnement, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 165-181. 14-15 mai 1992.

- Padilla, F., Secretan, Y. and M. Leclerc (1997). On Open Boundaries in the Finite Element Approximation of Two-Dimensional Advection-Diffusion Flows. *Int. J. Num. Meth. in Engineering* (article accepté pour publication).
- Rijn, L. C. van (1986). Mathematical Modeling of Suspended Sediment in Nonuniform Flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 112(6): 433-455.
- Rijn, L. C. van (1984). Sediment Transport, part I: Bed Load Transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(10): 1431-1456.
- Rijn, L. C. van (1984). Sediment Transport, part II: Suspended Load Transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(11): 1613-1641.
- Saad, Y. and Schultz, M. (1986). GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7: 856-869.
- Secretan, Y. F. (1991). *Contribution à la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles par la méthode des éléments finis adaptatifs; Développement d'un élément simple*. Thèse de doctorat. École Polytechnique Fédérale de Zurich, Suisse, 173 p.
- Schaarup-Jensen, K. and T. Hvitved-Jacobsen (1990). Dissolved Oxygen Stream Model for Combined Sewer Overflows. *Wat. Sci. Tech.*, 22(10-11):137-146.
- Schillinger, J. E. and J. J. Gannon (1985). Bacterial Adsorption and Suspended Particles in Urban Stormwater. *Journal WPCF*, 57(5): 384-389.
- Shen, H. T., Yapa, P. D. et Zhang, B. (1992). *A Model for Transport and Fate of Chemical Spills in Rivers*. Report 92-5, Department of Civil and Environmental Engineering, Clarkson University, Potsdam, 112 p.
- Sluis, J. W. van (1993). Evaluation of the Water Quality Effects of Combined Sewer Overflow Control Measures. *Wat. Sci. Tech.*, 27(5-6): 177-184.
- Spaulding, M. L. and S. J. Liang (1990). Boundary fitted Estuarine Water Quality Model. In: *Estuarine and Coastal Modeling. Proceeding of the Estuarine and Coastal Circulation and Pollution Transport Model Data Comparison Speciality Conference*, M. L. Spaulding ed., pp 430-441, Newport, november 1989.
- Tanguy, J. M. (1991). *Modélisation du transport solide par les courants à l'aide de la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat. Faculté de sciences et de génie, Université Laval.
- Teisson, C. (1991). Cohesive Suspended Sediment Transport: Feasibility and Limitations of Numerical Modeling. *Journal of Hydraulic Research*, 29(6): 755-769.

TECSULT inc. (1995). *Étude des usages et des ressources biophysiques de la rivière des Prairies, du lac St-Louis et du tronçon fluvial du St-Laurent*. Rapport final, tome 1 et 2.

Thévenot, D. R. (1993). Pollution des eaux pluviales urbaines: origine, niveaux et mobilité des polluants. Dans: *Rejets urbains par temps de pluie: Pollutions et nuisances*. Actes des troisièmes journées du DEA en Sciences et Techniques de l'environnement, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 81-91. 14-15 mai 1992.

