Record Number: 12560
Author, Monographic: Perreault, L.//Bobée, B.//Rasmussen, P. F.
Author Role:
Title, Monographic: Les lois de Halphen
Translated Title:
Reprint Status:
Edition:
Author, Subsidiary:
Author Role:
Place of Publication: Québec
Publisher Name: INRS-Eau
Date of Publication: 1997
Original Publication Date: 12 mai 1997
Volume Identification:
Extent of Work: xii, 153
Packaging Method: pages incluant 6 annexes
Series Editor:
Series Editor Role:
Series Title: INRS-Eau, rapport de recherche
Series Volume ID: 498
Location/URL:
ISBN: 2-89146-360-9
Notes: Rapport annuel 1996-1997
Abstract: Rapport rédigé pour la Chaire CRSNG/Hydro-Québec en hydrologie statistique.
Call Number: R000498
Keywords: rapport/ ok/ dl

LES LOIS DE HALPHEN

LES LOIS DE HALPHEN

Rapport rédigé pour

La Chaire CRSNG/Hydro-Québec en Hydrologie Statistique

par

Luc Perreault

Bernard Bobée

Peter Rasmussen

Institut national de la Recherche scientifique, INRS-Eau

2800, rue Einstein, CP 7500, Sainte-Foy, Québec, G1V 4C7

Rapport de recherche N° R-498

12 mai 1997

ISBN 2-89146-360-9

REMERCIEMENTS

Nous remercions d'abord le professeur Jacques Bernier qui nous a montré l'intérêt des lois de Halphen pour la modélisation des événements extrêmes et qui nous a incité à en faire une étude plus approfondie. Nous devons beaucoup au professeur Bernier qui nous a aussi guidés et éclairés dans ce travail sur de nombreux points autant théoriques que pratiques. Nous tenons aussi à signaler les travaux de M. Hugues Perron et M. Vincent Fortin concernant la programmation et les méthodes numériques nécessaires à l'implantation des distributions de Halphen dans le logiciel ***AJUST***. Nous remercions enfin M. Rémy Garçon d'Électricité de France qui nous a permis d'avoir accès à plusieurs publications reliées aux travaux d'Étienne Halphen.

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre de la chaire industrielle en hydrologie statistique financée par Hydro-Québec et le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG).

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX vii

LISTE DES FIGURES ix

CHAPITRE 1 : Introduction 1

1.1 Problématique et objectifs de l'étude 1

1.2 Note historique concernant les lois de Halphen 2

1.3 Contenu du présent rapport 8

CHAPITRE 2 : Propriétés mathématiques 11

2.1 Fonctions de densité de probabilité des lois de Halphen 11

2.2 Formes des f.d.p. des lois de Halphen 14

2.3 Liens entre les lois de Halphen et avec d'autres distributions 20

2.3.1. Propriétés de base 20

2.3.2. Lien avec les lois gamma et gamma inverse 25

2.3.3. Approximation normale 29

2.3.4. Transformation puissance 32

2.3.5. Quelques cas particuliers 34

CHAPITRE 3 : Loi de Halphen Type A 37

3.1 Moments et coefficients 37

3.2 Exhaustivité 41

3.3 Estimation des paramètres 42

3.3.1. Estimation de m et α pour υ fixé 43

3.3.2. Estimation de υ 48

3.3.3. Propriétés asymptotiques 52

3.4 Estimation des quantiles 53

3.5 Exemple 54

CHAPITRE 4 : Loi de Halphen Type B 59

4.1 Moments et coefficients 59

4.2 Exhaustivité 62

4.3 Estimation des paramètres 63

4.3.1. Estimation de m et α pour υ fixé 64

4.3.2. Estimation de υ 69

4.3.3. Propriétés asymptotiques 71

4.4 Estimation des quantiles 72

4.5 Exemple 74

CHAPITRE 5 : Loi de Halphen Type B^{-1} 79

5.1 Moments et coefficients 79

5.2 Exhaustivité 84

5.3 Estimation des paramètres 84

5.3.1 Estimation de m et α pour υ fixé 85

5.3.2 Estimation de υ 88

5.3.3 Propriétés asymptotiques 90

5.4 Estimation des quantiles 91

5.5 Exemple 93

CHAPITRE 6 : Synthèse et applications 97

6.1 Synthèse et diagramme des moments 97

6.2 Application des lois de Halphen aux débits maxima annuels 99

CHAPITRE 7 : Conclusions et perspectives 111

7.1 Conclusion 111

7.2 Perspectives de recherche future 113

CHAPITRE 8 : Références bibliographiques 117

ANNEXE A : Fonctions de Bessel 121

ANNEXE B : Fonctions exponentielles factorielles 123

ANNEXE C : Moment d'ordre quasi-zéro 127

ANNEXE D : Méthode du maximum de vraisemblance 131

ANNEXE E : Dérivées des quantiles 139

ANNEXE F : Données 149

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1. Lois incorporées dans le logiciel *AJUST*....................3
Tableau 2.1. Paramètres de l'équation différentielle des lois de Halphen....................15
Tableau 2.2 Étude générale de l'existence des modes....................15
Tableau 2.3. Équations polynomiales permettant de déterminer les points d'inflexion......17
Tableau 2.4. Expressions des f.d.p. des lois gaussienne inverse, gamma généralisée, khi-deux et normale tronquée....................35
Tableau 3.1. Résultats de l'estimation des paramètres de la loi de Halphen Type A........55
Tableau 3.2. Quantiles estimés et écart-types pour la loi Type A....................57
Tableau 4.1. Résultats de l'estimation des paramètres de la loi de Halphen Type B........75
Tableau 4.2. Quantiles estimés et écart-types pour la loi Type B....................77
Tableau 5.1. Résultats de l'estimation des paramètres de la loi de Halphen Type B^{-1}......94
Tableau 5.2. Quantiles estimés et écart-types pour la loi Type B^{-1}....................96
Tableau 6.1. Statistiques exhaustives pour chaque loi....................97
Tableau 6.2. Caractéristiques nécessaires à l'estimation des paramètres des lois de Halphen....................100
Tableau 6.3. Validité de la solution des systèmes d'équations....................102
Tableau 6.4. Répartition conjointe des résultats pour les lois Type A et Type B...........105
Tableau 6.5. Répartition conjointe des résultats pour les lois Type A et Type B^{-1}.........105
Tableau 6.6. Répartition conjointe des résultats pour les lois Type B et Type B^{-1}.........105

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1. Principaux types de forme admis par les f.d.p. des lois de Halphen 16

Figure 2.2. Comportement asymptotique des f.d.p. des lois de Halphen et de diverses distributions employées en hydrologie 18

Figure 2.3. Variation des quantiles pour les comportements asymptotiques de la figure 2.2 19

Figure 2.4. Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen Type A 21

Figure 2.5. Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen Type B 22

Figure 2.6. Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen Type B^{-1} 23

Figure 3.1. Relation entre C_v et C_s pour différentes valeurs de α et υ : loi Type A 41

Figure 3.2. Fonction de dispersion $D_A(\alpha, \upsilon)$ 47

Figure 3.3. Vraisemblance logarithmique partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ 56

Figure 4.1. Relation entre C_v et C_s pour différentes valeurs de α et υ : loi Type B 62

Figure 4.2. Fonction de dispersion $D_B(\alpha, \upsilon)$ 67

Figure 4.3. Vraisemblance logarithmique partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ 76

Figure 5.1. Relation entre C_v et C_s pour différentes valeurs de α et υ : loi Type B^{-1} 83

Figure 5.2. Vraisemblance logarithmique partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ 94

Figure 6.1. Statistiques exhaustives pour chaque loi de Halphen 98

Figure 6.2. Les lois de Halphen dans le diagramme (δ_1, δ_2) 99

Figure 6.3. Localisation géographique des stations sélectionnées 101

Figure 6.4. Représentation des 186 échantillon dans le diagramme (δ_1, δ_2) 101

Figure 6.5. Résultat de l'estimation des paramètres dans le diagramme (δ_1, δ_2) : Type A 103

Figure 6.6. Résultat de l'estimation des paramètres dans le diagramme (δ_1, δ_2) : Type B 103

Figure 6.7. Résultat de l'estimation des paramètres dans le diagramme (δ_1, δ_2) : Type B^{-1} 104

Figure 6.8. Valeurs de $\hat{\alpha}$ et $\hat{\upsilon}$ obtenues: (a) Type A, (b) Type B et (c) Type B^{-1} 107

Figure 6.9. Distribution des valeurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\upsilon}$ obtenues: (a) Type A, (b) Type B et (c) Type B^{-1} 108

Figure 6.10. Fonctions de densité de probabilité correspondant aux points identifiés par une croix à la figure 6.8 : (a) Type A, (b) Type B et (c) Type B^{-1}............109

1 INTRODUCTION

1.1 Problématique et objectifs de l'étude

Les activités d'Hydro-Québec dans le domaine de l'aménagement et de la réfection des centrales hydroélectriques impliquent un grand nombre d'études concernant les débits extrêmes de crue. Ces études sont requises pour la conception des évacuateurs, des barrages et des dérivations provisoires. La planification et le dimensionnement de ces ouvrages hydrauliques reposent donc sur une estimation adéquate des événements extrêmes de crue. En effet, une surestimation des crues peut entraîner un sur-dimensionnement des ouvrages hydrauliques et conduire à des coûts de construction supplémentaires. Une sous-estimation des crues peut causer des défaillances d'ouvrages conduisant à des inondations qui se traduisent par des dégâts matériels importants et parfois par des pertes en vies humaines.

Un des outils privilégié par les hydrologues pour estimer les débits extrêmes de crue est l'analyse de fréquence. Cette approche a pour objectif l'utilisation des mesures d'événements hydrologiques extrêmes passés pour estimer les quantiles x_T de période de retour T. Cela est effectué généralement à l'aide de l'ajustement d'une loi de probabilité à un échantillon de données extrêmes (Perreault *et al.*, 1994).

Lors du dimensionnement d'un ouvrage hydraulique, il est important d'évaluer le risque de défaillance (débordement ou inondation, par exemple). On s'intéresse alors particulièrement à la variable aléatoire X "débit maximum annuel" et à l'événement $E = \{X > x_T\}$, où x_T est un débit maximum critique pour l'ouvrage hydraulique. Si nous considérons le débit maximum annuel X distribué selon une loi de probabilité de fonction de densité $f(x;\underline{\theta})$, où $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ est le vecteur des k paramètres de la loi, la probabilité $p = 1/T$ que l'événement $E = \{X > x_T\}$ survienne correspond au risque hydrologique et s'exprime de la manière suivante :

$$p = \frac{1}{T} = 1 - F(x_T;\underline{\theta}) = \int_{x_T}^{\infty} f(x;\underline{\theta})\,dx \qquad (1.1)$$

où $F(x;\underline{\theta})$ désigne la fonction de répartition de la loi. La valeur x_T est alors appelé le quantile de période de retour T et est une fonction de T ainsi que des paramètres $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ de la loi de probabilité F. Plus précisément, ce quantile peut s'écrire de la façon suivante :

$$x_T = F^{-1}\left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, 1-\frac{1}{T}\right) \tag{1.2}$$

où F^{-1} est la fonction inverse de la fonction de répartition F. Le terme mathématique "fonction inverse" est employé ici pour signifier qu'au lieu d'affecter une probabilité à une valeur donnée x, comme le fait la fonction de répartition F, la fonction inverse F^{-1} attribue plutôt une valeur x à une probabilité donnée.

Cette définition du quantile est propre aux applications de l'analyse de fréquence en hydrologie, puisqu'on traite en général des données annuelles. La période de retour T est alors interprétée comme le temps moyen (calculé sur une longue période) entre deux événements $E = \{X > x_T\}$. Ainsi, le débit maximum annuel x_T possède une période de retour T si l'événement $E = \{X > x_T\}$ survient en moyenne chaque T années et la réciproque de T, $1/T$, est la probabilité au dépassement de cet événement (risque hydrologique). Par exemple, le débit de période de retour T=100, le débit centennal x_{100}, a une probabilité de 1% d'être dépassé.

Les quatre étapes principales de l'analyse de fréquence (estimation des quantiles) sont :

- la sélection d'un échantillon de mesures de débits maximums annuels de crue satisfaisant certaines hypothèses statistiques de base (indépendance, homogénéité et stationnarité, cf. Bobée et Ashkar, 1991);
- le choix d'un modèle paramétrique (loi de probabilité) considéré comme une approximation de la distribution théorique inconnue pouvant représenter adéquatement un échantillon donné;
- l'ajustement du modèle aux données à l'aide de la méthode d'estimation la plus adéquate compte tenu des objectifs visés (estimation des paramètres de la loi);
- la détermination des événements extrêmes x_T de période de retour T (quantiles de la loi) pour faire une inférence statistique.

Cette procédure ne se limite pas aux débits de crues mais peut être utilisée pour différents types de données (débits moyens, débits d'étiages, précipitations, etc.). Le logiciel ***AJUST***, développé dans le cadre d'un projet de partenariat financé par Hydro-Québec et le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG), permet d'effectuer une analyse de fréquence complète à l'aide de différentes lois de probabilité. Ce logiciel est accompagné d'un guide de l'usager et d'un manuel du programmeur (Perron, 1996a, 1996b). De plus, un manuel technique présente, de manière générale, les principaux aspects théoriques de la procédure d'analyse de fréquence (Perreault *et al.*, 1994). Le Tableau 1.1 donne les lois de probabilité incorporées dans le logiciel ***AJUST***. On y retrouve aussi les références des principaux documents où sont présentés, entre autres, les détails théoriques correspondant à l'estimation de leurs paramètres.

Tableau 1.1. Lois incorporées dans le logiciel ***AJUST***.

Lois	**Références**
gamma	Bobée et Ashkar (1991), Perreault *et al.* (1992c)
Pearson Type 3	Bobée et Ashkar (1991), Perreault *et al.* (1992c)
log-Pearson Type 3	Bobée et Ashkar (1991), Perreault *et al.* (1992c)
gamma généralisée	Bobée et Ashkar (1991), Perreault *et al.* (1992c)
gamma inverse	Kotz et Johnson (1983)
GEV	Perreault et Bobée (1992a)
Gumbel	Perreault et Bobée (1992a)
Weibull	Perreault et Bobée (1992b)
normale	Perreault et Bobée (1992d)
log-normale à 2 paramètres	Aitchison et Brown (1957)
log-normale à 3 paramètres	Aitchison et Brown (1957)
exponentielle	Lehmann (1983)
Halphen Type A	Présent rapport
Halphen Type B	Présent rapport
Halphen Type B^{-1}	Présent rapport

La plupart des distributions du Tableau 1.1 sont utilisées fréquemment dans divers domaines, dont l'hydrologie statistique. Toutefois, les lois de Halphen, qui ont été développées spécifiquement pour représenter les débits, sont moins connues par les hydrologues statisticiens.

Alors qu'il oeuvrait à titre de statisticien à Électricité de France (EDF) au milieu du siècle, Étienne Halphen avait comme tâche la modélisation des débits mensuels observés. Pour ce faire, il a construit une famille de lois de probabilité à trois paramètres en s'appuyant principalement sur sa connaissance des caractéristiques statistiques de séries de débits. Les distributions de Halphen ont été présentées de manière globale, pour une première fois, par Morlat (1956). C'est ensuite le professeur Jacques Bernier, lui aussi de l'EDF comme Morlat et Halphen, qui nous a montré l'intérêt de ces lois et suggéré d'en faire une étude plus approfondie en vue de leur application en hydrologie.

Même si les formes qu'admettent les lois de Halphen reposent particulièrement sur des justifications empiriques, ces distributions possèdent néanmoins d'intéressantes propriétés statistiques théoriques. En particulier, les lois de Halphen appartiennent à la classe exponentielle des lois de probabilité continues et possèdent, pour cette raison, des statistiques exhaustives et complètes pour chacun des paramètres. Cette propriété permet d'affirmer qu'il existe des estimateurs non-biaisés de variance minimum pour chacun des paramètres. Les lois de Halphen sont les seules distributions à trois paramètres, utilisées en hydrologie, qui possèdent cette importante propriété. Cependant, en raison de la complexité de la forme analytique des trois fonctions de densité de probabilité, les lois de Halphen ont été peu utilisées en pratique et ont fait l'objet d'assez peu de développements théoriques. C'est pourquoi, les propriétés des lois Halphen ont été approfondies et quelques nouveaux développements concernant en particulier l'estimation des paramètres, l'estimation des quantiles et le calcul des variances asymptotiques ont été effectués et sont présentés dans ce rapport.

Pour être moins restrictif, car les lois de Halphen peuvent très bien être employées pour représenter des variables aléatoires continues non hydrologiques, nous utilisons dans le présent rapport la définition usuelle d'un quantile x_p de probabilité au dépassement p :

$$x_p = F^{-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, 1-p) \tag{1.3}$$

La notion de période de retour T et la définition du quantile donnée en (1.2) n'est employée que dans certaines applications des lois de Halphen à des observations de débits (sections 3.5, 4.5 et 5.5).

La section qui suit donne un bref historique du développement des lois de Halphen ainsi que les principales raisons qui ont poussé l'hydrologue statisticien français Étienne Halphen à imaginer cet ensemble de nouvelles lois de probabilité à trois paramètres. Cette section s'appuie principalement sur l'article de Morlat (1956).

1.2 Note historique concernant les lois de Halphen

Malgré le nombre important de distributions déjà utilisées en hydrologie à cette époque (en particulier, les lois normale, lognormale et les distributions de la famille de Pearson), Étienne Halphen a jugé nécessaire de développer de nouvelles lois de probabilité (Halphen, 1941). En effet, sa grande expérience en modélisation de données hydrologiques l'avait convaincu qu'aucune distribution utilisée à cette époque n'était globalement adéquate pour pouvoir ajuster convenablement l'ensemble des séries hydrologiques observées en France. Deux raisons concernant la forme des densités ont d'abord motivé sa recherche :

- la décroissance inadéquate des extrémités de la fonction de densité de probabilité des lois usuelles pour répondre aux besoins pratiques en hydrologie;
- les problèmes reliés au paramètre d'origine non nul apparaissant dans la plupart des lois à trois paramètres utilisées à cette époque.

La rapidité de la décroissance de la fonction de densité de probabilité (f.d.p.) des lois usuelles (en particulier, la loi lognormale fréquemment utilisée à cette époque), pour les grandes valeurs de la variable, s'avérait parfois en désaccord avec les constatations empiriques. Il paraissait alors souhaitable de disposer de familles de courbes ayant une plus grande souplesse dans les extrémités (admettant une plus grande variété de vitesses de décroissance pour les grandes valeurs de la variable, cf. section 2.2).

Le problème d'estimation d'un paramètre d'origine non nul est bien connu et Halphen voulait éviter l'emploi de f.d.p. possédant un tel paramètre. De plus, il jugeait très difficile l'assignation d'une borne inférieure non nulle à des variables aléatoires comme le débit d'une rivière. Il lui paraissait alors souhaitable d'avoir une borne inférieure nulle. Plus précisément, les courbes devaient avoir un comportement qui permette d'attribuer une probabilité pratiquement négligeable (mais pas rigoureusement nulle) à un intervalle considéré comme hautement improbable au voisinage de zéro.

D'autre part, outre ces considérations mathématiques liées à la forme des f.d.p., Halphen imposa une condition concernant les propriétés statistiques des estimateurs des paramètres. Ainsi, il fixa comme objectif que les distributions fassent partie de la classe exponentielle des lois de probabilité continues, assurant ainsi que l'estimation des paramètres puisse être effectuée en utilisant des statistiques exhaustives.

Halphen recherchait tout d'abord une loi à deux paramètres destinée à la représentation des débits mensuels et vérifiant les conditions décrites précédemment. Par ailleurs, il avait jugé commode de disposer de la symétrie logarithmique pour la f.d.p. (on entend par symétrie logarithmique la propriété suivant laquelle, à une constante près, X et $1/X$ aient la même densité). Cette condition supplémentaire était probablement motivée par le fait que la loi lognormale possède cette propriété. La f.d.p. la plus simple répondant à ces diverses conditions correspondait à ce que Halphen a appelé "loi harmonique". L'expression de la fonction de densité de probabilité de la loi harmonique est donnée au chapitre 2 (éq. 2.1). Cette distribution à deux paramètres, connue de nos jours sous le nom de loi hyperbolique et étudiée par Barndorff-Nielsen (1978), a été particulièrement utile pour l'évaluation des probabilités attachées aux valeurs mensuelles des indices d'hydraulicité de certaines régions de France (Halphen, 1941). Toutefois, après de nombreuses applications à d'autres types de données hydrologiques, la loi harmonique s'est avérée insuffisante pour représenter adéquatement l'ensemble des données. Halphen explique ce problème par le fait que la loi harmonique ne possède que deux paramètres. Pour obtenir une plus grande souplesse, Halphen a généralisé cette distribution de la façon la plus simple en introduisant un paramètre de forme supplémentaire dans la f.d.p. de la loi harmonique (éq. 2.1). Cette distribution à trois paramètres a été appelée "loi de Halphen Type A" et répond aux principales conditions imposées par Halphen.

La loi de Halphen Type A (éq. 2.2) s'est montrée adéquate dans beaucoup de cas, mais un nombre non négligeable de séries d'observations nécessitaient de nouvelles formes qui prolongeraient les lois de Type A en présentant, en particulier, des comportements différents au voisinage de l'origine. C'est ainsi que Halphen a introduit la loi de Type B (éq. 2.6). Les lois de types A et B satisfaisaient alors à presque tous les besoins. Toutefois, Morlat (1956) mentionne qu'il subsistait certaines lacunes. C'est pourquoi, avec son collaborateur M. Larcher, il a présenté une dernière extension pour obtenir la famille des trois lois de Halphen telle qu'on la connaît actuellement. Il a alors introduit les lois de "Halphen Type B inverse", notée Type B^{-1}. Les distributions du Type B et B^{-1} sont reliées aux fonctions d'Hermite et hypergéométriques confluentes.

La famille des lois de Halphen admet des f.d.p. de formes très variées qui répondent à la plupart des besoins des hydrologues statisticiens. Comme c'est le cas pour les lois de la famille Pearson, on peut dire que les lois de Halphen forment un système complet (cf. chapitre 6, diagramme $\delta_1 - \delta_2$). Elles sont reliées entre elles par leurs cas limites que sont les lois gamma et gamma inverse, ce qui est étudié de manière approfindie à la section 2.3.2. Ces distributions, dont les densités sont données au chapitre 2, jouent un rôle fort important dans la théorie des lois de Halphen. D'ailleurs, ces deux distributions sont les seules lois du système Pearson utilisées pour représenter les données hydrologiques (lois asymétriques) et répondant à tous les critères de Halphen.

La littérature concernant les lois de Halphen est très restreinte et aucun ouvrage n'expose rigoureusement dans les détails leurs propriétés mathématiques et statistiques. Outre les articles de Halphen (1941), Halphen (1955) et Morlat (1956), qui sont les références de base sur le sujet, il n'existe à notre connaissance que quelques ouvrages qui traitent sommairement des lois de Halphen : Le Cam et Morlat (1949) ont appliqué les lois de Halphen Type A et Type B aux débits des rivières françaises ; Morlat (1951) discute brièvement du comportement asymptotique des lois Type A et Type B ; Larivaille (1960) traite de l'estimation du paramètre d'échelle des lois Type A et Type B, les deux paramètres de forme étant fixés ; Guillot (1964) propose une extension de la loi Type A en intégrant dans la densité un paramètre supplémentaire (paramètre de puissance). Cette loi généralisée possède comme cas limite la loi lognormale utilisée fréquemment à cette époque.

Toutefois, trois décennies plus tard, la loi de Halphen Type A réapparaît dans la littérature statistique. En effet, la loi de Type A correspond, à une reparamérisation près, à la distribution appelée gaussienne inverse généralisée qui a été étudiée par Sichel (1975), Barndorff-Neilsen et Halgreen (1977), Barndorff-Neilsen (1978), Blaesild (1978) et, plus récemment, par Jørgensen (1982). Mentionnons que Good (1953) a brièvement fait mention de la loi gaussienne inverse généralisée mais sans en approfondir l'étude. Enfin, Seshadri (1993), dans un ouvrage consacré à la loi gaussienne inverse (cas particulier de la loi gaussienne inverse généralisée), discute très brièvement de la loi de Halphen Type A. Les premiers travaux concernant la distribution gaussienne inverse remonte à Wald (1947) et Tweedie (1947). Ce dernier en a ensuite étudié les propriétés en détail (Tweedie, 1956 ; 1957a, b)

Enfin, les lois de Halphen Type B et Type B^{-1} ne correspondent, à notre connaissance, à aucune loi de probabilité connue contrairement au Type A.

Morlat (1956) mentionne que la famille des lois de Halphen est un outil dont la richesse égale celle des lois de Pearson et qu'elle comble une lacune pour la représentation de phénomènes naturels comme les débits et les précipitations. Nous verrons, dans le présent rapport, comment ces trois lois se complètent harmonieusement.

1.3 Contenu du présent rapport

Ce rapport a comme objectifs de rappeler les propriétés connues des lois de Halphen et de présenter les aspects théoriques et numériques nouveaux développés pour l'utilisation de ces distributions.

Le chapitre 2 donne la définition et présente les principales propriétés mathématiques des trois lois de Halphen. Pour ce faire, on décrit tout d'abord brièvement le système d'équations différentielles s'appliquant aux lois de Halphen. Cette étude, qui utilise sensiblement la même approche que celle employée pour le système des distributions de Pearson, est inspirée des travaux de Dvorak *et al.* (1988) et permet de déduire théoriquement les formes générales des f.d.p. On présente aussi de nombreux graphiques illustrant la variété des formes que les densités des lois de Halphen admettent. Enfin, certains cas particulers ainsi que les liens avec d'autres distributions connues y sont étudiés.

Les chapitres 3, 4 et 5 sont respectivement consacrés aux propriétés statistiques ainsi qu'à l'estimation concernant les lois de Halphen Type A, Type B et Type B^{-1}. La détermination des moments théoriques, l'estimation des paramètres, le calcul des variances asymptotiques et l'estimation des quantiles x_p de probabilité au dépassement p y sont traités. L'estimation des paramètres est effectuée à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance en procédant en deux étapes. L'approche consiste d'abord à obtenir des estimateurs des deux premiers paramètres, le troisième étant fixé. La fonction de vraisemblance logarithmique partiellement maximisée est ensuite employée afin de déterminer le triplets d'estimateurs du maximum de vraisemblance. Un exemple d'application de chaque loi est aussi présenté dans ces chapitres.

Le chapitre 6 fait la synthèse des résultats présentés aux chapitres précédents en mettant l'accent sur les liens entre les lois de Halphen. Pour ce faire, on y présente en particulier un diagramme des moments permettant de représenter les diverses lois de Halphen et leurs cas limites par les points d'un plan (diagramme $\delta_1 - \delta_2$). Les coordonnées sont des fonctions des expressions théoriques correspondant à certains moments de l'échantillon. Il s'agit d'une opération analogue à la représentation classique des lois de Pearson par les coefficients β_1 et β_2 (fonctions des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement). Des exemples d'applications des lois de Halphen y sont aussi présentés. Les données utilisées sont des débits de crues à plusieurs stations du Canada (région Québec-Ontario). On montre comment les trois types de lois de Halphen (types A, B et B^{-1}) et ces cas limites se complètent et peuvent représenter l'ensemble des données.

Le chapitre 7 donne les principales conclusions de l'étude et présente quelques perspectives de recherche future concernant les lois de Halphen.

2 PROPRIÉTÉS MATHÉMATIQUES

2.1 Fonctions de densités de probabilité des lois de Halphen

Comme il a été mentionné à la section 1.2, Halphen a d'abord recherché une loi de probabilité à deux paramètres destinée à la représentation des débits mensuels des stations hydrométriques de France et vérifiant certaines propriétés. Il a alors introduit la loi harmonique dont la f.d.p s'exprime de la manière suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2xK_0(2\alpha)} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] \quad , \qquad x>0 \tag{2.1}$$

où $m>0$ est un paramètre d'échelle et $\alpha>0$ est un paramètre de forme. La constante $K_0(2\alpha)$ est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre nul (Watson, 1966).

Parce que la loi harmonique (éq. 2.1) ne contient que deux paramètres, sa dispersion relative impose entièrement la forme de la fonction de densité de probabilité. Pour obtenir une plus grande souplesse, Halphen (1941) généralisa donc cette loi de la façon la plus simple en introduisant les fonctions de densité de probabilité à trois paramètres du Type A.

Définition 2.1. *Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi de Halphen de Type A de paramètres m, α et υ, notée $F_A(x; m, \alpha, \upsilon)$. Alors sa fonction de densité de probabilité est donnée par :*

$$f_A(x) = \frac{1}{2m^{\upsilon}K_{\upsilon}(2\alpha)} x^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] \quad , \qquad x>0 \tag{2.2}$$

où m (>0) est un paramètre d'échelle, α (>0) et $\upsilon \in \Re$ sont des paramètres de forme.

La constante $K_{\upsilon}(2\alpha)$ dans l'expression (2.1) correspond à la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce (Watson, 1966) et est définie comme suit :

$$\begin{aligned} K_{\upsilon}(2\alpha) &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(t+t^{-1}\right)\right] dt \\ &= \frac{1}{2m^{\upsilon}}\int_0^{\infty} x^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] dx \end{aligned} \tag{2.3}$$

Quelques propriétés mathématiques des fonctions de Bessel sont présentées à l'annexe A. Remarquons qu'en posant le paramètre de forme υ égal à zéro dans l'équation (2.2), on retrouve l'expression de la fonction de densité de probabilité de la loi harmonique (éq. 2.1). La densité $f_A(x)$ est unimodale, à asymétrie positive et ses extrémités décroissent de façon exponentielle (section 2.2). On peut montrer que les lois gamma (G) et gamma inverse (GI) ($1/X \approx$ G)[1] sont des cas limites de la loi de Halphen Type A pour des valeurs spécifiques des paramètres (section 2.3). Les f.d.p. des lois gamma G(x ;α,λ) et gamma inverse GI(x ;α,λ) de paramètres α et λ sont respectivement données par :

$$f_G(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} \exp[-\alpha x] \quad , \qquad x > 0 \tag{2.4}$$

et

$$f_{GI}(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda+1} \exp\left[-\frac{\alpha}{x}\right] \quad , \qquad x > 0 \tag{2.5}$$

Notons que si X suit une loi de gamma ($X \approx G$), alors $1/X$ est distribuée selon une loi gamma inverse ($1/X \approx GI$). Entre ces deux distributions limites, la loi de Type A admet une grande variétés de formes toutes intéressantes pour représenter des données hydrologiques.

Suite à une étude intensive de l'adéquation de la loi Type A à de nombreuses séries d'observations, Halphen a jugé nécessaire d'introduire une nouvelle loi ayant un comportement asymptotique différent au voisinage de zéro. Cette distribution est la loi de Type B.

Définition 2.2. *Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi de Halphen de Type B de paramètres m, α et υ, notée* $F_B(x; m, \alpha, \upsilon)$. *Alors sa fonction de densité de probabilité est donnée par :*

$$f_B(x) = \frac{2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)} x^{2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right)\right] \quad , \qquad x > 0 \tag{2.6}$$

où m (> 0) est un paramètre d'échelle, $\alpha \in \Re$ *et* υ *(> 0) sont des paramètres de forme.*

[1] $X \approx F$ signifie « la variable aléatoire X est distribuée selon la loi F ».

La fonction $ef_\upsilon(\alpha)$, décrite en détail dans Halphen (1955), est appelée fonction exponentielle factorielle et est définie de la façon suivante :

$$ef_\upsilon(\alpha) = 2\int_0^\infty x^{2\upsilon-1} e^{\left(-x^2+\alpha x\right)} dx \tag{2.7}$$

La fonction $ef_\upsilon(\alpha)$, moins connue que la fonction de Bessel, est liée aux polynômes d'Hermite ainsi qu'à la fonction hypergéométrique confluente (Abramovitz *et al.*, 1972). Ces relations de même que les principales propriétés mathématiques des fonctions exponentielles factorielles sont présentées à l'annexe B. La variété des formes admises par la loi de Halphen Type B est très grande puisqu'on trouve parmi elles, selon les valeurs attribuées aux paramètres de forme, des loi unimodales dont le comportement à l'origine prend une forme algébrique quelconque, des lois en J et des lois en S (section 2.2). On peut montrer que la loi de Type B possède aussi comme cas limite la loi gamma (section 2.3).

Enfin, faisant suite aux travaux de Halphen, M. Larcher (Morlat, 1956) a complété la famille des lois de Halphen en introduisant la loi de Type B^{-1}.

Définition 2.3. *Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi de Halphen de Type B^{-1}, de paramètres m, α et υ, notée $F_{B^{-1}}(x; m, \alpha, \upsilon)$. Alors sa fonction de densité de probabilité est donnée par :*

$$f_{B^{-1}}(x) = \frac{2}{m^{-2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)} x^{-2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right] \quad , \qquad x > 0 \tag{2.8}$$

où m (> 0) est un paramètre d'échelle, $\alpha \in \Re$ et υ (> 0) sont des paramètres de forme.

La constante $ef_\upsilon(\alpha)$ correspond à la fonction exponentielle factorielle telle que définie à l'équation (2.7).

La loi de Type B^{-1} est unimodale et peut être déduite de la loi de Type B en appliquant le changement de variable $Y = m/X$ à l'expression (2.6). Ainsi, si X suit une loi de Type B, alors $1/X$ est distribuée selon une loi de Type B^{-1} (cf. section 2.3). On peut montrer alors que la loi de Type B possède comme cas limite la loi gamma inverse (section 2.3).

2.2 Forme des f.d.p des lois de Halphen

Cette section donne quelques outils théoriques, tirés de Dvorak *et al.* (1988) et de Ouarda *et al.* (1994), permettant de caractériser la forme des fonctions de densité de probabilité des lois de Halphen. Nous avons retenus les résultats qui ont un certain intérêt pour l'utilisation des lois de Halphen dans un cadre appliqué, notamment la détermination des valeurs modales et le comportement asymptotique des f.d.p. Pour plus de détails et pour d'autres résultats mathématiques, le lecteur est référé à Dvorak *et al.* (1988) et Ouarda *et al.* (1994).

Plusieurs familles de lois ont été développées dans le but de fournir des approximations à une gamme de distributions empiriques. De telles familles sont appelées systèmes de distributions ou systèmes de courbes de fréquence et leur construction a comme point de départ une équation différentielle. Un des systèmes les plus connus est celui de Pearson développé à la fin du 19ème siècle. Pour chaque type de loi du système Pearson, la f.d.p. $f(x)$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}=\frac{a-x}{b_0+b_1x+b_2x^2} \tag{2.9}$$

Dans cette équation, les valeurs des paramètres a, b_0, b_1 et b_2 déterminent la forme d'une distribution du système Pearson. Par intégration de la relation (2.9), on peut déduire l'ensemble des f.d.p. de cette famille de lois.

Dans le but d'approfondir les fondements théoriques et de définir les propriétés mathématiques des lois de Halphen, Dvorak *et al.* (1988) ont appliqué cette approche aux lois de Halphen. En effet, partant des fonctions de densité de probabilité (2.2), (2.6) et (2.8) ces auteurs ont déterminé les équations différentielles s'appliquant aux distributions de Halphen. Ils ont pu ainsi décrire mathématiquement les différentes formes de ces lois. Dvorak *et al.* (1988) ont montré que les trois types de f.d.p. de Halphen satisfont l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{x^q} \tag{2.10}$$

Le Tableau 2.1 donne, pour chaque loi de Halphen, les valeurs des paramètres de l'équation différentielle (2.10).

Tableau 2.1. Paramètres de l'équation différentielle des lois de Halphen.

	Paramètre de l'équation			
Loi de Halphen	q	a_0	a_1	a_2
Type A	2	αm	$\upsilon-1$	$-\alpha/m$
Type B	1	$2\upsilon-1$	α/m	$-2/m^2$
Type B^{-1}	3	$2m^2$	$-\alpha m$	$-(2\upsilon+1)$

Pour chaque type de loi de Halphen, la valeur modale est obtenue en annulant la dérivée première de la f.d.p. (éq. 2.2, 2.6 ou 2.8). Ces dérivées peuvent être déduites aisément à partir de l'équation différentielle générale (2.10) et des paramètres donnés au tableau 2.1. On constate alors, pour les trois types de distribution, que la dérivée $df(x)/dx$ s'annule si $f(x)=0$ ou si le trinôme $a_0+a_1x+a_2x^2=0$. Or, une telle équation quadratique admet comme solution x_M qui s'exprime comme suit :

$$x_M=-\frac{a_1}{2a_2}\pm\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2}} \tag{2.11}$$

En examinant l'équation (2.11), on peut déduire que les fonctions de densité de probabilité des lois de Halphen admettent trois types généraux de formes de courbes (Dvorak *et al.*, 1988). Ces catégories dépendent du signe des termes intervenant dans l'expression (2.11). Le tableau 2.2 fait la synthèse des résultats obtenus par Dvorak *et al.* (1988).

Tableau 2.2. Étude générale de l'existence des modes.

TYPE	CONDITION	MODE
I	$a_0/a_2>0$, $(a_1/2a_2)^2>a_0/a_2$ et $a_1/2a_2>0$	Aucun mode
II	$a_0/a_2>0$, $(a_1/2a_2)^2>a_0/a_2$ et $a_1/2a_2<0$	Un mode et un anti-mode
III	$a_0/a_2<0$ et $a_1/2a_2>0$ ou $a_0/a_2<0$ et $a_1/2a_2<0$	Un mode

La figure 2.1 illustre les trois types généraux de formes qu'admettent les fonction de densité de probabilité des lois de Halphen.

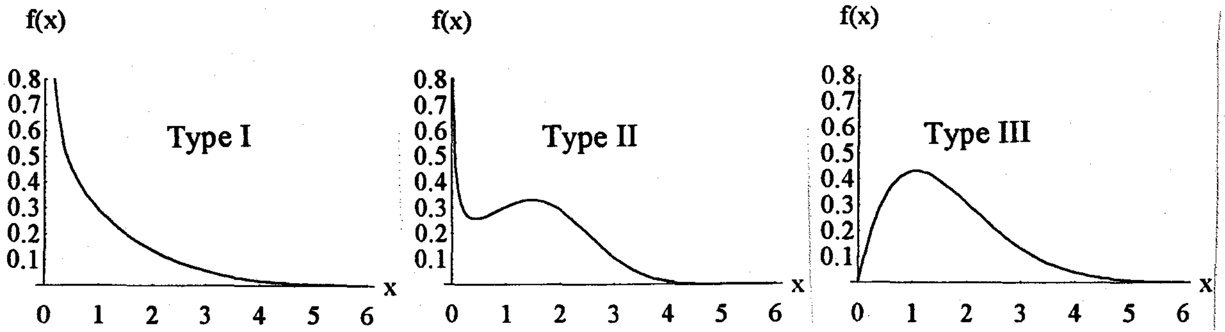

Figure 2.1. Principaux types de forme admis par les f.d.p. des lois de Halphen.

Le cas échéant, les valeurs modales de chaque type de loi de Halphen peuvent être déterminées en substituant dans (2.11) les coefficients a_0, a_1 et a_2 par leurs valeurs respectives, fonctions des paramètres m, α et ν, données au tableau 2.1. Les trois propositions qui suivent donnent les expressions des modes et anti-modes des trois lois de Halphen.

PROPOSITION 2.1. *La f.d.p. de la loi de Halphen Type A de paramètres m, α et υ (éq. 2.2) est strictement unimodale, son mode s'exprimant de la manière suivante* :

$$x_M = m\left[\frac{\upsilon-1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\upsilon-1}{2\alpha}\right)^2 + 1}\right] \tag{2.12}$$

Démonstration. En substituant les valeurs des coefficients a_0, a_1 et a_2 par leurs valeurs respectives fonctions des paramètres m, α et υ données au tableau 2.1, on vérifie aisément que la loi de Type A ne respecte que la condition III du tableau 2.2 ($a_0/a_2 = -m^2 < 0$). L'équation (2.11) est ensuite employée pour déterminer l'expression (2.12) (en remplaçant les paramètres par leurs valeurs données au tableau 2.1). ■

PROPOSITION 2.2. *La f.d.p. de la loi de Type B de paramètres m, α et υ (éq. 2.6) :*

(1) n'admet aucun mode si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:

- $-\alpha/4 > 0$ et $\upsilon < 0.5$
- $(-\alpha/4)^2 \leq 0.5 - \upsilon$

(2) est unimodale si $-\alpha/4 \neq 0$ et $\upsilon \geq 0.5$, son mode étant donné par:

$$x_M = m\left[\frac{\alpha}{4} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \upsilon - 0.5}\right] \tag{2.13}$$

(3) possède deux extrema si $\alpha \le 0$, $\upsilon < 0.5$ et $(-\alpha/4)^2 > 0.5 - \upsilon$ (un mode et un anti-mode). Son mode correspond à l'équation (2.13) et son anti-mode s'exprime comme suit:

$$x'_M = m\left[\frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \upsilon - 0.5}\right] \tag{2.14}$$

Démonstration. On procède de la même façon que pour la proposition 2.1. On vérifie alors aisément que la loi de Type B peut correspondre au 3 types de forme du tableau 2.2 (cf. Dvorak *et al.* 1988). ■

PROPOSITION 2.3. *La f.d.p. de la loi de Halphen Type B^{-1} de paramètres m, α et υ (éq. 2.8) est strictement unimodale, son mode s'exprimant de la manière suivante :*

$$x_M = m\left[-\frac{\alpha}{4\upsilon+2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{4\upsilon+2}\right)^2 + \frac{2}{2\upsilon+1}}\right] \tag{2.15}$$

Démonstration. On procède de la même manière qu'à la proposition 2.1. On vérifie alors, comme pour la loi de Type A, que la loi de Type B^{-1} ne respecte que la condition III du tableau 2.2 (cf. Dvorak *et al.* 1988). ■

Pour déterminer les points d'inflexion d'une f.d.p., il suffit d'annuler la dérivée seconde de la fonction de densité de probabilité $f(x)$. On peut montrer (Dvorak *et al.*, 1988) que les points d'inflexion des f.d.p. des lois de Halphen sont obtenus en résolvant une équation polynomiale. Le tableau 2.3 donne, pour chacune des lois de Halphen, l'expression à résoudre.

Tableau 2.3. Équations polynomiales permettant de déterminer les points d'inflexion.

Loi de Halphen	Équation quadratique à résoudre
A	$g^2(x) - 2xg(x) + x^2h(x)$
B	$g^2(x) - g(x) + xh(x)$
B^{-1}	$g^2(x) - 3x^2g(x) + x^3h(x)$

Note: $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ et $h(x) = dg(x)/dx = a_1 + 2a_2x$ (a_0, a_1 et a_2 donnés au tableau 2.1).

D'autre part, il peut être intéressant d'étudier la vitesse de décroissance de l'extrémité droite des f.d.p. (pour de très grandes valeurs de la variable) des lois de Halphen et de la comparer avec celle d'autres lois fréquemment utilisées en hydrologie (par exemple, normale, lognormale, Gumbel et gamma). Les différences entre les comportements asymptotiques de lois de probabilité sont généralement plus apparentes si on exprime les quantiles de la variable aléatoire X (par exemple, les crues de conception) en fonction de leur période de retour T (rappelons que $T = 1/p$, où p est la probabilité au dépassement, cf. section 1.1). C'est ce que certains auteurs, notamment Morlat (1951), Schuster (1984) et Ouarda *et al.* (1994), ont fait. Ils ont montrés, en particulier, que les quantiles de la variable aléatoire X se comportaient, pour de grandes valeurs, comme les fonctions suivantes de T :

- $\ln T$, pour les lois gamma, Gumbel et Halphen Type A ;
- $\sqrt{\ln T}$, pour les lois normale et Halphen Type B ;
- $\exp\left(\sqrt{\ln T}\right)$, pour la loi lognormale ;
- $T^{1/2\upsilon}$, pour la loi de Type B^{-1}.

La figure 2.2 illustre ces différents comportement asymptotiques. L'axe des abscisses correspond à la période de retour T et l'axe des ordonnées au quantile. Les fonctions de T représentant le comportement asymptotiques de diverses distributions y sont tracées.

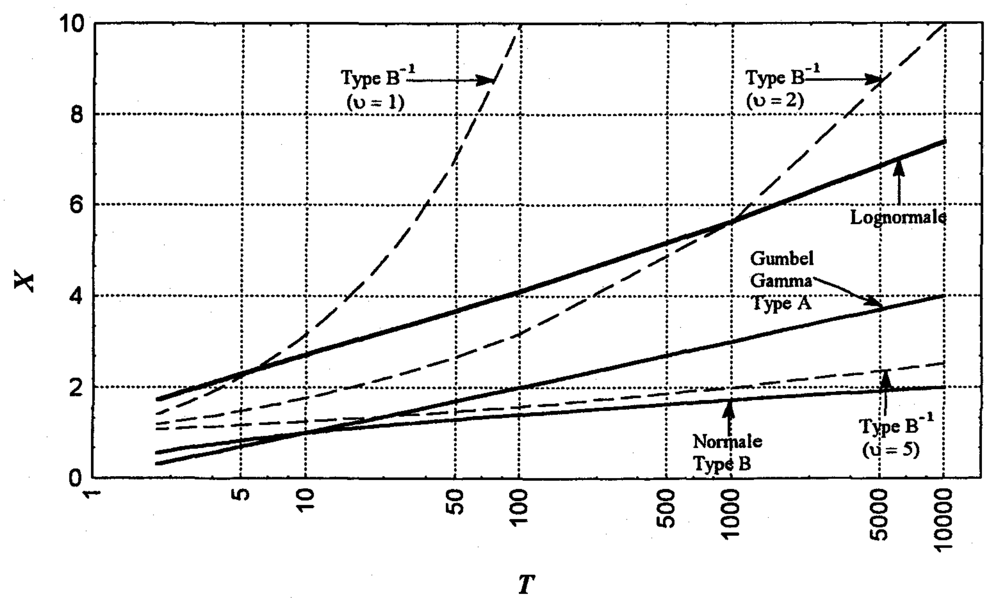

Figure 2.2. Comportement asymptotique des f.d.p. des lois de Halphen et de diverses distributions employées en hydrologie.

Pour comparer les comportements asymptotiques de différentes lois à partir de la figure 2.2, il faut examiner la variation du quantile lorsque la période de retour T augmente. Cet examen revient donc à comparer les dérivées des courbes par rapport à T. Ces dérivées sont tracées à la figure 2.3 et permettent de mieux comparer les comportements asymptotiques des lois considérées. En effet, plus les valeurs de la dérivée sont grandes plus la f.d.p. décroît lentement vers zéro pour de grandes valeurs de la variable aléatoire.

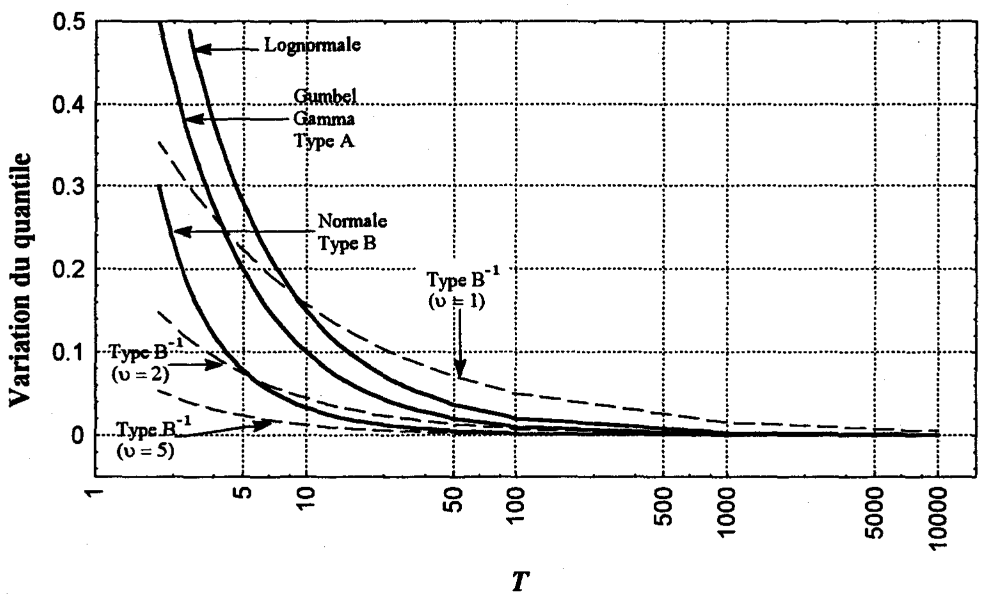

Figure 2.3. Variation des quantiles pour les comportements asymptotiques de la figure 2.2.

On tire des figures 2.2 et 2.3 les observations suivantes :

- Les lois Gumbel, gamma et Halphen Type A admettent un comportement asymptotique identique pour de grandes valeurs de la variable aléatoire. Les lois normale et Halphen Type B ont le même comportement asymptotique mais leur f.d.p. décroît plus rapidement que celle des lois Gumbel, gamma et Halphen Type A pour de grandes valeurs de la variable aléatoire.

- Le comportement asymptotique de la loi lognormale (figure 2.2) et sa dérivée (figure 2.3) traduisent une décroissance plus lente pour cette f.d.p. que pour celle des lois de Halphen et des lois Gumbel, gamma et normale. Ce type de comportement asymptotique est à la base du développement des lois de Halphen (cf. section 1.2). En effet, Halphen avait constaté que la décroissance lente de la f.d.p. de la loi lognormale, souvent employée à son époque, s'avérait parfois en désaccord avec les constatations empiriques.

- Le comportement asymptotique de la loi de Halphen Type B^{-1} varie avec le paramètre de forme υ. Cette loi peut admettre tout l'éventail des vitesses de décroissance pour les grandes valeurs de la variable aléatoire. Pour υ petit, la f.d.p. tend très lentement vers zéro et la vitesse de décroissance augmente avec υ (cf. figure 2.3).

Une classification similaire de lois de probabilité peut aussi être réalisée pour l'extrémité gauche de la f.d.p. On examine alors le comportement de la densité pour de petites valeurs de la variable aléatoire. Schuster (1984) discute de ce problème.

Le système de lois de Halphen présente une grande variété de formes de courbe (unimodale, un mode et un anti-mode, aucun mode, décroissance lente, moyenne ou rapide pour de grandes valeurs de la variable, etc.). Pour illustrer les formes qu'admettent les f.d.p., les figures 2.4 à 2.6 présentent, pour certaines valeurs des paramètres de forme α et υ, les densités des lois de types A, B et B^{-1} respectivement. Le paramètre m a été choisi de sorte que la variance théorique de chaque distribution soit égale à 1. Les f.d.p. des lois de types A (figure 2.4) et B^{-1} (figure 2.6) sont toujours unimodales et à asymétrie positive. La variété des formes admises par la loi de Halphen Type B (figure 2.5) est plus grande puisqu'on trouve parmi elles, outre des lois unimodales, des lois en J, des lois en S ainsi que des lois tronquées.

2.3 Liens entre les lois de Halphen et avec d'autres distributions

Cette section est consacrée à certaines propriétés de base des lois de Halphen et aux liens qu'elles ont avec diverses distributions souvent employées en hydrologie statistique. Un ensemble de propositions établissant ces propriétés sont donc présentées dans ce qui suit.

2.3.1 Propriétés de base

La proposition qui suit stipule qu'une loi de Halphen de Type A, B ou B^{-1} demeure une distribution de Halphen du même type suite à un changement d'échelle.

PROPOSITION 2.4. *Considérons la variable aléatoire* $Y = |k|X$, *pour tout* $k \in \Re$. *Alors,*

(i) $X \approx F_A(x; m, \alpha, \upsilon) \;\Rightarrow\; Y \approx F_A(y; |k|m, \alpha, \upsilon)$

(ii) $X \approx F_B(x; m, \alpha, \upsilon) \;\Rightarrow\; Y \approx F_B(y; |k|m, \alpha, \upsilon)$

(iii) $X \approx F_{B^{-1}}(x; m, \alpha, \upsilon) \;\Rightarrow\; Y \approx F_{B^{-1}}(y; |k|m, \alpha, \upsilon)$

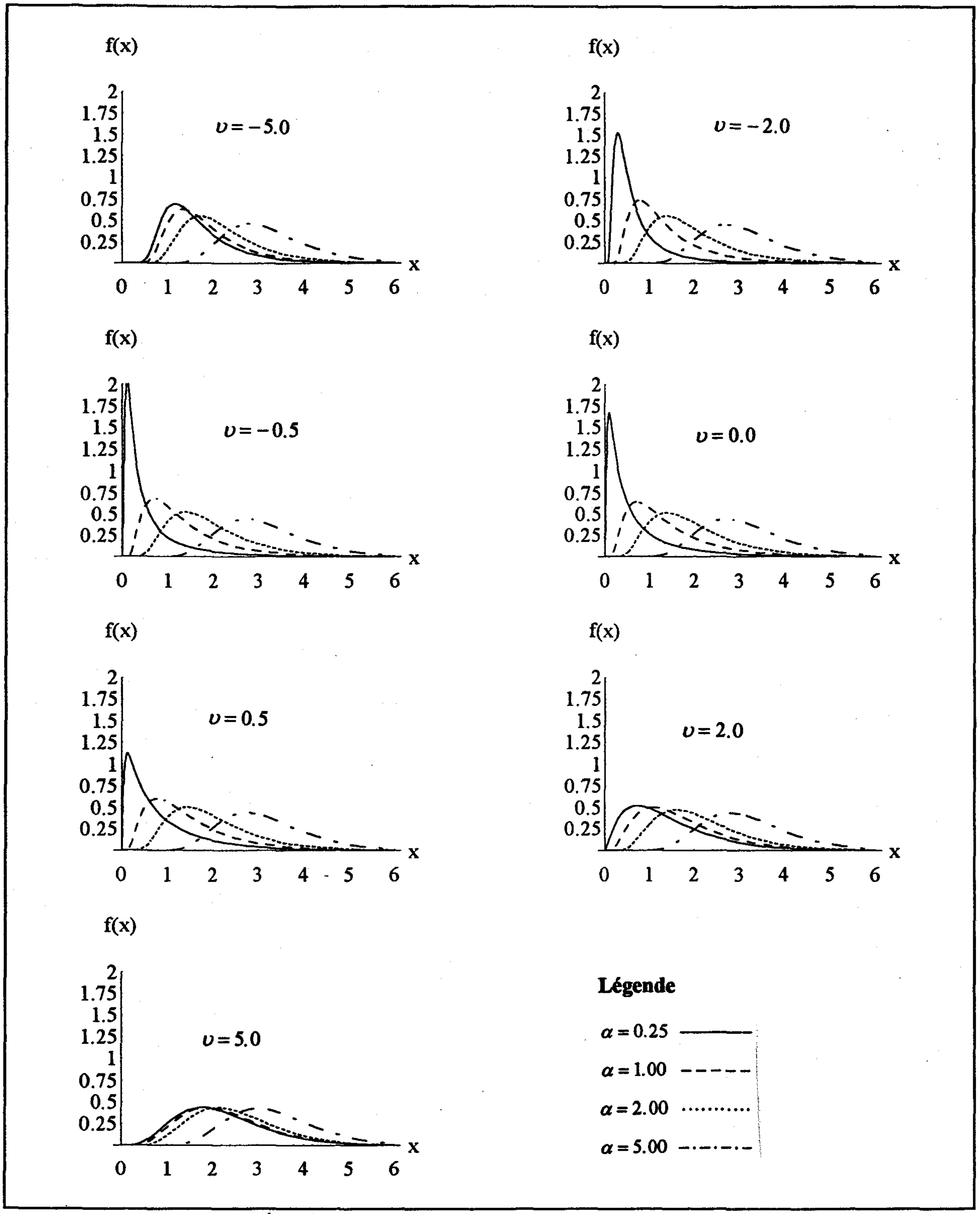

Figure 2.4. Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen Type A.

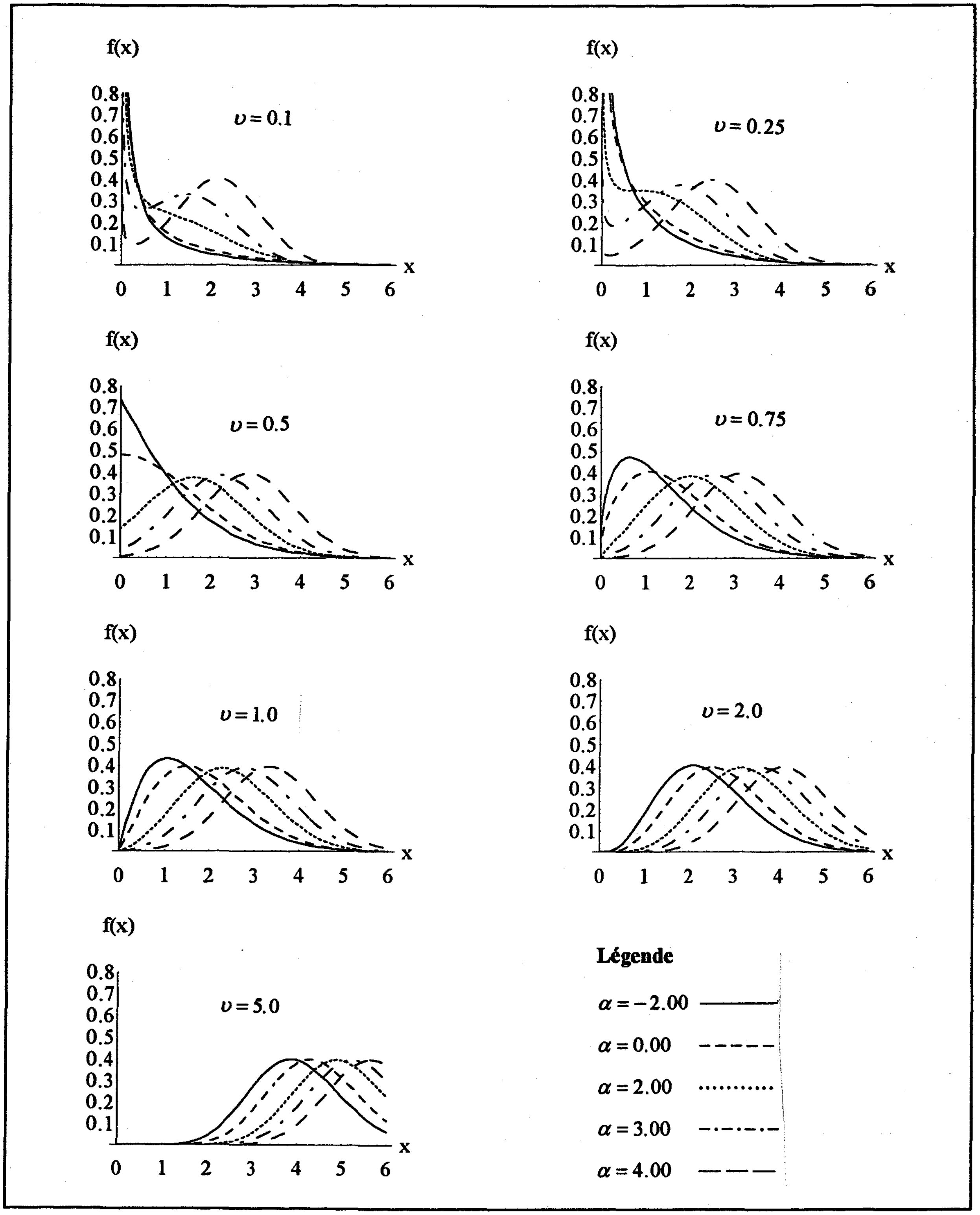

Figure 2.5. Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen Type B.

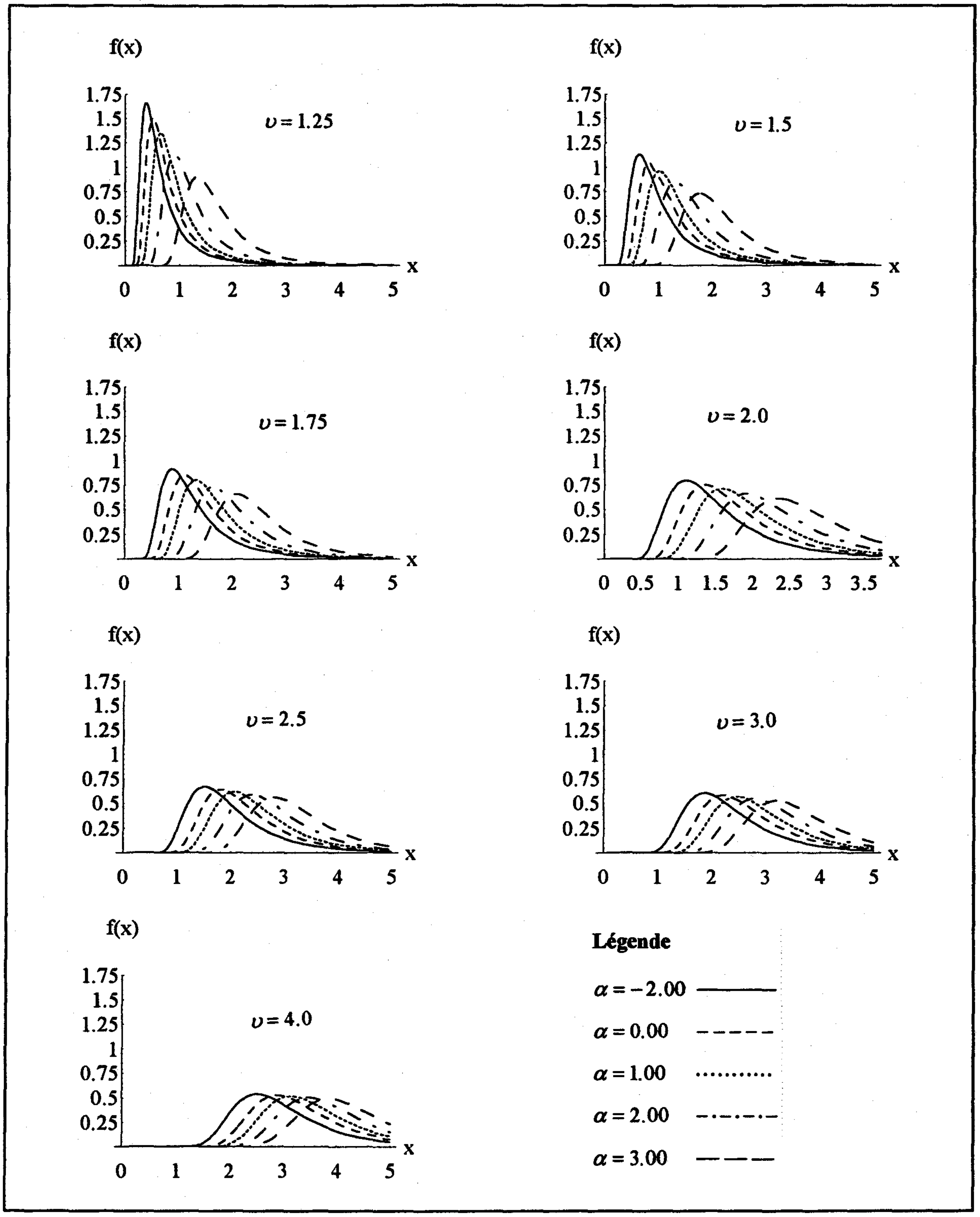

Figure 2.6. Fonction de densité de probabilité de la loi de Halphen Type B^{-1}.

Démonstration. Cette propriété est directe pour toute loi ayant un paramètre d'échelle. Pour la loi de Halphen de Type A, le paramètre d'échelle est m et on montre aisément le résultat par un changement de variable. Considérons la variable aléatoire $Y = |k|X$, alors la f.d.p. de Y est donnée par:

$$f_Y(y) = f_A\left(\frac{y}{|k|}\right)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2(|k|m)^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)} y^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{y}{|k|m} + \frac{|k|m}{y}\right)\right] \quad , \qquad y > 0$$

d'où le résultat, c'est-à-dire $Y = |k|X$ est distribuée selon une loi $F_A(x; m', \alpha, \upsilon)$ avec $m' = |k|m$. La démonstration est identique pour les lois de Type B et de Type B^{-1}. ■

Cette propriété, qui est commune à la plupart des lois de probabilité employées en hydrologie, nous assure que les résultats issus d'un ajustement des lois de Halphen sont comparables quelle que soit l'unité de mesure. Elle est aussi intéressante dans une perspective d'étude régionale, où l'hypothèse de base consisterait, à un paramètre d'échelle près, en une homogénéité en loi des débits de différents sites voisins.

Comme il a déjà été mentionné à la section 1.2, Halphen avait jugé souhaitable que le système de lois vérifie la symétrie logarithmique, c'est-à-dire, qu'à une constante près, si X suit une loi de Halphen alors $1/X$ aussi. Cette condition était probablement motivée par le fait que la loi lognormale, fréquemment utilisée à cette époque, possède cette propriété. Les deux propositions qui suivent démontrent cette propriété.

PROPOSITION 2.5. *Si $Y = 1/X$, alors* $X \approx F_A(x; m, \alpha, \upsilon) \quad \Rightarrow \quad Y \approx F_A(y; m^{-1}, \alpha, -\upsilon)$.

Démonstration. Cette propriété peut être déduite directement en applicant le changement de variable $Y = 1/X$. En effet, la densité de Y peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)} \left(\frac{1}{y}\right)^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{y}{m^{-1}} + \frac{m^{-1}}{y}\right)\right] \left|-\frac{1}{y^2}\right| \\ &= \frac{1}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)} y^{-\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{y}{m^{-1}} + \frac{m^{-1}}{y}\right)\right] \quad , \qquad y > 0 \end{aligned}$$

ce qui, en vertu de la propriété (A.8) des fonctions de Bessel ($K_{\upsilon}(z) = K_{-\upsilon}(z)$), correspond bien à la f.d.p. de la loi de Halphen Type A de paramètres m^{-1}, α et $-\upsilon$. ■

PROPOSITION 2.6. *Si $Y = 1/X$, alors* $X \approx F_B(x; m, \alpha, \upsilon) \quad \Rightarrow \quad Y \approx F_{B^{-1}}(y; m^{-1}, \alpha, \upsilon)$.

Démonstration. On procède de la même façon qu'à la proposition 2.5. En posant $Y = 1/X$ dans l'expression de la f.d.p. de la loi de Type B (éq. 2.6), on obtient :

$$f_Y(y) = \frac{2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)} \left(\frac{1}{y}\right)^{2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{1}{my}\right)^2 + \alpha\left(\frac{1}{my}\right)\right] \left|-\frac{1}{y^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2m^{2\upsilon} ef_\upsilon(2\alpha)} y^{-2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{m^{-1}}{y}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m^{-1}}{y}\right)\right] \quad , \qquad y > 0$$

ce qui correspond à la f.d.p. de la loi de Type B^{-1} de paramètres m^{-1}, α et υ (éq. 2.8). ■

La réciproque de cette dernière proposition est évidemment vraie et se démontre de la même manière. En effet, si X suit une loi de Type B^{-1} alors $Y = 1/X$ est distribuée selon une loi de Halphen de Type B ($X \approx F_{B^{-1}}(x; m, \alpha, \upsilon) \quad \Rightarrow \quad Y \approx F_B(y; m^{-1}, \alpha, \upsilon)$).

On note finalement que, quel que soit le type de loi de Halphen, le paramètre de forme α demeure inchangé suite à un changement d'échelle ou à une transformation réciproque de la variable aléatoire.

2.3.2 Lien avec les lois gamma et gamma inverse

À la section 2.1, il a été mentionné que les lois de Halphen possèdent comme cas limites les lois gamma (G) et gamma inverse (GI), dont les expressions des f.d.p. sont données respectivement aux équations (2.4) et (2.5). Ces distributions jouent un rôle important dans la théorie des lois de Halphen, en particulier dans l'estimation des paramètres (cf. chapitres 3, 4 et 5). Les lois gamma et gamma inverse sont d'ailleurs les seules lois de la famille du système Pearson vérifiant toutes les caractéristiques imposées par Halphen pour la construction de son système de distributions (notamment, aucun paramètre d'origine et appartenant à la classe exponentielle des lois de probabilité, cf. section 1.2).

Les propositions 2.7, 2.8 et 2.9 montrent comment les lois de Halphen de types A, B et B^{-1} tendent vers les lois gamma et gamma inverse. Pour démontrer ces résultats, on doit intervenir simultanément sur les paramètres α et m pour ne pas obtenir une distribution dégénérée.

PROPOSITION 2.7. *Soit la variable aléatoire* $X \approx F_A(x; m, \alpha, \upsilon)$.

(i) *Considérons que* α *et* m *tendent en même temps vers zéro de telle sorte que* $\alpha m \to 0$ *et* $\alpha / m \to \omega$ *un nombre fini strictement positif. Alors, si* $\upsilon > 0$, $X \approx G(y; \omega = \alpha/m, \upsilon)$;

(ii) *Considérons que* α *tend vers zéro et* m *vers l'infini en même temps de telle sorte que* $\alpha / m \to 0$ *et* $\alpha m \to \theta$ *un nombre fini strictement positif. Alors, si* $\upsilon < 0$, $X \approx GI(y; \theta = \alpha m, -\upsilon)$.

Démonstration. Pour démontrer le résultat (i), on applique la reparamétrisation $\alpha = \sqrt{\theta\omega}$ et $m = \sqrt{\theta/\omega}$ à la f.d.p. (2.2). On a alors $\theta = \alpha m$, $\omega = \alpha / m$ et :

$$f_A(x) = \frac{(\omega/\theta)^{\upsilon/2}}{2K_\upsilon(2\sqrt{\theta\omega})} x^{\upsilon-1} \exp\left[-\left(\omega x + \frac{\theta}{x}\right)\right] \quad , \quad x > 0$$

Cette expression correspond à la f.d.p. de la loi gaussienne inverse généralisée telle que présentée dans Jørgensen (1982). En appliquant la limite lorsque $\theta = \alpha m$ tend vers zéro, on a que:

$$\lim_{\theta \to 0} f_A(x) = \lim_{\theta \to 0}\left[\frac{(\omega/\theta)^{\upsilon/2}}{2K_\upsilon(2\sqrt{\theta\omega})}\right] x^{\upsilon-1} e^{-\omega x} \quad , \quad x > 0$$

Or, pour z petit, on a (propriété A.9) :

$$K_\upsilon(z) \cong \frac{2^{\upsilon-1}}{z^\upsilon} \Gamma(\upsilon), \quad \upsilon > 0$$

d'où l'on déduit que :

$$\lim_{\theta \to 0} f_A(x) = \lim_{\theta \to 0}\left[\frac{(\omega/\theta)^{\upsilon/2}}{\Gamma(\upsilon)(\theta\omega)^{-\upsilon/2}}\right] x^{\upsilon-1} e^{-\omega x}$$

$$= \frac{\omega^\upsilon}{\Gamma(\upsilon)} x^{\upsilon-1} e^{-\omega x} \quad , \quad x > 0$$

Cette expression correspond, pour $\upsilon > 0$, à la f.d.p. de la loi gamma de paramètres $\omega = \alpha/m$ et υ (cf. expression 2.4).

Le résultat (ii) se démontre de façon tout à fait analogue, en appliquant la même reparamétrisation mais en faisant tendre vers zéro $\omega = \alpha/m$. On a alors :

$$\lim_{\omega\to 0} f_A(x) = \lim_{\omega\to 0}\left[\frac{(\omega/\theta)^{\upsilon/2}}{2K_\upsilon(2\sqrt{\theta\omega})}\right] x^{\upsilon-1}\ e^{-\theta/x}$$

Puisque υ est négatif ($|\upsilon| = -\upsilon$) et que $K_\upsilon(z) = K_{-\upsilon}(z)$ (propriété A.8), on peut réécrire cette expression de la manière suivante :

$$\lim_{\theta\to 0} f_A(x) = \lim_{\theta\to 0}\left[\frac{(\omega/\theta)^{-|\upsilon|/2}}{2K_{|\upsilon|}(2\sqrt{\theta\omega})}\right]\left(\frac{1}{x}\right)^{|\upsilon|+1} e^{-\theta/x}$$

Or, de la propriété (A.9) de la fonction de Bessel, on déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0} f_A(x) &= \lim_{\theta\to 0}\left[\frac{(\omega\theta)^{|\upsilon|/2}}{\Gamma(|\upsilon|)(\omega/\theta)^{|\upsilon|/2}}\right]\left(\frac{1}{x}\right)^{|\upsilon|+1} e^{-\theta/x} \\ &= \frac{\theta^{|\upsilon|}}{\Gamma(|\upsilon|)}\left(\frac{1}{x}\right)^{|\upsilon|+1} e^{-\theta/x}\end{aligned}$$

ce qui correspond, pour $\upsilon < 0$, à la f.d.p. de la loi gamma inverse de paramètres $\theta = \alpha m$ et $-\upsilon$ (cf. expression 2.5). ■

PROPOSITION 2.8. *Soit la variable aléatoire $X \approx F_B(x; m, \alpha, \upsilon)$ et considérons que α et m tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ en même temps, de telle sorte que $\alpha m \to -\infty$ et $\alpha / m \to -\omega$, où ω est un nombre fini strictement positif. Alors, $X \approx G(y; \omega = -\alpha/m, 2\upsilon)$.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, on applique la reparamétrisation $\alpha = -\sqrt{\theta\omega}$ et $m = \sqrt{\theta/\omega}$ à la f.d.p. (2.6). On a alors $\theta = -\alpha\, m$, $\omega = -\alpha / m$ et :

$$f_B(x) = \frac{2}{(\theta/\omega)^{\upsilon}\, ef_\upsilon(-\sqrt{\theta\omega})}\, x^{2\upsilon-1} \exp\left[-\frac{\omega}{\theta}x^2 - \omega x\right], \qquad x > 0$$

En faisant tendre θ vers l'infini, c'est-à-dire lorsque $\alpha m \to -\infty$, et en vertu du développement asymptotique de la fonction exponentielle factorielle pour des argument tendant vers $-\infty$ (propriété B.9), on a :

$$\lim_{\theta\to\infty} f_B(x) = \lim_{\theta\to\infty}\left[\frac{2}{(\theta/\omega)^{\upsilon} ef_{\upsilon}(-\sqrt{\theta\omega})}\right] x^{2\upsilon-1}\, e^{-\alpha x}$$

$$= \lim_{\theta\to\infty}\left[\frac{2(\theta\omega)^{\upsilon}}{(\theta/\omega)^{\upsilon}\, 2\Gamma(2\upsilon)\left[1-2\upsilon(2\upsilon+1)(\theta\omega)^{-1}\right]}\right] x^{2\upsilon-1}\, e^{-\alpha x}$$

$$= \lim_{\theta\to\infty}\left[\frac{\omega^{2\upsilon}}{\Gamma(2\upsilon)\left[1-2\upsilon(2\upsilon+1)(\theta\omega)^{-1}\right]}\right] x^{2\upsilon-1}\, e^{-\alpha x}$$

$$= \frac{\omega^{2\upsilon}}{\Gamma(2\upsilon)} x^{2\upsilon-1}\, e^{-\alpha x}$$

ce qui correspond à la f.d.p. de la loi gamma de paramètres $\omega = -\alpha/m$ et 2υ (cf. expression 2.4). ■

Proposition 2.9. *Soit la variable aléatoire $X \approx F_{B^{-1}}(x; m, \alpha, \upsilon)$ et considérons que α et m tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ en même temps, de telle sorte que $\alpha/m \to -\infty$ et $\alpha m \to -\theta$, où ω est un nombre fini strictement positif. Alors, $X \approx GI(y; \theta = -\alpha m, 2\upsilon)$.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, on applique la reparamétrisation $\alpha = -\sqrt{\theta\omega}$ et $m = \sqrt{\theta/\omega}$ à la f.d.p. (2.6). On a alors $\theta = -\alpha m$, $\omega = -\alpha/m$ et :

$$f_{B^{-1}}(x) = \frac{2}{(\theta/\omega)^{-\upsilon} ef_{\upsilon}(-\sqrt{\theta\omega})} x^{-2\upsilon-1} \exp\left[-\frac{\theta}{\omega}x^{-2} - \theta x^{-1}\right], \qquad x > 0$$

En faisant tendre ω vers l'infini, c'est-à-dire lorsque $\alpha/m \to -\infty$, et en appliquant la propriété (B.9) de la fonction exponentielle factorielle, on a :

$$\lim_{\omega\to\infty} f_{B^{-1}}(x) = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{2}{(\theta/\omega)^{-\upsilon} ef_{\upsilon}(-\sqrt{\theta\omega})}\right] x^{-2\upsilon-1}\, e^{-\theta/x}$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{2(\theta\omega)^{\upsilon}(\theta/\omega)^{\upsilon}}{2\Gamma(2\upsilon)\left[1-2\upsilon(2\upsilon+1)(\theta\omega)^{-1}\right]}\right] x^{-2\upsilon-1}\, e^{-\theta/x}$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{\theta^{2\upsilon}}{\Gamma(2\upsilon)\left[1-2\upsilon(2\upsilon+1)(\theta\omega)^{-1}\right]}\right] x^{-2\upsilon-1}\, e^{-\theta/x}$$

$$= \frac{\theta^{2\upsilon}}{\Gamma(2\upsilon)}\left(\frac{1}{x}\right)^{2\upsilon+1} e^{-\theta/x}$$

qui n'est d'autre que l'expression de la f.d.p. de la loi gamma inverse de paramètres $\theta = -\alpha m$ et 2υ (cf. expression 2.5). ■

2.3.3 Approximation normale

Les propriétés de la loi normale sont très bien connues et cette distribution constitue souvent la principale hypothèse de base de méthodes et de modèles statistiques (test d'hypothèses, régression, etc.). Il est alors très intéressant de connaître la nature du lien entre une distribution donnée et la loi normale. En effet, il peut être fort utile de pouvoir obtenir une approximation de la distribution qui nous intéresse par la loi normale. Dans cette section, nous montrons comment les lois de Halphen correspondent à la loi normale pour υ fixé lorsque le paramètre α tend vers l'infini. Nous considérons d'abord le cas de la loi de Halphen Type A.

PROPOSITION 2.10. *Soit la variable aléatoire* $X \approx F_A(x; m, \alpha, \upsilon)$. *Alors, si* $\alpha \to +\infty$, $U = \sqrt{2\alpha}\left(X/m - 1\right) \approx N(0,1)$.

Démonstration. Pour démontrer le résultat, on effectue d'abord le changement de variable $U = \sqrt{2\alpha}\left(X/m - 1\right)$ dans la f.d.p. (2.2) et on déduit que :

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= f_A\left[m\left(\frac{u}{\sqrt{2\alpha}} + 1\right)\right]\left|\frac{m}{\sqrt{2\alpha}}\right| \\
&= \frac{m^{\upsilon-1}}{2m^{\upsilon}K_\upsilon(2\alpha)}\left(\frac{u}{\sqrt{2\alpha}} + 1\right)^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{u}{\sqrt{2\alpha}} + 1 + \frac{\sqrt{2\alpha}}{u + \sqrt{2\alpha}}\right)\right]\frac{m}{\sqrt{2\alpha}} \\
&= \frac{e^{-2\alpha}}{2\sqrt{2\alpha}\,K_\upsilon(2\alpha)}\left(\frac{u}{\sqrt{2\alpha}} + 1\right)^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{u}{\sqrt{2\alpha}} + 1 + \frac{\sqrt{2\alpha}}{u + \sqrt{2\alpha}}\right) + 2\alpha\right] \\
&= \frac{e^{-2\alpha}}{2\sqrt{2\alpha}\,K_\upsilon(2\alpha)}\left(\frac{u}{\sqrt{2\alpha}} + 1\right)^{\upsilon-1} \exp\left[\frac{-\alpha u^2 - 2\alpha\sqrt{2\alpha}u - 4\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{2\alpha}\,u + 4\alpha^2}{\sqrt{2\alpha}u + 2\alpha}\right] \\
&= \frac{e^{-2\alpha}}{2\sqrt{2\alpha}\,K_\upsilon(2\alpha)}\left(\frac{u}{\sqrt{2\alpha}} + 1\right)^{\upsilon-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{u^2}{1 + u/\sqrt{2\alpha}}\right], \qquad -\sqrt{2\alpha} < u < +\infty
\end{aligned}
$$

En utilisant le développement asymptotique de la fonction de Bessel pour de grands arguments (propriété A.10), il s'ensuit que cette dernière expression converge point par point vers une loi normale centrée et réduite lorsque $\alpha \to +\infty$. En effet,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} f_U(u) = \lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{e^{-2\alpha}}{2\sqrt{2\alpha}K_\upsilon(2\alpha)}\right]e^{-u^2/2}$$
$$= \lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{e^{-2\alpha}\sqrt{\alpha}}{e^{-2\alpha}g(\alpha)\sqrt{2\alpha\pi}}\right]e^{-u^2/2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}, \qquad -\infty < u < +\infty$$

car

$$g(\alpha) = 1 + \frac{4\upsilon^2-1}{16\alpha} + \frac{(4\upsilon^2-1)(4\upsilon^2-9)}{2!(16\alpha)^2} + \frac{(4\upsilon^2-1)(4\upsilon^2-9)(4\upsilon^2-25)}{3!(16\alpha)^3} + \cdots$$

tend vers 1 lorsque $\alpha \to +\infty$ (cf. propriété A.10). ■

Pour les lois de Haphen de Types B et B^{-1}, on procède de la même manière mais à partir d'une normalisation de la variable qui diffère quelque peu.

PROPOSITION 2.11. *Soit la variable aléatoire* $X \approx F_B(x; m, \alpha, \upsilon)$. *Alors, si* $\alpha \to +\infty$, $U = \sqrt{2}(X/m - \alpha/2) \approx N(0,1)$.

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, on effectue d'abord le changement de variable $U = \sqrt{2}(X/m - \alpha/2)$ dans la f.d.p. (2.6) et on déduit que:

$$f_U(u) = f_B\left[\frac{m}{\sqrt{2}}\left(u + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right]\left|\frac{m}{\sqrt{2}}\right|$$
$$= \frac{2}{m^{2\upsilon}ef_\upsilon(\alpha)}\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^{2\upsilon-1}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^{2\upsilon-1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right]\left|\frac{m}{\sqrt{2}}\right|$$
$$= \frac{1}{2^{\upsilon-1}ef_\upsilon(\alpha)}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^{2\upsilon-1}\exp\left[-\frac{u^2}{2} - \frac{\alpha u}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha u}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha^2}{2}\right]$$
$$= \frac{e^{\alpha^2/4}}{2^{\upsilon-1}ef_\upsilon(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^{2\upsilon-1}\left(\frac{\sqrt{2}u}{\alpha}+1\right)^{2\upsilon-1}e^{-u^2/2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\alpha^{2\upsilon-1}e^{\alpha^2/4}}{2^{\upsilon-1}ef_\upsilon(\alpha)}\left(\frac{\sqrt{2}u}{\alpha}+1\right)^{2\upsilon-1}e^{-u^2/2}, \qquad -\alpha/\sqrt{2} < u < +\infty$$

En utilisant le développement asymptotique de la fonction exponentielle factorielle pour de grands arguments (propriété B.10), cette dernière expression converge point par point vers une loi normale centrée et réduite lorsque $\alpha \to +\infty$. En effet,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to+\infty} f_U(u) &= \lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{2}\alpha^{2\upsilon-1}e^{\alpha^2/4}}{2^{\upsilon-1}ef_\upsilon(\alpha)}\right]e^{-u^2/2} \\
&= \lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{\alpha^{2\upsilon-1}e^{\alpha^2/4}}{\alpha^{2\upsilon-1}e^{\alpha^2/4}h(\alpha)\sqrt{2\pi}}\right]e^{-u^2/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}, \qquad -\infty < u < +\infty
\end{aligned}
$$

car

$$
h(\alpha) = 1 + (2\upsilon-1)(2\upsilon-2)\frac{1}{\alpha^2} + \cdots
$$

tend vers 1 lorsque $\alpha \to +\infty$ (cf. propriété B.10). ■

PROPOSITION 2.12. *Soit la variable aléatoire* $X \approx F_{B^{-1}}(x; m, \alpha, \upsilon)$. *Alors, si* $\alpha \to +\infty$, $U = \sqrt{2}(m/X - \alpha/2) \approx N(0,1)$.

Démonstration. En vertu du lien entre les lois de Types B et B^{-1} (proposition 2.6) et en employant la proposition 2.11, le résultat est direct. On peut aussi démontrer le résultat à l'aide d'un changement de variable. En effet, si $U = \sqrt{2}(m/X - \alpha/2)$, alors de l'équation (2.8) on déduit que :

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= f_{B^{-1}}\left[m\sqrt{2}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^{-1}\right]\left|-m\sqrt{2}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^{-2}\right| \\
&= \frac{2(m\sqrt{2})^{-2\upsilon-1}}{m^{-2\upsilon}ef_\upsilon(\alpha)}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^{2\upsilon+1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right]\left|-m\sqrt{2}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^{-2}\right| \\
&= \frac{1}{2^{\upsilon-1}ef_\upsilon(\alpha)}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^{2\upsilon-1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(u+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}\alpha^{2\upsilon-1}e^{\alpha^2/4}}{2^{\upsilon-1}ef_\upsilon(\alpha)}\left(\frac{\sqrt{2}u}{\alpha}+1\right)^{2\upsilon-1}e^{-u^2/2}, \qquad -\alpha/\sqrt{2} < u < +\infty
\end{aligned}
$$

Cette expression est équivalente à celle obtenue dans la démonstration de la proposition 2.11 et qui converge point par point vers une loi normale centrée et réduite lorsque $\alpha \to +\infty$. ■

2.3.4 Transformation puissance

Pour différentes raisons, il peut être intéressant d'introduire un paramètre supplémentaire aux lois de Halphen. Il est alors naturel d'étudier la forme de la densité de probabilité d'une variable aléatoire X, distribuée selon une loi de Halphen, élevée à une certaine puissance. Les trois propositions suivante donne l'expression de la f.d.p. de cette distribution généralisée pour chacune des lois de Halphen. Ces résultats constituent les outils de base pour établir les relations entre les distributions de Halphen et certaines lois de probabilité bien connues et fréquemment utilisées en hydrologie.

PROPOSITION 2.13. *Soit la variable aléatoire* $X \approx F_A(x; m, \alpha, \upsilon)$. *Alors, la loi de* $Y = X^{1/p}$, *pour* $p \neq 0$, *a comme f.d.p.:*

$$f_Y(y) = \frac{|p|}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)} y^{p\upsilon - 1} \exp\left[-\alpha \left(\frac{y^p}{m} + \frac{m}{y^p} \right) \right] \quad , \qquad x > 0 \tag{2.16}$$

Démonstration. Posons $Y = X^{1/p}$. Alors la f.d.p. de Y est donnée par:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_A(y^p) \left| \frac{dx}{dy} \right| \\ &= \frac{1}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)} y^{p(\upsilon-1)} \exp\left[-\alpha \left(\frac{y^p}{m} + \frac{m}{y^p} \right) \right] \left| p y^{p-1} \right| \\ &= \frac{|p|}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)} y^{p\upsilon - p + p - 1} \exp\left[-\alpha \left(\frac{y^p}{m} + \frac{m}{y^p} \right) \right] \quad , \qquad y > 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat. ∎

PROPOSITION 2.14. *Soit la variable aléatoire* $X \approx F_B(x; m, \alpha, \upsilon)$. *Alors, la loi de* $Y = X^{1/p}$, *pour* $p \neq 0$, *a comme f.d.p.:*

$$f_Y(y) = \frac{2|p|}{m^{2\upsilon} ef_{\upsilon}(\alpha)} y^{2p\upsilon - 1} \exp\left[-\left(\frac{y^p}{m} \right)^2 + \alpha \left(\frac{y^p}{m} \right) \right] \quad , \qquad x > 0 \tag{2.17}$$

Démonstration. On procède de la même façon qu'à la proposition 2.13. ∎

PROPOSITION 2.15. *Soit la variable aléatoire* $X \approx F_{B^{-1}}(x; m, \alpha, \upsilon)$. *Alors, la loi de* $Y = X^{1/p}$, *pour* $p \neq 0$, *a comme f.d.p.:*

$$f_Y(y) = \frac{2|p|}{m^{-2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)} y^{-2p\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{m}{y^p}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{y^p}\right)\right], \qquad x > 0 \qquad (2.18)$$

Démonstration. On procède de la même façon qu'à la proposition 2.13. ■

Notons que si $p = -1$ dans la proposition 2.14, la f.d.p. (2.17) correspond à la loi de Halphen Type B^{-1} et on retrouve la proposition 2.6. Réciproquement, si $p = -1$ dans la proposition 2.15, la f.d.p. (2.18) correspond à la loi de Halphen Type B.