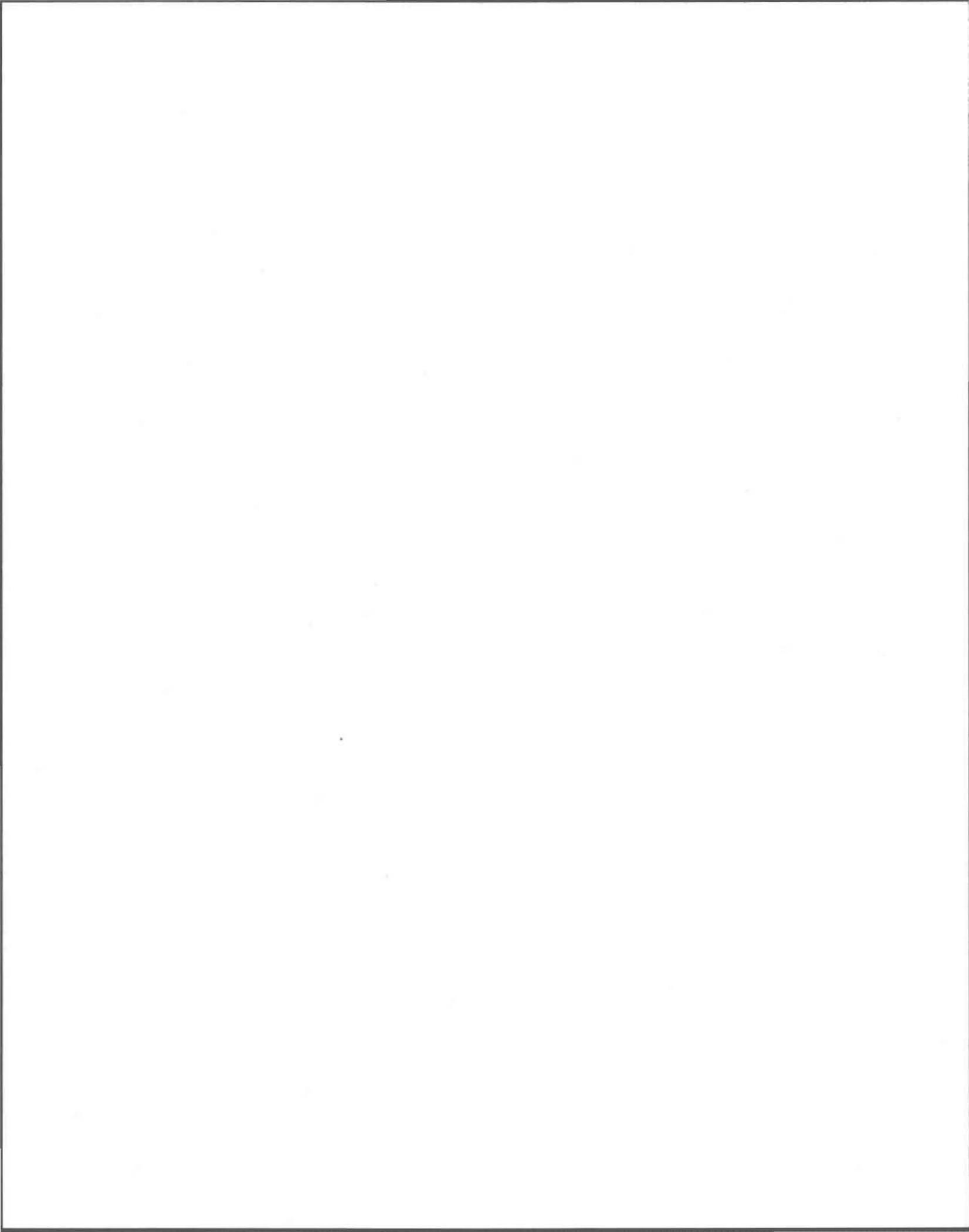
Thomann, R. V. and J. A. Mueller (1987). *Principles of Surface Water Quality Modeling and Control*. Harper & Row Publishers, New-York, 644 p.

Villeneuve, J. P., Marcoux, C., Cyr, J. F., Lavallée, P., Abi-Zeid, I. et J. Benoît (1992). La gestion dynamique des eaux de débordement de réseaux unitaires sur le territoire de la communauté urbaine de Québec. *Sciences et techniques de l'eau*, 26(3): 229-237.

Warwick, J. J. and J. D. Edgmon (1988). Wet Weather Water Quality Modeling. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 114(3), 313-325.

## **ANNEXE A**

# **Procédures d'intégration de l'équation de transport-diffusion**



# ANNEXE A

---

La forme tridimensionnelle générale de l'équation scalaire de transport-diffusion pour un contaminant non conservatif est donnée par l'expression suivante:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \frac{\partial wC}{\partial z} = D_m \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + \phi \quad [\text{A.1}]$$

Pour obtenir la forme bidimensionnelle telle que considérée par le modèle, cette équation doit subir une intégration temporelle et verticale. Le traitement qui suit a été adapté du développement présenté dans Leclerc et al. (1992).

## A.1 Intégration temporelle

L'équation A.1 est valable pour des valeurs locales et instantanées des variables d'état. Puisqu'en pratique une échelle de temps discrétisée est considérée, il est nécessaire de pondérer les variables sur un intervalle de temps suffisamment long pour éliminer les fluctuations aléatoires associées à la turbulence. À cette fin, on procède à l'intégration temporelle de l'équation de transport-diffusion.