Les valeurs admises par les paramètres *m, α et υ* pour les distributions (2.16), (2.17) et (2.18) sont les mêmes que celles admises par les paramètres des lois d'origine de Halphen. Ainsi, si Y est distribuée selon l'une de ces trois lois, alors la variable aléatoire $X = Y^p$ suit la loi de Halphen correspondante. Les propriétés statistiques des lois de Halphen présentées aux chapitres 3, 4 et 5 peuvent donc être aisément transformées pour déduire celles des distributions généralisées à 4 paramètres (2.16), (2.17) et (2.18).

Les propositions qui suivent montrent, en particulier, que les lois gamma généralisée (GG) et Weibull (W) sont des cas limites des lois généralisées de f.d.p. données en (2.16) et (2.17). Ces distributions et leurs cas particuliers, souvent employées en hydrologie (Perreault, *et al.*, 1992b; Bobée et Ashkar, 1991), sont donc liées aux lois Type A et Type B par une transformation puissance.

PROPOSITION 2.16. *Soit la variable aléatoire* $X \approx F_A(x; m, \alpha, \upsilon)$. *Alors*

(i) *si* $\alpha\, m \to 0$ *et* $\upsilon > 0$, $Y = X^{1/p} \approx GG(y; p, \lambda, \upsilon)$ *où* $\lambda = (\alpha/m)^{1/p}$;

(ii) *si* $\alpha\, m \to 0$ *et* $\upsilon = 1$, $Y = X^{1/p} \approx W(y; p, \lambda)$ *où* $\lambda = (\alpha/m)^{1/p}$.

Démonstration. Ce résultat peut être démontré en appliquant la limite lorsque $\alpha\, m \to 0$ à la f.d.p de la variable aléatoire $Y = X^{1/p}$ donnée en (2.16). Pour éviter le calcul de la limite, nous employons plutôt la proposition 2.7 qui stipule que si $\alpha m \to 0$ et $\upsilon > 0$, alors $X \approx G(x; \omega = \alpha / m, \upsilon)$. On a donc que :

$$f_X(x) = \frac{\omega^\upsilon}{\Gamma(\upsilon)} x^{\upsilon-1} e^{-\omega x}, \qquad x > 0$$

En appliquant ensuite le changement de variable $Y = X^{1/p}$, on obtient:

$$f_Y(y) = \frac{\omega^{\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)} y^{p(\upsilon-1)} e^{-\omega y^p} |py^{p-1}|$$
$$= \frac{|p|\omega^{\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)} y^{p\upsilon-1} e^{-\omega y^p}, \qquad y > 0$$

que l'on peut réécrire, en posant $\lambda = \omega^{1/p}$, de la manière suivante:

$$f_Y(y) = \frac{|p|\lambda^{p\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)} y^{p\upsilon-1} e^{-(\lambda y)^p}, \qquad y > 0$$

Pour $\upsilon > 0$, cette fonction de densité de probabilité correspond bien à la loi gamma généralisée de paramètres $p, (\alpha/m)^{1/p}$ et υ (Bobée et Ashkar, 1991, p.122), d'où le résultat (i).

Le résultat (ii) est déduit directement de la dernière en posant $\upsilon = 1$. En effet, la f.d.p. obtenue s'écrit alors:

$$f_Y(y) = |p|\lambda^p y^{p-1} e^{-(\lambda y)^p}, \qquad y > 0$$

et elle correspond à la densité de la loi de Weibull de paramètres $(\alpha/m)^{1/p}$ et p (Johnson et Kotz, 1970, p.197). ■

PROPOSITION 2.17. *Soit la variable aléatoire* $X \approx F_B(x; m, \alpha, \upsilon)$. *Alors,*

(i) si $\alpha m \to -\infty$, $Y = X^{1/p} \approx GG(y; p, \lambda, 2\upsilon)$ *où* $\lambda = (|\alpha|/m)^{1/p}$;

(ii) si $\alpha m \to -\infty$ et $\upsilon = 1/2$, $Y = X^{1/p} \approx W(y; p, \lambda)$ *où* $\lambda = (|\alpha|/m)^{1/p}$.

Démonstration. Nous employons le résultat présenté à la proposition 2.8 qui stipule que $X \approx F_B(x; m, \alpha, \upsilon) \;\Rightarrow\; X \approx G(y; \omega = -\alpha/m, 2\upsilon)$ lorsque $\alpha m \to -\infty$. On a donc que :

$$f_X(x) = \frac{\omega^{2\upsilon}}{\Gamma(2\upsilon)} x^{2\upsilon-1} e^{-\omega x}, \qquad x > 0$$

En appliquant ensuite le changement de variable $Y = X^{1/p}$ de la même manière qu'à la proposition 2.16, on déduit les résultats (i) et (ii). ■

2.3.5 Quelques cas particuliers

Les trois dernières sections ont été consacrées à certains cas limites importants des lois de Halphen. Dans la présente section, on s'intéresse plutôt aux relations exactes entre les distributions de Halphen et quelques lois, notamment les lois gaussienne inverse (GAI), gamma généralisée (GG), khi-deux (K2) et normale tronquée (NT). Les expressions des f.d.p. de ces quatre distributions ainsi qu'une référence sont données au tableau 2.4.

Tableau 2.4. Expressions des f.d.p. des lois gaussienne inverse, gamma généralisée, khi-deux, normale tronquée.

Loi	Fonction de densité de probabilité	Référence
Gaussienne inverse *GAI*(x; m, λ)	$f_{GAI}(x; m, \lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2m^2}\frac{(x-m)^2}{x}\right\}$	Seshadri (1993)
Gamma généralisée *GG*(x; α, λ, s)	$f_{GG}(x; \alpha, \lambda, s) = \frac{\lvert s \rvert \alpha^{s\lambda}}{\Gamma(\lambda)} x^{s\lambda-1} \exp\left[-(\alpha x)^s\right]$	Bobée et Ashkar (1991)
Khi-deux *K2*(x; υ)	$f_{K2}(x; \upsilon) = \frac{1}{2^{\upsilon/2}\Gamma(\upsilon/2)} x^{\upsilon/2-1} e^{-x/2}$	Bobée et Ashkar (1991)
Normale tronquée *NT*(x; μ, σ) sur $]A, B[$	$f_{NT}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_A^B e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt\right]^{-1}$	Johnson et Kotz (1970)

On peut montrer les résultats suivants :

1. $GAI(x; m, \lambda) \equiv F_A\left(x; m, \frac{\lambda}{2m}, -\frac{1}{2}\right)$
2. $GG\left(x; 2, \frac{1}{m}, \upsilon\right) \equiv F_B(x; m, 0, \upsilon)$
3. $GG\left(x; -2, \frac{1}{m}, \upsilon\right) \equiv F_{B^{-1}}\left(x; \frac{1}{m}, 0, \upsilon\right)$
4. $X \approx K2(x; \upsilon) \quad \Rightarrow \quad Y = \sqrt{2X} \approx F_B\left(y; 2, 0, \frac{\upsilon}{2}\right)$
5. Si $A = 0$ et $B = +\infty$, alors $NT(x; 0, 1) \equiv F_B\left(x; \sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Il existe aussi des liens exacts entre les lois de Halphen et les lois gamma et gamma inverse, dont les f.d.p. sont données en (2.4) et (2.5) :

6. $X \approx G(x; \alpha, \lambda) \quad \Rightarrow \quad Y = \sqrt{X} \approx F_B\left(y; \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, 0, \lambda\right)$
7. $X \approx GI(x; \alpha, \lambda) \quad \Rightarrow \quad Y = \sqrt{X} \approx F_{B^{-1}}\left(y; \sqrt{\alpha}, 0, \lambda\right)$

Les résultats 1, 2, 3 et 5 se démontrent directement en effectuant la reparamétrisation appropriée de la f.d.p. de la loi de Halphen et en employant les propriétés des fonctions de Bessel et exponentielle factorielle suivantes :

$$K_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z} \quad \text{et} \quad ef_{\upsilon}(0)=\Gamma(\upsilon)$$

Le résultat 6 est démontré en appliquant le changement de variable $Y=\sqrt{X}$ à la loi gamma à deux paramètres (éq. 2.4). On en déduit ensuite le résultat 4 puisque la loi Khi-deux est un cas particulier de la loi gamma (Bobée et Ashkar, 1991). Enfin, le résultat 7 est obtenu directement à partir du résultat 6 et en vertu de la proposition 2.6 (lien entre les lois Type B et Type B^{-1}).

3 LOI DE HALPHEN TYPE A

Ce chapitre est consacré aux propriétés statistiques de base de la loi de Halphen Type A ainsi qu'à l'estimation des paramètres et des quantiles x_p de probabilité au dépassement p.

3.1 Moments et coefficients

Les moments non centrés μ_r' de la loi de Halphen Type A peuvent être calculés par intégration, en employant la définition des de μ_r'. Ils peuvent aussi être déterminés à l'aide de la fonction caractéristique définie, pour une loi $F(x)$ donnée, par :

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \tag{3.1}$$

En effet, si cette fonction peut se développer en puissance de t, alors μ_r' est égal au coefficient de $(it)^r/r!$ dans le développement suivant :

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} \mu_r' \tag{3.2}$$

Pour la loi Type A, dont la f.d.p. est donnée à l'expression (2.2), la fonction caractéristique s'exprime comme suit :

$$\phi_A(t) = \frac{1}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)} \int_0^{\infty} e^{itx} x^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] dx \tag{3.3}$$

En effectuant le développement limité du terme e^{itx}, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\phi_A(t) &= \frac{1}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)} \int_0^{\infty} \left[1+\frac{itx}{1!}+\frac{(itx)^2}{2!}+\ldots+\frac{(itx)^r}{r!}+\ldots\right] x^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] dx \\
&= \frac{1}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)} \int_0^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} x^{\upsilon+r-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] dx \\
&= \frac{1}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} \int_0^{\infty} x^{\upsilon+r-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] dx
\end{aligned}$$

Or, d'après la définition de la fonction $K_{\upsilon}(2\alpha)$ (éq. 2.3), on a :

$$\int_0^{\infty} x^{\upsilon+r-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] dx = 2m^{\upsilon+r} K_{\upsilon+r}(2\alpha)$$

d'où,

$$\phi_A(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{n!} \frac{m^r K_{\upsilon+r}(2\alpha)}{K_\upsilon(2\alpha)} \tag{3.4}$$

Ainsi, si X est une variable aléatoire distribuée selon une loi de Halphen Type A (éq. 2.2), alors le moment non centré d'ordre r de X, $\mu_r' = E\{X^r\}$, est donné par :

$$\mu_r' = \frac{m^r K_{\upsilon+r}(2\alpha)}{K_\upsilon(2\alpha)} \tag{3.5}$$

Les moments non centrés de la loi Type A existent pour toute valeur réelle de α (> 0), r et $\upsilon \in \Re$, et sont reliés aux fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce $K_\upsilon(2\alpha)$. On déduit de l'équation (3.5) la principale mesure de tendance centrale, la moyenne arithmétique de la variable aléatoire X suivant une loi Type A :

$$\mu_1' = E\{X\} = m \frac{K_{\upsilon+1}(2\alpha)}{K_\upsilon(2\alpha)} \tag{3.6}$$

Comme nous le verrons dans la section 3.3, les moments non centrés d'ordre -1 et d'ordre quasi-zéro (qui correspondent respectivement, à une transformation près, aux moyennes harmonique et géométrique de la population, et sont aussi des mesures de tendance centrale) jouent un rôle fort important lors de l'estimation des paramètres. Nous donnons donc les expressions de ces moments :

$$\mu_{-1}' = E\left\{\frac{1}{X}\right\} = \frac{1}{m} \frac{K_{\upsilon-1}(2\alpha)}{K_\upsilon(2\alpha)} \tag{3.7}$$

$$\mu_{\underline{0}}' = E\{\ln X\} = \ln m + \frac{\partial K_\upsilon(2\alpha)/\partial\upsilon}{K_\upsilon(2\alpha)} \tag{3.8}$$

Le moment non centré d'ordre -1 est déduit directement de l'équation (3.5) et l'inverse de ce moment correspond à la moyenne harmonique (c.f. équation C.4 avec r = -1). La détermination du moment $\mu_{\underline{0}}'$ est présentée en détail à l'annexe C. L'expression (3.8) correspond au logarithme naturel de la moyenne géométrique.

Les moments centrés μ_r peuvent être calculés à partir de l'expression suivante (Kendall et Stuart, 1987) :

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} \binom{j}{r} \mu_{r-j}' \left(-\mu_1'\right)^j \tag{3.9}$$

On obtient alors les principaux moments centrés (la variance et les moments centrés d'ordres 3 et 4) :

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= Var\{X\} = \frac{m^2}{K_\upsilon^2}\left(K_\upsilon K_{\upsilon+2} - K_{\upsilon+1}^2\right) \\
\mu_3 &= \frac{m^3}{K_\upsilon^3}\left(K_{\upsilon+3}K_\upsilon^2 - 3K_{\upsilon+2}K_{\upsilon+1}K_\upsilon + 2K_{\upsilon+1}^3\right) \\
\mu_4 &= \frac{m^4}{K_\upsilon^4}\left(K_\upsilon^3 K_{\upsilon+4} - 4K_\upsilon^2 K_{\upsilon+1}K_{\upsilon+3} + 6K_\upsilon K_{\upsilon+1}^2 K_{\upsilon+2} - 3K_{\upsilon+1}^4\right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

où, pour simplifier la notation, les fonctions de Bessel $K_\upsilon(2\alpha)$ sont notées ici K_υ.

Ayant déterminé les principaux moments de la loi de Halphen Type A, on peut facilement évaluer les coefficients adimensionnels que sont les coefficients de variation (C_v), d'asymétrie (C_s) et d'aplatissement (C_k), généralement utilisés pour caractériser la forme de la loi. En effet, à partir des expressions données en (3.6) et (3.10), nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
C_v &= \frac{\mu_2^{1/2}}{\mu_1'} = \frac{\sqrt{K_\upsilon K_{\upsilon+2} - K_{\upsilon+1}^2}}{K_{\upsilon+1}} \\
C_s &= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{K_\upsilon^2 K_{\upsilon+3} - 3K_\upsilon K_{\upsilon+1}K_{\upsilon+2} + 2K_{\upsilon+1}^3}{\left(K_\upsilon K_{\upsilon+2} - K_{\upsilon+1}^2\right)^{3/2}} \\
C_k &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{K_\upsilon^3 K_{\upsilon+4} - 4K_\upsilon^2 K_{\upsilon+1}K_{\upsilon+3} + 6K_\upsilon K_{\upsilon+1}^2 K_{\upsilon+2} - 3K_{\upsilon+1}^4}{\left(K_\upsilon K_{\upsilon+2} - K_{\upsilon+1}^2\right)^2}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Pour simplifier l'écriture de certaines expressions présentées dans les prochaines sections et parce qu'elles jouent un rôle important dans l'estimation des paramètres, les deux fonctions auxiliaires suivantes sont introduites :

$$R_A(\alpha,\upsilon) = \frac{K_{\upsilon+1}(2\alpha)}{K_\upsilon(2\alpha)} \tag{3.12}$$

et

$$D_A(\alpha,\upsilon) = \frac{K_{\upsilon+1}(2\alpha)K_{\upsilon-1}(2\alpha)}{K_\upsilon^2(2\alpha)} = R_A(\alpha,\upsilon)R_A^{-1}(\alpha,\upsilon-1) \tag{3.13}$$

La fonction $D_A(\alpha,\upsilon)$ est particulièrement intéressante pour l'estimation des paramètres. On remarque que cette fonction correspond au produit des moments d'ordres 1 et -1 (éq. 3.6 et 3.7), ou de manière équivalente, au rapport entre les moyennes arithmétique et harmonique.

La fonction $D_A(\alpha, \upsilon)$ est donc une mesure de dispersion puisqu'elle est le rapport de deux moyennes et elle est appelée ici "fonction de dispersion".

On peut réécrire certains moments importants à l'aide des fonctions $R_A(\alpha,\upsilon)$ et $D_A(\alpha,\upsilon)$. En effet, la moyenne arithmétique, le moment non centré d'ordre -1, la variance et le coefficient de variation peuvent s'exprimer respectivement de la manière suivante :

$$E\{X\} = mR_A(\alpha,\upsilon) \tag{3.14}$$

$$E\{1/X\} = \frac{1}{m}R_A^{-1}(\alpha,\upsilon-1) \tag{3.15}$$

$$Var\{X\} = m^2R_A^2(\alpha,\upsilon)[D_A(\alpha,\upsilon+1)-1] \tag{3.16}$$

$$C_v = \sqrt{D_A(\alpha,\upsilon+1)-1} \tag{3.17}$$

On note, en particulier, que le coefficient de variation C_v dépend seulement de la fonction de dispersion. Or, puisque $D_A(\alpha,\upsilon+1)$ est une fonction strictement décroissante de α quel que soit υ fixé (cf. section 3.3), les lois gamma et gamma inverse (cas limites de la loi du Type A convenablement reparamétrisée lorsque $\alpha \to 0$) sont les distributions du Type A ayant le plus grand coefficient de variation. En effet, puisque $D_A(\alpha, \upsilon)$ est une fonction décroissante de α, le coefficient de variation atteint son maximum lorsque α est minimum, c'est-à-dire quand $\alpha \to 0$.

La figure 3.1 illustre la relation entre les coefficients de variation C_v et d'asymétrie C_s de la loi Type A pour différentes valeurs des paramètres de forme α (traits pointillés) et υ (traits continus). Ce diagramme des moments permet de représenter les diverses lois de Type A par les points du plan C_v-C_s et montre comment les valeurs des paramètres α et υ varient dans cet espace. Il s'agit d'un diagramme analogue à la représentation classique des lois de Pearson par les coefficients β_1 et β_2 (fonctions des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement ; Bobée *et al.*, 1993). On note, en particulier, que la région du plan occupée par les lois de Type A est restreinte et qu'alors ces lois ne peuvent admettre n'importe quel couple C_v-C_s. La région est en fait délimitée par les deux courbes qui correspondent dans ce diagramme aux lois gamma et gamma inverse.

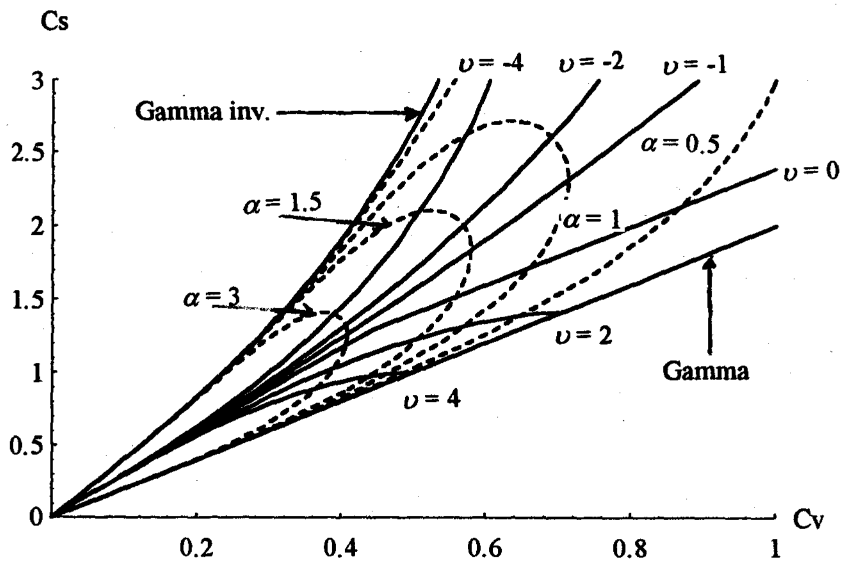

Figure 3.1. Relation entre C_v et C_s pour différentes valeurs de α et υ : loi Type A.

3.2 Exhaustivité

Tel que mentionné au chapitre 1, Halphen avait fixé comme objectif que ses distributions fassent partie de la classe exponentielle de lois de probabilité, assurant ainsi que l'estimation des paramètres puisse être effectuée en utilisant des statistiques exhaustives.

La loi de Halphen Type A fait clairement partie de la classe exponentielle des fonctions de densité de probabilité continues, car sa f.d.p peut s'exprimer de la manière suivante (cf. annexe D, éq. D.1) :

$$\begin{aligned} f_A(x) &= \frac{1}{2m^{\upsilon}K_{\upsilon}(2\alpha)} x^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] \\ &= \exp\left\{(\upsilon-1)\ln x - \frac{\alpha}{m}x - \alpha m\frac{1}{x} - \ln\left[2m^{\upsilon}K_{\upsilon}(2\alpha)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{i=1}^{3} c_i(m,\upsilon,\alpha)T_i(x) + d(m,\upsilon,\alpha) + S(x)\right\} \end{aligned}$$

où,

- $c_1(m,\upsilon,\alpha) = (\upsilon-1)$
- $c_2(m,\upsilon,\alpha) = -\alpha/m$
- $c_3(m,\upsilon,\alpha) = -\alpha m$
- $d(m,\upsilon,\alpha) = -\ln\left[2m^{\upsilon}K_{\upsilon}(2\alpha)\right]$

- $T_1(x) = \ln(x)$
- $T_2(x) = x$
- $T_3(x) = 1/x$
- $S(x) = 0$

On déduit alors que les variables aléatoires $(\ln X, X, 1/X)$ sont exhaustives pour la loi de Halphen Type A (cf. annexe D). Ainsi, pour un échantillon de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendamment et identiquement distribuées selon une loi Type A, les statistiques suivantes sont exhaustives (cf. expression D.2) :

$$T_1(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i = \ln G \quad T_2(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = A \quad T_3(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i} = H^{-1} \tag{3.18}$$

Ce résultat est déduit du théorème de factorisation (Bickel et Doksum, 1977). De plus, puisqu'une fonction bijective d'une statistique exhaustive demeure exhaustive, on peut déduire que les moyennes arithmétique (A), harmonique (H) et géométrique (G) de l'échantillon sont des statistiques exhaustives pour la loi de Halphen Type A.

3.3 Estimation des paramètres

Cette section est consacrée à l'estimation des paramètres à l'aide la méthode du maximum de vraisemblance, en considérant un échantillon de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendamment et identiquement distribuées selon une loi de Halphen Type A.

De manière générale, pour une loi de probabilité à 3 paramètres $F(x; \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ appartenant à la classe des lois exponentielles et ayant comme statistiques exhaustives $(T_1(\underline{X}), T_2(\underline{X}), T_3(\underline{X}))$, si le système d'équations $E_{\underline{\theta}}[T_i(\underline{X})] = T_i(\underline{x})$, $i = 1, 2, 3$, possède une solution pour le vecteur des paramètres $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, alors cette solution est unique et correspond aux estimateurs du maximum de vraisemblance de $\underline{\theta}$ (cf. annexe D).

Ainsi, pour déterminer les estimateurs des paramètres de la loi de Halphen Type A, il suffit de calculer l'espérance mathématique des trois statistiques exhaustives (éq. 3.18) et de résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues. Ce système est non linéaire et doit être résolu à l'aide de procédures itératives. De plus, cette résolution nécessite l'évaluation de la fonction de Bessel et de ses dérivées, difficiles à manipuler. Les problèmes pratiques rencontrés lors de la résolution du système d'équations du maximum de vraisemblance des lois de Halphen est probablement la principale raison pour laquelle ces distributions ont fait l'objet de très peu d'utilisation en pratique depuis près de quarante ans.

Une approche en deux étapes est donc considérée ici pour résoudre ce type de système d'équations non linéaires et pour déterminer les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type A. D'abord, les paramètres α et m sont estimés numériquement, υ étant fixé. Ensuite, la fonction de vraisemblance logarithmique partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est employée afin de déterminer le triplet $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ d'estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type A.

Dans la section 3.3.1, nous présentons l'estimation des paramètres m et α lorsque υ est fixé. La section 3.3.2 traite de l'estimation du paramètre υ à partir de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée. Les propriétés asymptotiques des estimateurs sont ensuite étudiées à la section 3.3.3. Finalement, la section 3.3.4 est consacrée à l'estimation des quantiles de la loi de Halphen Type A ainsi qu'au calcul de leur variance asymptotique.

3.3.1 Estimation de m et α pour υ fixé

En employant les expressions (3.6) à (3.8) pour évaluer l'espérance mathématique des statistiques exhaustives (éq. 3.18), on montre aisément que le système d'équations obtenu pour la loi Type A est donné par :

$$\begin{aligned} m\frac{K_{\upsilon+1}(2\alpha)}{K_{\upsilon}(2\alpha)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = A \\ \frac{1}{m}\frac{K_{\upsilon-1}(2\alpha)}{K_{\upsilon}(2\alpha)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = H^{-1} \\ \ln m + \frac{\partial K_{\upsilon}(2\alpha)/\partial\upsilon}{K_{\upsilon}(2\alpha)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = \ln G \end{aligned} \tag{3.19}$$

Le paramètre de forme υ étant fixé, seules deux équations sont nécessaires pour l'estimation de α et m. Les deux premières expressions sont retenues (on évite ainsi le calcul de la dérivée de la fonction de Bessel par rapport à son indice) et peuvent être réarrangées pour obtenir le système de 2 d'équations à 2 inconnues suivant :

$$\frac{K_{\upsilon+1}(2\alpha)\,K_{\upsilon-1}(2\alpha)}{K_{\upsilon}^{2}(2\alpha)} = \frac{A}{H} \tag{3.20}$$

$$m = A\frac{K_{\upsilon}(2\alpha)}{K_{\upsilon+1}(2\alpha)} \tag{3.21}$$

où A et H désignent respectivement les moyennes arithmétique et harmonique de l'échantillon. Les équations (3.20) et (3.21) sont réécrites, à l'aide des fonctions définies en (3.12) et (3.13), de la manière suivante :

$$D_A(\alpha,\upsilon) = \frac{A}{H} \tag{3.22}$$

$$m = A R_A^{-1}(\alpha,\upsilon) \tag{3.23}$$

Si ce système possède une solution, les estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\alpha}$ et $\hat{m}$, pour υ fixé, peuvent être déterminés en résolvant l'équation (3.22) pour α et en substituant ensuite le paramètre α par son estimation $\hat{\alpha}$ dans l'équation (3.23). Les propriétés de la fonction de dispersion $D_A(\alpha,\upsilon)$ jouent donc un rôle très important dans la détermination des estimateurs des parmètres de la loi de Halphen Type A. La proposition qui suit établit les principales propriétés de la fonction $D_A(\alpha,\upsilon)$ nécessaires au calcul des estimateurs du maximum de vraisemblance.

PROPOSITION 3.1. *La fonction de dispersion $D_A(\alpha,\upsilon)$ est, pour tout υ, une fonction à valeurs positives, décroissante avec α et telle que* :

$$\lim_{\alpha\to 0} D_A(\alpha,\upsilon) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |\upsilon| \le 1 \\ |\upsilon|/(|\upsilon|-1) & \text{si } |\upsilon| > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha\to+\infty} D_A(\alpha,\upsilon) = 1$$

Démonstration. D'abord, par définition (éq. 2.3), la fonction de Bessel $K_\upsilon(2\alpha)$ admet $\forall\, \alpha > 0$ et $\forall\, \upsilon \in \Re$ des valeurs positives. Ainsi, $D_A(\alpha,\upsilon)$ est aussi une fonction à valeurs strictement positives.

La détermination de la valeur limite de $D_A(\alpha,\upsilon)$, lorsque $\alpha \to 0$, s'appuie sur des résultats obtenus par Jørgensen (1982). Cet auteur a en effet démontré que pour α petit, en utilisant le développement limité des fonctions de Bessel (A.9) pour de petits arguments ainsi que les relations (A.2) et (A.3), on a :

$$D_A(\alpha,\upsilon) \approx \begin{cases} 2|\upsilon| \dfrac{\Gamma(1-|\upsilon|)}{\Gamma(|\upsilon|)} \alpha^{2|\upsilon|-2} & \text{si } 0 < |\upsilon| < 1 \\ 2\ln(1/2\alpha) & \text{si } |\upsilon| = 1 \\ \dfrac{|\upsilon|}{|\upsilon|-1}\left(1 - 2\dfrac{\Gamma(2-|\upsilon|)}{\Gamma(|\upsilon|)} \alpha^{2|\upsilon|-2}\right) & \text{si } 1 < |\upsilon| < 2 \\ \dfrac{|\upsilon|}{|\upsilon|-1}\left(1 - \dfrac{\alpha^2}{2|\upsilon|(|\upsilon|-1)(|\upsilon|-2)}\right) & \text{si } |\upsilon| > 2 \end{cases} \tag{3.24}$$

Si dans l'expression (3.24) on considère la limite lorsque $\alpha \to 0$, on trouve :

- pour $0<|\upsilon|<1$, $\lim_{\alpha\to 0} D(\alpha,\upsilon)=\dfrac{\Gamma(2-|\upsilon|)}{\Gamma(|\upsilon|)}\lim_{\alpha\to 0}\alpha^{2|\upsilon|-2}=+\infty$
- pour $|\upsilon|=1$, $\lim_{\alpha\to 0} D(\alpha,\upsilon)=2\lim_{\alpha\to 0}\ln(1/2\alpha)=+\infty$
- pour $1<|\upsilon|<2$, $\lim_{\alpha\to 0} D(\alpha,\upsilon)=\dfrac{|\upsilon|}{|\upsilon|-1}\left(1-2\dfrac{\Gamma(2-|\upsilon|)}{\Gamma(|\upsilon|)}\lim_{\alpha\to 0}\alpha^{2|\upsilon|-2}\right)=\dfrac{|\upsilon|}{|\upsilon|-1}$
- pour $|\upsilon|>2$, $\lim_{\alpha\to 0} D(\alpha,\upsilon)=\dfrac{|\upsilon|}{|\upsilon|-1}\left(1-\dfrac{1}{2|\upsilon|(|\upsilon|-1)(|\upsilon|-2)}\lim_{\alpha\to 0}\alpha^{2}\right)=\dfrac{|\upsilon|}{|\upsilon|-1}$

d'où le résultat.

La valeur limite de $D_A(\alpha,\upsilon)$, lorsque $\alpha\to+\infty$, est obtenue en employant le développement limité (A.10) de la fonction de Bessel pour de grands arguments. En effet, en vertu de (A.10), l'équation (3.13) peut s'écrire pour α grand :

$$\begin{aligned} D_A(\alpha,\upsilon) &= \frac{K_{\upsilon+1}(2\alpha)K_{\upsilon-1}(2\alpha)}{K_\upsilon^2(2\alpha)} \\ &\approx \frac{[1+h(\alpha,\upsilon+1)][1+h(\alpha,\upsilon-1)]}{[1+h(\alpha,\upsilon)]^2} \end{aligned} \tag{3.25}$$

où,

$$h(\alpha,\upsilon)=\left[\frac{u-1}{16\alpha}+\frac{(u-1)(u-9)}{2!(16\alpha)^2}+\cdots\right],\qquad u=4\upsilon^2$$

et l'expression (3.25) tend clairement vers 1 pour tout $\upsilon\in\Re$ lorsque $\alpha\to+\infty$, puisque, dans ces conditions, les fonctions $h(\cdot)$ tendent vers 0.

Enfin, pour démontrer que $D_A(\alpha,\upsilon)$ est une fonction décroissante de α quel que soit υ, il suffit de montrer que cette fonction est monotone. En effet, étant donné les résultats limites obtenus pour $\alpha\to 0$ et $\alpha\to+\infty$, cette propriété implique nécessairement que $D_A(\alpha,\upsilon)$ est alors décroissante.

La loi Type A, lorsque υ est fixé, fait partie de la classe exponentielle de lois de probabilité à 2 paramètres et admet alors comme statistiques exhaustives (cf. section 3.2, éq. 3.18) :

$$(nT_3, nT_2)=\left(\sum X_i^{-1},\sum X_i\right)=(n/H, nA)$$

Soit $\tau(\alpha)$, l'espérance mathématique de ce vecteur de statistiques exhaustives, que l'on considère comme une fonction de α seulement puisque υ est fixe et que m est un paramètre d'échelle ($D_A(\alpha,\upsilon)$ est indépendant de m). Des équations (3.14) et (3.15), on déduit que :

$$\tau(\alpha) = \left[\tau_3(\alpha), \tau_2(\alpha)\right] = \left(\frac{n}{m} R^{-1}(\alpha, \upsilon - 1), nmR(\alpha, \upsilon)\right)$$

et que :

$$\tau_3(\alpha)\tau_2(\alpha) = n^2 R_A^{-1}(\alpha, \upsilon - 1) R_A(\alpha, \upsilon)$$

Selon l'expression (3.13), les fonctions $\tau(\alpha)$ et $D_A(\alpha,\upsilon)$ sont donc des applications équivalentes définies par l'égalité suivante :

$$\tau_3(\alpha)\tau_2(\alpha) = n^2 D_A(\alpha, \upsilon) \tag{3.26}$$

qui, pour un α donné, est une hyperbole dans l'espace $\tau_3 \times \tau_2$ (une hyperbole est définie par l'équation $xy = k$). Or, les fonctions τ_3 et τ_2 :

- sont des fonctions bijectives de α, c'est-à-dire que $\tau(\alpha) \neq \tau(\alpha + \varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon > 0$, puisqu'elles correspondent à l'espérance de statistiques exhaustives (Lehmann, 1983). Les hyperboles sont donc distinctes pour différentes valeurs de α ;

- sont continues puisqu'elles sont le rapport de deux fonctions de Bessel (cf. éq. 3.12), elles-mêmes continues et à valeurs strictement positives.

En vertu de l'équivalence entre $\tau(\alpha)$ et $D_A(\alpha,\upsilon)$ (éq. 3.26), la fonction de dispersion $D_A(\alpha,\upsilon)$ est continue et bijective. Elle est donc nécessairement monotone.

■

La figure 3.2 illustre le comportement de la fonction de dispersion $D_A(\alpha,\upsilon)$ pour différentes valeurs des paramètres α et υ.

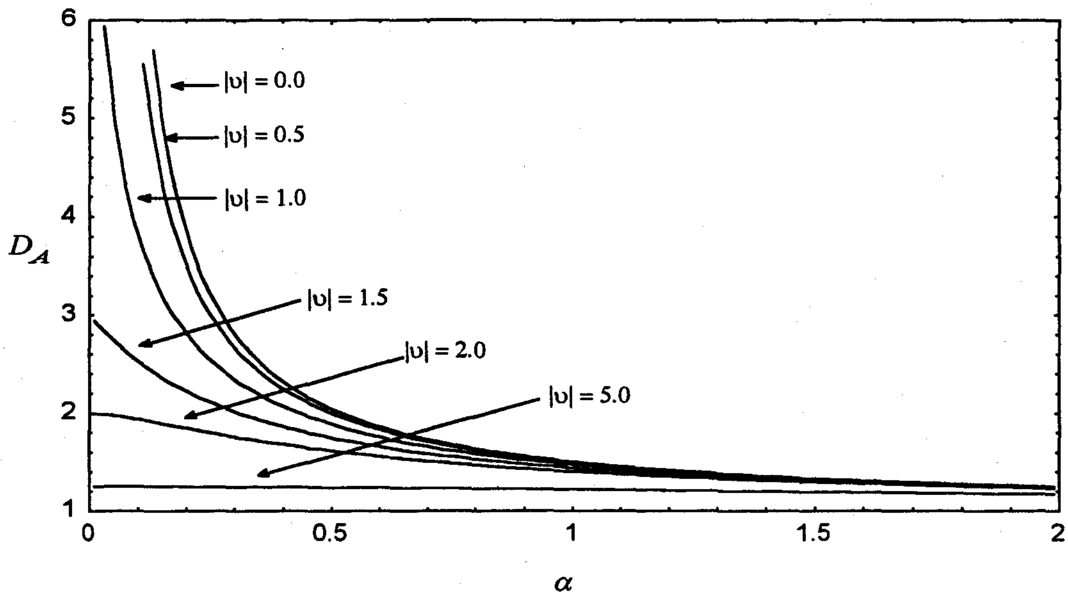

Figure 3.2. Fonction de dispersion $D_A(\alpha, \upsilon)$

Selon la proposition 3.1, l'équation (3.22) n'admet pas toujours une solution. La fonction de dispersion $D_A(\alpha, \upsilon)$ prend toujours des valeurs supérieures à 1, impliquant ainsi que le système (3.22, 3.23) n'admet pas de solution si $A = H$, c'est-à-dire lorsque toutes les observations de l'échantillon sont identiques (cas impossible en pratique). De plus, lorsque $\alpha \to 0$, la fonction $D_A(\alpha, \upsilon)$ peut être bornée pour certaines valeurs du paramètre υ (cf. figure 3.2). Les estimateurs du maximum de vraisemblance de α et m ne correspondent donc pas à la solution du système (3.22, 3.23) quel que soit υ.

Pour $\alpha \to 0$, on peut déduire de la proposition 3.1 que l'équation (3.22) n'admet de solution que si $|\upsilon| \leq 1$ ou si $AH^{-1} < |\upsilon|/(|\upsilon| - 1)$ quand $|\upsilon| > 1$, puisque la fonction $D_A(\alpha, \upsilon)$ peut être bornée supérieurement. Cette dernière inégalité peut s'écrire :

$$|\upsilon| > \left(|\upsilon| - 1\right) AH^{-1}$$

ou encore

$$|\upsilon| < AH^{-1}/(AH^{-1} - 1)$$

Si on pose $U = AH^{-1}/(AH^{-1} - 1)$, on a que $U > 1$ car $H \leq A$, et ainsi, qu'en vertu des propriétés de $D_A(\alpha, \upsilon)$, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et m sont les solutions du système d'équations (3.22, 3.23) si et seulement si $|\upsilon| < U$. La statistique U, appelée ici "borne d'estimation", détermine donc l'intervalle de valeurs du paramètre υ pour lesquelles le système (3.22, 3.23) admet une solution.

Lorsque la condition $|\upsilon| < U$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si l'on a $|\upsilon| > 1$ et $AH^{-1} > |\upsilon|/(|\upsilon| - 1)$, la dispersion des observations est trop grande et les estimateurs du maximum de vraisemblance de α et m convergent, selon le signe de υ, vers ceux des lois limites gamma ou gamma inverse (lois possédant la plus grande dispersion). Pour $|\upsilon| \geq U$, l'une de ces distributions serait plus adéquate pour représenter l'échantillon. D'ailleurs, à la section 3.1, nous avons vu, que pour une valeur donnée du paramètre υ, les lois gamma et gamma inverse possèdent les plus grands coefficients de variation parmi les lois Type A.

Dans ces conditions, la loi de Halphen Type A correspond, selon la proposition 2.7, à la loi gamma de paramètres $(\omega_1 = \alpha/m, \upsilon)$, si $\upsilon > 0$, ou à la loi gamma inverse de paramètres $(\omega_2 = \alpha m, -\upsilon)$, si $\upsilon < 0$. Rappelons que ces résultats sont obtenus en considérant la limite lorsque αm ou α/m tend vers zéro, ω_1 et ω_2 tendant chacun vers un nombre fini. Pour υ fixé, en appliquant la méthode du maximum de vraisemblance aux expressions (2.4) et (2.5) convenablement reparamétrisées, ces lois de probabilité admettent respectivement comme estimateur du seul paramètre inconnu (le paramètre d'échelle $\omega_1 = \alpha/m$ ou $\omega_2 = \alpha m$, selon le cas, cf. Bobée et Ashkar, 1991, p. 40) :

$$\hat{\omega}_1 = \upsilon/A \quad \text{(loi gamma)} \quad \text{et} \quad \hat{\omega}_2 = -\upsilon H \quad \text{(loi gamma inverse)} \tag{3.27}$$

En résumé, pour υ fixé,

- si $|\upsilon| < U$, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et m sont les solutions du système d'équations (3.22, 3.23) ;

- si $|\upsilon| \geq U$ et $\upsilon > 0$, c'est-à-dire si $\upsilon \geq U$, la loi de Halphen Type A correspond à la loi gamma de paramètres $(\omega_1 = \alpha/m, \upsilon)$ et l'estimateur du maximum de vraisemblance de ω_1 est $\hat{\omega}_1 = \upsilon/A$;

- si $|\upsilon| \geq U$ et $\upsilon < 0$, c'est-à-dire si $\upsilon \leq -U$, la loi de Halphen Type A correspond à la loi gamma inverse de paramètres $(\omega_2 = \alpha m, -\upsilon)$ et l'estimateur du maximum de vraisemblance de ω_2 est $\hat{\omega}_2 = -\upsilon H$.

3.3.2 Estimation de υ

Cette section est consacrée à la détermination du triplet $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ d'estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type A, solution du système (3.19). L'objectif est donc d'estimer le paramètre υ étant donné qu'il est possible d'estimer (m, α) pour une valeur donnée de υ, comme on l'a montré dans la section précédente.

Nous donnons d'abord l'expression de la fonction de vraisemblance logarithmique de la loi de Halphen Type A qui peut être déduite de l'équation (2.2) :

$$\ln L(m,\alpha,\upsilon) = n\ln\left[\frac{1}{2m^{\upsilon}K_{\upsilon}(2\alpha)}\right] + (\upsilon-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \alpha\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}x_i + m\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$$

Cette expression peut s'écrire en utilisant la notation de (3.19) :

$$\ln L(m,\alpha,\upsilon) = n\left\{\ln\left[\frac{G^{\upsilon-1}}{2m^{\upsilon}K_{\upsilon}(2\alpha)}\right] - \alpha\left(\frac{A}{m}+\frac{m}{H}\right)\right\} \tag{3.28}$$

Pour estimer υ, (m, α) ayant été déterminés, la fonction de vraisemblance logarithmique partiellement maximisée est employée. Elle est définie comme le supremum de la fonction de vraisemblance logarithmique $\ln L(m, \alpha, \upsilon)$ sur toutes les valeurs admissibles de (m, α) :

$$\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m}) = \sup_{(m,\alpha)} \ln L(m,\alpha,\upsilon) \tag{3.29}$$

Cette fonction est obtenue en remplaçant, dans la fonction de vraisemblance logarithmique $\ln L(m,\alpha,\upsilon)$, les paramètres (m, α) par leurs estimateurs respectifs $\hat{m}$ et $\hat{\alpha}$.