L'hypothèse de Reynolds (Bird et al., 1960) permet d'exprimer les vitesses et la concentration comme étant la somme d'une valeur moyenne sur un intervalle de temps et d'une fluctuation aléatoire de moyenne nulle:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad [\text{A.2}]$$

$$C = \bar{C} + C' \quad [\text{A.3}]$$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{t_0 - t} \int_t^{t+t_0} u_i dt \quad [\text{A.4}]$$

$$\bar{C} = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} C dt \quad [\text{A.5}]$$

$$\bar{u}' = 0 \quad [\text{A.6}]$$

$$\bar{C}' = 0 \quad [\text{A.7}]$$

L'intégration temporelle d'une variable d'état  $\alpha$  quelconque consiste à appliquer un opérateur de moyenne pondérée qui permet d'éliminer les fluctuations  $\alpha'$ . L'opérateur filtre les fluctuations turbulentes. Formellement, on obtient:

$$\bar{\alpha} = \langle \alpha, f \rangle = \int_T \alpha(t - \tau) f(\tau) dt \quad [\text{A.8}]$$

$f(\tau)$  : fonction de pondération;  
 $T$  : période du filtre;  
 $\tau$  : référence de temps mobile;  
 $\langle \alpha, f \rangle$  : opérateur de filtrage.

L'opérateur possède quelques propriétés spécifiques. Si  $a$  est une constante et  $\beta$  une seconde variable d'état, on a:

$$\langle a, f \rangle = a \quad [\text{A.9}]$$

$$\langle a\alpha, f \rangle = a \langle \alpha, f \rangle = a\bar{\alpha} \quad [\text{A.10}]$$

$$\langle \alpha + \beta, f \rangle = \langle \alpha, f \rangle + \langle \beta, f \rangle = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \quad [\text{A.11}]$$

$$\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}, f \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha, f \rangle = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x_i} \quad [\text{A.12}]$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i^2}, f \right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \langle \alpha, f \rangle = \frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial x_i^2} \quad [\text{A.13}]$$

En ayant recours à un tel filtre, on parvient à éliminer les fluctuations de très courte période de retour ( $\alpha', \beta'$ ). Elles sont englobées à l'intérieur des phénomènes turbulents.

L'opérateur de filtrage est appliqué à chacun des termes de l'équation A.1. Dans la démonstration qui suit, on présente uniquement l'opération sur les termes en x, les termes en y et en z étant traités de façon identique.

$$1) \quad \left\langle \frac{\partial C}{\partial t}, f \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{C} + C', f \rangle = \frac{\partial \bar{C}}{\partial t}$$

$$2) \quad \left\langle \frac{\partial u C}{\partial x}, f \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle (\bar{u} + u')(\bar{C} + C'), f \rangle$$

$$3) \quad \left\langle \frac{\partial C^2}{\partial x^2}, f \right\rangle = \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2}$$

$$4) \quad \langle \phi, f \rangle = \bar{\phi}$$

L'intégration du deuxième terme nécessite un éclatement de l'opérateur:

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \bar{u} \bar{C}, f \rangle = \frac{\partial \bar{u} \bar{C}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \bar{u} C', f \rangle = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle u' \bar{C}, f \rangle = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle u' C', f \rangle = \frac{\partial \overline{u' C'}}{\partial x}$$

Le dernier terme est considéré comme une covariance. Elle représente la turbulence convective associée à l'écoulement et ne peut être annulée. Pour fermer le modèle, il est

possible de l'exprimer empiriquement à l'aide du concept de viscosité turbulente de Boussinesq. Une loi fickienne est alors utilisée:

$$\overline{u'c'} = -D'_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \quad [A.14]$$

$D'_i$  : coefficient empirique de diffusion turbulente

Après combinaison de la convection moyenne et de la diffusion turbulente, le terme convectif selon l'axe  $x$  s'exprime par:

$$\left\langle \frac{\partial uC}{\partial x}, f \right\rangle = \frac{\partial \bar{u}\bar{C}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -D'_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) \quad [A.15]$$

L'étape suivante consiste normalement à appliquer l'opérateur aux termes de diffusion moléculaire. Cependant, en situation d'écoulement à prédominance turbulente, les processus moléculaires ont peu d'importance et peuvent être intégrés aux processus turbulents. On considère alors un coefficient global de diffusion turbulente:

$$D_{Ti} = D'_i + D_{mi} \quad [A.16]$$

Ce coefficient est anisotrope; il varie dans le temps et dans l'espace.

Il est maintenant possible d'écrire l'équation de transport-diffusion sous sa forme pondérée dans le temps. Pour plus de simplicité, la notation  $\bar{u}, \bar{C}$  est abandonnée. Il est cependant important de garder à l'esprit que les variables considérées sont des valeurs moyennes sur un intervalle de temps.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \frac{\partial wC}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D_{Tx} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_{Ty} \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_{Tz} \frac{\partial C}{\partial z} + \phi \quad [A.17]$$

## A.2 Intégration verticale

L'hypothèse d'un mélange homogène sur toute la profondeur de la colonne d'eau permet de considérer des concentrations de contaminants moyennées sur la verticale. Tout comme les équations de continuité et du mouvement, l'équation de transport-diffusion peut être intégrée verticalement de façon à obtenir des variables indépendantes de la coordonnée  $z$ .

La méthode de l'intégration verticale repose sur l'application du théorème de Leibnitz qui s'énonce ainsi:

$$\int_a^b \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} d\xi = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b \alpha d\xi - \alpha(b) \frac{\partial b}{\partial x_i} + \alpha(a) \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad [\text{A.18}]$$

Lorsque  $\xi = x_i$  (dans notre cas pour  $\xi = z$ ):

$$\int_a^b \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} d\xi = \alpha(b) - \alpha(a) \quad [\text{A.19}]$$

Le théorème de Leibniz est appliqué à chaque terme de l'équation A.17. L'intégration est effectuée entre la cote bathymétrique  $z = -h'$  et la cote du plan d'eau  $z = h$ . Afin de simplifier la notation, on pose:

$$\langle \rangle = \int_{-h'}^h dz$$

### *Application du théorème de Leibnitz*

En intégrant chacun des termes de l'équation de transport-diffusion par rapport à l'axe vertical, on obtient:

$$1) \quad \int_{-h'}^h \frac{\partial C}{\partial t} dz = \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} - C(h) \frac{\partial h}{\partial t} + C(-h') \frac{\partial -h'}{\partial t}$$

$$2) \quad \int_{-h'}^h \frac{\partial uC}{\partial x} dz = \frac{\partial \langle uC \rangle}{\partial x} - u(h)C(h) \frac{\partial h}{\partial x} + u(-h')C(-h') \frac{\partial -h'}{\partial x}$$

$$3) \quad \int_{-h'}^h \frac{\partial vC}{\partial y} dz = \frac{\partial \langle vC \rangle}{\partial y} - v(h)C(h) \frac{\partial h}{\partial y} + v(-h')C(-h') \frac{\partial -h'}{\partial y}$$

$$4) \quad \int_{-h'}^h \frac{\partial (w - w_s)C}{\partial z} dz = w(h)C(h) - w(-h')C(-h')$$

$$5) \quad \int_{-h'}^h \frac{\partial}{\partial x} D_{Tx} \frac{\partial C}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \left\langle D_{Tx} \frac{\partial C}{\partial x} \right\rangle - \left[ D_{Tx} \frac{\partial C}{\partial x} \right]_h \frac{\partial h}{\partial x} + \left[ D_{Tx} \frac{\partial C}{\partial x} \right]_{-h'} \frac{\partial -h'}{\partial x}$$

$$6) \quad \int_{-h'}^h \frac{\partial}{\partial y} D_{Ty} \frac{\partial C}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \left\langle D_{Ty} \frac{\partial C}{\partial y} \right\rangle - \left[ D_{Ty} \frac{\partial C}{\partial y} \right]_h \frac{\partial h}{\partial y} + \left[ D_{Ty} \frac{\partial C}{\partial y} \right]_{-h'} \frac{\partial -h'}{\partial y}$$

$$7) \quad \int_{-h'}^h \frac{\partial}{\partial z} D_{Tz} \frac{\partial C}{\partial z} dz = \left[ D_{Tz} \frac{\partial C}{\partial z} \right]_h - \left[ D_{Tz} \frac{\partial C}{\partial z} \right]_{-h'}$$

Le terme de production ou de dégradation peut quant à lui être intégré directement:

$$8) \quad \int_{-h'}^h \phi dz = (h + h')\phi = H\phi$$

L'application de conditions aux limites spécifiques permet de simplifier l'équation globale.