Lorsque $|\upsilon| < U$, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et m sont les solutions du système d'équations (3.22, 3.23), ou de manière équivalente, du système formé des deux premières équations de (3.19). Ainsi, pour $|\upsilon| < U$ fixé, on a d'après (3.19) et (3.28) :

$$\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m}) = n\left\{\ln\left[\frac{G^{\upsilon-1}}{2\hat{m}^{\upsilon}K_{\upsilon}(2\hat{\alpha})}\right] - \hat{\alpha}\left[\frac{K_{\upsilon+1}(2\hat{\alpha})}{K_{\upsilon}(2\hat{\alpha})} + \frac{K_{\upsilon-1}(2\hat{\alpha})}{K_{\upsilon}(2\hat{\alpha})}\right]\right\} \tag{3.30}$$

Toutefois, si $|\upsilon| > U$, la fonction de vraisemblance correspond plutôt, si $\upsilon > 0$, à celle de la loi gamma de paramètres $(\omega_1 = \alpha/m, \upsilon)$ et si $\upsilon < 0$, à celle de la loi gamma inverse de paramètres $(\omega_2 = \alpha m, -\upsilon)$. Ces fonctions de vraisemblance sont déduites des expressions (2.4) et (2.5) et s'expriment respectivement comme suit :

- pour la loi gamma :

$$\begin{aligned}\ln L(\omega_1, \upsilon) &= n[\upsilon \ln \omega_1 - \ln \Gamma(\upsilon)] + (\upsilon - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \omega_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= n[\upsilon \ln \omega_1 - \ln \Gamma(\upsilon) + (\upsilon - 1)\ln G - \omega_1 A]\end{aligned}$$

- pour la loi gamma inverse :

$$\begin{aligned}\ln L(\omega_2, \upsilon) &= n[-\upsilon \ln \omega_2 - \ln \Gamma(-\upsilon)] + (\upsilon - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \omega_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} \\ &= n[-\upsilon \ln \omega_2 - \ln \Gamma(-\upsilon) + (\upsilon - 1)\ln G - \omega_2 H^{-1}]\end{aligned}$$

En remplaçant dans ces expressions les paramètres ω_1 et ω_2 par leurs estimateurs respectifs donnés en (3.27), la vraisemblance logarithmique partiellement maximisée s'exprime alors, pour $|\upsilon| > U$, de la manière suivante :

$$\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m}) = \begin{cases} n[-\upsilon \ln(-\upsilon H) - \ln \Gamma(-\upsilon) + (\upsilon - 1)\ln G + \upsilon], & \text{si } \upsilon \le -U \\ n[\upsilon \ln(\upsilon/A) - \ln \Gamma(\upsilon) + (\upsilon - 1)\ln G - \upsilon], & \text{si } \upsilon \ge U \end{cases} \tag{3.31}$$

Ainsi, pour la loi de Halphen Type A, on a :

$$\ln L(\upsilon;\hat{\alpha},\hat{m}) \propto \begin{cases} -\upsilon \ln(-\upsilon H) - \ln \Gamma(-\upsilon) + (\upsilon - 1)\ln G + \upsilon, & \text{si } \upsilon \le -U \\ \ln\left[\dfrac{G^{\upsilon-1}}{\hat{m}^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\hat{\alpha})}\right] - \hat{\alpha}\left[\dfrac{K_{\upsilon+1}(2\hat{\alpha})}{K_{\upsilon}(2\hat{\alpha})} + \dfrac{K_{\upsilon-1}(2\hat{\alpha})}{K_{\upsilon}(2\hat{\alpha})}\right], & \text{si } |\upsilon| < U \\ \upsilon \ln(\upsilon/A) - \ln \Gamma(\upsilon) + (\upsilon - 1)\ln G - \upsilon, & \text{si } \upsilon \ge U \end{cases} \tag{3.32}$$

La fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est strictement concave et n'admet qu'un seul maximum dans le cas usuel où toutes les observations ne sont pas identiques. L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre υ correspond à la valeur $\hat{\upsilon}$ telle que $\ln L(\hat{\upsilon}|\hat{\alpha},\hat{m})$ est maximum. En pratique, après avoir développé un programme informatique permettant d'estimer les paramètres α et m pour différentes valeurs de υ (étape 1), $\hat{\upsilon}$ peut être déterminé numériquement (étape 2), par exemple à l'aide d'une simple tabulation de $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$.

Les dérivées de la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ par rapport à υ évaluée en -U et U, que nous notons respectivement $l'(-U)$ et $l'(U)$, peuvent être calculées à partir de l'expression (3.32) et sont indépendantes des paramètres. On déduit en effet de l'équation (3.31), que les dérivées de $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ à gauche de $-U$ et à droite de U sont données par les expressions suivantes :

$$\frac{\partial \ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})}{\partial \upsilon} = \begin{cases} n\left[\ln\left(-\frac{G}{H}\frac{1}{\upsilon}\right) + \Psi(-\upsilon)\right], & \upsilon \leq -U \\ n\left[\ln\left(\frac{G}{A}\upsilon\right) - \Psi(\upsilon)\right], & \upsilon \geq U \end{cases} \tag{3.33}$$

d'où,

$$l'(-U) = n\left[\ln\left(\frac{G}{H}\frac{1}{U}\right) + \Psi(U)\right] \quad \text{et} \quad l'(U) = n\left[\ln\left(\frac{G}{A}U\right) - \Psi(U)\right] \tag{3.34}$$

$\Psi(z) = \partial[\ln\Gamma(z)]/\partial z$ désignant la fonction digamma .

Ces dérivées sont très utiles en pratiques puisqu'elles peuvent être utilisées avant l'étape 1 afin de savoir si $\hat{\upsilon}$ est à l'intérieur de l'intervalle (*-U*, *U*) et donc si les estimateurs du maximum de vraisemblance pour υ fixé sont les solutions du système d'équations (3.22, 3.23) ou correspondent plutôt à ceux des lois gamma ($\upsilon \geq U$) ou gamma inverse ($\upsilon \leq -U$) donnés à l'expression (3.27). En effet, puisque la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est concave et n'admet qu'un seul maximum si les observations ne sont pas toutes identiques, le signe des dérivées données à l'équation (3.34) indiquent si la valeur maximale de $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est atteinte pour $|\upsilon| < U$:

- si $l'(-U) > 0$ et $l'(U) < 0$, le maximum de la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est dans l'intervalle (*-U*, *U*) et les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les solutions du système d'équations (3.22, 3.23);
- si $l'(-U) > 0$ et $l'(U) > 0$, le maximum de la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est obtenu pour $\upsilon \geq U$. La loi gamma est plus adéquate pour représenter l'échantillon et les estimateurs du maximum de vraisemblance correspondent à ceux de cette distribution (éq. 3.27);
- si $l'(-U) < 0$ et $l'(U) < 0$, le maximum de la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est obtenu pour $\upsilon \leq -U$. La loi gamma inverse est plus adéquate pour représenter l'échantillon et les estimateurs du maximum de vraisemblance correspondent à ceux de cette distribution (éq. 3.27).

Mentionnons, finalement, que la troisième équation du système (3.19) n'est pas incluse explicitement dans l'approche utilisée pour estimer les paramètres (l'égalité des moyennes géométriques théorique et empirique) ; elle est cependant considérée implicitement lors de l'étape de maximisation de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée, car la moyenne géométrique intervient dans l'expression de cette fonction (éq. 3.32). On évite ainsi l'emploi d'une méthode numérique pour déterminer la dérivée de la fonction de Bessel par rapport à son indice υ (puisque celle-ci ne possède pas d'expression explicite).

3.3.3 Propriétés asymptotiques

Les propriétés asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres des lois de la famille exponentielle sont bien connues et sont présentées brièvement dans l'annexe D. En particulier, si les estimateurs $\left(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon}\right)$ du maximum de vraisemblance de la loi Type A sont les solutions du système (3.22, 3.23), le vecteur $\sqrt{n}\left[(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon}) - (m, \alpha, \upsilon)\right]$ est distribué asymptotiquement selon une loi normale multidimensionnelle $N\left(0, \mathbf{I}_f^{-1}\right)$, où $\mathbf{I}_f$ est la matrice (symétrique) d'information de Fisher pour une seule observation.

Les éléments de la matrice $\mathbf{I}_f$ sont obtenus en calculant l'espérance mathématique des dérivées secondes et croisées du logarithme de la f.d.p. par rapport à chacun des paramètres (expression D.3). Ce calcul fait intervenir, pour la loi Type A, les espérances $E\{X\}$ et $E\{1/X\}$ dont les expressions sont données respectivement en (3.6) et (3.7). On peut montrer, pour cette distribution, que la matrice symétrique d'information de Fisher s'écrit (cf. annexe D) :

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m^2}\left\{2\alpha\dfrac{K_{\upsilon+1}}{K_\upsilon} - \upsilon\right\} & \dfrac{1}{mK_\upsilon}\left\{K_{\upsilon-1} - K_{\upsilon+1}\right\} & \dfrac{1}{m} \\ & \dfrac{1}{K_\upsilon^2}\left\{\dfrac{\partial^2 K_\upsilon}{\partial\alpha^2}K_\upsilon - \left(\dfrac{\partial K_\upsilon}{\partial\alpha}\right)^2\right\} & \dfrac{1}{K_\upsilon^2}\left\{\dfrac{\partial^2 K_\upsilon}{\partial\alpha\partial\upsilon}K_\upsilon - \left(\dfrac{\partial K_\upsilon}{\partial\alpha}\right)\left(\dfrac{\partial K_\upsilon}{\partial\upsilon}\right)\right\} \\ & & \dfrac{1}{K_\upsilon^2}\left\{\dfrac{\partial^2 K_\upsilon}{\partial\upsilon^2}K_\upsilon - \left(\dfrac{\partial K_\upsilon}{\partial\upsilon}\right)^2\right\} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

La matrice des variances et covariances asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance $\left(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon}\right)$ des paramètres de la loi Type A est donnée par l'inverse de la matrice de Fisher divisée par n : $(1/n)\mathbf{I}_f^{-1}$ (cf. expression D.4). Le calcul des variances et covariances asymptotiques des paramètres nécessite non seulement l'évaluation de la fonction de Bessel $K_\upsilon(2\alpha)$ mais aussi de ses dérivées premières et secondes par rapport aux paramètres α et υ.

3.4 Estimation des quantiles

Par définition (cf. équation 1.3), le quantile x_p de probabilité au dépassement p de la loi de Halphen Type A est tel que :

$$\mathrm{Prob}\left\{X > x_p\right\} = 1 - F_A(x_p; m, \alpha, \upsilon) = p \tag{3.36}$$

où $F_A(x_p; m, \alpha, \upsilon)$ est la fonction de répartition de la loi Type A évaluée en x_p. Le quantile x_p est donc une fonction de p ainsi que des paramètres (m, α, υ). De la propriété d'invariance de la méthode du maximum de vraisemblance (Bickel et Doksum, 1977), on déduit que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{x}_p$ du quantile est obtenu en résolvant pour x_p l'équation (3.36), les paramètres ayant été remplacés par leurs estimateurs respectifs $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$. L'équation à résoudre peut alors s'exprimer de la façon suivante :

$$\int_{x_p}^{+\infty} \frac{1}{2\hat{m}^{\hat{\upsilon}} K_{\hat{\upsilon}}(2\hat{\alpha})} x^{\hat{\upsilon}-1} \exp\left[-\hat{\alpha}\left(\frac{x}{\hat{m}} + \frac{\hat{m}}{x}\right)\right] dx - p \quad = \quad 0 \tag{3.37}$$

L'équation (3.37) n'admet pas de solution explicite mais peut être résolue, pour déterminer $\hat{x}_p$, en appliquant une méthode itérative comme celle de Newton-Raphson.

Selon le théorème de la limite centrale (Bickel et Doksum, 1977), l'estimateur $\hat{x}_p$ est distribué asymptotiquement selon une loi normale de moyenne x_p et de variance donnée par l'expression (E.1). La variance asymptotique de $\hat{x}_p$ dépend donc :

- des variances et covariances asymptotiques des estimateurs des paramètres de la loi de Halphen Type A ;
- des dérivées partielles de x_p par rapport à chacun des paramètres de la loi (le quantile est une fonction des paramètres).

Les variances et les covariances asymptotiques sont obtenues en inversant la matrice I_f donnée en (3.35) et en appliquant l'expression (D.4). Les dérivées partielles de x_p par rapport à chacun des paramètres sont plus complexes à calculer puisque le quantile x_p n'est pas une fonction explicite des paramètres. On peut montrer (cf. annexe E) qu'elles s'expriment comme suit :

$$\frac{\partial x_p}{\partial m} = \frac{(-\alpha/m^2)\, I_1 + (\upsilon/m)\, I_2 + \alpha\, I_3}{2m^{\upsilon}\, K_{\upsilon}(2\alpha)\, f_A(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \alpha} = \frac{m^{-1} I_1 + \left[\partial K_{\upsilon}(2\alpha)/\partial \alpha\right] K_{\upsilon}^{-1}(2\alpha)\, I_2 + m I_3}{2m^{\upsilon}\, K_{\upsilon}(2\alpha)\, f_A(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon} = \frac{\left[\ln m + \left(\partial K_{\upsilon}(2\alpha)/\partial \upsilon\right) K_{\upsilon}^{-1}(2\alpha)\right] I_2 - I_4}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)\, f_A(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{3.41}$$

où I_1, I_2, I_3 et I_4 sont les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{x_p} x^{\upsilon} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right] dx = 2m^{\upsilon+1} K_{\upsilon+1}(2\alpha)\, F_A(x_p; m, \alpha, \upsilon+1) \tag{3.43}$$

$$I_2 = \int_0^{x_p} x^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right] dx = (1-p)\, 2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha) \tag{3.44}$$

$$I_3 = \int_0^{x_p} x^{\upsilon-2} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right] dx = 2m^{\upsilon-1} K_{\upsilon-1}(2\alpha)\, F_A(x_p; m, \alpha, \upsilon-1) \tag{3.45}$$

$$I_4 = \int_0^{x_p} x^{\upsilon-1} \ln(x) \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right] dx \tag{3.46}$$

En pratique, ces intégrales doivent être évaluées par intégration numérique, à l'exception de I_2 pour laquelle une expression explicite est disponible.

3.5 Exemple

Pour illustrer l'estimation des paramètres et des quantiles de la loi de Halphen Type A, nous considérons un échantillon de 25 débits maximums annuels de printemps mesurés en rivière naturelle (station 03ED004 située au Québec en m^3/s) :

396, 561, 699, 496, 833, 680, 354, 402, 261, 340, 697, 572, 388,
663, 626, 420, 665, 348, 480, 443, 455, 445, 525, 565, 391

Les moyennes arithmétique, harmonique et géométrique (statistiques exhaustives de la loi Type A) calculées à partir de ces observations sont respectivement :

$$A = 508.20,\ H = 470.34 \text{ et } G = 489.09$$

On déduit de ces moyennes que A/H = 1.0805 et que la borne d'estimation U est 13.422. Pour déterminer si les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les solutions du système d'équations (3.22, 3.23), il faut examiner le signe des dérivées $l'(-U)$ et $l'(U)$. Or, $\Psi(13.422) = 2.559$ et d'après les expressions données en (3.34), on obtient $l'(-13.422) = 0.0344$ et $l'(13.422) = -0.0155$. Le signe de ces dérivées indique alors que le maximum de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée est atteint pour $\upsilon \in [-13.422\,;\,13.422]$ et que le système (3.22, 3.23) peut être résolu pour α et m lorsque υ est fixé. Ce résultat nous permet de fixer un ensemble de valeurs du paramètre υ comprises dans cet intervalle et d'estimer les paramètres α et m en résolvant (3.22, 3.23). Ensuite, pour chaque triplets $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \upsilon)$ ainsi obtenus, la fonction de vraisemblance partiellement maximisée, $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ (éq. 3.32), est évaluée. Le tableau 3.1 présente les résultats pour quelques valeurs de υ fixées dans l'intervalle [-13.0 ; 13.0].

Tableau 3.1. Résultats de l'estimation des paramètres de la loi de Halphen Type A.

υ	$\hat{\alpha}$	$\hat{m}$	$K_\upsilon(2\hat{\alpha})$	$K_{\upsilon+1}(2\hat{\alpha})$	$K_{\upsilon-1}(2\hat{\alpha})$	$\ln L(\upsilon\|\hat{\alpha},\hat{m})$
-13	1.544	4019.154	6.929E+05	8.762E+04	5.921E+06	-158.5821
-11	3.554	1604.578	4.830E-01	1.530E-01	1.648E+00	-158.5193
-9	4.605	1130.630	2.144E-03	9.637E-04	5.154E-03	-158.4644
-8	4.986	994.930	3.490E-04	1.783E-04	7.382E-04	-158.4398
-7	5.299	889.877	8.172E-05	4.667E-05	1.546E-04	-158.4170
-6	5.557	804.820	2.543E-05	1.606E-05	4.352E-05	-158.3961
-5	5.766	733.641	1.001E-05	6.930E-06	1.561E-05	-158.3770
-4	5.932	672.551	4.820E-06	3.640E-06	6.900E-06	-158.3597
-3	6.058	619.042	2.780E-06	2.290E-06	3.660E-06	-158.3440
-2	6.146	571.379	1.900E-06	1.690E-06	2.300E-06	-158.3302
-1	6.199	528.312	1.510E-06	1.460E-06	1.700E-06	-158.3181
0	6.216	488.905	1.400E-06	1.460E-06	1.460E-06	-158.3078
1	6.199	452.437	1.510E-06	1.700E-06	1.460E-06	-158.2992
2	6.146	418.335	1.900E-06	2.300E-06	1.690E-06	-158.2923
3	6.058	386.125	2.780E-06	3.660E-06	2.290E-06	-158.2872
4	5.932	355.404	4.820E-06	6.900E-06	3.640E-06	-158.2839
4.5	5.854	340.489	6.780E-06	1.013E-05	4.910E-06	-158.2828
5	5.766	325.810	1.001E-05	1.561E-05	6.930E-06	-158.2823
5.5	5.667	311.327	1.553E-05	2.535E-05	1.028E-05	-158.2822
6	5.557	296.996	2.543E-05	4.352E-05	1.606E-05	-158.2825
6.5	5.435	282.772	4.416E-05	7.936E-05	2.655E-05	-158.2832
7	5.299	268.608	8.172E-05	1.546E-04	4.667E-05	-158.2844
8	4.986	240.246	3.490E-04	7.382E-04	1.783E-04	-158.2882
9	4.605	211.411	2.144E-03	5.154E-03	9.637E-04	-158.2939
10	4.139	181.390	2.177E-02	6.100E-02	8.396E-03	-158.3015
11	3.554	148.966	4.830E-01	1.648E+00	1.530E-01	-158.3110
12	2.778	111.523	4.793E+01	2.184E+02	1.136E+01	-158.3224
13	1.544	59.472	6.929E+05	5.921E+06	8.762E+04	-158.3359

Selon le tableau 3.1, le maximum de la fonction partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est atteint au voisinnage de $\upsilon = 5.5$ et les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type A, pour cet échantillon, sont alors approximativement: $\hat{m} = 311.33$, $\hat{\alpha} = 5.67$ et $\hat{\upsilon} = 5.50$ (ligne ombragée du tableau 3.1). Cette solution est en effet approximative puisqu'on peut, en pratique, raffiner la partition de l'intervalle ou employer une méthode numérique de type dichotomie pour obtenir un résultat plus précis.

La figure 3.3 montre le tracé de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée dans l'intervalle $\upsilon \in [-13.422\,;13.422]$.

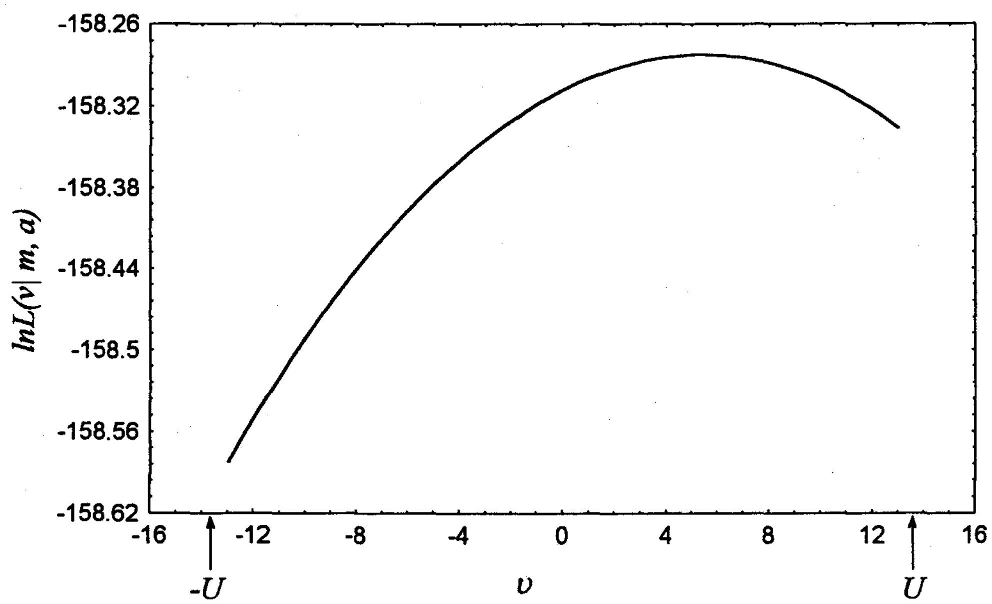

Figure 3.3. Vraisemblance logarithmique partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$.

En utilisant l'expression (3.35), on peut maintenant calculer les éléments de la matrice d'information de Fisher. On obtient alors :

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} 1.3211\text{E-}04 & -3.0383\text{E-}03 & 3.1878\text{E-}03 \\ & 8.0361\text{E-}02 & -7.1159\text{E-}02 \\ & & 7.7434\text{E-}02 \end{bmatrix}$$

d'où l'on déduit, en inversant $\mathbf{I}_f$ et en appliquant l'équation (D.4), la matrice des variances et covariances des estimateurs du maximum de vraisemblance $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ des paramètres de la loi Type A :

$$\frac{1}{25}\mathbf{I}_f^{-1} = \begin{bmatrix} Var\{\hat{m}\} & Cov\{\hat{m},\hat{\alpha}\} & Cov\{\hat{m},\hat{\upsilon}\} \\ & Var\{\hat{\alpha}\} & Cov\{\hat{\alpha},\hat{\upsilon}\} \\ & & Var\{\hat{\upsilon}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 467\,790.0 & 3\,400.1 & -16\,133.0 \\ & 27.4 & -114.8 \\ & & 559.2 \end{bmatrix}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{x}_T$ du quantile de période de retour T est obtenu en résolvant pour x_T l'équation (3.37) avec $\hat{m} = 311.33$, $\hat{\alpha} = 5.67$ et $\hat{\upsilon} = 5.50$. Le tableau 3.2 donne le quantile estimé pour 14 probabilité au dépassement p. L'équation (3.37) a été résolue à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson. Pour chaque probabilité au dépassement p, la variance du quantile a été déterminée à partir des expressions (3.39)-(3.46) et (E.1). La variance et le résultat de chacune des étapes de son calcul sont présentées au tableau 3.2 (intégrales I_1 à I_4 et dérivées de x_p par rapport à chacun des paramètres).

Tableau 3.2. Quantiles estimés et écart-types pour la loi Type A.

$1-p$	$\hat{x}_p$	I_1	I_2	I_3	I_4	$\partial x_p/\partial m$	$\partial x_p/\partial \alpha$	$\partial x_p/\partial \upsilon$	$\sqrt{Var\{\hat{x}_p\}}$
0.1	341	2.88E+10	9.66E+07	3.28E+05	5.50E+08	1.087	-15.191	28.110	27.06
0.2	387	6.41E+10	1.93E+08	5.92E+05	1.12E+09	1.234	-21.152	31.450	26.13
0.3	424	1.03E+11	2.90E+08	8.30E+05	1.70E+09	1.351	-26.122	33.982	26.94
0.5	492	1.91E+11	4.83E+08	1.25E+06	2.88E+09	1.566	-35.673	38.367	29.73
0.7	554	2.75E+11	6.44E+08	1.56E+06	3.89E+09	1.766	-44.853	42.133	33.19
0.8	620	3.51E+11	7.73E+08	1.78E+06	4.71E+09	1.976	-54.803	45.839	39.00
0.9	697	4.14E+11	8.69E+08	1.93E+06	5.34E+09	2.224	-66.824	49.913	50.85
0.95	767	4.49E+11	9.18E+08	1.99E+06	5.67E+09	2.447	-77.868	53.346	66.96
0.98	851	4.72E+11	9.47E+08	2.03E+06	5.85E+09	2.720	-91.559	57.271	93.12
0.99	911	4.81E+11	9.56E+08	2.04E+06	5.92E+09	2.915	-101.456	59.919	115.60
0.995	969	4.85E+11	9.61E+08	2.05E+06	5.94E+09	3.103	-111.068	62.361	139.88
0.999	1096	4.89E+11	9.65E+08	2.05E+06	5.98E+09	3.524	-132.606	67.516	201.69
0.9995	1149	4.90E+11	9.65E+08	2.05E+06	5.98E+09	3.704	-141.662	69.690	230.02
0.9999	1266	4.90E+11	9.66E+08	2.05E+06	5.98E+09	4.172	-163.235	76.111	295.03

Nous obtenons ainsi une estimation du débit maximum de printemps pour différents risques hydrologiques (probabilité au dépassement p), c'est-à-dire le débit maximum correspondant à diverses périodes de retour $T = 1/p$ (équation 1.2). En particulier, le débit centennal estimé à partir de la loi de Halphen Type A ($T = 100$ ans ou $p = 0.01$) est ici de 911 m^3/s.

4 LOI DE HALPHEN TYPE B

Ce chapitre est consacré aux propriétés statistiques de base de la loi de Halphen Type B ainsi qu'à l'estimation des paramètres et des quantiles x_p de probabilité au dépassement p.

4.1 Moments et coefficients

Les moments non centrés μ_r' de la loi de Halphen Type B sont déduits à l'aide de la fonction caractéristique de cette distribution, $\phi_B(t)$. Pour la loi Type B, cette fonction s'exprime, selon (2.6) et (3.1), de la manière suivante :

$$\phi_B(t) = \frac{2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)} \int_0^\infty e^{itx} x^{2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right) \right] dx$$

En effectuant le développement limité du terme e^{itx}, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\phi_B(t) &= \frac{2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)} \int_0^\infty \left[1 + \frac{itx}{1!} + \frac{(itx)^2}{2!} + \ldots + \frac{(itx)^r}{r!} + \ldots \right] x^{2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right) \right] dx \\
&= \frac{2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)} \int_0^\infty \sum_{r=0}^\infty \frac{(it)^r}{r!} x^{2\upsilon+r-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right) \right] dx \\
&= \frac{2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)} \sum_{r=0}^\infty \frac{(it)^r}{r!} \int_0^\infty x^{2(\upsilon+r/2)-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right) \right] dx
\end{aligned}$$

Étant donné que l'intégrale de la f.d.p. (2.6) sur tout le domaine égale 1, on a :

$$\int_0^\infty x^{2(\upsilon+r/2)-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right) \right] dx = \frac{1}{2} m^{2(\upsilon+r/2)} ef_{\upsilon+r/2}(\alpha)$$

d'où,

$$\phi_B(t) = \sum_{r=0}^\infty \frac{(it)^r}{r!} \frac{m^r ef_{\upsilon+r/2}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} \tag{4.1}$$

Ainsi, si X est une variable aléatoire distribuée selon une loi de Halphen Type B (éq. 2.6), alors le moment non centré d'ordre r de X, $\mu_r' = E\{X^r\}$, est donné par :

$$\mu_r' = \frac{m^r ef_{\upsilon+r/2}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} \tag{4.2}$$

Le moment non centré d'ordre r de la loi Type B existe pour toute valeur réelle de α, mais seulement si $r > -2\upsilon$, car l'indice de la fonction exponentielle factorielle $ef_\upsilon(\alpha)$ doit être strictement positif. On déduit de l'équation (4.2) la moyenne arithmétique de la variable aléatoire X suivant une loi Type B :

$$\mu_1' = E\{X\} = m\frac{ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} \tag{4.3}$$

Comme nous le verrons dans la section 4.3, les moments non centrés d'ordre quasi-zéro, $\mu_{\underline{0}}'$, (logarithme de la moyenne géométrique) et d'ordre 2, μ_2', jouent un rôle fort important lors de l'estimation des paramètres. Nous donnons donc les expressions de ces moments :

$$\mu_{\underline{0}}' = E\{\ln X\} = \ln m + \frac{\partial\, ef_\upsilon(\alpha)/\partial\upsilon}{2ef_\upsilon(\alpha)} \tag{4.4}$$

$$\mu_2' = E\{X^2\} = \frac{m^2 ef_{\upsilon+1}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} \tag{4.5}$$

La détermination du moment $\mu_{\underline{0}}'$ est présentée en détail à l'annexe C. L'expression (4.5) est obtenue directement à partir de l'équation (4.2).

Les moments centrés μ_r peuvent être calculés à partir des expressions (3.9) et (4.2). On obtient alors les principaux moments centrés (la variance et les moments centrés d'ordre 3 et 4) :

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= Var\{X\} = \frac{m^2}{ef_\upsilon^2}\left(ef_\upsilon ef_{\upsilon+1} - ef_{\upsilon+1/2}^2\right) \\
\mu_3 &= \frac{m^3}{ef_\upsilon^3}\left(ef_{\upsilon+3/2}ef_\upsilon^2 - 3ef_{\upsilon+1/2}ef_{\upsilon+1}ef_\upsilon + 2ef_{\upsilon+1/2}^3\right) \\
\mu_4 &= \frac{m^4}{ef_\upsilon^4}\left(ef_\upsilon^3 ef_{\upsilon+2} - 4ef_\upsilon^2 ef_{\upsilon+1/2}ef_{\upsilon+3/2} + 6ef_\upsilon ef_{\upsilon+1/2}^2 ef_{\upsilon+1} - 3ef_{\upsilon+1/2}^4\right)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

où, pour simplifier la notation, la fonction exponentielle factorielle $ef_\upsilon(\alpha)$ est notée ici ef_υ.

Ayant déterminé les principaux moments de la loi de Halphen Type B, on peut évaluer les coefficients adimensionnels de variation (C_v), d'asymétrie (C_s) et d'aplatissement (C_k), généralement utilisés pour caractériser la forme de la loi. En effet, à partir des expressions données en (4.3) et (4.6), nous déduisons que :

$$
\begin{aligned}
C_v &= \frac{\mu_2^{1/2}}{\mu_1'} = \frac{\sqrt{ef_\upsilon ef_{\upsilon+1} - ef_{\upsilon+1/2}^2}}{ef_{\upsilon+1/2}} \\
C_s &= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{ef_\upsilon^2 ef_{\upsilon+3/2} - 3ef_\upsilon ef_{\upsilon+1/2} ef_{\upsilon+1} + 2ef_{\upsilon+1/2}^3}{\left(ef_\upsilon ef_{\upsilon+1} - ef_{\upsilon+1/2}^2\right)^{3/2}} \\
C_k &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{ef_\upsilon^3 ef_{\upsilon+2} - 4ef_\upsilon^2 ef_{\upsilon+1/2} ef_{\upsilon+3/2} + 6ef_\upsilon ef_{\upsilon+1/2}^2 ef_{\upsilon+1} - 3ef_{\upsilon+1/2}^4}{\left(ef_\upsilon ef_{\upsilon+1} - ef_{\upsilon+1/2}^2\right)^2}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

On remarque que la forme des expressions des moments et des coefficients de la loi Type B est très semblable à celle des expressions correspondantes obtenues pour la loi Type A (cf. chapitre 3). Ainsi, de manière analogue à la loi Type A, on peu introduire pour la loi Type B les deux fonctions auxiliaires suivantes :

$$R_B(\alpha,\upsilon) = \frac{ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} \tag{4.8}$$

et

$$D_B(\alpha,\upsilon) = \frac{ef_{\upsilon+1}(\alpha) ef_\upsilon(\alpha)}{ef_{\upsilon+1/2}^2(\alpha)} = R_B(\alpha,\upsilon+1/2) R_B^{-1}(\alpha,\upsilon) \tag{4.9}$$

Comme pour la loi Type A, la fonction $D_B(\alpha,\upsilon)$ est particulièrement importante pour l'estimation des paramètres. Elle correspond ici au rapport entre le moment non-centré d'ordre 2 et le carré du moment non centré d'ordre 1 (éq. 4.5 et 4.3). Un tel rapport constitue pour la loi Type B, tout comme la fonction $D_A(\alpha,\upsilon)$ pour la loi Type A, une mesure de dispersion. La fonction $D_B(\alpha,\upsilon)$ est donc appelée "fonction de dispersion".

On peut réécrire certains moments importants de la loi Type B à l'aide des fonctions $R_B(\alpha,\upsilon)$ et $D_B(\alpha,\upsilon)$. En effet, les moments non centrés d'ordres 1, -1 et 2, la variance et le coefficient de variation peuvent s'exprimer respectivement de la manière suivante :

$$E\{X\} = mR_B(\alpha,\upsilon) \tag{4.10}$$

$$E\{1/X\} = \frac{1}{m} R_B^{-1}(\alpha,\upsilon-1/2) \tag{4.11}$$

$$E\{X^2\} = m^2 R_B^2(\alpha,\upsilon) D_B(\alpha,\upsilon) \tag{4.12}$$

$$Var\{X\} = m^2 R_B^2(\alpha,\upsilon)\left[D_B(\alpha,\upsilon) - 1\right] \tag{4.13}$$

$$C_v = \sqrt{D_B(\alpha,\upsilon) - 1} \tag{4.14}$$

Le coefficient de variation C_v de la loi Type B dépend seulement de la fonction de dispersion, tout comme celui de la loi Type A (éq. 3.17). La fonction de dispersion $D_B(\alpha, \upsilon)$ est strictement décroissante en fonction de α quel que soit υ fixé et atteint son maximum lorsque $\alpha \to -\infty$ (cf. section 4.3). Ainsi, la loi gamma (cas limite de la loi du Type B, cf. proposition 2.8) est la distribution du Type B ayant la plus grande valeur de la fonction $D_B(\alpha, \upsilon)$ et donc du coefficient de variation (éq. 4.14).

La figure 4.1 illustre la relation entre les coefficients de variation C_v et d'asymétrie C_s de la loi Type B pour différentes valeurs des paramètres de forme α et υ. Ce diagramme des moments permet de représenter les diverses lois de Type B par les points du plan C_v-C_s et montre comment les valeurs des paramètres α et υ varient dans cet espace. Comme pour la loi Type A, la région du plan occupée par les lois de Type B est restreinte. De plus, cette région est délimitée par la courbe qui correspond dans ce diagramme à la loi gamma. Les espaces occupés par les Type A et Type B sont donc disjoints.

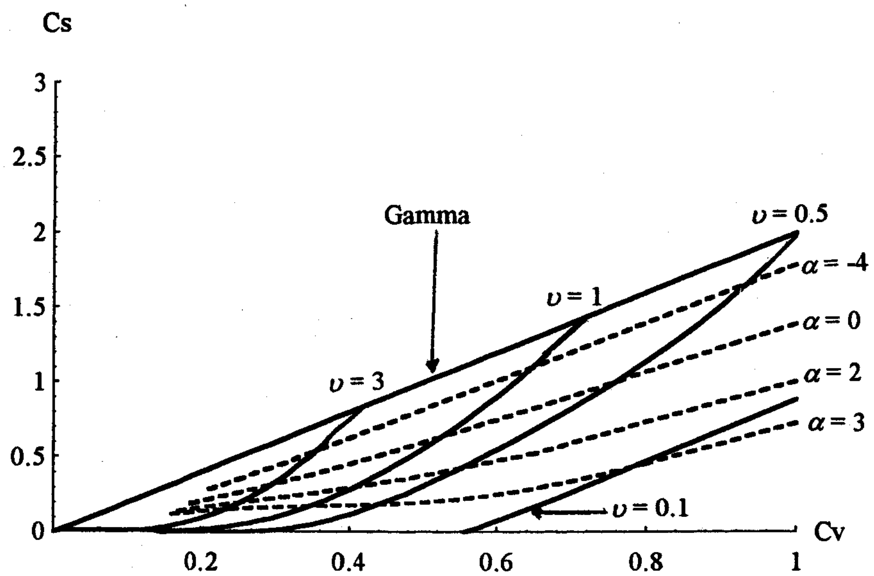

Figure 4.1. Relation entre C_v et C_s pour différentes valeurs de α et υ : loi Type B.

4.2 Exhaustivité

La loi de Halphen Type B fait partie de la classe exponentielle des fonctions de densité de probabilité continues, car sa f.d.p peut s'exprimer de la manière suivante (cf. annexe D, éq. D.1) :

$$f_B(x) = \frac{2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)} x^{2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right)\right]$$
$$= \exp\left\{(2\upsilon - 1)\ln x - \frac{1}{m^2}x^2 + \frac{\alpha}{m}x + \ln\left[2/m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)\right]\right\}$$
$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{3} c_i(m,\upsilon,\alpha)T_i(x) + d(m,\upsilon,\alpha) + S(x)\right\}$$

où,

- $c_1(m,\upsilon,\alpha) = (2\upsilon - 1)$
- $c_2(m,\upsilon,\alpha) = -1/m^2$
- $c_3(m,\upsilon,\alpha) = \alpha / m$
- $d(m,\upsilon,\alpha) = \ln\left[2/m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)\right]$

- $T_1(x) = \ln(x)$
- $T_2(x) = x^2$
- $T_3(x) = x$
- $S(x) = 0$

On déduit alors que les variables aléatoires $\left(\ln(X), X^2, X\right)$ sont exhaustives pour la loi de Halphen Type B (cf. annexe D). Ainsi, pour un échantillon de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendamment et identiquement distribuées selon une loi Type B, les statistiques suivantes sont exhaustives (cf. expression D.2) :

$$T_1(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i = \ln G \quad T_2(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = Q \quad T_3(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = A \qquad (4.15)$$

De plus, les moyennes arithmétique (A), quadratique (Q) et géométrique (G) de l'échantillon sont des statistiques exhaustives pour la loi de Halphen Type B puisqu'une fonction bijective d'une statistique exhaustive est exhaustive.

4.3 Estimation des paramètres

Cette section est consacrée à l'estimation des paramètres à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, en considérant un échantillon de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendamment et identiquement distribuées selon une loi de Halphen Type B.

Comme pour la loi du Type A, une approche en deux étapes est considérée ici pour déterminer les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type B. D'abord, les paramètres α et m sont estimés numériquement, υ étant fixé. Ensuite, la fonction de vraisemblance logarithmique partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$

est employée afin de déterminer le triplet $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ d'estimateurs du maximum de vraisemblance.

Dans la section 4.3.1, nous présentons l'estimation des paramètres m et α lorsque υ est fixé. La section 4.3.2 traite de l'estimation du paramètre υ à partir de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée. Les propriétés asymptotiques des estimateurs sont ensuite étudiées à la section 4.3.3. Finalement, la section 4.3.4 est consacrée à l'estimation des quantiles de la loi de Halphen Type B ainsi qu'au calcul de leur variance asymptotique.

4.3.1 Estimation de m et α pour υ fixé

Tel que spécifié à l'annexe D, pour déterminer les estimateurs des paramètres d'une loi de probabilité $F(x;\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ appartenant à la classe des lois exponentielles, il faut résoudre le système d'équations $E_\theta[T_i(\underline{X})]=T_i(\underline{x})$, i = 1, 2, 3, où $(T_1(\underline{X}),T_2(\underline{X}),T_3(\underline{X}))$ sont les statistiques exhaustives.

En employant les expressions (4.3) à (4.5) pour évaluer l'espérance mathématique des statistiques exhaustives (éq. 4.15), on peut montrer que le système d'équations du maximum de vraisemblance obtenu pour la loi Type B est donné par :

$$\begin{aligned} m\frac{ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = A \\ m^2\frac{ef_{\upsilon+1}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = Q \\ \ln m + \frac{\partial ef_\upsilon(\alpha)/\partial\upsilon}{2ef_\upsilon(\alpha)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = \ln G \end{aligned} \tag{4.16}$$

où A, Q et G désignent respectivement les moyennes arithmétique, quadratique et géométrique de l'échantillon. Le paramètre de forme υ étant fixé, seules deux équations sont nécessaires pour l'estimation de α et m. Les deux premières expressions sont retenues (on évite ainsi le calcul de la dérivée de la fonction de exponentielle factorielle par rapport à son indice) et peuvent être réarrangées pour obtenir le système de 2 d'équations à 2 inconnues suivant :

$$\frac{ef_{\upsilon+1}(\alpha)\, ef_\upsilon(\alpha)}{ef^2_{\upsilon+1/2}(\alpha)} = \frac{Q}{A^2} \tag{4.17}$$

$$m = A\frac{ef_{\upsilon}(\alpha)}{ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)} \tag{4.18}$$

Les équations (4.17) et (4.18) sont réécrites, à l'aide des fonctions définies en (4.8) et (4.9), de la manière suivante :

$$D_B(\alpha,\upsilon) = \frac{Q}{A^2} \tag{4.19}$$

$$m = A\,R_B^{-1}(\alpha,\upsilon) \tag{4.20}$$

Si ce système possède une solution, les estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\alpha}$ et $\hat{m}$, pour υ fixé, peuvent être déterminés en résolvant l'équation (4.19) pour α et en remplaçant ensuite $\hat{\alpha}$ dans l'équation (4.20). Ainsi, de la même manière que pour la loi Type A, les propriétés de la fonction de dispersion jouent aussi un rôle très important dans la détermination des estimateurs des paramètres de la loi de Halphen Type B. La proposition qui suit établit les principales propriétés de la fonction $D_B(\alpha,\upsilon)$ nécessaires au calcul des estimateurs du maximum de vraisemblance.

PROPOSITION 4.1. *La fonction de dispersion $D_B(\alpha,\upsilon)$ est, pour tout υ fixé, une fonction à valeurs positives, décroissante avec α et telle que:*

$$\lim_{\alpha\to-\infty} D_B(\alpha,\upsilon) = 1+\frac{1}{2\upsilon} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\alpha\to+\infty} D_B(\alpha,\upsilon) = 1$$

Démonstration. Cette démonstration est tout à fait analogue à celle de la proposition 3.1.

D'abord, par définition (éq. 2,7), la fonction exponentielle factorielle $ef_{\upsilon}(\alpha)$ admet pour tout $\alpha \in \Re$ et tout $\upsilon > 0$ des valeurs positives. Ainsi, $D_B(\alpha,\upsilon)$, définie par l'équation (4.9) est aussi une fonction à valeurs strictement positives.

Pour évaluer la valeur limite de $D_B(\alpha,\upsilon)$, lorsque $\alpha \to -\infty$, on emploi le développement asymptotique de la fonction exponentielle factorielle donné en (B.9). On a alors, pour $\alpha \to -\infty$ et quel que soit υ :

$$D_B(\alpha,\upsilon) \approx \frac{\dfrac{2\Gamma(2\upsilon)}{|\alpha|^{2\upsilon}}\left[1-\dfrac{2\upsilon(2\upsilon+1)}{1!}\dfrac{1}{\alpha^2}\right]\dfrac{2\Gamma(2\upsilon+2)}{|\alpha|^{2\upsilon+2}}\left[1-\dfrac{(2\upsilon+2)(2\upsilon+3)}{1!}\dfrac{1}{\alpha^2}\right]}{\dfrac{4\Gamma^2(2\upsilon+1)}{|\alpha|^{4\upsilon+2}}\left[1-\dfrac{(2\upsilon+1)(2\upsilon+2)}{1!}\dfrac{1}{\alpha^2}\right]^2} \tag{4.21}$$

En appliquant, à l'expression (4.21), la limite lorsque $\alpha \to -\infty$, on obtient :

$$\lim_{\alpha \to -\infty} D_B(\alpha, \upsilon) = \frac{\Gamma(2\upsilon)\Gamma(2\upsilon+2)}{\Gamma^2(2\upsilon+1)} \tag{4.22}$$

Or, puisque $\Gamma(x) = (x-1)!$, on a alors le résultat :

$$\lim_{\alpha \to -\infty} D_B(\alpha, \upsilon) = \frac{(2\upsilon-1)!(2\upsilon+1)!}{(2\upsilon!)^2} = 1 + \frac{1}{2\upsilon} \tag{4.23}$$

La valeur limite de $D_B(\alpha, \upsilon)$, lorsque $\alpha \to +\infty$, est obtenue en employant le développement limité (B.10) de la fonction exponentielle factorielle pour de grands arguments. En vertu de (B.10), l'équation (4.9) peut s'écrire, pour α grand :

$$D_B(\alpha, \upsilon) = \frac{ef_{\upsilon+1}(\alpha) ef_\upsilon(\alpha)}{ef^2_{\upsilon+1/2}(\alpha)} \approx \frac{[1+g(\alpha,\upsilon)][1+g(\alpha,\upsilon+1)]}{[1+g(\alpha,\upsilon+1/2)]^2} \tag{4.24}$$

où,

$$g(\alpha, \upsilon) = \left[\frac{(2\upsilon-1)(2\upsilon-2)}{\alpha^2} + \cdots \right]$$

et l'expression (4.24) tend clairement vers 1 pour tout $\upsilon > 0$ lorsque $\alpha \to +\infty$, puisque, dans ces conditions, les fonctions $g(\cdot)$ tendent vers 0.

Enfin, étant donné les résultats limites obtenus pour $\alpha \to -\infty$ et $\alpha \to +\infty$, il suffit de montrer que $D_B(\alpha, \upsilon)$ est monotone pour déduire qu'elle est une fonction décroissante de α quel que soit υ fixé.

Pour υ fixé, la loi Type B fait partie de la classe exponentielle de lois de probabilité à 2 paramètres et admet comme statistiques exhaustives (cf. section 4.2, éq. 4.15) :

$$(nT_2, nT_3) = \left(\sum X_i^2, \sum X_i\right) = (nQ, nA)$$

Considérons $\tau(\alpha)$ l'espérance mathématique du vecteur de statistiques exhaustives (exprimée comme une fonction de α seulement puisque υ est fixe et m est un paramètre d'échelle dont $D_B(\alpha, \upsilon)$ ne dépend pas). Des équations (4.3), (4.5) et (4.8) on déduit que :

$$\tau(\alpha) = [\tau_2(\alpha), \tau_3(\alpha)] = \left(nm^2 R_B(\alpha, \upsilon+1/2) R_B(\alpha, \upsilon), nmR_B(\alpha, \upsilon)\right)$$

et que :

$$\tau_2(\alpha)\tau_3^{-2}(\alpha) = \frac{1}{n} R_B(\alpha, \upsilon + 1/2) R_B^{-1}(\alpha, \upsilon)$$

Selon l'expression (4.9), les fonctions $\tau(\alpha)$ et $D_B(\alpha, \upsilon)$ sont des applications équivalentes définies par l'égalité suivante :

$$\tau_2(\alpha)\tau_3^{-2}(\alpha) = \frac{1}{n} D_B(\alpha, \upsilon) \tag{4.25}$$

qui, pour un α donné, est une hyperbole dans l'espace $\tau_2 \times \tau_3^{-2}$. Or, les fonctions τ_2 et τ_3 :

- sont des fonctions bijectives de α, c'est-à-dire que $\tau(\alpha) \neq \tau(\alpha + \varepsilon)$ $\forall\, \varepsilon > 0$, puisqu'elles correspondent à l'espérance de statistiques exhaustives et complètes (Lehmann, 1983). Les hyperboles sont donc distinctes pour différentes valeurs de α ;

- sont continues puisqu'elles sont le rapport de fonctions exponentielles factorielles, elles-mêmes continues et à valeurs strictement positives.

En vertu de l'équivalence entre $\tau(\alpha)$ et $D_B(\alpha, \upsilon)$ (éq. 4.25), la fonction de dispersion $D_B(\alpha, \upsilon)$ est continue et bijective. Elle est donc nécessairement monotone. ■

La figure 4.2 illustre le comportement de la fonction de dispersion $D_B(\alpha, \upsilon)$ pour différentes valeurs des paramètres α et υ.

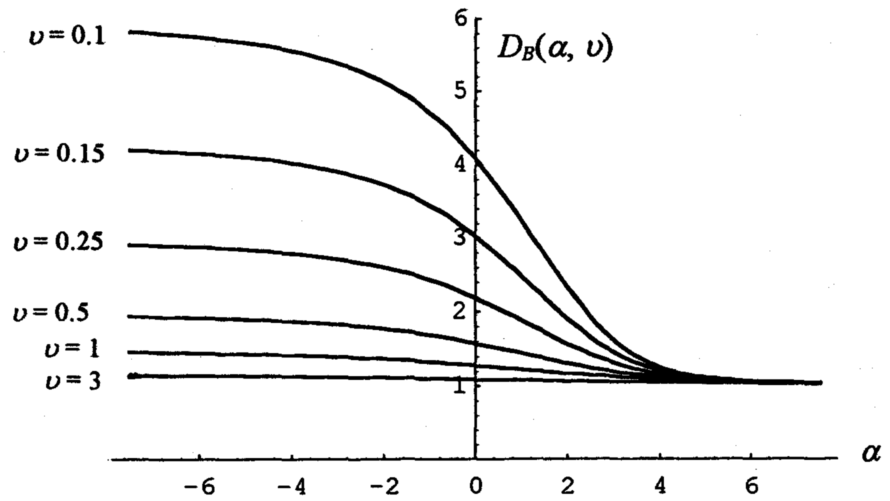

Figure 4.2. Fonction de dispersion $D_B(\alpha, \upsilon)$

Selon la proposition 4.1 l'équation (4.19) n'admet pas toujours une solution. En effet, la fonction de dispersion $D_B(\alpha, \upsilon)$ prend des valeurs supérieures à 1, impliquant ainsi que le système (4.19, 4.20) n'admet pas de solution si $Q = A^2$, c'est-à-dire lorsque toutes les observations de l'échantillon sont identiques (cas théorique rarement possible en pratique). De plus, lorsque $\alpha \to -\infty$, la fonction $D_B(\alpha, \upsilon)$ est toujours bornée supérieurement quel que soit υ. Les estimateurs du maximum de vraisemblance correspondent donc à la solution du système d'équations (4.19, 4.20), quel que soit υ fixé, si et seulement si les observations ne sont pas toutes identiques et $Q/A^2 < 1 + (1/2\upsilon)$. Cette dernière inégalité signifie que la dispersion des observations ne doit pas être trop grande pour pouvoir employer directement le système d'équations.

L'inégalité $Q/A^2 < 1 + (1/2\upsilon)$ peut s'écrire :

$$\frac{1}{\upsilon} > 2\left(\frac{Q}{A^2} - 1\right)$$

ou encore

$$\upsilon < \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{A^2} - 1\right)^{-1}$$

Si on pose $V = 1/[2(QA^{-2} - 1)]$, on a que $0 < V < \infty$ car $Q \geq A^2$, et ainsi, qu'en vertu des propriétés de $D_B(\alpha, \upsilon)$, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et m sont les solutions du système d'équations (4.19, 4.20) si et seulement si $0 < \upsilon < V$. La statistique *V*, tout comme la statistique *U* pour la loi Type A, détermine pour la loi Type B l'intervalle de valeurs du paramètre υ pour lesquelles le système (4.19, 4.20) admet une solution.

Lorsque que la condition $0 < \upsilon < V$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si l'on a $Q/A^2 \geq 1 + (1/2\upsilon)$, la dispersion des observations est trop grande et les estimateurs du maximum de vraisemblance de α et m convergent vers ceux de la loi gamma. Ainsi, pour $\upsilon \geq V$, la distribution gamma serait la plus adéquate de la famille des lois Type B pour représenter l'échantillon. En effet, pour une valeur donnée du paramètre υ, la loi gamma possède le plus grand coefficient de variation parmi les lois de Halphen Type B (cf. section 4.1). On peut alors déduire de la proposition 2.8, que dans ces conditions la loi de Halphen Type B correspond à la loi gamma de paramètres $\omega = -\alpha/m$ et 2υ. Pour υ fixé, en appliquant la méthode du maximum de vraisemblance à l'expression (2.4) convenablement reparamétrisée, cette loi gamma admet comme estimateur du paramètre d'échelle ω, $\hat{\omega} = 2\upsilon/A$ (Bobée et Ashkar, 1991, p. 40).

En résumé, pour υ fixé,

- si $0 < \upsilon < V$, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et m sont les solutions du système d'équations (4.19, 4.20) ;
- si $\upsilon \geq V$, la loi de Halphen Type B correspond à la loi gamma de paramètres $\omega = -\alpha/m$ et 2υ et l'estimateur du maximum de vraisemblance de ω est $\hat{\omega} = 2\upsilon/A$;

4.3.2 Estimation de υ

Cette section est consacrée à la détermination du triplet $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ d'estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type B qui sont solution du système (4.16). L'objectif est d'estimer le paramètre υ étant donné qu'il est possible d'estimer (m, α) pour une valeur donnée de υ (cf. section 4.3.1).

La fonction de vraisemblance logarithmique de la loi de Halphen Type B peut être déduite de l'équation (2.6) et s'exprimer de la manière suivante :

$$\ln L(m,\alpha,\upsilon) = n\ln\left[\frac{2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)}\right] + (2\upsilon - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{\alpha}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Cette équation peut s'écrire en utilisant la notation de (4.16) :

$$\ln L(m,\alpha,\upsilon) = n\left\{\ln\left[\frac{2G^{2\upsilon-1}}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)}\right] - \frac{Q}{m^2} + \frac{\alpha A}{m}\right\} \tag{4.26}$$

Comme pour la loi Type A, la fonction de vraisemblance logarithmique partiellement maximisée est utilisée pour estimer υ, les paramètres (m, α) étant fixés. En vertu de l'équation (3.29), cette fonction est obtenue en remplaçant, dans la fonction de vraisemblance logarithmique $\ln L(m,\alpha,\upsilon)$, les paramètres (m, α) par leurs estimateurs respectifs $\hat{\alpha}$ et $\hat{m}$.

Lorsque $0 < \upsilon < V$, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et m sont les solutions du système d'équations (4.19, 4.20), ou de manière équivalente, du système formé des deux premières équations de (4.16). Ainsi, pour $0 < \upsilon < V$, on a :

$$\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m}) = n\left\{\ln\left[\frac{2G^{2\upsilon-1}}{\hat{m}^{2\upsilon} ef_\upsilon(\hat{\alpha})}\right] - \frac{ef_{\upsilon+1}(\hat{\alpha})}{ef_\upsilon(\hat{\alpha})} + \hat{\alpha}\frac{ef_{\upsilon+1/2}(\hat{\alpha})}{ef_\upsilon(\hat{\alpha})}\right\} \tag{4.27}$$

Toutefois, si $\upsilon \geq V$, la fonction de vraisemblance correspond plutôt à celle de la loi gamma de paramètres $\omega = -\alpha/m$ et 2υ (proposition 2.8). Cette fonction de vraisemblance est déduite de l'expression (2.4) et s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}\ln L(\omega, 2\upsilon) &= n[2\upsilon \ln \omega - \ln \Gamma(2\upsilon)] + (2\upsilon - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \omega \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= n[2\upsilon \ln \omega - \ln \Gamma(2\upsilon) + (2\upsilon - 1)\ln G - \omega A]\end{aligned}$$

En remplaçant dans cette fonction le paramètre ω par son estimateur $\hat{\omega} = 2\upsilon/A$ (cf. section 4.3.1), la fonction de vraisemblance logarithmique partiellement maximisée s'exprime alors, pour $\upsilon \geq V$, de la manière suivante :

$$\ln L(\upsilon | \hat{\alpha}, \hat{m}) = n\left[2\upsilon \ln(2\upsilon/A) - \ln \Gamma(2\upsilon) + (2\upsilon - 1)\ln G - 2\upsilon\right] \qquad (4.28)$$

Ainsi, selon (4.27) et (4.28), on a pour la loi de Halphen Type B :

$$\ln L(\upsilon | \hat{\alpha}, \hat{m}) \propto \begin{cases} \ln\left[\dfrac{2G^{2\upsilon-1}}{\hat{m}^{2\upsilon} ef_\upsilon(\hat{\alpha})}\right] - \dfrac{ef_{\upsilon+1}(\hat{\alpha})}{ef_\upsilon(\hat{\alpha})} + \hat{\alpha}\dfrac{ef_{\upsilon+1/2}(\hat{\alpha})}{ef_\upsilon(\hat{\alpha})} & \text{si } 0 < \upsilon < V \\ 2\upsilon \ln(2\upsilon/A) - \ln \Gamma(2\upsilon) + (2\upsilon - 1)\ln G - 2\upsilon & \text{si } \upsilon \geq V \end{cases} \qquad (4.29)$$

La fonction $\ln L(\upsilon | \hat{\alpha}, \hat{m})$ est strictement concave et n'admet qu'un seul maximum si les observations ne sont pas toutes identiques. L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre υ correspond à la valeur $\hat{\upsilon}$ telle que $\ln L(\hat{\upsilon} | \hat{\alpha}, \hat{m})$ est maximum. Ainsi, comme pour la loi Type A, après avoir développé un programme informatique permettant d'estimer les paramètres α et m pour différentes valeurs de υ (étape 1), $\hat{\upsilon}$ peut être déterminé numériquement (étape 2), par exemple à l'aide d'une simple tabulation de $\ln L(\upsilon | \hat{\alpha}, \hat{m})$.

La dérivée de la fonction $\ln L(\upsilon | \hat{\alpha}, \hat{m})$ par rapport à υ évaluée en V, notée $l'(V)$, peut être calculée à partir de l'expression (4.28) et est indépendante des paramètres. On déduit, en effet, que la dérivée de $\ln L(\upsilon | \hat{\alpha}, \hat{m})$ à droite de V est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial \ln L(\upsilon | \hat{\alpha}, \hat{m})}{\partial \upsilon} = 2n\left[\ln\left(\frac{G}{A}2\upsilon\right) - \Psi(2\upsilon)\right], \qquad \text{si } \upsilon \geq V \qquad (4.30)$$

d'où,

$$l'(V) = 2n\left[\ln\left(\frac{G}{A}2V\right) - \Psi(2V)\right] \qquad (4.31)$$

$\Psi(z) = \partial[\ln \Gamma(z)]/\partial z$ désignant la fonction digamma .

De la même manière que pour la loi de Halphen Type A, cette dérivée peut être utilisée avant l'étape 1 afin de savoir si $\hat{\upsilon}$ est à l'intérieur de l'intervalle (0, V) et donc si les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les solutions du système d'équations (4.19, 4.20), ou correspondent plutôt à ceux de la loi gamma ($\upsilon \geq V$). En effet, puisque la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est concave et n'admet qu'un seul maximum si les observations ne sont pas toutes identiques, le signe de la dérivée donnée à l'équation (4.31) indique si la valeur maximale de $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est atteinte pour $0 < \upsilon < V$:

- si $l'(V) < 0$, le maximum de la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est dans l'intervalle (0, V) et les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les solutions du système d'équations (4.19, 4.20);
- si $l'(V) \geq 0$, le maximum de la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est obtenu pour $\upsilon \geq V$. La loi gamma est plus adéquate pour représenter l'échantillon et les estimateurs du maximum de vraisemblance correspondent à ceux de cette distribution (section 4.3.1).

La troisième équation du système (4.16) n'est pas incluse explicitement dans l'approche utilisée pour estimer les paramètres (l'égalité des moyennes géométriques théorique et empirique) ; elle est cependant considérée implicitement lors de l'étape de maximisation de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée, car la moyenne géométrique intervient dans l'expression de cette fonction (éq. 4.29). On évite ainsi l'emploi d'une méthode numérique pour déterminer la dérivée de la fonction exponentielle factorielle par rapport à son indice υ (puisque celle-ci ne possède pas d'expression explicite).

4.3.3 Propriétés asymptotiques

Pour déterminer les variances et les covariances asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type B, on procède comme à la section 3.3.3, en employant les propriétés asymptotiques de cette méthode d'estimation (cf. annexe D). En effet, si les estimateurs $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ du maximum de vraisemblance de la loi Type B sont les solutions du système (4.19, 4.20), le vecteur $\sqrt{n}\left[(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon}) - (m, \alpha, \upsilon)\right]$ est distribué asymptotiquement selon une loi normale multidimensionnelle $N\left(0, \mathbf{I}_f^{-1}\right)$, où $\mathbf{I}_f$ est la matrice d'information de Fisher pour une seule observation. Les éléments de cette matrice sont déterminés à partir de l'expression (D.3). Ce calcul fait intervenir, pour la loi Type B, les espérances $E\{X\}$ et $E\{X^2\}$ dont les expressions sont données respectivement en (4.3) et (4.5). On peut montrer, pour cette distribution, que la matrice d'information de Fisher s'écrit (cf. annexe D, pour les calculs détaillés) :

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} \frac{2}{m^2}\left\{3\frac{ef_{\upsilon+1}}{ef_\upsilon} - \alpha\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon} - \upsilon\right\} & \frac{1}{m}\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon} & \frac{2}{m} \\ & \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left\{ef_\upsilon ef_{\upsilon+1} - ef_{\upsilon+1/2}^2\right\} & \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left\{\frac{\partial ef_{\upsilon+1/2}}{\partial\upsilon}ef_\upsilon - \frac{\partial ef_\upsilon}{\partial\upsilon}ef_{\upsilon+1/2}\right\} \\ & & \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left\{\frac{\partial^2 ef_\upsilon}{\partial\upsilon^2}ef_\upsilon - \left(\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial\upsilon}\right)^2\right\} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

La matrice des variances et covariances asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ des paramètres de la loi Type B est donnée par l'inverse de la matrice de Fisher divisée par n : $(1/n)\mathbf{I}_f^{-1}$ (cf. expression D.4). Le calcul des variances et covariances asymptotiques des paramètres nécessite non seulement l'évaluation de la fonction de exponentielle factorielle $ef_\upsilon(\alpha)$, mais aussi de ses dérivées premières et secondes par rapport aux paramètres α et υ.

4.4 Estimation des quantiles

Par définition (expression 1.3), le quantile x_p de probabilité au dépassement p de la loi de Halphen Type B est tel que :

$$\text{Prob}\left\{X > x_p\right\} = 1 - F_B(x_p; m, \alpha, \upsilon) = p \quad (4.33)$$

où $F_B(x_p; m, \alpha, \upsilon)$ est la fonction de répartition de la loi Type B évaluée en x_p. Le quantile x_p est donc une fonction de p ainsi que des paramètres (m, α, υ). L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{x}_p$ du quantile est donc obtenu en résolvant pour x_p l'équation (4.33), les paramètres ayant été remplacés par leurs estimateurs respectifs $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$. L'équation à résoudre peut alors s'exprimer de la façon suivante :

$$\int_{x_p}^{\infty} \frac{2}{\hat{m}^{2\hat{\upsilon}} ef_{\hat{\upsilon}}(\hat{\alpha})} x^{2\hat{\upsilon}-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\hat{m}}\right)^2 + \hat{\alpha}\left(\frac{x}{\hat{m}}\right)\right] dx - p \;=\; 0 \quad (4.34)$$

L'équation (4.34) n'admet pas de solution explicite mais peut être résolue, pour déterminer la solution $\hat{x}_p$ qui est une fonction des paramètres estimés, en employant une méthode numérique du type Newton-Raphson.

Selon le théorème de la limite centrale (Bickel et Doksum, 1977), l'estimateur $\hat{x}_p$ est distribué asymptotiquement selon une loi normale de moyenne x_p et de variance donnée par l'expression (E.1). La variance asymptotique de l'estimateur $\hat{x}_p$ dépend donc :

- des variances et covariances asymptotiques des estimateurs des paramètres de la loi de Halphen Type B, que l'on obtient à partir de la matrice I_f (éq. 4.32) et des expressions (D.3) et (D.4);
- des dérivées partielles de x_p par rapport à chacun des paramètres de la loi.

Les dérivées partielles de x_p par rapport à chacun des paramètres sont calculées à l'annexe E et s'expriment comme suit :

$$\frac{\partial x_p}{\partial m} = 2\frac{(2\upsilon/m)\,I_1 + (\alpha/m^2)I_2 - (2/m^3)\,I_3}{m^{2\upsilon}\,ef_\upsilon(\alpha)\,f_B(x_p;m,\alpha,\upsilon)} \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \alpha} = 2\frac{\left[ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)/ef_\upsilon(\alpha)\right]I_1 - (1/m)\,I_2}{m^{2\upsilon}\,ef_\upsilon(\alpha)\,f_B(x_p;m,\alpha,\upsilon)} \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon} = 2\frac{\left[2\ln m + \left(\partial ef_\upsilon(\alpha)/\partial\upsilon\right)ef_\upsilon^{-1}(\alpha)\right]I_1 - 2I_4}{m^{2\upsilon}ef_\upsilon(\alpha)\,f_B(x_p;m,\alpha,\upsilon)} \tag{4.37}$$

où I_1, I_2, I_3 et I_4 sont les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{x_p} x^{2\upsilon-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right)\right]dx = (1-p)\frac{1}{2}m^{2\upsilon}ef_\upsilon(\alpha) \tag{4.38}$$

$$I_2 = \int_0^{x_p} x^{2\upsilon}\exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right)\right]dx = \frac{1}{2}m^{2\upsilon+1}ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)F_B(x_p;m,\alpha,\upsilon+1/2) \tag{4.39}$$

$$I_3 = \int_0^{x_p} x^{2\upsilon+1}\exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right)\right]dx = \frac{1}{2}m^{2\upsilon+2}ef_{\upsilon+1}(\alpha)F_B(x_p;m,\alpha,\upsilon+1) \tag{4.40}$$

$$I_4 = \int_0^{x_p} x^{2\upsilon-1}\ln(x)\exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right)\right]dx \tag{4.41}$$

En pratique, ces intégrales doivent être évaluées par intégration numérique, à l'exception de I_1 pour laquelle on obtient une expression explicite.

4.5 Exemple

Pour illustrer l'estimation des paramètres et des quantiles de la loi de Halphen Type B, nous considérons un échantillon de 21 débits maximums annuels de printemps mesurés en rivière naturelle (station 02LA007 située en Ontario en m^3/s) :

```
121.0, 112.0, 136.0, 119.0, 79.3, 122.0, 137.0, 117.0,
133.0, 114.0, 103.0, 108.0, 75.5, 49.8, 118.0,
59.1, 62.0, 79.2, 63.1, 63.6, 65.9
```

Les moyennes arithmétique, quadratique et géométrique (statistiques exhaustives de la loi Type B) calculées à partir de ces observations sont respectivement :

$$A = 97.02,\ Q = 10\,215 \text{ et } G = 92.52$$

On déduit de ces moyennes que Q/A^2 = 1.085 et que la borne d'estimation V est 5.882. Pour déterminer si les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les solutions du système d'équations (4.19, 4.20), il faut examiner le signe de la dérivée $l'(V)$. Or, puisque $\Psi(2V) = 2.420$, on déduit de (4.31) que $l'(5.882) = -0.1842$. La dérivée négative indique donc que le maximum de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée est atteint pour $\upsilon \in (0\,; 5.882)$ et que le système (4.19, 4.20) peut être résolu pour α et m lorsque υ est fixé. Ce résultat nous permet de fixer un ensemble de valeurs du paramètre υ comprises dans cet intervalle et d'estimer les paramètres α et m en résolvant (4.19, 4.20). Ensuite, pour chaque triplets $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \upsilon)$ ainsi obtenus, la fonction de vraisemblance partiellement maximisée, $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ (éq. 4.29), est évaluée.

Le tableau 4.1 présente les résultats pour quelques valeurs de υ dans l'intervalle (0 ; 5). Selon cette tabulation, le maximum de la fonction partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est atteint au voisinnage de υ = 1.6 et les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type B, pour cet échantillon, sont alors approximativement: $\hat{m} = 46.06$, $\hat{\alpha} = 3.05$ et $\hat{\upsilon} = 1.60$ (ligne ombragée du tableau 4.1).

Tableau 4.1. Résultats de l'estimation des paramètres de la loi de Halphen Type B.

υ	$\hat{\alpha}$	$\hat{m}$	$ef_{\upsilon}(\hat{\alpha})$	$ef_{\upsilon+1/2}(\hat{\alpha})$	$ef_{\upsilon+1}(\hat{\alpha})$	$\ln L(\upsilon \mid \hat{\alpha},\hat{m})$
0.1	5.480	37.881	3.070E+03	7.863E+03	2.185E+04	-4.76677
0.5	4.836	40.112	1.227E+03	2.967E+03	7.787E+03	-4.76176
1	4.059	42.641	4.426E+02	1.007E+03	2.487E+03	-4.75974
1.1	3.898	43.174	3.586E+02	8.058E+02	1.965E+03	-4.75953
1.2	3.735	43.720	2.895E+02	6.425E+02	1.547E+03	-4.75936
1.3	3.569	44.280	2.329E+02	5.103E+02	1.213E+03	-4.75923
1.4	3.400	44.856	1.866E+02	4.036E+02	9.473E+02	-4.75914
1.5	3.228	45.448	1.489E+02	3.178E+02	7.361E+02	-4.75909
1.6	3.053	46.057	1.182E+02	2.490E+02	5.692E+02	-4.75908
1.7	2.874	46.685	9.342E+01	1.941E+02	4.378E+02	-4.75910
1.8	2.692	47.334	7.345E+01	1.506E+02	3.349E+02	-4.75915
1.9	2.506	48.005	5.744E+01	1.161E+02	2.546E+02	-4.75923
2	2.316	48.699	4.467E+01	8.899E+01	1.924E+02	-4.75934
2.2	1.923	50.165	2.652E+01	5.129E+01	1.076E+02	-4.75965
2.4	1.509	51.746	1.533E+01	2.874E+01	5.848E+01	-4.76007
2.6	1.073	53.461	8.604E+00	1.561E+01	3.075E+01	-4.76058
2.8	0.612	55.333	4.673E+00	8.194E+00	1.559E+01	-4.76119
3	0.120	57.389	2.446E+00	4.135E+00	7.587E+00	-4.76188
3.2	-0.406	59.663	1.228E+00	1.998E+00	3.525E+00	-4.76267
3.4	-0.974	62.198	5.886E-01	9.182E-01	1.554E+00	-4.76354
3.6	-1.591	65.052	2.672E-01	3.985E-01	6.449E-01	-4.76448
3.8	-2.271	68.332	1.133E-01	1.608E-01	2.478E-01	-4.76550
4	-3.017	72.042	4.513E-02	6.078E-02	8.882E-02	-4.76660
4.5	-5.369	84.685	2.897E-03	3.319E-03	4.127E-03	-4.76966
5	-8.215	3.892	1.487E-04	1.417E-04	1.466E-04	-4.77278

La figure 4.3 montre le tracé de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée dans l'intervalle $\upsilon \in (0\,;5)$.

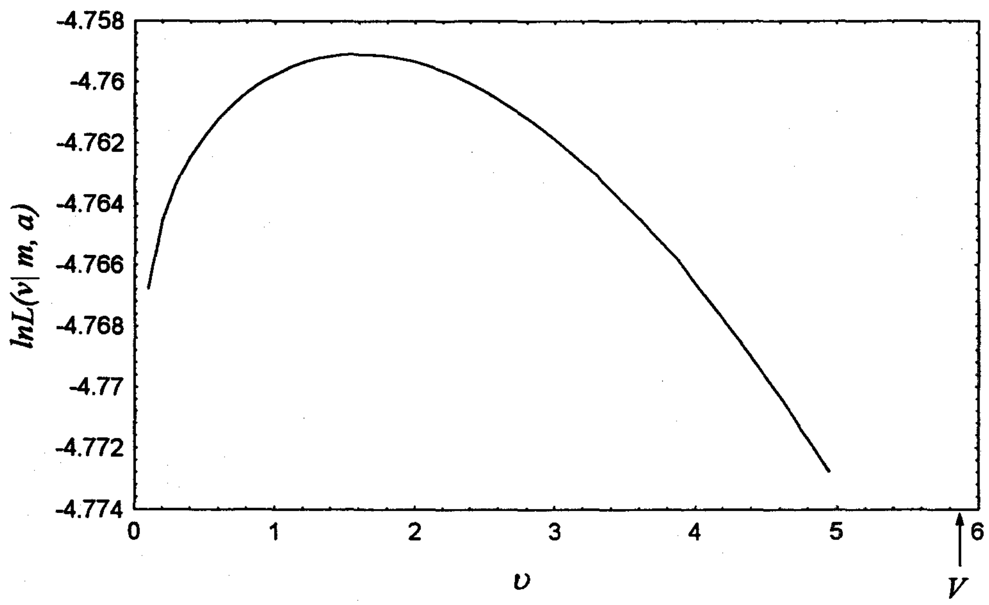

Figure 4.3. Vraisemblance logarithmique partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$.

En utilisant l'expression (4.32), on peut maintenant calculer les éléments de la matrice d'information de Fisher pour une observation :

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} 6.0656\text{E-}03 & 4.5847\text{E-}02 & 4.3476\text{E-}02 \\ & 3.77865\text{E-}01 & 3.8528\text{E-}01 \\ & & 4.1500\text{E-}01 \end{bmatrix}$$

d'où l'on déduit, en inversant $\mathbf{I}_f$ et en appliquant l'équation (D.4), la matrice des variances et covariances des estimateurs du maximum de vraisemblance $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ des paramètres de la loi Type B :

$$\frac{1}{21}\mathbf{I}_f^{-1} = \begin{bmatrix} Var\{\hat{m}\} & Cov\{\hat{m},\hat{\alpha}\} & Cov\{\hat{m},\hat{\upsilon}\} \\ & Var\{\hat{\alpha}\} & Cov\{\hat{\alpha},\hat{\upsilon}\} \\ & & Var\{\hat{\upsilon}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 628.580 & -164.490 & 86.856 \\ & 45.315 & -24.838 \\ & & 14.075 \end{bmatrix}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{x}_T$ du quantile de période de retour T est obtenu en résolvant pour x_T l'équation (4.34) avec $\hat{m} = 46.06$, $\hat{\alpha} = 3.05$ et $\hat{\upsilon} = 1.60$. Le tableau 4.2 donne le quantile estimé pour 14 probabilité au dépassement p. L'équation (4.34) a été résolue à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson. Pour chaque probabilité au dépassement p, la variance du quantile a été déterminée à partir des expressions (4.35)-(4.41) et (E.1). La variance et le résultat de chacune des étapes de son calcul sont présentées au tableau 4.2 (intégrales I_1 à I_4 et dérivées de x_p par rapport à chacun des paramètres).

Tableau 4.2. Quantiles estimés et écart-types pour la loi Type B.

$1-p$	$\hat{x}_p$	I_1	I_2	I_3	I_4	$\partial x_p/\partial m$	$\partial x_p/\partial \alpha$	$\partial x_p/\partial \upsilon$	$\sqrt{Var\{\hat{x}_p\}}$
0.1	61	1.18E+06	5.82E+07	2.98E+09	4.57E+06	1.325	15.478	19.511	7.75
0.2	73	2.36E+06	1.38E+08	8.33E+09	9.54E+06	1.580	16.399	18.966	7.05
0.3	81	3.54E+06	2.29E+08	1.54E+10	1.47E+07	1.770	16.953	18.522	6.83
0.5	96	5.90E+06	4.39E+08	3.41E+10	2.53E+07	2.092	17.709	17.757	6.67
0.7	109	7.87E+06	6.41E+08	5.48E+10	3.44E+07	2.363	18.217	17.134	6.83
0.8	121	9.45E+06	8.21E+08	7.55E+10	4.18E+07	2.626	18.630	16.564	7.52
0.9	134	1.06E+07	9.71E+08	9.45E+10	4.76E+07	2.913	19.018	15.989	9.07
0.95	145	1.12E+07	1.05E+09	1.06E+11	5.05E+07	3.154	19.308	15.547	11.00
0.98	157	1.16E+07	1.11E+09	1.14E+11	5.22E+07	3.432	19.615	15.088	13.79
0.99	166	1.17E+07	1.12E+09	1.17E+11	5.28E+07	3.621	19.814	14.805	15.96
0.995	173	1.17E+07	1.13E+09	1.19E+11	5.31E+07	3.797	19.995	14.564	18.13
0.999	189	1.18E+07	1.14E+09	1.20E+11	5.34E+07	4.172	20.378	14.121	23.14
0.9995	195	1.18E+07	1.14E+09	1.20E+11	5.34E+07	4.323	20.534	13.971	25.28
0.9999	209	1.18E+07	1.15E+09	1.21E+11	5.34E+07	4.658	20.884	13.707	30.26

Nous obtenons ainsi une estimation du débit maximum de printemps pour différents risques hydrologiques (probabilité au dépassement p), c'est-à-dire le débit maximum correspondant à diverses périodes de retour $T = 1/p$ (équation 1.2). En particulier, le débit centennal de la station 02LA007 estimé à partir de la loi de Halphen Type B (T = 100 ans ou p = 0.01) est ici de 166 m^3/s.

5 LOI DE HALPHEN TYPE B^{-1}

Ce chapitre est consacré aux propriétés statistiques de base de la loi de Halphen Type B^{-1} ainsi qu'à l'estimation des paramètres et des quantiles x_p de probabilité au dépassement p. Étant donné le lien qui existe entre cette distribution et la loi Type B (cf. proposition 2.6), les résultats présentés ici peuvent être déduits directement de ceux présentés au chapitre 4. En effet, si X est une variable aléatoire distribuée selon une loi de Halphen Type B^{-1}, alors la variable aléatoire $1/X$ suit une loi Type B.

5.1 Moments et coefficients

Les moments non centrés μ_r' de la loi de Halphen Type B^{-1}, contrairement à ceux des lois Type A et Type B, ne peuvent être déduits à l'aide de la fonction caractéristique de cette distribution, $\phi_{B^{-1}}(t)$. En effet, pour la loi Type B^{-1}, la fonction $\phi_{B^{-1}}(t)$ s'exprime, selon (2.8) et (3.1), de la manière suivante :

$$\phi_{B^{-1}}(t)=\frac{2}{m^{-2\upsilon}ef_{\upsilon}(\alpha)}\int_0^{\infty}e^{itx}x^{-2\upsilon-1}\exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2+\alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right]dx$$

En effectuant le développement limité du terme e^{itx}, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\phi_{B^{-1}}(t)&=\frac{2}{m^{-2\upsilon}ef_{\upsilon}(\alpha)}\int_0^{\infty}\left[1+\frac{itx}{1!}+\frac{(itx)^2}{2!}+\ldots+\frac{(itx)^r}{r!}+\ldots\right]x^{-2\upsilon-1}\exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2+\alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right]dx\\&=\frac{2}{m^{-2\upsilon}ef_{\upsilon}(\alpha)}\int_0^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(it)^r}{r!}x^{-2\upsilon+r-1}\exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2+\alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right]dx\\&=\frac{2}{m^{-2\upsilon}ef_{\upsilon}(\alpha)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(it)^r}{r!}\int_0^{\infty}x^{-2(\upsilon-r/2)-1}\exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2+\alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right]dx\end{aligned}$$

Toutefois, cette expression n'est pas valide mathématiquement, car l'intégrale qui y figure ne converge que si $r<2\upsilon$. On ne peut donc pas développer la fonction caractéristique de la loi Type B^{-1} en puissance de t, l'exprimer comme la somme infinie :

$$\phi_{B^{-1}}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^r}{r!}\mu_r'$$

et en déduire ensuite les moments non centrés. Pour déterminer μ_r', on utilise plutôt la définition :

$$\begin{aligned}\mu_r' &= \int_0^\infty x^r f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)\,dx \\ &= \frac{2}{m^{-2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)} \int_0^\infty x^{-2(\upsilon-r/2)-1} \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right] dx\end{aligned} \tag{5.1}$$

Étant donné que l'intégrale de la f.d.p. (éq. 2.8) sur tout le domaine égale 1, on a pour $r < 2\upsilon$:

$$\int_0^\infty x^{-2(\upsilon-r/2)-1} \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right] dx = \frac{1}{2} m^{-2(\upsilon-r/2)} ef_{\upsilon-r/2}(\alpha)$$

et on déduit de (5.1) que le moment non centré d'ordre r de X, $\mu_r' = E\{X^r\}$, si $X \approx F_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)$, est donné par :

$$\mu_r' = \frac{m^r ef_{\upsilon-r/2}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} \tag{5.2}$$

Note :

Ce résultat aurait pu être obtenu directement à partir de la proposition 2.6 et de l'équation (4.2). En effet, puisque $X \approx F_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon) \quad \Rightarrow \quad Y = 1/X \approx F_B(y;m^{-1},\alpha,\upsilon)$, alors le moment d'ordre r de la loi Type B^{-1} de paramètre d'échelle m correspond au moment d'ordre $-r$ de la loi Type B de paramètre d'échelle m^{-1} :

$$\left[\mu_r'(m,\alpha,\upsilon)\right]_{B^{-1}} = \left[\mu_{-r}'(m^{-1},\alpha,\upsilon)\right]_B$$

Donc, le moment non centré d'ordre r de la loi B^{-1} est obtenu en remplaçant dans (4.2), r par $-r$ et m par m^{-1}, d'où :

$$\left[\mu_r'(m,\alpha,\upsilon)\right]_{B^{-1}} = \frac{(m^{-1})^{-r} ef_{\upsilon-r/2}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} = \frac{m^{-r} ef_{\upsilon-r/2}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)}$$

En vertu de la proposition 2.6, la fonction caractéristique de la loi Type B^{-1} (éq. 5.2) peut aussi être obtenu directement à partir de la fonction caractéristique de la loi Type B (section 4.1).

Les moments non centrés de la loi Type B^{-1} existent pour toute valeur réelle de α, mais seulement si $r < 2\upsilon$ (on a vu plus haut qu'autrement l'intégrale correspondante ne converge pas). On déduit de l'équation (5.2) la moyenne arithmétique de la variable aléatoire X, quand $X \approx F_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)$:

$$\mu_1' = E\{X\} = m\frac{ef_{\upsilon-1/2}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} \tag{5.3}$$

Les statistiques exhaustives de la loi Type B sont les moyennes géométrique, arithmétique et quadratique (cf. section 5.3). Étant donné le lien entre les lois B et B^{-1} (proposition 2.6), il est naturel que l'estimation des paramètres de la distribution B^{-1} repose plus particulièrement sur les moments non centrés $\mu'_{\underline{0}}$, μ'_{-1} et μ'_{-2}. C'est pourquoi, nous donnons leurs expressions :

$$\mu'_{\underline{0}} = E\{\ln X\} = \ln m - \frac{\partial\, ef_\upsilon(\alpha)/\partial\upsilon}{2ef_\upsilon(\alpha)} \tag{5.4}$$

$$\mu'_{-1} = E\left\{X^{-1}\right\} = \frac{1}{m}\frac{ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} \tag{5.5}$$

$$\mu'_{-2} = E\left\{X^{-2}\right\} = \frac{1}{m^2}\frac{ef_{\upsilon+1}(\alpha)}{ef_\upsilon(\alpha)} \tag{5.6}$$

Les expressions (5.5) et (5.6) sont obtenues directement à partir de l'équation (5.2). On peut aussi employer le lien entre les moments des lois Type B et Type B^{-1} (cf. Note précédente) et les expressions correspondantes de la loi Type B (cf. chapitre 4). La détermination du moment $\mu'_{\underline{0}}$ (éq. 5.4) est présentée en détail à l'annexe C.

Note :

Le moment d'ordre quasi-zéro de la loi B^{-1} peut également être directement obtenu à partir de la proposition 2.6. En effet, puisque $X \approx F_{B^{-1}}(x; m, \alpha, \upsilon) \;\Rightarrow\; Y = 1/X \approx F_B(y; m^{-1}, \alpha, \upsilon)$, on a :

$$\left[\mu'_{\underline{0}}(m,\alpha,\upsilon)\right]_{B^{-1}} = -\left[\mu'_{\underline{0}}\left(m^{-1},\alpha,\upsilon\right)\right]_B$$

car,

$$E\{\ln Y\} = E\{\ln(1/X)\} = -E\{\ln X\}$$

En appliquant l'équation (4.4), on obtient alors :

$$\begin{aligned}\left[\mu'_{\underline{0}}(m,\alpha,\upsilon)\right]_{B^{-1}} &= -\left[\ln(1/m) + \frac{\partial ef_\upsilon(2\alpha)/\partial\alpha}{2ef_\upsilon(2\alpha)}\right]\\ &= \ln m - \frac{\partial ef_\upsilon(2\alpha)/\partial\alpha}{2ef_\upsilon(2\alpha)}\end{aligned}$$

Les moments centrés μ_r peuvent être calculés à partir des expressions (3.9) et (5.2). On obtient alors les principaux moments centrés (la variance et les moments centrés d'ordre 3 et 4) :

$$
\begin{aligned}
\mu_2 &= Var\{X\} = \frac{m^2}{ef_\upsilon^2}\left(ef_{\upsilon-1}ef_\upsilon - ef_{\upsilon-1/2}^2\right) \\
\mu_3 &= \frac{m^3}{ef_\upsilon^3}\left(ef_{\upsilon-3/2}ef_\upsilon^2 - 3ef_{\upsilon-1}ef_\upsilon ef_{\upsilon-1/2} + 2ef_{\upsilon-1/2}^3\right) \\
\mu_4 &= \frac{m^4}{ef_\upsilon^4}\left(ef_{\upsilon-2}ef_\upsilon^3 - 4ef_{\upsilon-3/2}ef_{\upsilon-1/2}ef_\upsilon^2 + 6ef_{\upsilon-1}ef_{\upsilon-1/2}^2 ef_\upsilon - 3ef_{\upsilon-1/2}^4\right)
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

où, pour simplifier la notation, la fonction exponentielle factorielle $ef_\upsilon(\alpha)$ est notée ici ef_υ.

Ayant déterminé les principaux moments de la loi de Halphen Type B^{-1}, on peut évaluer les coefficients les coefficients de variation (C_v), d'asymétrie (C_s) et d'aplatissement (C_k). À partir des expressions (5.3) et (5.7), nous déduisons que :

$$
\begin{aligned}
C_v &= \frac{\mu_2^{1/2}}{\mu_1'} = \frac{\sqrt{ef_{\upsilon-1}ef_\upsilon - ef_{\upsilon-1/2}^2}}{ef_{\upsilon-1/2}} \\
C_s &= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{ef_{\upsilon-3/2}ef_\upsilon^2 - 3ef_{\upsilon-1}ef_{\upsilon-1/2}ef_\upsilon + 2ef_{\upsilon-1/2}^3}{\left(ef_{\upsilon-1}ef_\upsilon - ef_{\upsilon-1/2}^2\right)^{3/2}} \\
C_k &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{ef_{\upsilon-2}ef_\upsilon^3 - 4ef_{\upsilon-3/2}ef_{\upsilon-1/2}ef_\upsilon^2 + 6ef_{\upsilon-1}ef_{\upsilon-1/2}^2 ef_\upsilon - 3ef_{\upsilon-1/2}^4}{\left(ef_{\upsilon-1}ef_\upsilon - ef_{\upsilon-1/2}^2\right)^2}
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Les expressions des moments centrés (5.7) et des coefficients (5.8) de la loi Type B^{-1} sont très semblables aux expressions correspondantes obtenues pour la loi Type B (éq. 4.6 et 4.7) et s'obtiennent par symétrie, en changeant le signe de *r* de la fonction $ef_{\upsilon+r}$.

Étant donné le lien qui existe entre les lois Type B et B^{-1}, les fonctions $R_B(\alpha,\upsilon)$ et $D_B(\alpha,\upsilon)$, dont les expressions sont données aux équations (4.8) et (4.9), jouent aussi un rôle important lors de l'estimation des paramètres de la loi Type B^{-1}. La fonction de dispersion $D_B(\alpha,\upsilon)$ est particulièrement importante et correspond ici au rapport entre le moment non centré d'ordre -2 et le carré du moment non centré d'ordre -1 (éq. 5.5 et 5.6).