#### *Condition cinématique du surface libre et de fond*

Les vitesses verticales à la surface libre et à l'interface eau-sédiments peuvent être exprimée à partir de la notion de dérivée substantielle (Bird et al., 1987)

$$w(h) = \frac{\partial h}{\partial t} + u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(h) \frac{\partial h}{\partial y} \quad [\text{A.20}]$$

$$w(-h') = \frac{\partial -h'}{\partial t} + u(-h') \frac{\partial -h'}{\partial x} + v(-h') \frac{\partial -h'}{\partial y} \quad [\text{A.21}]$$

Ces expressions peuvent être substituées à l'intérieur du terme 4.

#### *Condition limite de diffusion turbulente nulle*

À la surface libre, on assume que les échanges de matière par diffusion turbulente sont nuls dans toutes les directions:

$$\left[ D_{Ti} \frac{\partial C}{\partial x_i} \right]_h = 0 \quad \text{pour } i = 1, 3 \quad [\text{A.22}]$$

Au fond de l'eau, il est adéquat de poser l'hypothèse d'une diffusion turbulente nulle dans le plan horizontal. Cependant, sur la verticale, des échanges de matière par diffusion sont susceptibles de se produire et le terme diffusif vertical ne peut être annulé.

$$\left[ D_{Ti} \frac{\partial C}{\partial x_i} \right]_{-h'} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad [\text{A.23}]$$

#### *Pondération des variables sur la verticale*

Tout comme les fluctuations temporelles, les profils de vitesse et de concentration sur la verticale peuvent être représentés par la somme d'une valeur moyenne et d'un écart de moyenne non nulle:

$$u_i(z) = \bar{u}(1 + \varepsilon_{u_i}(z)) \quad \text{et} \quad C(z) = \bar{C}(1 + \varepsilon_C(z)) \quad [\text{A.24}]$$

où

$$\langle \varepsilon_j \rangle = \int_{-h'}^h \varepsilon_j(z) dz = 0 \quad [\text{A.25}]$$

On procède alors à la pondération des variables et des produits de variables de l'équation de transport-diffusion. La démonstration est faite pour un terme de chaque type.

$$1) \quad \langle C \rangle = \int_{-h'}^h (\bar{C} + \bar{C}\varepsilon_c(z)) dz = (h + h')\bar{C} = H\bar{C}$$

$$2) \quad \langle u_i C \rangle = \int_{-h}^h (\bar{u}_i + \bar{u}_i\varepsilon_c(z)) (\bar{C} + \bar{C}\varepsilon_c(z)) dz = \bar{u}_i \bar{C} (H + \langle \varepsilon_{u_i} \varepsilon_C \rangle)$$

$$3) \quad \left\langle D_{Ti} \frac{\partial C}{\partial x_i} \right\rangle \cong HD_{Ti} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i}$$

L'approximation appliquée aux termes de diffusion turbulente est justifiable par le caractère aléatoire des mécanismes de turbulence.

Les produits des fluctuations ne pouvant être annulés ( $\langle \varepsilon_{u_i} \varepsilon_C \rangle \neq 0$ ), on a à nouveau recours à une loi Fickienne pour fermer le modèle:

$$\bar{u}_i \bar{C} \langle \varepsilon_{u_i} \varepsilon_C \rangle = -HD_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} \quad [A.26]$$

$D_i$  : coefficient de dispersion horizontale

#### *Résumé des coefficients de diffusion utilisés*

Les processus d'intégration temporelle et verticale on conduit à l'introduction de plusieurs coefficients associés aux processus diffusifs et à la représentation des termes covariants. Ils sont, par ordre d'apparition:

- $D_{mi}$ , coefficient de diffusion moléculaire
- $D'_i$ , coefficient empirique de diffusion turbulente
- $D_{Ti}$ , coefficient global de diffusion turbulente

$D_i$ , coefficient de dispersion horizontale

Leclerc et al. (1993) rapportent que la valeur de ces coefficients augmente d'un ordre de grandeur à chaque niveau. Ainsi, tous les processus diffusifs peuvent être englobés à l'intérieur du coefficient de dispersion horizontale.

*Équation de transport-diffusion résultante*

L'équation de transport-diffusion peut maintenant être écrite dans sa forme finale. On notera simplement  $u$ ,  $v$  et  $C$  les variables moyennées sur la verticale et le taux de production ou de dégradation sera considéré à l'intérieur du terme global de puits et de sources:

$$H\phi = \Delta S \quad [A.27]$$

On obtient ainsi:

$$\frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial uHC}{\partial x} + \frac{\partial vHC}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} HD_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} HD_y \frac{\partial C}{\partial y} + \Delta S \quad [A.28]$$