On peut donc réécrire certains moments importants de la loi Type B^{-1} (ceux qui interviennent dans l'estimation des paramètres, cf. section 5.3) à l'aide des fonctions $R_B(\alpha,\upsilon)$ et $D_B(\alpha,\upsilon)$. En effet, les moments non centrés d'ordres 1, -1 et -2, la variance et le coefficient de variation peuvent s'exprimer respectivement de la manière suivante :

$$E\{X\} = mR_B^{-1}(\alpha,\upsilon-1/2) \tag{5.9}$$

$$E\{1/X\} = \frac{1}{m} R_B(\alpha, \upsilon) \tag{5.10}$$

$$E\{1/X^2\} = \frac{1}{m^2} R_B^2(\alpha, \upsilon) D_B(\alpha, \upsilon) \tag{5.11}$$

$$Var\{X\} = m^2 R_B^{-2}(\alpha, \upsilon - 1/2)[D_B(\alpha, \upsilon - 1) - 1] \tag{5.12}$$

$$C_v = \sqrt{D_B(\alpha, \upsilon - 1) - 1} \tag{5.13}$$

Le coefficient de variation C_v dépend seulement de la fonction de dispersion, tout comme celui des lois Type A et Type B (éq. 3.17 et 4.13 respectivement). Or, la fonction de dispersion $D_B(\alpha, \upsilon)$ est une fonction strictement décroissante de α pour υ fixé (cf. proposition 4.1). Le coefficient de variation de la loi Type B^{-1}, tout comme celui de la loi Type B, atteint donc son maximum lorsque $\alpha \to -\infty$. Il en résulte que la loi gamma inverse (cas limite de la loi du Type B^{-1} dans ces conditions, cf. proposition 2.9) est la distribution du Type B^{-1} ayant le plus grand coefficient de variation.

La figure 5.1 illustre la relation entre les coefficients de variation C_v et d'asymétrie C_s de la loi Type B^{-1} pour différentes valeurs des paramètres de forme α et υ. Comme pour les lois de Type A et Type B, les lois de Type B^{-1} occupent une région restreinte dans le plan C_v-C_s. Elle est délimitée par la courbe qui correspond, dans ce diagramme, à la loi gamma inverse. Enfin, on déduit de cette figure, ainsi que des figures 3.1 et 4.1, que les régions occupées par les trois types de loi dans l'espace C_v-C_s sont disjointes.

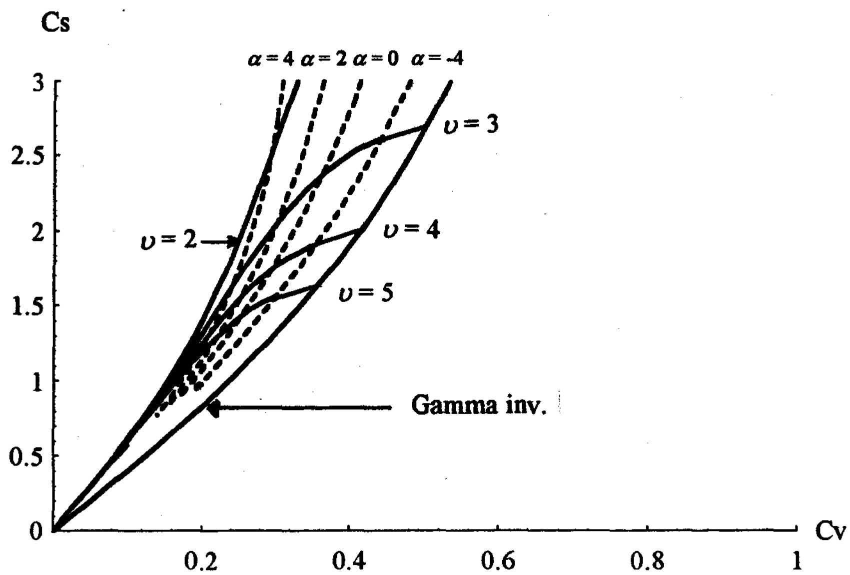

Figure 5.1. Relation entre C_v et C_s pour différentes valeurs de α et υ : loi Type B^{-1}.

5.2 Exhaustivité

La loi de Halphen Type B^{-1} fait partie de la classe exponentielle des fonctions de densité de probabilité continues, car sa f.d.p peut s'exprimer de la manière suivante (cf. annexe D, éq. D.1) :

$$\begin{aligned} f_{B^{-1}}(x) &= \frac{2}{m^{-2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)} x^{-2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right] \\ &= \exp\left\{-(2\upsilon+1)\ln x - m^2\frac{1}{x^2} + \alpha m\frac{1}{x} + \ln\left[\left(2/m^{-2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)\right)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{i=1}^{3} c_i(m,\upsilon,\alpha)T_i(x) + d(m,\upsilon,\alpha) + S(x)\right\} \end{aligned}$$

avec,

- $c_1(m,\upsilon,\alpha) = -(2\upsilon+1)$
- $c_2(m,\upsilon,\alpha) = -m^2$
- $c_3(m,\upsilon,\alpha) = \alpha\, m$
- $d(m,\upsilon,\alpha) = \ln\left[2/m^{-2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)\right]$
- $T_1(x) = \ln(x)$
- $T_2(x) = 1/x^2$
- $T_3(x) = 1/x$
- $S(x) = 0$

On déduit alors que les variables aléatoires $\left(\ln(X), X^{-2}, X^{-1}\right)$ sont exhaustives pour la loi de Halphen Type B^{-1} (cf. annexe D). Ainsi, pour un échantillon de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendamment et identiquement distribuées selon une loi Type B^{-1}, les statistiques suivantes sont exhaustives (cf. expression D.2) :

$$T_1(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i = \ln G \qquad T_2(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i^2} = QI^{-1} \qquad T_3(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i} = H^{-1} \quad (5.14)$$

Les moyennes géométrique (G), quadratique inverse (QI) et harmonique (H) de l'échantillon sont donc des statistiques exhaustives pour la loi de Halphen Type B^{-1}.

5.3 Estimation des paramètres

Cette section traite de l'estimation des paramètres à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, en considérant un échantillon de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendamment et identiquement distribuées selon une loi de Halphen Type B^{-1}.

Les estimateurs du maximum de vraisemblance de la loi Type B^{-1} peuvent être déterminés à partir de ceux de la loi Type B, puisque ces deux distributions sont reliées par une transformation inverse (cf. proposition 2.6). En effet, disposant d'une routine informatique permettant le calcul des estimateurs des paramètres de la loi de Halphen Type B (cf. chapitre 4), il est possible de l'utiliser pour réaliser un ajustement de la loi de Halphen Type B^{-1}. Il suffit d'appliquer cette routine aux observations transformées $x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$ pour déterminer d'abord les estimations des paramètres de la loi Type B $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ et de déduire ensuite ceux de la loi B^{-1} $(1/\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$. Cependant, puisque l'objectif du présent rapport est la description des aspects théoriques des trois lois de Halphen, nous présentons dans cette section, de manière détaillée, l'estimation des paramètres de la loi Type B^{-1}.

Ainsi, comme pour les lois du Type A et B, une approche en deux étapes est considérée pour déterminer les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type B^{-1}. D'abord, les paramètres α et m sont estimés numériquement, υ étant fixé. Ensuite, la fonction de vraisemblance logarithmique partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha}, \hat{m})$ est employée afin de déterminer le triplet ($\hat{m}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\upsilon}$) d'estimateurs du maximum de vraisemblance.

Dans la section 5.3.1, nous présentons l'estimation des paramètres m et α lorsque υ est fixé. La section 5.3.2 traite de l'estimation du paramètre υ à partir de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée. Les propriétés asymptotiques des estimateurs sont ensuite étudiées à la section 5.3.3. Finalement, la section 5.3.4 est consacrée à l'estimation des quantiles de la loi de Halphen Type B^{-1} ainsi qu'au calcul de leur variance asymptotique.

5.3.1 Estimation de m et α pour υ fixé

Pour déterminer les estimateurs des paramètres d'une loi de probabilité $F(x; \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ appartenant à la classe des lois exponentielles et ayant comme statistiques exhaustives $(T_1(\underline{X}), T_2(\underline{X}), T_3(\underline{X}))$, il suffit de calculer l'espérance mathématique des trois statistiques exhaustives et de résoudre le système d'équations $E_{\underline{\theta}}[T_i(\underline{X})] = T_i(\underline{x})$, i = 1, 2, 3 (cf. annexe D).

En employant les expressions (5.4) à (5.6) pour évaluer l'espérance mathématique des statistiques exhaustives (éq. 5.14), on montre que le système d'équations obtenu pour la loi Type B^{-1} est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\frac{ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)}{ef_{\upsilon}(\alpha)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = H^{-1}\\ \frac{1}{m^2}\frac{ef_{\upsilon+1}(\alpha)}{ef_{\upsilon}(\alpha)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} = QI^{-1}\\ \ln m - \frac{\partial ef_{\upsilon}(\alpha)/\partial\upsilon}{2ef_{\upsilon}(\alpha)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = \ln G\end{aligned} \tag{5.15}$$

où H, QI et G désignent respectivement les moyennes harmonique, quadratique inverse et géométrique de l'échantillon. Le paramètre de forme υ étant fixé, seules deux équations sont nécessaires pour l'estimation de α et m. Les deux premières expressions sont retenues et peuvent être réarrangées pour obtenir le système de 2 d'équations à 2 inconnues suivant :

$$\frac{ef_{\upsilon+1}(\alpha)\,ef_{\upsilon}(\alpha)}{ef^{2}_{\upsilon+1/2}(\alpha)} = \frac{H^2}{QI} \tag{5.16}$$

$$m = H\frac{ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)}{ef_{\upsilon}(\alpha)} \tag{5.17}$$

Les équations (5.16) et (5.17) sont réécrites, à l'aide des fonctions auxiliaires définies en (4.8) et (4.9), de la manière suivante :

$$D_B(\alpha,\upsilon) = \frac{H^2}{QI} \tag{5.18}$$

$$m = H\,R_B(\alpha,\upsilon) \tag{5.19}$$

Si ce système possède une solution, les estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\alpha}$ et $\hat{m}$, pour υ fixé, peuvent être déterminés en résolvant l'équation (5.18) pour α et en substituant ensuite $\hat{\alpha}$ dans l'équation (5.19). Ainsi, comme pour la loi Type B, les propriétés de la fonction de dispersion $D_B(\alpha,\upsilon)$ jouent un rôle très important dans la détermination des estimateurs des paramètres de la loi de Halphen Type B^{-1}. Ces propriétés ont été présentées à la proposition 4.1 et sont utilisées dans ce qui suit.

Selon la proposition 4.1, l'équation (5.18) n'admet pas toujours une solution. En effet, la fonction de dispersion $D_B(\alpha,\upsilon)$ prend des valeurs supérieures à 1, impliquant ainsi que le système (5.18, 5.19) n'admet pas de solution si $QI = H^2$, c'est-à-dire lorsque toutes les observations de l'échantillon sont identiques. De plus, lorsque $\alpha \to -\infty$, la fonction $D_B(\alpha,\upsilon)$ est toujours bornée supérieurement par $1+(1/2\upsilon)$. Les estimateurs du maximum de vraisemblance correspondent donc à la solution du système d'équations (5.18, 5.19), quel que soit υ fixé, si et seulement si les observations ne sont pas toutes identiques et $H^2/QI < 1+(1/2\upsilon)$. Cette dernière inégalité signifie que la dispersion des observations ne doit pas être trop grande pour pouvoir employer directement le système d'équations.

L'inégalité $H^2/QI < 1+(1/2\upsilon)$ peut s'écrire :

$$\frac{1}{\upsilon} > 2\left(\frac{H^2}{QI} - 1\right)$$

ou encore

$$\upsilon < \frac{1}{2}\left(\frac{H^2}{QI} - 1\right)^{-1}$$

Si on pose $W = 1/[2(H^2 QI^{-1} - 1)]$, on a que $0 < W < \infty$ car $QI \geq H^2$, et ainsi, qu'en vertu des propriétés de $D_B(\alpha, \upsilon)$, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et m sont les solutions du système d'équations (5.18, 5.19) si et seulement si $0 < \upsilon < W$. La statistique W, tout comme les statistiques U pour la loi Type A et V pour la loi Type B, détermine pour la loi Type B^{-1} l'intervalle de valeurs du paramètre υ pour lesquelles le système (5.18, 5.19) admet une solution.

Lorsque que la condition $0 < \upsilon < W$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire quand $H^2/QI \geq 1 + (1/2\upsilon)$, la dispersion des observations est trop grande et les estimateurs du maximum de vraisemblance de α et m convergent vers ceux de loi gamma inverse. Ainsi, pour $\upsilon \geq W$, la distribution gamma inverse est la loi la plus adéquate de la famille des lois Type B^{-1} pour représenter l'échantillon. En effet, pour une valeur donnée du paramètre υ, la loi gamma inverse possède le plus grand coefficient de variation parmi les lois Type B^{-1} (cf. section 5.1). Dans ces conditions, la loi de Halphen Type B^{-1} correspond à la loi gamma inverse de paramètres $\omega = -\alpha m$ et 2υ (cf. proposition 2.9). Pour υ fixé, en appliquant la méthode du maximum de vraisemblance à l'expression (2.5) convenablement reparamétrisée, la loi gamma inverse admet comme estimateur du paramètre $\omega = -\alpha m$, $\hat{\omega} = 2\upsilon H$.

En résumé, pour υ fixé,

- si $0 < \upsilon < W$, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et m sont les solutions du système d'équations (5.18, 5.19) ;

- si $\upsilon > W$, la loi de Halphen Type B^{-1} correspond à la loi gamma inverse de paramètres $\omega = -\alpha m$ et 2υ, et l'estimateur du maximum de vraisemblance de ω est $\hat{\omega} = 2\upsilon H$;

5.3.2 Estimation de υ

Cette section est consacrée à la détermination du triplet ($\hat{m}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\upsilon}$) d'estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type B^{-1} qui sont solution du système (5.15). L'objectif est d'estimer le paramètre υ étant donné qu'il est possible d'estimer (m, α) pour une valeur donnée de υ (cf. section 5.3.1).

La fonction de vraisemblance logarithmique de la loi de Halphen Type B^{-1} peut être déduite de l'équation (2.8) et s'exprime de la manière suivante :

$$\ln L(m,\alpha,\upsilon) = n\ln\left[\frac{2}{m^{-2\upsilon} ef_{\upsilon}(\alpha)}\right] - (2\upsilon+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - m^2\sum_{i=1}^{n}x_i^{-2} + \alpha m\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}$$

Cette équation peut s'écrire en utilisant la notation de (5.15) :

$$\ln L(m,\alpha,\upsilon) = n\left\{\ln\left[\frac{2m^{2\upsilon}}{G^{2\upsilon+1} ef_{\upsilon}(\alpha)}\right] - m^2\frac{1}{QI} + \alpha m\frac{1}{H}\right\} \tag{5.20}$$

Comme pour les lois Type A et Type B, la fonction de vraisemblance logarithmique partiellement maximisée est utilisée pour estimer υ, les paramètres (m, α) étant fixés. En vertu de l'équation (3.29), cette fonction est obtenue en remplaçant, dans la fonction de vraisemblance logarithmique $\ln L(m,\alpha,\upsilon)$, les paramètres (m, α) par leurs estimateurs respectifs $\hat{\alpha}$ et $\hat{m}$.

Lorsque $0 < \upsilon < W$, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et m sont les solutions du système d'équations (5.18, 5.19), ou de manière équivalente, du système formé des deux premières équations de (5.15). Ainsi, pour $0 < \upsilon < W$, on a :

$$\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m}) = n\left\{\ln\left[\frac{2\hat{m}^{2\upsilon}}{G^{2\upsilon+1} ef_{\upsilon}(\hat{\alpha})}\right] - \frac{ef_{\upsilon+1}(\hat{\alpha})}{ef_{\upsilon}(\hat{\alpha})} + \hat{\alpha}\frac{ef_{\upsilon+1/2}(\hat{\alpha})}{ef_{\upsilon}(\hat{\alpha})}\right\} \tag{5.21}$$

Toutefois, si $\upsilon \geq W$, la fonction de vraisemblance correspond plutôt à celle de la loi gamma inverse de paramètres $\omega = -\alpha m$ et 2υ. Cette fonction de vraisemblance est déduite de l'expression (2.5) et s'exprime :

$$\begin{aligned}\ln L(\omega,2\upsilon) &= n[2\upsilon\ln\omega - \ln\Gamma(2\upsilon)] - (2\upsilon+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \omega\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\\ &= n\left[2\upsilon\ln\omega - \ln\Gamma(2\upsilon) - (2\upsilon+1)\ln G - \omega H^{-1}\right]\end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant dans cette fonction le paramètre ω par son estimateur $\hat{\omega} = 2\upsilon H$ (cf. section 5.3.1), la fonction de vraisemblance logarithmique partiellement maximisée s'exprime alors, pour $\upsilon \geq W$, de la manière suivante :

$$\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m}) = n\left[2\upsilon\ln(2\upsilon H) - \ln\Gamma(2\upsilon) - (2\upsilon+1)\ln G - 2\upsilon\right] \tag{5.22}$$

Pour la loi de Halphen Type B^{-1}, on déduit donc de (5.21) et (5.22) :

$$\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m}) \propto \begin{cases} \ln\left[\dfrac{2\hat{m}^{2\upsilon}}{G^{2\upsilon+1}ef_\upsilon(\hat{\alpha})}\right] - \dfrac{ef_{\upsilon+1}(\hat{\alpha})}{ef_\upsilon(\hat{\alpha})} + \hat{\alpha}\dfrac{ef_{\upsilon+1/2}(\hat{\alpha})}{ef_\upsilon(\hat{\alpha})} & \text{si } 0<\upsilon<W \\ 2\upsilon\ln(2\upsilon H) - \ln\Gamma(2\upsilon) - (2\upsilon+1)\ln G - 2\upsilon & \text{si } \upsilon \geq W \end{cases} \tag{5.23}$$

La fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est strictement concave et n'admet qu'un seul maximum si les observations ne sont pas toutes identiques. L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre υ correspond à la valeur $\hat{\upsilon}$ telle que $\ln L(\hat{\upsilon}|\hat{\alpha},\hat{m})$ est maximum. Ainsi, après avoir développé un programme informatique permettant d'estimer les paramètres α et m pour différentes valeurs de υ (étape 1), $\hat{\upsilon}$ peut être déterminé numériquement (étape 2), par exemple à l'aide d'une tabulation de $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$.

La dérivée de la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ par rapport à υ évaluée en W, notée $l'(W)$, peut être calculée à partir de l'expression (5.22) et est indépendante des paramètres. La dérivée de $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ à droite de W est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})}{\partial\upsilon} = 2n\left[\ln\left(2\upsilon\frac{H}{G}\right) - \Psi(2\upsilon)\right], \qquad \text{si } \upsilon \geq W \tag{5.24}$$

d'où,

$$l'(W) = 2n\left[\ln\left(2W\frac{H}{G}\right) - \Psi(2W)\right] \tag{5.25}$$

$\Psi(z) = \partial\left[\ln\Gamma(z)\right]/\partial z$ désignant la fonction digamma.

De la même manière que pour les lois Type A et Type B, cette dérivée peut être utilisée avant l'étape 1 afin de savoir si $\hat{\upsilon}$ est à l'intérieur de l'intervalle (0, W) et donc si les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les solutions du système d'équations (5.18, 5.19), ou correspondent plutôt à ceux de la loi gamma inverse ($\upsilon \geq W$). En effet, puisque la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est concave et n'admet qu'un seul maximum si les observations ne sont pas toutes identiques, le signe de la dérivée donnée à l'équation (5.24) indique si la valeur maximale de $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est atteinte quand $0 < \upsilon < W$ ou quand $\upsilon \geq W$:

- si $l'(W) < 0$, le maximum de la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est dans l'intervalle (0, W) et les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les solutions du système d'équations (5.18, 5.19);
- si $l'(W) \geq 0$, le maximum de la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est obtenu pour $\upsilon \geq W$. La loi gamma inverse est plus adéquate pour représenter l'échantillon et les estimateurs du maximum de vraisemblance correspondent à ceux de cette distribution (section 5.3.1);

Comme pour les lois Type A et Type B, l'égalité des moyennes géométriques théorique et empirique du système d'équations (5.15) n'est pas considérée directement dans cette approche. Toutefois, celle-ci est employée implicitement lors de l'étape de maximisation de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée. En effet, la moyenne géométrique intervient dans l'expression de la fonction $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ (éq. 5.23).

5.3.3 Propriétés asymptotiques

Pour déterminer les variances et les covariances asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type B^{-1}, on procède comme aux sections 3.3.3 et 4.3.3, en employant les propriétés asymptotiques de la méthode du maximum de vraisemblance (cf. annexe D).

Les éléments de la matrice I_f sont donc obtenus à partir de l'expression (D.3), en calculant l'espérance mathématique des dérivées seconde et croisées du logarithme de la f.d.p. de la loi Type B^{-1} (éq 2.8) par rapport à chacun des paramètres. Ce calcul fait intervenir les espérances $E\{X^{-1}\}$ et $E\{X^{-2}\}$, dont les expressions sont données respectivement en (5.5) et (5.6). On peut montrer, pour cette distribution, que la matrice d'information de Fisher s'écrit (cf. annexe D, pour les calculs détaillés) :

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} \frac{2}{m^2}\left\{\upsilon + \frac{ef_{\upsilon+1}}{ef_\upsilon}\right\} & -\frac{1}{m}\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon} & -\frac{2}{m} \\ & \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left\{ef_\upsilon ef_{\upsilon+1} - ef_{\upsilon+1/2}^2\right\} & \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left\{\frac{\partial ef_{\upsilon+1/2}}{\partial\upsilon}ef_\upsilon - \frac{\partial ef_\upsilon}{\partial\upsilon}ef_{\upsilon+1/2}\right\} \\ & & \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left\{\frac{\partial^2 ef_\upsilon}{\partial\upsilon^2}ef_\upsilon - \left(\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial\upsilon}\right)^2\right\} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

La matrice des variances et covariances asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ des paramètres de la loi Type B^{-1} est donnée par l'inverse de la matrice de Fisher multipliée par $1/n$: $(1/n)\mathbf{I}_f^{-1}$ (cf. expression D.4). Le calcul des variances et covariances asymptotiques des paramètres nécessite non seulement l'évaluation de la fonction exponentielle factorielle $ef_\upsilon(\alpha)$, mais aussi de ses dérivées premières et secondes par rapport aux paramètres α et υ.

5.4 Estimation des quantiles

Par définition (équation 1.3), le quantile x_p de probabilité au dépassement p de la loi de Halphen Type B^{-1} est tel que :

$$\text{Prob}\left\{X > x_p\right\} = 1 - F_{B^{-1}}(x_p; m, \alpha, \upsilon) = p \quad (5.27)$$

où $F_{B^{-1}}(x_p; m,\alpha,\upsilon)$ est la fonction de répartition de la loi Type B^{-1} évaluée en x_p. L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{x}_p$ du quantile de probabilité au dépassement p est donc obtenu en résolvant pour x_p l'équation (5.27), les paramètres ayant été remplacés par leurs estimateurs respectifs $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$. L'équation à résoudre peut alors s'exprimer de la façon suivante :

$$\int_{x_p}^{\infty} \frac{2}{\hat{m}^{-2\hat{\upsilon}} ef_{\hat{\upsilon}}(\hat{\alpha})} x^{-2\hat{\upsilon}-1} \exp\left[-\left(\frac{\hat{m}}{x}\right)^2 + \hat{\alpha}\left(\frac{\hat{m}}{x}\right)\right]dx - p \ = \ 0 \quad (5.28)$$

L'équation (5.28) n'admet pas de solution explicite mais peut être résolue, pour déterminer la solution $\hat{x}_p$ qui est une fonction des paramètres estimés, en employant une méthode numérique du type Newton-Raphson.

Selon le théorème de la limite centrale (Bickel et Doksum, 1977), l'estimateur $\hat{x}_p$ est distribué asymptotiquement selon une loi normale de moyenne x_p et de variance donnée par l'expression (E.1). La variance asymptotique de l'estimateur $\hat{x}_p$ dépend donc :

- des variances et covariances asymptotiques des estimateurs des paramètres de la loi de Halphen Type B^{-1}, que l'on obtient à partir de la matrice I_f (éq. 5.26) et des expressions (D.3) et (D.4);
- des dérivées partielles x_p par rapport à chacun des paramètres de la loi.

On peut montrer que les dérivées partielles de x_p par rapport à chacun des paramètres s'expriment de la manière suivante (cf. annexe E) :

$$\frac{\partial x_p}{\partial m} = 2\frac{-2m^{-1}\upsilon I_1 - \alpha I_2 + 2m I_3}{m^{-2\upsilon}\, ef_\upsilon(\alpha)\, f_{B^{-1}}(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \alpha} = 2\frac{\left[ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)/ef_\upsilon(\alpha)\right] I_1 - m I_2}{m^{-2\upsilon}\, ef_\upsilon(\alpha)\, f_{B^{-1}}(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{5.30}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon} = 2\frac{\left[\left(\partial ef_\upsilon(\alpha)/\partial \upsilon\right) ef_\upsilon^{-1}(\alpha) - 2\ln m\right] I_1 + 2I_4}{m^{-2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha)\, f_{B^{-1}}(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{5.31}$$

où I_1, I_2, I_3 et I_4 sont les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{x_p} x^{-2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right] dx = (1-p)\frac{1}{2m^{2\upsilon}} ef_\upsilon(\alpha) \tag{5.32}$$

$$I_2 = \int_0^{x_p} x^{-2\upsilon-2} \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right] dx = \frac{1}{2m^{2\upsilon+1}} ef_{\upsilon+1/2}(\alpha) F_{B^{-1}}(x_p; m, \alpha, \upsilon+1/2) \tag{5.33}$$

$$I_3 = \int_0^{x_p} x^{-2\upsilon-3} \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right] dx = \frac{1}{2m^{2\upsilon+2}} ef_{\upsilon+1}(\alpha) F_{B^{-1}}(x_p; m, \alpha, \upsilon+1) \tag{5.34}$$

$$I_4 = \int_0^{x_p} x^{-2\upsilon-1} \ln(x) \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right] dx \tag{5.35}$$

En pratique, ces intégrales doivent être évaluées par intégration numérique, à l'exception de I_1 pour laquelle on obtient une expression explicite.

5.5 Exemple

Pour illustrer l'estimation des paramètres et des quantiles de la loi de Halphen Type B^{-1}, nous considérons un échantillon de 24 débits maximums annuels de printemps mesurés en rivière naturelle (station 02JB003 située au Québec en m^3/s) :

```
165, 146, 169, 117, 276, 153, 182, 158, 151,
103, 139, 144, 175, 140, 217, 101, 140,
230, 129, 124, 132, 156, 171, 158
```

Les moyennes harmonique, quadratique inverse et géométrique (statistiques exhaustives de la loi Type B^{-1}, éq. 5.14) calculées à partir de ces observations sont respectivement :

$$H = 149.38,\ \ QI = 21\,302.40 \ \text{ et } \ G = 153.15$$

On déduit de ces moyennes que H^2/QI = 1.048 et que la borne d'estimation W est 10.523. Pour déterminer si les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les solutions du système d'équations (5.18, 5.19), il faut examiner le signe de la dérivée $l'(W)$. Or, puisque $\Psi(2W) = 3.023$, on déduit de (5.25) que $l'(10.523) = -0.047$. La dérivée négative indique donc que le maximum de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée est atteint pour $\upsilon \in (0\,;10.523)$ et que le système (5.18, 5.19) peut être résolu pour α et m lorsque υ est fixé. Ce résultat nous permet de fixer un ensemble de valeurs du paramètre υ comprises dans cet intervalle et d'estimer les paramètres α et m en résolvant (5.18, 5.19). Ensuite, pour chaque triplets $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \upsilon)$ ainsi obtenus, la fonction de vraisemblance partiellement maximisée, $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ (éq. 5.23), est évaluée.

Le tableau 5.1 présente les résultats pour quelques valeurs de υ dans l'intervalle (0 ; 10). Selon cette tabulation, le maximum de la fonction partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$ est atteint au voisinnage de υ = 4.25 et les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Halphen Type B, pour cet échantillon, sont alors approximativement: $\hat{m} = 375.66$, $\hat{\alpha} = 1.89$ et $\hat{\upsilon} = 4.25$ (ligne ombragée du tableau 5.1).

La figure 5.2 montre le tracé de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée dans l'intervalle $\upsilon \in (0\,;5)$.

Tableau 5.1. Résultats de l'estimation des paramètres de la loi de Halphen Type B^{-1}.

υ	$\hat{\alpha}$	$\hat{m}$	$ef_{\upsilon}(\hat{\alpha})$	$ef_{\upsilon+1/2}(\hat{\alpha})$	$ef_{\upsilon+1}(\hat{\alpha})$	$\ln L(\upsilon\|\hat{\alpha},\hat{m})$
0.5	6.488	484.572	1.317E+05	4.272E+05	1.452E+06	-0.61362
1	5.968	470.785	7.790E+04	2.455E+05	8.105E+05	-0.61278
1.5	5.427	456.895	4.395E+04	1.344E+05	4.307E+05	-0.61211
2	4.861	442.817	2.347E+04	6.958E+04	2.161E+05	-0.61157
2.5	4.266	428.494	1.179E+04	3.381E+04	1.016E+05	-0.61115
3	3.639	413.872	5.523E+03	1.530E+04	4.441E+04	-0.61084
3.25	3.311	406.433	3.675E+03	9.999E+03	2.850E+04	-0.61073
3.5	2.973	398.900	2.396E+03	6.398E+03	1.790E+04	-0.61064
3.75	2.624	391.266	1.528E+03	4.003E+03	1.098E+04	-0.61058
4	2.263	383.522	9.527E+02	2.446E+03	6.578E+03	-0.61054
4.25	1.889	375.661	5.795E+02	1.457E+03	3.839E+03	-0.61052
4.5	1.500	367.673	3.433E+02	8.450E+02	2.179E+03	-0.61053
4.75	1.096	359.550	1.977E+02	4.760E+02	1.200E+03	-0.61056
5	0.674	351.280	1.105E+02	2.599E+02	6.402E+02	-0.61061
5.25	0.234	342.852	5.978E+01	1.372E+02	3.299E+02	-0.61068
5.5	-0.228	334.253	3.122E+01	6.985E+01	1.637E+02	-0.61078
5.75	-0.714	325.468	1.569E+01	3.418E+01	7.802E+01	-0.61089
6	-1.225	316.482	7.563E+00	1.602E+01	3.556E+01	-0.61103
6.5	-2.343	297.828	1.525E+00	3.040E+00	6.349E+00	-0.61136
7	-3.620	278.106	2.454E-01	4.568E-01	8.908E-01	-0.61177
7.5	-5.047	258.403	3.316E-02	5.736E-02	1.039E-01	-0.61226
8	-6.912	234.349	2.473E-03	3.879E-03	6.374E-03	-0.61281
8.5	-9.190	209.403	1.223E-04	1.714E-04	2.517E-04	-0.61344
9	-12.287	181.310	2.750E-06	3.340E-06	4.240E-06	-0.61415
9.5	-17.056	148.318	2.000E-08	2.000E-08	2.000E-08	-0.61493

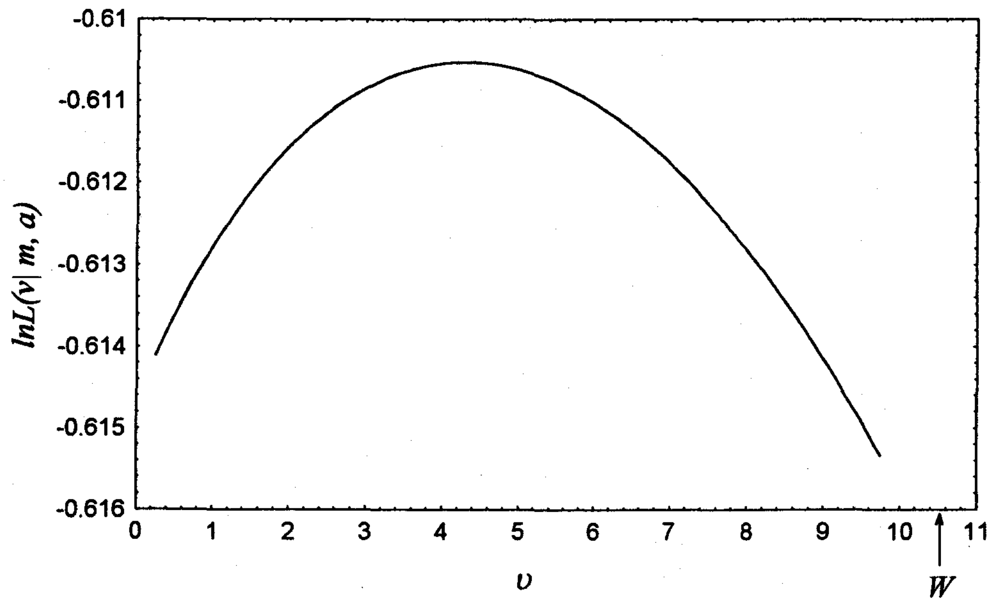

Figure 5.2. Vraisemblance logarithmique partiellement maximisée $\ln L(\upsilon|\hat{\alpha},\hat{m})$.

En utilisant l'expression (5.26), on peut maintenant calculer les éléments de la matrice d'information de Fisher pour une observation :

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} 1.5533\text{E-}04 & -6.6943\text{E-}03 & -5.3463\text{E-}03 \\ & 2.9797\text{E-}01 & 2.4496\text{E-}01 \\ & & 2.0674\text{E-}01 \end{bmatrix}$$

d'où l'on déduit, en inversant $\mathbf{I}_f$ et en appliquant l'équation (D.4), la matrice des variances et covariances des estimateurs du maximum de vraisemblance $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ des paramètres de la loi Type B^{-1} :

$$\frac{1}{24}\mathbf{I}_f^{-1} = \begin{bmatrix} Var\{\hat{m}\} & Cov\{\hat{m},\hat{\alpha}\} & Cov\{\hat{m},\hat{\upsilon}\} \\ & Var\{\hat{\alpha}\} & Cov\{\hat{\alpha},\hat{\upsilon}\} \\ & & Var\{\hat{\upsilon}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 124040 & 5776 & -3636.2 \\ & 274.36 & -175.72 \\ & & 114.37 \end{bmatrix}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{x}_T$ du quantile de période de retour T est obtenu en résolvant pour x_T l'équation (5.28) avec $\hat{m} = 375.66, \hat{\alpha} = 1.89$ et $\hat{\upsilon} = 4.25$. Le tableau 5.2 donne le quantile estimé pour 14 probabilité au dépassement p. L'équation (5.28) a été résolue à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson. Pour chaque probabilité au dépassement p, la variance du quantile a été déterminée à partir des expressions (5.29)-(5.35) et (E.1). La variance et le résultat de chacune des étapes de son calcul sont présentés au tableau 5.2 (intégrales I_1 à I_4 et dérivées de x_p par rapport à chacun des paramètres).

Tableau 5.2. Quantiles estimés et écart-types pour la loi Type B^{-1}.

$1-p$	$\hat{x}_p$	I_1	I_2	I_3	I_4	$\partial x_p / \partial m$	$\partial x_p / \partial \alpha$	$\partial x_p / \partial \upsilon$	$\sqrt{Var\{\hat{x}_p\}}$
0.1	116	1.961E-21	1.833E-23	1.721E-25	9.169E-21	0.311	-11.972	-8.599	5.97
0.2	126	3.922E-21	3.446E-23	3.050E-25	1.858E-20	0.337	-13.706	-10.279	5.82
0.3	135	5.884E-21	4.949E-23	4.202E-25	2.814E-20	0.359	-15.186	-11.766	6.11
0.5	150	9.806E-21	7.707E-23	6.143E-25	4.758E-20	0.402	-18.166	-14.896	7.30
0.7	166	1.308E-20	9.780E-23	7.459E-25	6.413E-20	0.444	-21.248	-18.306	8.89
0.8	184	1.569E-20	1.128E-22	8.324E-25	7.762E-20	0.491	-24.885	-22.532	11.24
0.9	206	1.765E-20	1.230E-22	8.848E-25	8.795E-20	0.552	-29.764	-28.510	15.86
0.95	229	1.863E-20	1.275E-22	9.059E-25	9.322E-20	0.613	-34.789	-34.998	23.07
0.98	259	1.922E-20	1.299E-22	9.160E-25	9.644E-20	0.695	-41.843	-44.618	37.76
0.99	284	1.942E-20	1.307E-22	9.187E-25	9.754E-20	0.762	-47.678	-52.905	53.43
0.995	309	1.951E-20	1.310E-22	9.198E-25	9.810E-20	0.832	-53.965	-62.191	73.37
0.999	374	1.959E-20	1.312E-22	9.205E-25	9.856E-20	0.987	-69.605	-87.624	141.87
0.9995	415	1.960E-20	1.313E-22	9.204E-25	9.862E-20	0.625	-63.225	-94.051	195.17
0.9999	477	1.961E-20	1.313E-22	9.211E-25	9.866E-20	8.307	-310.257	-253.383	468.16

Nous obtenons ainsi une estimation du débit maximum de printemps pour différents risques hydrologiques (probabilité au dépassement p), c'est-à-dire le débit maximum correspondant à diverses périodes de retour $T = 1/p$ (équation 1.2). En particulier, le débit centennal de la station 02JB003 estimé à partir de la loi de Halphen Type B^{-1} ($T = 100$ ans ou $p = 0.01$) est ici de 284 m^3/s.

NOTE

On remarque que l'écart-type asymptotique du quantile estimé de probabilité au non dépassement $1 - p = 0.9999$ est anormalement élevé. Cela peut être dû au manque de précision des calculs et des approximations numériques effectués dans *AJUST* lors de l'évaluation des dérivées des quantiles. Il est recommandé de réaliser une étude concernant ces problèmes. Mentionnons, qu'il serait aussi souhaitable d'analyser la précision du calcul numérique de la fonction exponentielle factorielle qui, pour υ grand ($\approx$ 8 ou plus) et α grand négativement ($\approx$ -5 ou moins), peut donner des valeurs erronées. Cela engendre des problèmes lors de la détermination du paramètre α en résolvant par Newton-Raphson l'équation (5.18). De plus, la fonction de vraisemblance partiellement maximisée admet alors des valeurs irrégulières près de la borne W et l'estimation de υ s'en trouve affectée.

6 SYNTHÈSE ET APPLICATIONS

Morlat (1956) mentionne que le système des lois de Halphen est un outil dont la richesse égale celui des lois de Pearson et qu'elle comble une lacune pour la représentation de phénomènes naturels comme les débits et les précipitations. Nous montrerons, dans ce chapitre, comment les trois lois de Halphen se complètent harmonieusement. Nous rappelons d'abord, à la section 6.1, quelques résultats importants concernant l'estimation des paramètres. Nous présentons aussi dans cette section un diagramme des moments qui illustre bien le système des lois de Halphen et les liens qui existent entre elles. Dans la section 6.2, nous appliquons les trois lois de Halphen à 186 échantillons de débits maximums de crue.

6.1 Synthèse et diagramme des moments

Comme on l'a mentionné précédemment, le développement des lois de Halphen avait comme objectif particulier d'obtenir un résumé exhaustif des observations pour l'estimation des paramètres de chaque type de loi. On a montré que les lois de Halphen appartiennent à la classe exponentielle des fonctions de densité de probabilité à 3 paramètres et qu'elles admettent donc un triplet de statistiques exhaustives (sections 3.2, 4.2 et 5.2). Un résumé exhaustif des observations est fourni pour chaque type de loi de Halphen par un ensemble de trois moyennes qui sont données au tableau 6.1.

Tableau 6.1. Statistiques exhaustives pour chaque loi.

Type	Statistiques exhaustives et complètes		
A	$H^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$	$\ln G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$	$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$
B	$\ln G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$	$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$	$Q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$
$\mathbf{B^{-1}}$	$QI^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}$	$H^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$	$\ln G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

Les moyennes QI^{-1}, H^{-1}, $\ln G$, A et Q correspondent respectivement aux moments non centrés de l'échantillon d'ordre -2, -1, 0, 1 et 2. On peut illustré ce résultat par le schéma suivant (figure 6.1) qui associe à chacune des lois de Halphen son triplet de statistiques exhaustives :

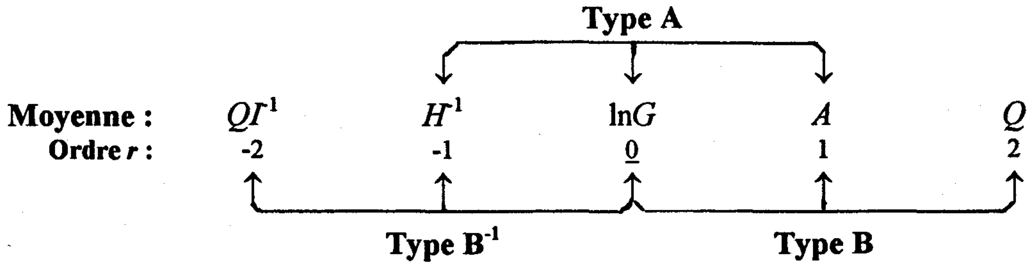

Figure 6.1. Statistiques exhaustives pour chaque loi de Halphen.

Comme on l'a vu aux chapitres 3, 4 et 5 et comme le montre la figure 6.1, la moyenne géométrique est exhaustive pour les trois distributions de Halphen. Elle est d'ailleurs également exhaustive pour les cas limites des lois de Halphen que sont les distributions gamma et gamma inverse. Cette statistique joue donc un rôle central dans l'estimation des paramètres des lois de Halphen.

Morlat (1956) présente un diagramme des moments permettant de représenter les diverses lois de Halphen par les points d'un plan. Cette représentation graphique (figure 6.2) consiste à éliminer le paramètre d'échelle m en choisissant comme coordonnées les quantités $\delta_1 = \ln(A/G)$ et $\delta_2 = \ln(G/H)$. Il s'agit d'une opération analogue à la représentation classique des lois de Pearson par les coefficients β_1 et β_2 (fonctions des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement). Ces coordonnées permettent de représenter dans une portion du graphique toutes les lois Type A. En effet, le couple (δ_1, δ_2) est fonction des trois statistiques exhaustives de la loi Type A (cf. section 3.2). Toutefois, seules les lois Type B admettant une moyenne harmonique H finie ($\upsilon > 1/2$), sont représentées. La même condition s'applique pour assurer l'existence de la moyenne arithmétique A des lois Type B^{-1}.

Le diagramme de la figure 6.2 met en évidence la symétrie entre les lois Type A selon le signe du paramètre υ (cf. proposition 2.5) d'une part, et d'autre part, entre les lois B et B^{-1} (cf. proposition 2.6). De plus, le rôle de transition que jouent les distributions limites gamma (G) et gamma inverse (GI) entre les trois types de lois de Halphen, est bien illustré dans cette représentation graphique.

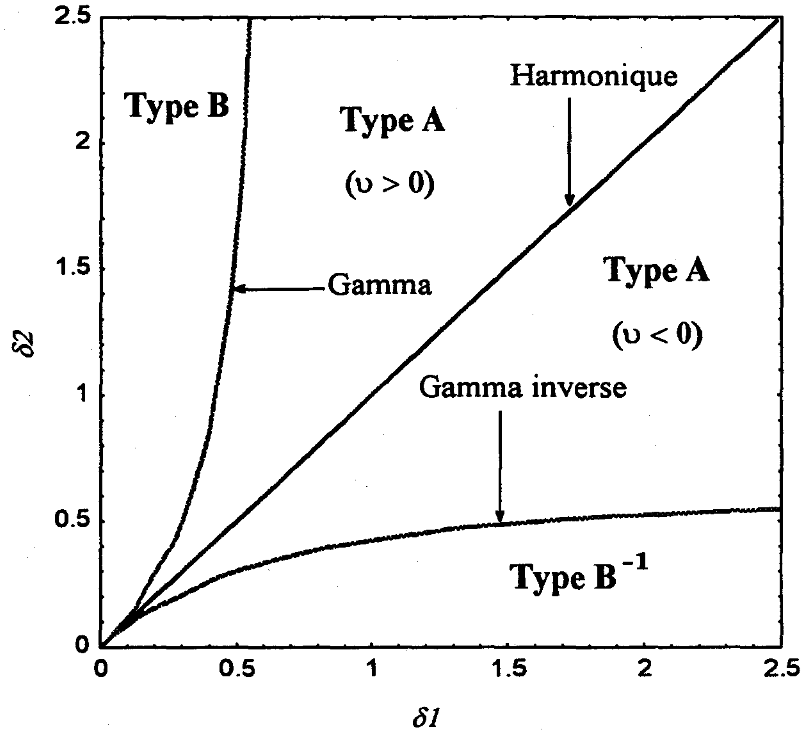

Figure 6.2. Les lois de Halphen dans le diagramme (δ_1, δ_2)

Enfin, le tableau 6.2, qui résume les développements théoriques présentés dans les sections 3.3, 4.3 et 5.3, donne les principales expressions nessaires à l'estimation des paramètres des lois de Halphen. On y présente pour chaque loi le système d'équations à résoudre pour υ fixé, la fonction de dispersion et sa borne supérieure, la borne d'estimation, l'expression de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée et sa dérivée.

6.2. Application des lois de Halphen aux débits maxima annuels

Les paramètres des lois de Halphen ont été estimés pour un ensemble de 186 séries de débits maxima annuels de rivières canadiennes de la région Québec-Ontario (75 au Québec et 111 en Ontario). Les stations hydrométriques retenues pour cette étude ont un régime hydrologique naturel et possèdent au moins 20 années d'enregistrements continus de débits maxima annuels (Mathier *et al.*, 1993). La figure 6.3 donne la localisation géographique des stations sélectionnées qui sont surtout situées dans les zones habitées et dans le sud de chaque province.

Tableau 6.2. Caractéristiques nécessaires à l'estimation des paramètres des lois de Halphen

	Type A	Type B	Type B^{-1}
Système d'équations (υ fixé)	$\frac{K_{\upsilon+1}(2\alpha)\,K_{\upsilon-1}(2\alpha)}{K_{\upsilon}^{2}(2\alpha)}=\frac{A}{H}$ $m=A\frac{K_{\upsilon}(2\alpha)}{K_{\upsilon+1}(2\alpha)}$	$\frac{ef_{\upsilon+1}(\alpha)\,ef_{\upsilon}(\alpha)}{ef_{\upsilon+1/2}^{2}(\alpha)}=\frac{Q}{A^{2}}$ $m=A\frac{ef_{\upsilon}(\alpha)}{ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)}$	$\frac{ef_{\upsilon+1}(\alpha)\,ef_{\upsilon}(\alpha)}{ef_{\upsilon+1/2}^{2}(\alpha)}=\frac{H^{2}}{QI}$ $m=H\frac{ef_{\upsilon+1/2}(\alpha)}{ef_{\upsilon}(\alpha)}$
Fonction de dispersion	$D_{A}(\alpha,\upsilon)=\frac{K_{\upsilon+1}(2\alpha)\,K_{\upsilon-1}(2\alpha)}{K_{\upsilon}^{2}(2\alpha)}$	$D_{B}(\alpha,\upsilon)=\frac{ef_{\upsilon+1}(\alpha)\,ef_{\upsilon}(\alpha)}{ef_{\upsilon+1/2}^{2}(\alpha)}$	$D_{B}(\alpha,\upsilon)=\frac{ef_{\upsilon+1}(\alpha)\,ef_{\upsilon}(\alpha)}{ef_{\upsilon+1/2}^{2}(\alpha)}$
Borne sup.	$\lim_{\alpha\to 0}D_{A}(\alpha,\upsilon)=\begin{cases}+\infty\ , & \lvert\upsilon\rvert\le 1\\ \frac{\lvert\upsilon\rvert}{\lvert\upsilon\rvert-1}\ , & \lvert\upsilon\rvert>1\end{cases}$	$\lim_{\alpha\to-\infty}D_{B}(\alpha,\upsilon)=1+\frac{1}{2\upsilon},\quad \upsilon>0$	$\lim_{\alpha\to-\infty}D_{B}(\alpha,\upsilon)=1+\frac{1}{2\upsilon},\quad \upsilon>0$
Borne d'estim. et condition	$U=AH^{-1}/(AH^{-1}-1)$ $-U<\upsilon<U$	$V=1/\left[2(QA^{-2}-1)\right]$ $0<\upsilon<V$	$W=1/\left[2(H^{2}QI^{-1}-1)\right]$ $0<\upsilon<W$
Vrais.. Partielle ($\propto$ à ...)	$-\upsilon\ln\left[-\upsilon H\right]-\ln\Gamma(-\upsilon)+(\upsilon-1)\ln G+\upsilon,\quad \upsilon\le -U$ $\ln\left[\frac{G^{\upsilon-1}}{\hat{m}^{\upsilon}K_{\upsilon}(2\hat{\alpha})}\right]-\hat{\alpha}\left[\frac{K_{\upsilon+1}(2\hat{\alpha})+K_{\upsilon-1}(2\hat{\alpha})}{K_{\upsilon}(2\hat{\alpha})}\right],\quad \lvert\upsilon\rvert<U$ $\upsilon\ln\left[\upsilon/A\right]-\ln\Gamma(\upsilon)+(\upsilon-1)\ln G-\upsilon,\quad \upsilon\ge U$	$\ln\left[\frac{2G^{2\upsilon-1}}{\hat{m}^{2\upsilon}ef_{\upsilon}(\hat{\alpha})}\right]-\left[\frac{ef_{\upsilon+1}(\hat{\alpha})+\hat{\alpha}ef_{\upsilon+1/2}(\hat{\alpha})}{ef_{\upsilon}(\hat{\alpha})}\right],\quad 0<\upsilon<V$ $2\upsilon\ln\left[2\upsilon/A\right]-\ln\Gamma(2\upsilon)+(2\upsilon-1)\ln G-2\upsilon,\quad \upsilon\ge V$	$\ln\left[\frac{2\hat{m}^{2\upsilon}}{G^{2\upsilon+1}ef_{\upsilon}(\hat{\alpha})}\right]-\left[\frac{ef_{\upsilon+1}(\hat{\alpha})+\hat{\alpha}ef_{\upsilon+1/2}(\hat{\alpha})}{ef_{\upsilon}(\hat{\alpha})}\right],\quad 0<\upsilon<W$ $2\upsilon\ln\left[2\upsilon H\right]-\ln\Gamma(2\upsilon)-(2\upsilon+1)\ln G-2\upsilon,\quad \upsilon\ge W$
Dérivée vrais. part. (= à ...)	$n\left[\ln\left(-\frac{G}{H}\frac{1}{\upsilon}\right)+\Psi(-\upsilon)\right],\quad \upsilon\le -U$ $n\left[\ln\left(\frac{G}{A}\upsilon\right)-\Psi(\upsilon)\right],\quad \upsilon\ge U$	$2n\left[\ln\left(\frac{G}{A}2\upsilon\right)-\Psi(2\upsilon)\right],\quad \upsilon\ge V$	$2n\left[\ln\left(\frac{H}{G}2\upsilon\right)-\Psi(2\upsilon)\right],\quad \upsilon\ge W$

Note : Pour la notation de QI, H, G, A et Q, se reporter au tableau 6.1 ou aux sections 3.2, 4.2 et 5.2.

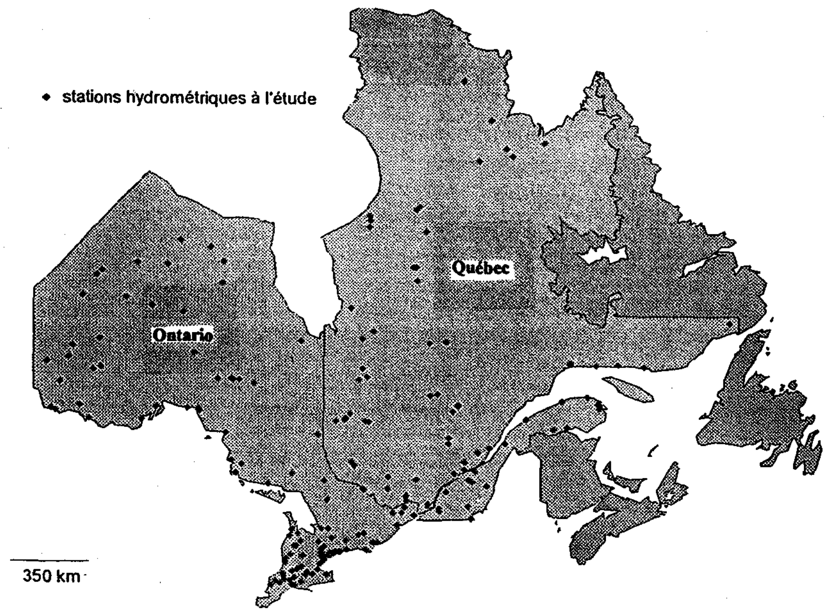

Figure 6.3. Localisation géographique des stations sélectionnées

Les valeurs des statistiques exhaustives (*QI*, *H*, *G*, *A* et *Q*), des bornes d'estimation (*U*, *V* et *W*) et des coefficients (δ_1, δ_2) sont données pour chaque échantillon à l'annexe F. La figure 6.4 présente chacun des 186 échantillons dans le diagramme (δ_1, δ_2).

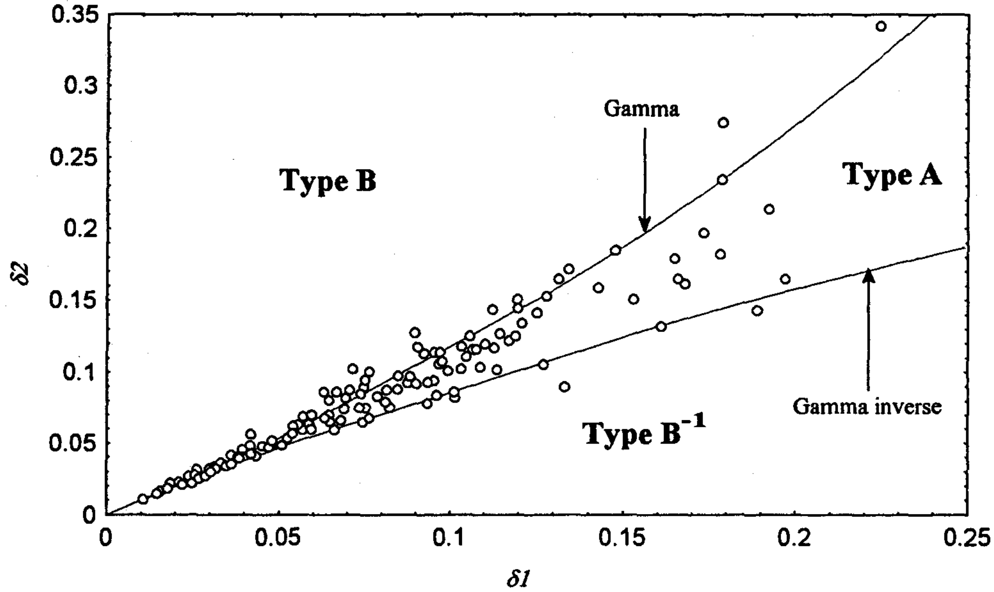

Figure 6.4. Représentation des 186 échantillon dans le diagramme (δ_1, δ_2).

Une première répartition des 186 ajustements des trois lois de Halphen a été effectuée. Les résultats des ajustements ont été classés suivant la validité de la solution du système d'équations du maximum de vraisemblance correspondant, c'est-à-dire à partir des bornes d'estimation (*U*, *V* et *W*) et des conditions sur υ (tableau 6.2). Le tableau 6.3 donne le nombre de séries dont les estimateurs du maximum de vraisemblance correspondent respectivement à la solution directe du système d'équations propre aux lois de Halphen (systèmes 3.22-3.23, 4.19-4.20, 5.18-5.19 respectivement pour les lois A, B et B^{-1}) et à ceux des lois limites gamma et gamma inverse.

Tableau 6.3. Validité de la solution des systèmes d'équations

		Loi ajustée		
		A	B	B^{-1}
Résultat de la condition	Solution directe du système	103	81	30
	Gamma	63	105	-
	Gamma inverse	20	-	156
	Total	**186**	**186**	**186**

Pour la loi Type A, le système d'équations (3.22, 3.23) admet directement une solution pour 103 ajustements (plus de 55% des séries). Toutefois, pour 83 échantillons, les estimateurs du maximum de vraisemblance correspondent plutôt à ceux des distributions limites gamma (63) et gamma inverse (20). D'autre part, les estimateurs du maximum de vraisemblance des lois Type B et Type B^{-1} sont solution directe du système d'équations pour 43% et 16% des séries respectivement. Cette répartition des résultats montre particulièrement que les lois Types A et B semblent plus adéquates pour modéliser les débits maxima annuels des rivières canadiennes que la loi Type B^{-1}.

Les figures 6.5 à 6.7 reprennent, pour les lois Type A, Type B et Type B^{-1} respectivement, le diagramme (δ_1, δ_2) de la figure 6.4 en illustrant la répartition des échantillons obtenue et présentée au tableau 6.3. On y distingue, pour chaque loi, les points (δ_1, δ_2) correspondant aux échantillons vérifiant la condition sur υ (estimateurs du maximum de vraisemblance solution directe du système d'équations) de ceux qui ne la vérifient pas (estimateurs correspondent à ceux des lois gamma et gamma inverse). On remarque d'abord, lorsque la loi Type A est ajustée (figure 6.5), que les points (δ_1, δ_2) pour lesquels une solution directe du système d'équations est admise sont tous situés dans la portion des lois de Type A. Les points (δ_1, δ_2) associés aux échantillons dont les estimateurs du maximum de vraisemblance correspondent à ceux des lois limites se retrouvent tous à l'extérieur de cet espace. Il semble donc exister, pour la loi Type A, une équivalence entre la condition sur υ et la situation du point (δ_1, δ_2) dans le diagramme. Cela n'a pu être démontré, mais cette conjecture est tout à fait naturelle puisque les coordonnées (δ_1, δ_2) constituent un résumé exhaustif des observations pour l'estimation des paramètres de forme de la loi Type A.

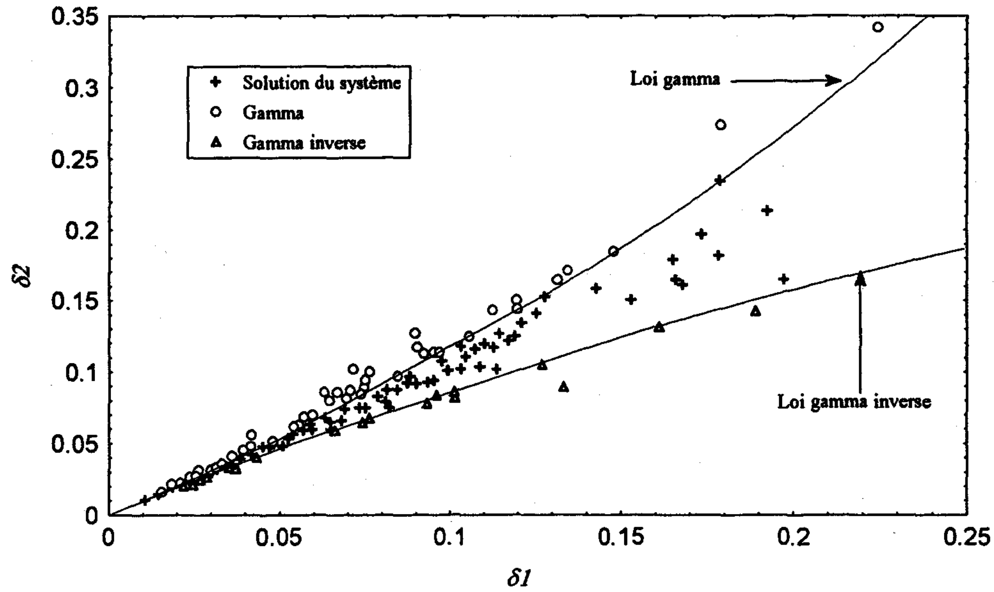

Figure 6.5. Résultat de l'estimation des paramètres dans le diagramme (δ_1, δ_2) : Type A

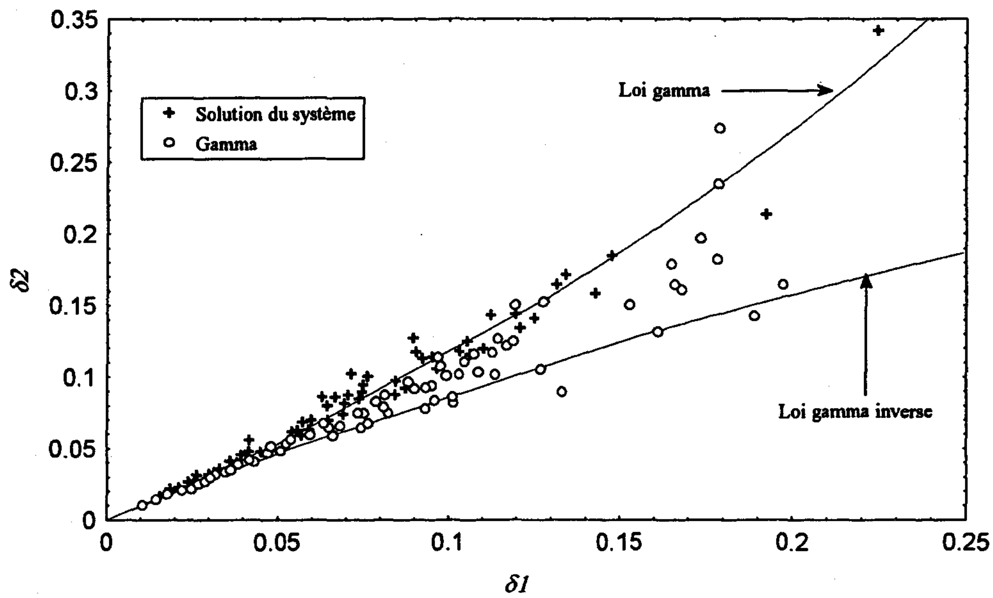

Figure 6.6. Résultat de l'estimation des paramètres dans le diagramme (δ_1, δ_2) : Type B

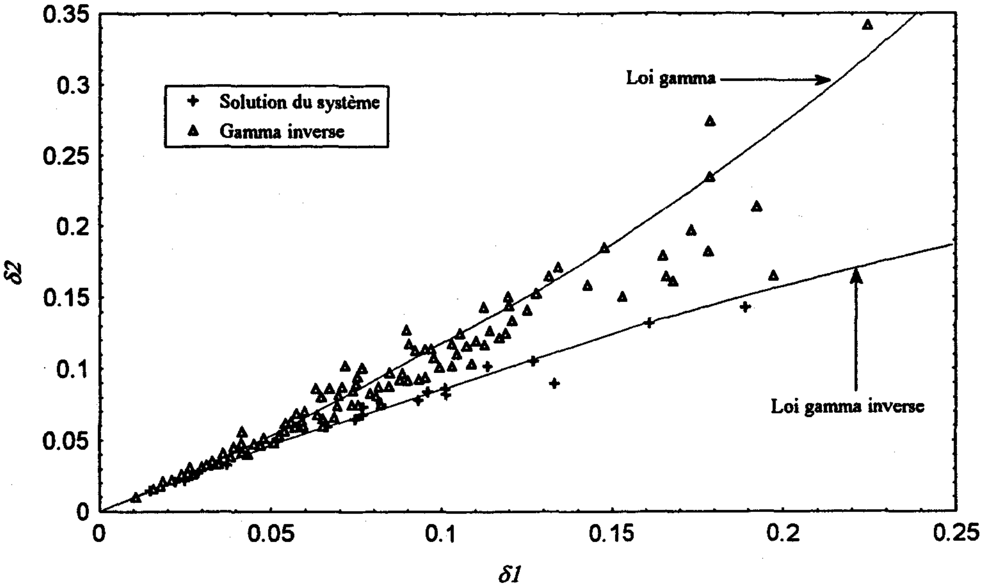

Figure 6.7. Résultat de l'estimation des paramètres dans le diagramme (δ_1, δ_2) : Type B^{-1}

Pour les lois Type B et Type B^{-1} (figures 6.6 et 6.7), les points (δ_1, δ_2) pour lesquels une solution directe du système d'équations est admise ne sont pas tous situés dans leur espace respectif. En effet, certaines de ces coordonnées se retrouvent dans la portion du plan (δ_1, δ_2) occupée par les lois de Type A. La condition sur υ peut donc être vérifiée simultanément pour la loi Type A et pour l'une des deux autres distributions du système. Ce résultat montre, pour les lois Type B et Type B^{-1}, qu'une équivalence stricte entre les conditions sur υ et la situation des points (δ_1, δ_2) dans le diagramme n'existe pas. Cela n'est pas étonnant puisque (δ_1, δ_2) ne dépendent que de deux des trois statistiques exhaustives des lois B et B^{-1} et qu'ainsi, ces rapports de moments ne constituent pas un résumé exhaustif des observations pour l'estimation de leurs paramètres de forme. D'ailleurs, comme il a d'ailleurs été mentionné à la section 6.1, les lois Type B et Type B^{-1} ne sont pas toutes représentées dans le diagramme (δ_1, δ_2). On remarque enfin, en examinant les figures 6.6 et 6.7, qu'aucun échantillon n'admet une solution directe du système d'équations à la fois pour la loi Type B et la loi Type B^{-1}. Cette constatation empirique pourrait indiquer que les deux espaces correspondants dans le diagramme sont disjoints et qu'il serait impossible d'ajuster au même échantillon les lois B et B^{-1}.

Une répartition bi-dimensionnelle des résultats a été faite afin d'illustrer davantage comment les lois de Halphen, et leurs cas limites, se complètent harmonieusement. Les tableaux de fréquence à deux dimensions 6.4, 6.5 et 6.6, qui mettent respectivement en relation les trois couples de lois A/B, A/B^{-1} et B/B^{-1}, présentent la distribution conjointe des résultats obtenus.

Tableau 6.4. Répartition conjointe des résultats pour les lois Type A et Type B.

		TYPE A			
		Solution directe	Gamma	Gamma inv.	**Total**
TYPE B	Solution directe	22	59	0	**81**
	Gamma	81	4	20	**105**
	Total	**103**	**63**	**20**	**30**

Tableau 6.5. Répartition conjointe des résultats pour les lois Type A et Type B^{-1}.

		TYPE A			
		Solution directe	Gamma	Gamma inv.	**Total**
TYPE B^{-1}	Solution directe	11	0	19	**30**
	Gamma inv.	92	63	1	**156**
	Total	**103**	**63**	**20**	**186**

Tableau 6.6. Répartition conjointe des résultats pour les lois Type B et Type B^{-1}.

		TYPE B		
		Solution directe	Gamma	**Total**
TYPE B^{-1}	Solution directe	0	30	**30**
	Gamma inv.	81	75	**156**
	Total	**81**	**105**	**186**

On tire principalement de ces tables les observations que voici :

- Pour la majorité des échantillons dont le système d'équations du Type A admet une solution directe (103 échantillons), l'ajustement des deux autres lois fournit comme estimateurs ceux de leur loi limite respective (81 et 92 respectivement, tableaux 6.4 et 6.5). Réciproquement, la plupart des échantillons dont le système d'équations du Type B (respectivement du Type B^{-1}) admet une solution directe ne vérifient pas la condition sur υ de la loi Type A et les estimateurs des paramètres correspondent alors à ceux de la loi gamma (respectivement gamma inverse).

- Lorsque les estimateurs des paramètres de la loi Type A correspondent à ceux de la loi gamma (respectivement gamma inverse), le système d'équations de la loi Type B^{-1} (respectivement Type B) n'admet pas de solution et les estimateurs correspondent à ceux de la loi gamma inverse (respectivement gamma).

- Moins de 18% des échantillons admettent une solution directe du système d'équations pour deux types de lois de Halphen : 22 échantillons peuvent être ajustés à la fois par les lois Type A et Type B (tableau 6.4), 11 échantillons par les lois Type A et Type B^{-1} (tableau 6.5) et aucun par les lois Type B et Type B^{-1} (tableau 6.6).

- L'ensemble des échantillons dont le système d'équations du Type B admet une solution directe (81 échantillons) fournit comme estimateurs des paramètres de la loi B^{-1} ceux de la loi gamma inverse (tableau 6.6). La réciproque est aussi vraie. Les systèmes d'équations des types B et B^{-1} (respectivement 4.19-4.20 et 5.18-5.19) ne permettent pas en même temps une solution directe.

- En raffinant encore la répartition, on remarque en particulier que lorsque les séries admettent une solution à la fois au système du Type A et du Type B (22 échantillons), les estimateurs correspondants, issus de l'ajustement du Type B^{-1}, sont ceux de la loi gamma inverse. De manière analogue, si une solution du système est obtenue en même temps pour les lois A et B^{-1} (11 échantillons), alors les estimateurs du Type B de ces mêmes séries correspondent à ceux de la loi gamma.

Ces quelques remarques concernant les résultats présentés dans les tableaux de fréquences 6.4 à 6.6 sont conformes à la partition de l'espace (δ_1, δ_2) du diagramme des moments présentés à la figure 6.2. Ces constatations empiriques appuient la thèse de Morlat selon laquelle les lois de Halphen se complètent harmonieusement et permettent de représenter un ensemble varié d'échantillons. Les résultats montrent, en particulier, le rôle de frontière que jouent, entre les lois de Halphen, les distributions limites gamma et gamma inverse. Enfin, cette étude empirique donne quelques pistes de recherche concernant notamment les liens entre l'existence d'une solution au système d'équations et la situation du point (δ_1, δ_2) dans le diagramme.

Finalement, un examen sommaire des formes typiques de f.d.p. des lois de Halphen rencontrées lors de l'ajustement des débits aux 186 stations a été effectué. La figure 6.8 présente d'abord, pour chaque loi, les valeurs des paramètres de forme α et υ selon la procédure décrite aux section 3.3, 4.3 et 5.3 (103, 81 et 30 couples respectivement pour les lois Types A, B et B^{-1}, cf. tableau 6.3). Les couples de paramètres identifiés par une croix (+) correspondent à des points extrêmes et plus centraux. La figure 6.9 illustre la distribution des ces valeurs pour chaque type de loi à l'aide d'un histogramme bi-dimensionnel des estimations $\hat{\alpha}$ et $\hat{\upsilon}$. Enfin, la figure 6.10 donne le tracé des f.d.p. associées aux couples ($\hat{\alpha}$, $\hat{\upsilon}$) identifiés par une croix à la figure 6.8 et considérés comme représentatifs des résultats obtenus (points extrêmes et centraux).

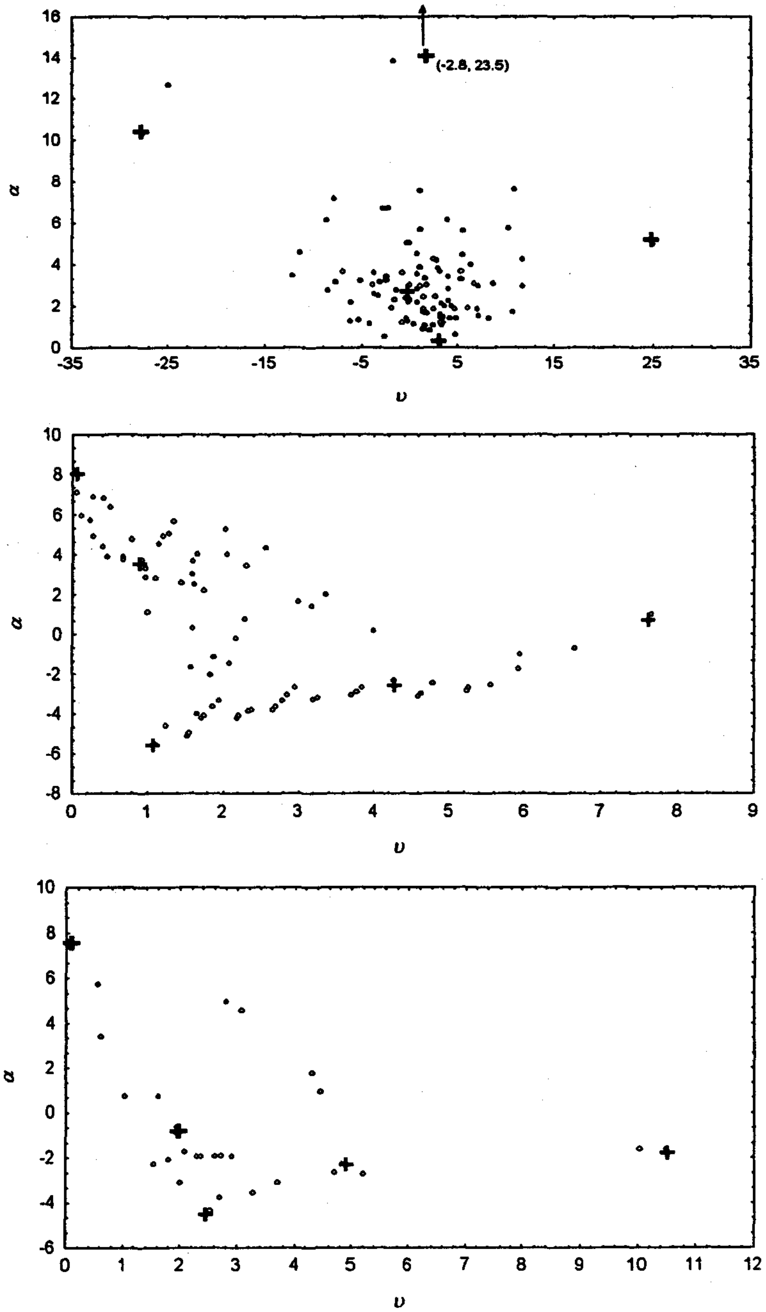

Figure 6.8. Valeurs de $\hat{\alpha}$ et $\hat{\upsilon}$ obtenues : (a) Type A, (b) Type B et (c) Type B^{-1}.

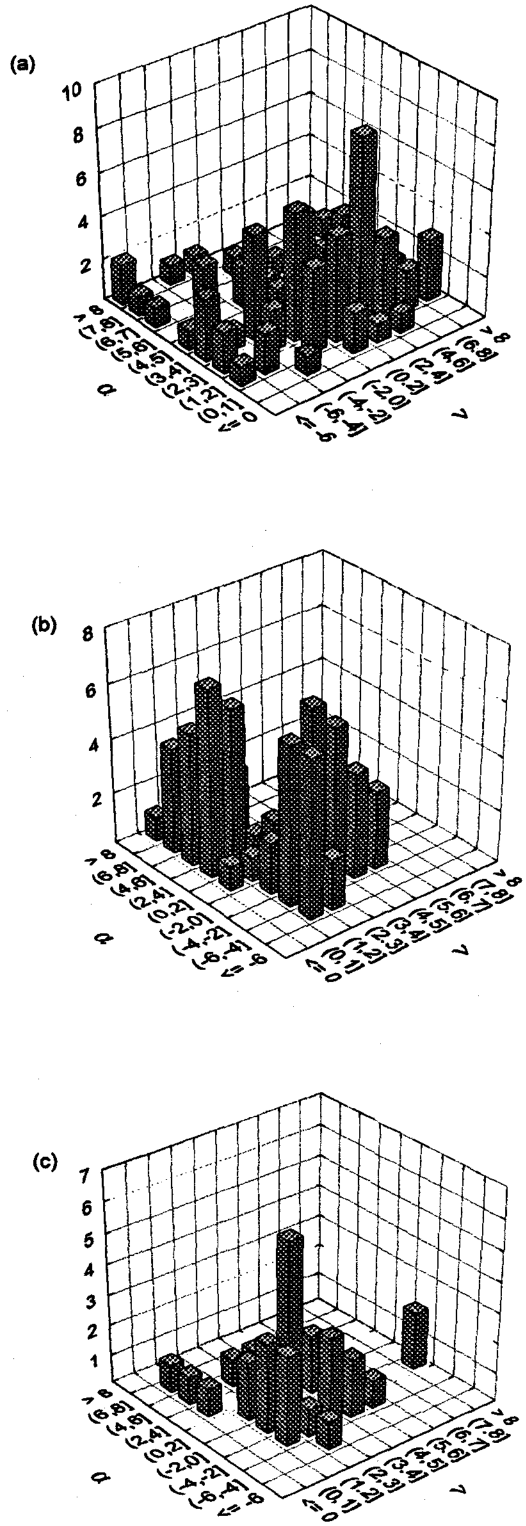

Figure 6.9. Distribution des valeurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\upsilon}$ obtenues : (a) Type A, (b) Type B et (c) Type B^{-1}

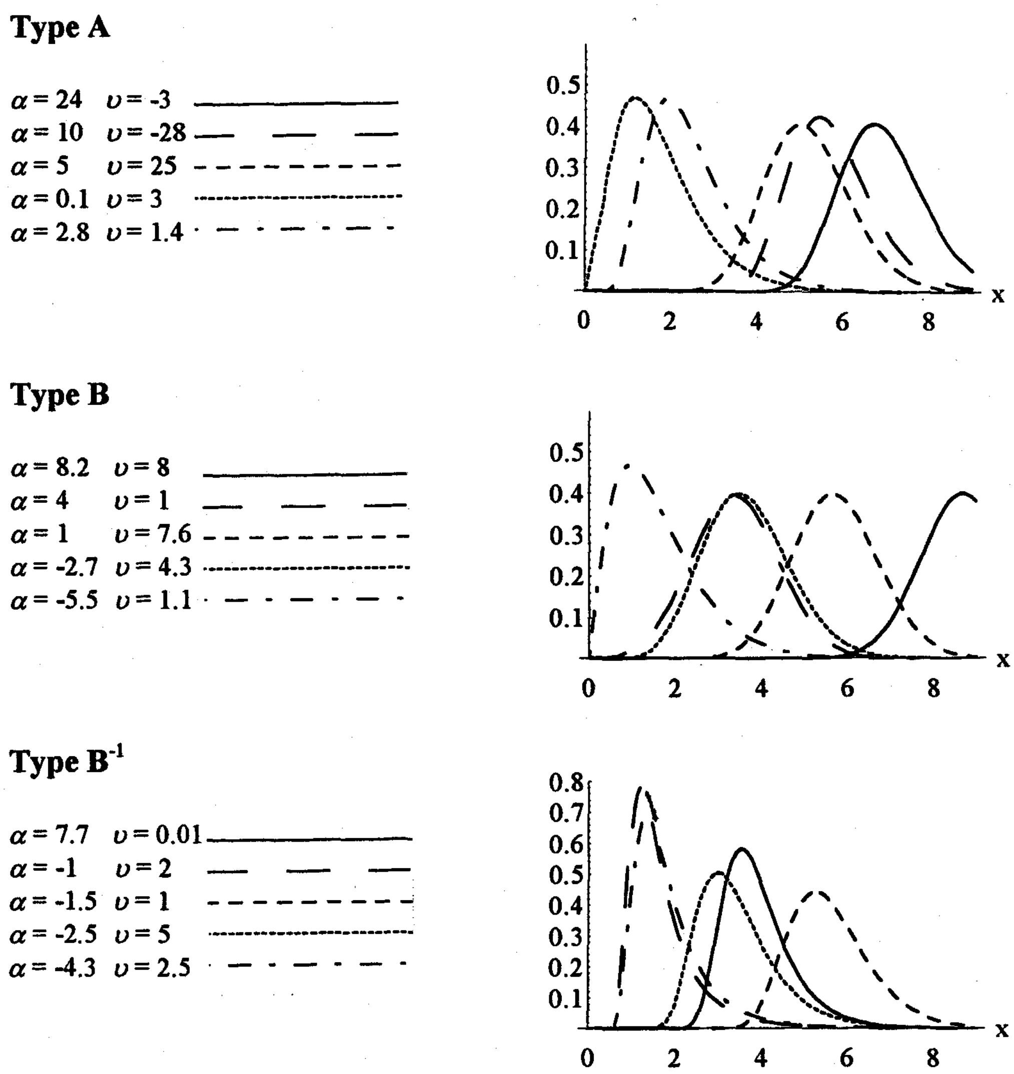

Figure 6.10. Fonctions de densité de probabilité correspondant aux points identifiés par une croix à la figure 6.8 : (a) Type A, (b) Type B et (c) Type B^{-1}

7 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

7.1 Conclusion

L'hydrologue français E. Halphen a développé, au milieu du siècle, de nouvelles lois de probabilité (Halphen, 1941). En effet, sa grande expérience en modélisation de données hydrologiques l'avait convaincu qu'aucune distribution utilisée à cette époque n'était assez souple pour pouvoir ajuster adéquatement l'ensemble des séries hydrologiques observées en France. Ainsi, Halphen (1941) a proposé des lois de probabilité à trois paramètres (lois de types A et B) et M. Larcher (cf. Morlat, 1956) en a présenté une extension pour obtenir la famille des lois de Halphen (types A, B et B^{-1})

Même si les formes qu'admettent les lois de Halphen reposent particulièrement sur des justifications empiriques, ces distributions possèdent néanmoins d'intéressantes propriétés statistiques théoriques. En particulier, les lois de Halphen appartiennent à la classe exponentielle des fonctions de densité de probabilité continues et admettent donc un triplet de statistiques exhaustives (cf. sections 3.2, 4.2 et 5.2). On dispose donc, pour chaque loi de Halphen, d'un résumé exhaustif des observations pour l'estimation des paramètres. Cette propriété est fondamentale puisqu'elle permet d'affirmer qu'il existe des estimateurs non-biaisés de variance minimale pour chacun des paramètres. À notre connaissance, les lois de Halphen sont les seules distributions à trois paramètres, utilisées en hydrologie, qui possèdent cette importante propriété.

Comme l'a mentionné Morlat (1956), la théorie entourant les lois de Halphen, qui comblaient à l'époque une lacune pour la représentation des phénomènes naturels, est très riche et elles peuvent rendre de grands services dans bien d'autres domaines que l'hydrologie. Cependant, en particulier parce que les outils numériques disponibles à l'époque rendaient l'application des lois de Halphen très laborieuse, ces distributions ont été oubliées et ont fait l'objet de très peu de développements théoriques. Les travaux de Halphen sont désormais précurseurs puisque trois décennies plus tard la loi Type A réapparaît dans la littérature statistique sous la forme de la distribution gaussienne inverse généralisée (voir en particulier, Sichel, 1975; Barndorff-Neilsen et Halgreen, 1977; Seshadri, 1993). Cette loi et ses cas particuliers (loi gaussienne inverse, loi hyperbolique, etc.) sont aujourd'hui employés pour diverses applications.

La littérature concernant les lois de Halphen est très restreinte et aucun ouvrage n'expose rigoureusement dans les détails leurs propriétés mathématiques et statistiques. Quoiqu'appartenant à la classe exponentielle des f.d.p. continues, pour laquelle de nombreux résultats concernant l'estimation sont connus, l'estimation des paramètres des lois de Halphen demeure assez complexe et les développements à ce sujet ne sont que sommaires. Ce rapport avait donc comme objectifs de rappeler les propriétés connues des lois de Halphen et de présenter les aspects théoriques et numériques nouveaux développés pour l'utilisation de ces distributions.

Dans le chapitre 2, nous avons d'abord étudié la forme des f.d.p. des lois de Halphen, qui présentent une grande variété de formes de courbe (unimodale, un mode et un anti-mode, aucun mode, décroissance lente, moyenne ou rapide pour de grandes valeurs de la variable, etc.). Les f.d.p. des lois de types A (cf. figure 2.4) et B^{-1} (cf. figure 2.6) sont toujours unimodales et à asymétrie positive. La variété des formes admises par la loi de Halphen Type B (figure 2.5) est plus grande puisqu'on trouve parmi elles, outre des lois unimodales, des lois en J, des lois en S ainsi que des lois tronquées. C'est pourquoi, selon Morlat (1956), la famille des lois de Halphen est un outil dont la richesse égale celle des lois de Pearson.

Nous avons aussi étudié, au chapitre 2, les liens entre les lois de Halphen et diverses distributions plus connues, notamment les lois gamma et gamma inverse qui jouent un rôle important dans ce système de distributions. Nous avons montré dans quelles circonstances les lois de Halphen peuvent être approchées par une distribution normale. Enfin, certains liens avec des distributions souvent employées en hydrologie ont été établis (lois Weibull et gamma généralisée).

Les chapitres 3, 4 et 5 ont été respectivement consacrés aux propriétés statistiques des lois de Halphen Type A, Type B et Type B^{-1}. Les résultats concernant l'estimation des paramètres, le calcul des variances asymptotiques et l'estimation des quantiles x_p de probabilité au dépassement p constituent les principaux développements originaux de la présente étude. L'estimation des paramètres est effectuée à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance en procédant en deux étapes. L'approche consiste d'abord à obtenir des estimateurs des deux premiers paramètres α et m, le troisième paramètre, υ, étant fixé. La fonction de vraisemblance logarithmique partiellement maximisée est ensuite employée afin de déterminer le triplets d'estimateurs du maximum de vraisemblance.

Enfin, on a présenté au chapitre 6 un diagramme des moments permettant de représenter les diverses lois de Halphen et leurs cas limites par les points d'un plan (diagramme $\delta_1 - \delta_2$). Ce diagramme, proposé par Halphen, met en évidence la symétrie entre les lois Type A selon le signe du paramètre υ (cf. proposition 2.5) d'une part, et d'autre part, entre les lois B et B^{-1} (cf. proposition 2.6). De plus, le rôle de transition que jouent les distributions limites gamma et gamma inverse entre les trois types de lois de Halphen, est bien illustré dans cette représentation graphique. Une étude empirique, qui consistait à ajuster les lois de Halphen à 187 échantillons de débits de crues mesurés à des stations du Canada (région Québec-Ontario), montre comment les trois types de lois de Halphen (types A, B et B^{-1}), et ces cas limites, se complètent et peuvent représenter l'ensemble des données.

Les distributions de Halphen sont difficiles à manipuler en pratique puisque leur ajustement fait intervenir de nombreuses méthodes numériques. En effet, l'application de ces lois nécessitent, en particulier, l'évaluation des fonctions de Bessel et des fonctions exponentielles factorielles, le calcul de leurs dérivées première et seconde par rapport à l'indice υ, l'emploi de méthodes itératives pour estimer les paramètres et le recours à des routines d'intégration numérique pour déterminer la variance asymptotique des quantiles estimés. Pour faciliter leur utilisation par des praticiens, les distributions de Halphen ont été incorporées au logiciel ***AJUST*** (Perreault *et al.*, 1994). Ce logiciel permet non seulement d'estimer les paramètres, mais aussi de déterminer les quantiles x_p ainsi que leur variance asymptotique.

7.2 Perspectives de recherche future

Le présent rapport établit les bases nécessaires à l'emploi des lois Halphen. Les nombreuses propriétés intéressantes et la richesse de la théorie de ce système de distributions, qui se complètent harmonieusement, ouvrent plusieurs perspectives de recherche. De plus, beaucoup d'aspect théoriques et pratiques concernant les lois de Halphen restent à étudier, en particulier :

- Le développement de routines efficaces pour la génération d'observations provenant des lois de Halphen. En effet, une procédure de génération est nécessaire pour réaliser des études empiriques sur les lois de Halphen. Puisque ces distributions n'admettent pas une expression explicite de la fonction de répartition, une méthode indirecte d'acceptation-rejet peut être considérée afin d'éviter l'emploi de routines d'intégration numérique (Law et Kelton, 1982).

Cette approche peut être plus efficace et plus rapide d'exécution. Toutefois, elle repose sur l'utilisation d'une fonction qui majore en tout point la f.d.p.. Ce choix est important puisqu'il conditionne l'efficacité et la rapidité de la routine de génération. Une étude doit donc être réalisée.

- L'étude des propriétés des estimateurs pour des tailles d'échantillon finies (biais, variance, etc.). En effet, il est rare de disposé, du moins en hydrologie, d'un échantillon assez grand pour pouvoir employer la théorie des grands nombres. En particulier, l'interprétation des variances asymptotiques peut devenir problématique. Il est donc intéressant d'étudier les propriétés (biais, variance) des estimateurs des paramètres et des quantiles. Cette étude doit être réalisée par simulation de Monte Carlo et repose donc sur la disponibilité d'un générateur.

- La construction de tests statistiques pour l'inférence sur les paramètres et l'adéquation des lois de Halphen. Il est très important de disposer d'outils statistiques permettant de vérifier certaines hypothèses concernant un modèle probabiliste. En particulier, la construction d'un test vérifiant une hypothèse sur concernant la valeur d'un des paramètres des lois de Halphen peut nous indiquer qu'un des cas particuliers serait mieux adapté pour représenter l'échantillon. Un tel test nécessite la détermination d'une statistique et de sa loi de probabilité sous l'hypothèse nulle.

- L'emploi des lois de Halphen pour la modélisation d'observations censurées (données historiques, analyse des durées de vie). L'emploi des lois de Halphen pour traitement des données censurées nécessite quelques développements théoriques. En effet, il existe différents types de censures (Lawless, 1982) et l'estimation des paramètres et des quantiles doit être adaptée. On peut aussi envisager, si des variables explicatives sont disponibles, le développement de modèles de régression faisant intervenir les lois de Halphen. Ce type de modèle paramétrique est souvent employé pour représenter les données de durée de vie (modèle Weibull, lognormale, etc, cf. Lawless, 1982).

- L'emploi des lois de Halphen dans un cadre bayésien. Les lois de Halphen faisant partie de la classe exponentielle, il est naturel d'envisager leur utilisation dans une analyse bayésienne. En effet, les propriétés d'exhaustivité permettent de simplifier de nombreux calculs qui, dans un cadre bayésien, peuvent être complexes.

- L'utilisation des lois de Halphen en régionalisation.

Parmi ces questions, l'étude des propriétés des estimateurs pour des tailles d'échantillon finies nous semble prioritaire. En particulier, la comparaison de la variance expérimentale (obtenue par simulation) et de la variance asymptotique théorique des quantiles estimés, qui constitue une borne inférieure à la variance de l'estimateur, permettrait d'évaluer la qualité de l'approximation de l'incertitude réelle de l'estimation par sa variance asymptotique. Des travaux à ce sujet sont en cours.

Finalement, nous tenons à rappeler qu'il serait souhaitable d'analyser la précision des calculs numériques effectués dans ***AJUST***, notamment l'évaluation de la fonction exponentielle factorielle qui, pour υ grand et α grand négativement, peut donner des valeurs erronées. Cela engendre dans certains cas des problèmes lors de la détermination du paramètre α par la méthode de Newton-Raphson. Cela rend aussi difficile l'évaluation de la fonction de vraisemblance partiellement maximisée, qui admet alors des valeurs irrégulières près de la borne W. L'estimation de υ, pour α et m fixé, s'en trouve affectée. La précision lors de l'évaluation des dérivées des quantiles par rapport aux paramètres pour de grandes périodes de retour est aussi à revoir. En effet, pour certaines applications, la variance asymptotique du quantile est anormalement élevée, particulièrement pour la loi type B^{-1} (cf NOTE, section 5.5).

8 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Abramowitz, M and I.A. Stegun (1972) *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, Inc., New York.

Aitchison, J. et J.A.C. Brown (1957). *The Lognormal Distribution.* Cambridge University Press, London : 176 p.

Barndorff-Neilsen, O.E. (1978). Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae. *Scandinavian Journal of Statistics,* **5**, p. 151-157.

Barndorff-Neilsen, O.E. et C. Halgreen (1977). Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions. Z. *Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete,* **38**, p. 309-311.

Bickel, P.J. and K.A. Doksum (1977). *Mathematical Statistics.* Holden-Day, Inc., California.

Blaesild, P. (1978). The shape of the generalized inverse Gaussian and hyperbolic distributions. Research Report No. 37, Department of theoretical statistics, Aarhus University.

Bobée, B. et F. Ashkar (1988). The generalized method of moments applied to the log-Pearson 3 distribution. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE,* **114**, p. 899-909.

Bobée B. et F. Ashkar (1991). *The Gamma and Derived Distributions Applied in Hydrology.* Water Resources Publications, Littleton, Co., Yevjevitch (Ed.) : 202 p.

Bobée B., Ashkar F. and L. Perreault (1993). Two kinds of moment ratio diagrams and their applications in hydrology. *Stochastic Hydrology and Hydraulics,* **7**, p. 41-65.

Dvorak, V. et al. (1988). Halphen distributions and related systems of frequency functions. Rapport Scientifique No 236, INRS-Eau.

Good, I.J. (1953). The population frequencies of species and the estimation of population parameters. *Biometrika,* **40**, p.237-260.

Guillot P. (1964). Une extension des lois A de Halphen comprenant comme cas limite la loi de Galton-Gibrat. *Revue de Statistique Appliquée,* **12**, p.63-73.

Halphen, E. (1941). Sur un nouveau type de courbe de fréquence. *Comptes rendus de l'académie des Sciences, Tome 213,* p.633-635.

Halphen, E. (1955). Les fonctions factorielles. *Publications de l'institut de statistique de l'université de Paris, Vol. IV, Fascicule 1,*p.21-39.

Johnson, N.L. et S. Kotz (1970). *Continuous Univariate Distributions*-1. Wiley, New York : 300 p.

Jørgensen, B. (1982). Statistical properties of the generalized inverse gaussian distribution. *Lecture Notes in Statistics,* No 9, Springler-Verlag : 188 p.

Kendall M.G. et A. Stuart (1987). *Advanced Theory of Statistics. Volume 1: Distribution Theory*. Oxford University Press, New York.

Kotz, S. et L.M. Johnson (1983). *Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 4*. Wiley, New York.

Larivaille, P. (1960). Lois de Halphen : estimation du paramètre d'échelle. Publication interne de l'E.D.F., Direction de l'Équipement, No 3 (194).

Law, A.V. et W.D. Kelton (1982). *Simulation Modeling and Analysis*. McGraw-Hill, New York :400 p.

Lawless, J.F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. Wiley, New York : 580p.

Le Cam, L. et G. Morlat (1949). Les lois des débits des rivières francaises. *La Houille Blanche*, No spécial B, p. 1-7.

Lehmann, E.L. (1983). *Theory of Point Estimation*. Wiley, New York : 506 p.

Mathier, L., Roy, R., Bobée, B., Perron, H. et V. Fortin (1993). Estimation régionale des débits de crue : description des banques de données hydrométriques, météorologiques et physiographiques pour le Québec et l'Ontario. INRS-Eau, rapport interne No I-123 : 79p.

Morlat, G. (1951). Note sur l'estimation des débits de crues. *La Houille Blanche*, No spécial B, p. 663-681.

Morlat G. (1956). Les lois de probabilité de Halphen. *Revue de la Statistique Appliquée*, No 3 p. 21-43.

Ouarda, B.M.J., Ashkar, F., Ben Said, E.M. et L. Hourani (1994). Distributions statistiques utilisées en hydrologie : transformation et propriétés asymptotiques. Rapport de recherche STAT-13, Université de Moncton : 68 p.

Perreault, L., Bobée, B. et P. Legendre (1994). Rapport général du logiciel *AJUSTE-II*: Théorie et application. INRS-Eau, rapport de recherche n° 421 : 92p.

Perreault L. et B. Bobée (1992a). Loi généralisée des valeurs extrêmes. Propriétés mathématiques et statistiques. Estimation des paramètres et des quantiles X_T de période de retour T. *INRS-Eau, rapport de recherche* n° 350 : 56 p.

Perreault L. et B. Bobée (1992b). Loi Weibull à deux paramètres. Propriétés mathématiques et statistiques. Estimation des paramètres et des quantiles X_T de période de retour T. *INRS-Eau, rapport de recherche* n° 351 : 29 p.

Perreault, L., Bobée, B. et V. Fortin (1992c). Approximation des quantiles de la loi Pearson Type 3 standardisée par les polynômes de Tchebichef. *INRS-Eau, rapport de recherche* n° 346 : 36 p.

Perreault, L. et B. Bobée (1992d). Loi normale: propriétés mathématiques et statistiques. Estimation des paramètres et des quantiles X_T de période de retour T. *INRS-Eau, rapport de recherche* n° 352 : 18 p.

Perron, H., Bobée, B. et L. Perreault (1997) . Logiciel AJUSTE: guide d'utilisation.

Schuster, E.F. (1984). Classification of probability laws by tail behavior. *Journal of the American Statistical Association*, **79**, p. 936-939.

Seshadri, V. (1993) *The Inverse Gaussian Distribution*. Clarendon Press, Oxford : 256 p.

Sichel, H.S. (1975). On a distribution law for word frequencies. *Journal of the American Statistical Association*, **70**, p. 542-547.

Tweedie, M.C.K. (1947). Functions of a statistical variate with given means, with special reference to Laplacian distributions. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, p. 41-49.

Tweedie, M.C.K. (1956). Some statistical properties of inverse Gaussian distributions. *Virginia Journal of Science*, **7**, p. 160-165.

Tweedie, M.C.K. (1957a). Statistical properties of inverse gaussian distributions I. *Annals of mathematical Statistics*, **28**, p. 362-377.

Tweedie, M.C.K. (1957b). Statistical properties of the inverse gaussian distributions II. *Annals of mathematical Statistics*, **28**, p. 696-705.

Wald, A. (1947). *Sequential Analysis*. Wiley, New York.

Watson, G.N. (1966) *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press.

ANNEXE A : FONCTIONS DE BESSEL

Cette annexe présente quelques propriétés des fonctions de Bessel modifiée de seconde espèce d'argument z et d'indice υ, notée $K_\upsilon(z)$. Les résultats qui suivent sont tirés de Watson (1966) et de Abramovitz et Stegun (1972).

Parmi les nombreuses représentations intégrées de $K_\upsilon(z)$, pour $z > 0$, on utilise ici plus particulièrement la suivante :

$$K_\upsilon(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\upsilon-1} \exp\left[-\frac{z}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] dx \tag{A.1}$$

La fonction de Bessel utilisée dans l'expression de la loi de Type A est déduite de (A.1) par la transformation $y = xm$:

$$\begin{aligned} K_\upsilon(z) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{y}{m}\right)^{\upsilon-1} \exp\left[-\frac{z}{2}\left(\frac{y}{m}+\frac{m}{y}\right)\right]\frac{1}{m}dy \\ &= \frac{1}{2m^\upsilon}\int_0^\infty y^{\upsilon-1} \exp\left[-\frac{z}{2}\left(\frac{y}{m}+\frac{m}{y}\right)\right] dy \end{aligned}$$

d'où, si $z = 2\alpha$, on a :

$$K_\upsilon(2\alpha) = \frac{1}{2m^\upsilon}\int_0^\infty y^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{y}{m}+\frac{m}{y}\right)\right] dy$$

La fonction $K_\upsilon(z)$ est liée à la fonction de Bessel modifiée de première espèce $I_\upsilon(z)$ par la relation :

$$K_\upsilon(z) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin(\pi\upsilon)}\left[I_{-\upsilon}(z) - I_\upsilon(z)\right] \tag{A.2}$$

où $I_\upsilon(z)$ peut s'exprimer comme la somme infinie :

$$I_\upsilon(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2k+\upsilon}}{m!\,\Gamma(k+\upsilon+1)} \tag{A.3}$$

et où le terme de droite de l'équation (A.2) doit être remplacé par sa limite lorsque υ est nul ou entier.

Relations de récurrence

La fonction de Bessel $K_\upsilon(z)$ vérifie les équations de récurrence suivantes :

$$K_{\upsilon-1}(z) - K_{\upsilon+1}(z) = \frac{2\upsilon}{z} K_\upsilon(z) \qquad \text{(A.4)}$$

$$K_{\upsilon-1}(z) - \frac{\upsilon}{z} K_\upsilon(z) = \frac{\partial K_\upsilon(z)}{\partial z} \qquad \text{(A.5)}$$

$$K_{\upsilon-1}(z) + K_{\upsilon+1}(z) = 2\frac{\partial K_\upsilon(z)}{\partial z} \qquad \text{(A.6)}$$

$$\frac{\upsilon}{z} K_\upsilon(z) + K_{\upsilon+1}(z) = \frac{\partial K_\upsilon(z)}{\partial z} \qquad \text{(A.7)}$$

$$K_\upsilon(z) = K_{-\upsilon}(z) \qquad \text{(A.8)}$$

Relations asymptotiques

À partir des expressions (A.2) et (A.3), il est possible de déduire les formes limites suivantes de la fonction de Bessel $K_\upsilon(z)$.

- Pour z petit, on a :

$$K_\upsilon(z) \cong \frac{2^{\upsilon-1}}{z^\upsilon}\Gamma(\upsilon), \quad \upsilon > 0 \qquad \text{(A.9)}$$

- Pour z grand, on a :

$$K_\upsilon(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, z^{-1/2} e^{-z}\left[1 + \frac{u-1}{8z} + \frac{(u-1)(u-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(u-1)(u-9)(u-25)}{3!(8z)^3} + \cdots\right] \qquad \text{(A.10)}$$

où, $u = 4\upsilon^2$.

- Pour υ grand, on a :

$$K_\upsilon(z) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, 2^\upsilon \upsilon^{\upsilon-1/2} e^{-\upsilon} z^{-\upsilon} \qquad \text{(A.11)}$$

ANNEXE B : FONCTIONS EXPONENTIELLES FACTORIELLES

Cette annexe présente quelques propriétés de la fonction exponentielle factorielle d'argument α et d'indice υ, notée $ef_{\upsilon}(\alpha)$. Les résultats qui suivent sont tirés, pour la plupart, de Halphen (1955).

Par définition, la fonction exponentielle factorielle $ef_{\upsilon}(\alpha)$ peut s'exprimer comme la combinaison linéaire suivante :

$$ef_{\upsilon}(\alpha) = \Gamma(\upsilon) + \Gamma(\upsilon + 1/2)\frac{\alpha}{1!} + \Gamma(\upsilon + 1)\frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + \Gamma(\upsilon + r/2)\frac{\alpha^r}{r!} + \cdots \qquad \text{(B.1)}$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction gamma. La représentation intégrée de $ef_{\upsilon}(\alpha)$, pour $\upsilon > 0$, utilisée dans cette étude est la suivante :

$$ef_{\upsilon}(\alpha) = 2\int_0^{\infty} x^{2\upsilon-1} \exp\left[-x^2 + \alpha x\right] dx \qquad \text{(B.2)}$$

Il existe un lien entre la fonction $ef_{\upsilon}(\alpha)$ et certaines fonctions plus connues comme la fonction cylindrique parabolique $U(\gamma,\beta)$ et la fonction hypergéométrique confluente $M(a,b,z)$ dont les représentations intégrées sont données par (Abramovitz et Stegun, 1972) :

$$U(\gamma,\beta) = \frac{e^{-\beta^2/4}}{\Gamma(\gamma + 1/2)}\int_0^{\infty} t^{\gamma-1/2} \exp\left(-\beta t - \frac{t^2}{2}\right) dt \qquad \text{(B.3)}$$

$$M(a,b,z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}\int_0^1 e^{zt} t^{a-1}(1-t)^{b-a-1} dt \qquad \text{(B.4)}$$

On montre en particulier que :

$$ef_{\upsilon}(\alpha) = \frac{\Gamma(2\upsilon)e^{\alpha^2/8}}{2^{\upsilon-1}} U\left(2\upsilon - \frac{1}{2}, \frac{-\alpha}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{(B.5)}$$

$$ef_{\upsilon}(\alpha) = \Gamma(\upsilon) M\left(\upsilon, \frac{1}{2}, \frac{\alpha^2}{4}\right) + \alpha\Gamma\left(\upsilon + \frac{1}{2}\right) M\left(\upsilon + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\alpha^2}{4}\right) \qquad \text{(B.6)}$$

Les démonstrations sont données à la fin de la présente annexe. Ces relations sont intéressantes en pratique puisqu'elles peuvent être utilisées pour évaluer la fonction exponentielle factorielle, si l'on dispose d'une librairie de routines mathématiques permettant le calcul des fonctions cylindrique parabolique ou hypergéométrique confluente. Notons que la fonction $ef_\upsilon(\alpha)$ est aussi liée aux fonctions d'Hermite. Toutefois, ce résultat a peu d'intérêt ici puisque cette relation n'est valable que pour des arguments α entiers.

Relations de récurrence

La fonction exponentielle factorielle $ef_\upsilon(\alpha)$ vérifie, en particulier, les deux équations de récurrence suivantes :

$$ef_{\upsilon+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{2} ef_{\upsilon+1/2}(\alpha) + \alpha\, ef_\upsilon(\alpha) \tag{B.7}$$

$$\frac{\partial^n ef_\upsilon(\alpha)}{\partial \alpha^n} = ef_{\upsilon+n/2}(\alpha) \tag{B.8}$$

Relations asymptotiques

Halphen (1955) a dérivé les formes limites suivantes de la fonction exponentielle factorielle $ef_\upsilon(\alpha)$.

- Pour α tendant vers - ∞, on a :

$$ef_\upsilon(\alpha) \cong 2\,\Gamma(2\upsilon)\frac{1}{|\alpha|^{2\upsilon}}\left[1 - \frac{2\upsilon(2\upsilon+1)}{1!}\frac{1}{\alpha^2} + \cdots\right], \quad \upsilon > 0 \tag{B.9}$$

- Pour α grand, on a :

$$ef_\upsilon(\alpha) = 2\sqrt{\pi}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2\upsilon-1} e^{\alpha^2/4}\left[1 + (2\upsilon-1)(2\upsilon-2)\frac{1}{\alpha^2} + \cdots\right] \tag{B.10}$$

Liens de $ef_\upsilon(\alpha)$ avec les fonctions cylindrique et hypergéométrique

Nous démontrons d'abord la relation entre la fonction exponentielle factorielle et la fonction cylindrique parabolique $U(\gamma, \beta)$ exprimée en (B.5).

Posons d'abord, dans l'expression (B.3), $\gamma = n$ - ½. On obtient :

$$U(n-1/2, \beta) = \frac{e^{-\beta^2/4}}{\Gamma(n)}\int_0^\infty t^{n-1} \exp\left(-\beta t - \frac{t^2}{2}\right) dt \tag{B.11}$$

En effectuant ensuite le changement de variable $x = t/\sqrt{2}$, on a que :

$$U(n-1/2,\beta)=\frac{2^{n/2}e^{-\beta^2/4}}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^{n-1}\exp\left(-\sqrt{2}\beta\,x-x^2\right)dx \qquad \text{(B.12)}$$

Finalement, si on pose $n=2\upsilon$ et $\alpha=-\beta\sqrt{2}$ dans l'expression (B.12), on déduit le résultat donné en (B.5). En effet,

$$\begin{aligned} U(2\upsilon-1/2,-\alpha/\sqrt{2}) &= \frac{2^{\upsilon}e^{-\alpha^2/8}}{\Gamma(2\upsilon)}\int_0^\infty x^{2\upsilon-1}\exp\left(-x^2+\alpha x\right)dx \\ &= \frac{2^{\upsilon}e^{-\alpha^2/8}}{\Gamma(2\upsilon)}\frac{ef_{\upsilon}(\alpha)}{2} \end{aligned} \qquad \text{(B.13)}$$

Pour démontrer le lien entre les fonctions exponentielle factorielle et hypergéométrique confluente $M(a, b, z)$ donnée en (B.6), on utilise la relation suivante (Abramovitz et Stegun, 1972, éq. 19.12.3) :

$$\begin{aligned} U(\gamma,\pm\beta) &= \frac{\sqrt{\pi}\,2^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\gamma}e^{-\frac{\beta^2}{4}}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)}M\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{\beta^2}{2}\right) \\ &\quad \mp \frac{\sqrt{\pi}\,2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\gamma}e^{-\frac{\beta^2}{4}}}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)}M\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{\beta^2}{2}\right) \end{aligned} \qquad \text{(B.14)}$$

En posant $\gamma=2\upsilon-1/2$ et $\beta=-\alpha/\sqrt{2}$, on obtient la relation :

$$\begin{aligned} U\left[2\upsilon-\frac{1}{2},\pm\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right] &= \frac{\sqrt{\pi}\,2^{-\tau}e^{-\frac{\alpha^2}{8}}}{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}M\left(\upsilon,\frac{1}{2},\frac{\alpha^2}{4}\right) \\ &\quad \mp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{\pi}\,2^{-\upsilon+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{8}}}{\Gamma(\upsilon)}M\left(\upsilon+\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\alpha^2}{4}\right) \end{aligned} \qquad \text{(B.15)}$$

que l'on peut réécrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} U\left[2\upsilon-\frac{1}{2},\pm\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right] &= \frac{\sqrt{\pi}e^{-\frac{\alpha^2}{8}}}{2^{\upsilon}}\left[\Gamma^{-1}\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)M\left(\upsilon,\frac{1}{2},\frac{\alpha^2}{4}\right)\right. \\ &\quad \left.\mp(-\alpha)\Gamma^{-1}(\upsilon)M\left(\upsilon+\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\alpha^2}{4}\right)\right] \end{aligned} \qquad \text{(B.16)}$$

On déduit alors de l'expression (B.5) que :

$$ef_{\upsilon}(\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2\upsilon)}{2^{2\upsilon-1}}\left[\Gamma^{-1}\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)M\left(\upsilon,\frac{1}{2},\frac{\alpha^2}{4}\right)\mp(-\alpha)\Gamma^{-1}(\upsilon)M\left(\upsilon+\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\alpha^2}{4}\right)\right] \quad \text{(B.17)}$$

Or, puisque (Abramovitz et Stegun, 1972, éq. 6.1.18) :

$$\Gamma(2\upsilon)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\upsilon)\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)$$

on a enfin que :

$$\begin{aligned} ef_{\upsilon}(\alpha)&=\Gamma(\upsilon)\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)\left[\Gamma^{-1}\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)M\left(\upsilon,\frac{1}{2},\frac{\alpha^2}{4}\right)\mp(-\alpha)\Gamma^{-1}(\upsilon)M\left(\upsilon+\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\alpha^2}{4}\right)\right]\\ &=\Gamma(\upsilon)M\left(\upsilon,\frac{1}{2},\frac{\alpha^2}{4}\right)+\alpha\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)M\left(\upsilon+\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\alpha^2}{4}\right) \end{aligned} \quad \text{(B.18)}$$

ANNEXE C : MOMENT D'ORDRE QUASI-ZÉRO

L'évaluation de la moyenne géométrique G de l'échantillon, lors de l'ajustement des lois de Halphen, est très importante car cette statistique est exhaustive et intervient dans l'estimation de leurs paramètres. Pour un échantillon de taille n $X_1, X_2, \ldots, X_n$, la moyenne géométrique de l'échantillon s'exprime comme suit :

$$G = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{1/n} \tag{C.1}$$

En pratique, on utilise plutôt le logarithme de la moyenne géométrique, c'est-à-dire :

$$\ln G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i \tag{C.2}$$

Dans le cas d'une variable aléatoire X définie sur $(0, +\infty)$ et distribuée selon une loi de f.d.p. $f(x)$ donnée, son équivalent théorique (le logarithme de la moyenne géométrique de la population), noté $\mu_{\underline{0}}'$, s'exprime alors de la manière suivante :

$$\mu_{\underline{0}}' = \int_0^{\infty} \ln x \, f(x) dx = E\{\ln X\} \tag{C.3}$$

Cette moyenne est appelée moment d'ordre quasi-zéro, puisque le logarithme du moment d'ordre r de l'échantillon $A(r)$ écrit sous la forme générale suivante :

$$A(r) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r \right)^{1/r} \tag{C.4}$$

correspond au logarithme de la moyenne géométrique lorsque $r \to 0$ (Bobée et Ashkar, 1988). Notons que l'expression (C.4) correspond aux moyennes harmoniques et arithmétique pour $r = -1$ et $r = 1$ respectivement.

Nous présentons dans ce qui suit, pour chacune des lois de Halphen, le calcul du moment d'ordre quasi-zéro $\mu_{\underline{0}}'$.

Loi de Type A

Pour la loi de Halphen de Type A, selon l'équation (2.2), on a :

$$2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] dx \tag{C.5}$$

En dérivant cette expression des deux côtés par rapport au paramètre υ, on obtient :

$$2m^{\upsilon} \frac{\partial K_{\upsilon}(2\alpha)}{\partial \upsilon} + 2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha) \ln m = \int_0^{\infty} \ln(x)\, x^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] dx \tag{C.6}$$

et alors,

$$\ln m\, K_{\upsilon}(2\alpha) + \frac{\partial K_{\upsilon}(2\alpha)}{\partial \upsilon} = \frac{1}{2m^{\upsilon}} \int_0^{\infty} \ln(x)\, x^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] dx \tag{C.7}$$

Cette expression peut ensuite s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \ln m + \frac{1}{K_{\upsilon}(2\alpha)} \frac{\partial K_{\upsilon}(2\alpha)}{\partial \upsilon} &= \frac{1}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}(2\alpha)} \int_0^{\infty} \ln(x)\, x^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right] dx \\ &= \int_0^{\infty} \ln x\, f_A(x)\, dx \end{aligned} \tag{C.8}$$

d'où, le moment d'ordre quazi-zéro de la loi de Halphen Type A :

$$\mu'_{\underline{0}} = E\{\ln X\} = \ln m + \frac{\partial K_{\upsilon}(2\alpha)/\partial \upsilon}{K_{\upsilon}(2\alpha)} \tag{C.9}$$

Loi de Type B

Pour la loi de Halphen de Type B (éq. 2.6), on a :

$$m^{2\upsilon} ef_{\upsilon}(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} x^{2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha \frac{x}{m}\right] dx \tag{C.10}$$

En dérivant cette dernière expression des deux côtés par rapport au paramètre υ, on obtient comme pour la loi de Type A :

$$2 \ln m\, ef_{\upsilon}(\alpha) + \frac{\partial ef_{\upsilon}(\alpha)}{\partial \upsilon} = \frac{4}{m^{2\upsilon}} \int_0^{\infty} \ln(x)\, x^{2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha \frac{x}{m}\right] dx \tag{C.11}$$

Cette expression peut ensuite s'écrire de la manière suivante :

$$\ln m + \frac{1}{2ef_\upsilon(\alpha)}\frac{\partial ef_\upsilon(\alpha)}{\partial \upsilon} = \frac{2}{m^{2\upsilon}ef_\upsilon(\alpha)}\int_0^\infty \ln(x)\, x^{2\upsilon-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right]dx \tag{C.12}$$
$$= \int_0^\infty \ln x\, f_B(x)\, dx$$

d'où, le moment d'ordre quazi-zéro de la loi de Halphen Type B :

$$\mu_0' = E\{\ln X\} = \ln m + \frac{\partial\, ef_\upsilon(\alpha)/\partial\upsilon}{2\,ef_\upsilon(\alpha)} \tag{C.13}$$

Loi de Type B^{-1}

Pour la loi de Halphen de Type B^{-1} (éq. 2.8), on a que :

$$\frac{1}{m^{2\upsilon}}ef_\upsilon(\alpha) = 2\int_0^\infty x^{-2\upsilon-1}\exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\frac{m}{x}\right]dx \tag{C.14}$$

En dérivant cette dernière expression des deux côtés par rapport au paramètre υ, on obtient alors :

$$-2\ln m\, ef_\upsilon(\alpha) + \frac{\partial ef_\upsilon(\alpha)}{\partial \upsilon} = -\frac{4}{m^{-2\upsilon}}\int_0^\infty \ln(x)\, x^{-2\upsilon-1}\exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\frac{m}{x}\right]dx \tag{C.15}$$

Cette expression peut s'écrire de la manière suivante :

$$\ln m - \frac{1}{2ef_\upsilon(\alpha)}\frac{\partial ef_\upsilon(\alpha)}{\partial \upsilon} = \frac{2}{m^{-2\upsilon}ef_\upsilon(\alpha)}\int_0^\infty \ln(x)\, x^{-2\upsilon-1}\exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\frac{m}{x}\right]dx \tag{C.16}$$
$$= \int_0^\infty \ln x\, f_{B^{-1}}(x)\, dx$$

d'où, le moment d'ordre quazi-zéro de la loi de Halphen Type B^{-1} :

$$\mu_0' = E\{\ln X\} = \ln m - \frac{\partial\, ef_\upsilon(\alpha)/\partial\upsilon}{2\,ef_\upsilon(\alpha)} \tag{C.17}$$

ANNEXE D : Méthode du maximum de vraisemblance

Famille exponentielle

Considérons une loi de probabilité continue à 3 paramètres $F(x;\theta_1,\theta_2,\theta_3)$. Cette distribution fait partie de la classe exponentielle des fonctions de densité de probabilité continues d'ordre 3 s'il existe des fonctions c_1, c_2, c_3 et d des paramètres, des fonctions T_1, T_2, T_3 et S de x telles que sa f.d.p peut s'exprimer sous la forme suivante (Bickel et Doksum, 1977, p.72):

$$f(x;\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{3}c_i(\theta_1,\theta_2,\theta_3)T_i(x)+d(\theta_1,\theta_2,\theta_3)+S(x)\right\} \qquad \text{(D.1)}$$

Les fonctions $T_1(X)$, $T_2(X)$ et $T_3(X)$ sont alors des statistiques exhaustives pour la loi $F(x;\theta_1,\theta_2,\theta_3)$.

Considérons un échantillon de n variables aléatoires $X_1, X_2,\ldots, X_n$ indépendamment et identiquement distribuées selon une loi $F(x;\theta_1,\theta_2,\theta_3)$. Alors, selon le théorème de factorisation (Bickel et Doksum, 1977, p.65), $\sum T_1(X_i)$, $\sum T_2(X_i)$ et $\sum T_3(X_i)$ sont des statistiques exhaustives. De plus, puisqu'une fonction bijective d'une statistique exhaustive demeure exhaustive, on déduit que les moyennes :

$$T_1(\underline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_1(X_i),\quad T_2(\underline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_2(X_i)\quad\text{et}\quad T_3(\underline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_2(X_i) \qquad \text{(D.2)}$$

sont aussi des statistiques exhaustives.

Estimation des paramètres

Pour une loi de probabilité à 3 paramètres $F(x;\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ appartenant à la classe des lois exponentielles et ayant comme statistiques exhaustives $(T_1(\underline{X}),T_2(\underline{X}),T_3(\underline{X}))$, si le système d'équations $E_{\underline{\theta}}[T_i(\underline{X})]=T_i(\underline{x})$, i = 1, 2, 3, possède une solution pour le vecteur des paramètres $\underline{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$, alors cette solution est unique et correspond aux estimateurs du maximum de vraisemblance de $\underline{\theta}$ (Bickel and Doksum, 1977, p.106).

Les propriétés des estimateurs du maximum de vraisemblance, lorsque la taille d'échantillon est grande, sont bien connues (Lehmann, 1983, section 6.4). En particulier, si on considère le cas d'une loi à 3 paramètres et que la fonction de vraisemblance $L(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ admet qu'un seul maximum, les variables aléatoires $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right), \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right), \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)$ sont distribuées selon une loi normale multidimensionnelle de moyenne nulle et de matrice des variances et covariances Σ, dont les éléments correspondent à ceux de l'inverse de la matrice d'information de Fisher $\mathbf{I}_f$ pour une seule observation divisés par n. Les éléments $(\mathbf{I}_f)_{ij}$ de la matrice d'information de Fisher sont donnés par (Lehmann, 1983) :

$$\left(\mathbf{I}_f\right)_{ij} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f\left(x;\theta_1,\theta_2,\theta_3\right)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right\},\quad i \text{ et } j \in \{1,2,3\} \tag{D.3}$$

En notation matricielle, on a alors que la matrice des variances et covariances $\mathbf{S}$ des estimateurs du maximum de vraisemblance $\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right)$ est :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n}\mathbf{I}_f^{-1} = \begin{pmatrix} Var\left\{\hat{\theta}_1\right\} & Cov\left\{\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right\} & Cov\left\{\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right\} \\ Cov\left\{\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_1\right\} & Var\left\{\hat{\theta}_2\right\} & Cov\left\{\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right\} \\ Cov\left\{\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_1\right\} & Cov\left\{\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_2\right\} & Var\left\{\hat{\theta}_3\right\} \end{pmatrix} \tag{D.4}$$

Pour déterminer les variances et les covariances des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres d'une loi $F\left(x;\underline{\theta}\right)$, il faut donc :

1. obtenir les dérivées secondes et croisées du logarithme de la fonction de densité de probabilité par rapport à chacun des paramètres. Ces dérivées sont fonction de la variable aléatoire X et des paramètres;

2. en déduire la matrice d'information de Fisher $\mathbf{I}_f$ d'une seule observation en calculant l'espérance mathématique de ces dérivées secondes ;

3. inverser la matrice $\mathbf{I}_f$ ainsi obtenue et appliquer l'expression (D.4).

Nous présentons dans ce qui suit, pour chaque loi de Halphen, le calcul des éléments de la matrice information de Fisher $\mathbf{I}_f$.

Loi de Type A

Selon l'expression (2.2), le logarithme de la f.d.p. de la loi de Type A s'écrit :

$$\ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon) = -\ln 2 - \upsilon\ln m - \ln K_\upsilon(2\alpha) + (\upsilon-1)\ln x - \alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right) \tag{D.5}$$

En dérivant d'abord l'expression (D.5) par rapport à chacun des paramètres, on obtient les dérivées premières suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m} &= -\frac{\upsilon}{m}+\frac{\alpha x}{m^2}-\frac{\alpha}{x} \\
\frac{\partial \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial K_\upsilon/\partial\alpha}{K_\upsilon}-\frac{x}{m}-\frac{m}{x} \\
\frac{\partial \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \upsilon} &= -\ln m-\frac{\partial K_\upsilon/\partial\upsilon}{K_\upsilon}+\ln x
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Si on dérive chacune des expressions de (D.6) par rapport à chacun des paramètres, on obtient les dérivées secondes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m^2} &= \frac{\upsilon}{m^2}-\frac{2\alpha x}{m^3} \\
\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha^2} &= -\frac{1}{K_\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 K_\upsilon}{\partial\alpha^2}K_\upsilon-\left(\frac{\partial K_\upsilon}{\partial\alpha}\right)^2\right] \\
\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \upsilon^2} &= -\frac{1}{K_\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 K_\upsilon}{\partial\upsilon^2}K_\upsilon-\left(\frac{\partial K_\upsilon}{\partial\upsilon}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{D.7}$$

et les dérivées croisées du logarithme de la f.d.p. de la loi de Type A :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m\partial \alpha} &= \frac{x}{m^2}-\frac{1}{x} \\
\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m\partial \upsilon} &= -\frac{1}{m} \\
\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha\partial \upsilon} &= -\frac{1}{K_\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 K_\upsilon}{\partial\alpha\partial\upsilon}K_\upsilon-\frac{\partial K_\upsilon}{\partial\alpha}\frac{\partial K_\upsilon}{\partial\upsilon}\right]
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Finalement, on trouve les éléments de la matrice $\mathbf{I}_f$ en calculant l'espérance mathématique des dérivées données en (D.7) et (D.8) et en appliquant ensuite l'expression (D.3). Les espérances mathématiques sont obtenues à l'aide des expressions (3.6) et (3.7) :

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbf{I}_f\right)_{11} &= -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m^2}\right\} = -\frac{\upsilon}{m^2}+\frac{2\alpha}{m^3}E\{X\} \\
&= -\frac{\upsilon}{m^2}+\frac{2\alpha}{m^2}\frac{K_{\upsilon+1}}{K_\upsilon} \\
&= \frac{1}{m^2}\left[2\alpha\frac{K_{\upsilon+1}}{K_\upsilon}-\upsilon\right]
\end{aligned}
\tag{D.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbf{I}_f\right)_{12} &= -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m \partial \alpha}\right\} = -\frac{1}{m^2}E\{X\}+E\left\{\frac{1}{X}\right\} \\
&= -\frac{1}{m}\frac{K_{\upsilon+1}}{K_\upsilon}+\frac{1}{m}\frac{K_{\upsilon-1}}{K_\upsilon} \\
&= \frac{1}{mK_\upsilon}\left[K_{\upsilon-1}-K_{\upsilon+1}\right]=\left(\mathbf{I}_f\right)_{21}
\end{aligned}
\tag{D.10}
$$

$$
\left(\mathbf{I}_f\right)_{13} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m \partial \upsilon}\right\} = \frac{1}{m} = \left(\mathbf{I}_f\right)_{31} \tag{D.11}
$$

$$
\left(\mathbf{I}_f\right)_{22} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha^2}\right\} = \frac{1}{K_\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 K_\upsilon}{\partial \alpha^2}K_\upsilon-\left(\frac{\partial K_\upsilon}{\partial \alpha}\right)^2\right] \tag{D.12}
$$

$$
\left(\mathbf{I}_f\right)_{23} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha \partial \upsilon}\right\} = \frac{1}{K_\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 K_\upsilon}{\partial \alpha \partial \upsilon}K_\upsilon-\frac{\partial K_\upsilon}{\partial \alpha}\frac{\partial K_\upsilon}{\partial \upsilon}\right] = \left(\mathbf{I}_f\right)_{32} \tag{D.13}
$$

$$
\left(\mathbf{I}_f\right)_{33} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_A(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \upsilon^2}\right\} = \frac{1}{K_\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 K_\upsilon}{\partial \upsilon^2}K_\upsilon-\left(\frac{\partial K_\upsilon}{\partial \upsilon}\right)^2\right] \tag{D.14}
$$

Loi de Type B

Selon l'expression (2.6), le logarithme de la f.d.p. de la loi de Type B s'écrit :

$$
\ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon) = \ln 2 - 2\upsilon \ln m - \ln ef_\upsilon(\alpha) + (2\upsilon-1)\ln x - \frac{x^2}{m^2} + \frac{\alpha x}{m} \tag{D.15}
$$

En dérivant d'abord l'expression (D.15) par rapport à chacun des paramètres, on obtient les dérivées premières suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m} &= -\frac{2\upsilon}{m}+\frac{2x^2}{m^3}-\frac{\alpha x}{m^2} \\
\frac{\partial \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial ef_\upsilon/\partial\alpha}{ef_\upsilon}+\frac{x}{m}=-\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon}+\frac{x}{m} \\
\frac{\partial \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \upsilon} &= -2\ln m-\frac{\partial ef_\upsilon/\partial\upsilon}{ef_\upsilon}+2\ln x
\end{aligned} \tag{D.16}$$

Si on dérive chacune des expressions de (D.16) par rapport à chacun des paramètres, on obtient les dérivées secondes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m^2} &= \frac{2\upsilon}{m^2}-\frac{6x^2}{m^4}+\frac{2\alpha x}{m^3} \\
\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha^2} &= -\frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[ef_{\upsilon+1}ef_\upsilon-ef_{\upsilon+1/2}^2\right] \\
\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \upsilon^2} &= -\frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 ef_\upsilon}{\partial\upsilon^2}ef_\upsilon-\left(\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial\upsilon}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{D.17}$$

et les dérivées croisées du logarithme de la f.d.p. de la loi de Type A :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m\partial\alpha} &= -\frac{x}{m^2} \\
\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m\partial\upsilon} &= -\frac{2}{m} \\
\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha\partial\upsilon} &= -\frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[\frac{\partial ef_{\upsilon+1/2}}{\partial\upsilon}ef_\upsilon-ef_{\upsilon+1/2}\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial\upsilon}\right]
\end{aligned} \tag{D.18}$$

Finalement, on trouve les éléments de la matrice $\mathbf{I}_f$ en calculant l'espérance mathématique des dérivées données en (D.17) et (D.18) et en appliquant ensuite l'expression (D.3). Les espérances mathématiques sont obtenues à l'aide des expressions (4.3) et (4.5) :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{I}_f\right)_{11} &= -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m^2}\right\} = -\frac{2\upsilon}{m^2}+\frac{6}{m^4}E\{X^2\}-\frac{2\alpha}{m^3}E\{X\} \\
&= -\frac{2\upsilon}{m^2}+\frac{6}{m^2}\frac{ef_{\upsilon+1}}{ef_\upsilon}-\frac{2\alpha}{m^2}\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon} \\
&= \frac{2}{m^2 ef_\upsilon}\left[3ef_{\upsilon+1}-\upsilon ef_\upsilon-\alpha ef_{\upsilon+1/2}\right]
\end{aligned} \tag{D.19}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{I}_f\right)_{12} &= -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m \partial \alpha}\right\} = \frac{1}{m^2}E\{X\} \\ &= \frac{1}{m}\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon} = \left(\mathbf{I}_f\right)_{21}\end{aligned} \tag{D.20}$$

$$\left(\mathbf{I}_f\right)_{13} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m \partial \upsilon}\right\} = \frac{2}{m} = \left(\mathbf{I}_f\right)_{31} \tag{D.21}$$

$$\left(\mathbf{I}_f\right)_{22} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha^2}\right\} = \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[ef_{\upsilon+1}ef_\upsilon - ef_{\upsilon+1/2}^2\right] \tag{D.22}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{I}_f\right)_{23} &= -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha \partial \upsilon}\right\} = \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[\frac{\partial ef_{\upsilon+1/2}}{\partial \upsilon}ef_\upsilon - ef_{\upsilon+1/2}\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial \upsilon}\right] \\ &= \left(\mathbf{I}_f\right)_{32}\end{aligned} \tag{D.23}$$

$$\left(\mathbf{I}_f\right)_{33} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \upsilon^2}\right\} = \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 ef_\upsilon}{\partial \upsilon^2}ef_\upsilon - \left(\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial \upsilon}\right)^2\right] \tag{D.24}$$

Loi de Type B^{-1}

Selon l'expression (2.8), le logarithme de la f.d.p. de la loi de Type B^{-1} s'écrit :

$$\ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon) = \ln 2 + 2\upsilon \ln m - \ln ef_\upsilon(\alpha) - (2\upsilon+1)\ln x - \frac{m^2}{x^2} + \frac{\alpha m}{x} \tag{D.25}$$

En dérivant d'abord l'expression (D.25) par rapport à chacun des paramètres, on obtient les dérivées premières suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m} &= \frac{2\upsilon}{m} - \frac{2m}{x^2} + \frac{\alpha}{x} \\ \frac{\partial \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial ef_\upsilon/\partial \alpha}{ef_\upsilon} + \frac{m}{x} = -\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon} + \frac{m}{x} \\ \frac{\partial \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \upsilon} &= 2\ln m - \frac{\partial ef_\upsilon/\partial \upsilon}{ef_\upsilon} - 2\ln x\end{aligned} \tag{D.26}$$

Si on dérive chacune des expressions de (D.26) par rapport à chacun des paramètres, on obtient les dérivées secondes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m^2} &= -\frac{2\upsilon}{m^2} - \frac{2}{x^2} \\
\frac{\partial^2 \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha^2} &= -\frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[ef_{\upsilon+1} ef_\upsilon - ef_{\upsilon+1/2}^2\right] \\
\frac{\partial^2 \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \upsilon^2} &= -\frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 ef_\upsilon}{\partial \upsilon^2} ef_\upsilon - \left(\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial \upsilon}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{D.27}$$

et les dérivées croisées du logarithme de la f.d.p. de la loi de Type A :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m \partial \alpha} &= \frac{1}{x} \\
\frac{\partial^2 \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m \partial \upsilon} &= \frac{2}{m} \\
\frac{\partial^2 \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha \partial \upsilon} &= -\frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[\frac{\partial ef_{\upsilon+1/2}}{\partial \upsilon} ef_\upsilon - ef_{\upsilon+1/2}\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial \upsilon}\right]
\end{aligned} \tag{D.28}$$

Finalement, on trouve les éléments de la matrice $\mathbf{I}_f$ en calculant l'espérance mathématique des dérivées données en (D.27) et (D.28) et en appliquant ensuite l'expression (D.3). Les espérances mathématiques sont obtenues à l'aide des expressions (5.5) et (5.6) :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{I}_f\right)_{11} &= -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m^2}\right\} = \frac{2\upsilon}{m^2} + 2E\left\{\frac{1}{X^2}\right\} \\
&= \frac{2\upsilon}{m^2} + \frac{2}{m^2}\frac{ef_{\upsilon+1}}{ef_\upsilon} \\
&= \frac{2}{m^2}\left[\upsilon + \frac{ef_{\upsilon+1}}{ef_\upsilon}\right]
\end{aligned} \tag{D.29}$$

$$\left(\mathbf{I}_f\right)_{12} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m \partial \alpha}\right\} = -E\left\{\frac{1}{X}\right\} = -\frac{1}{m}\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon} = \left(\mathbf{I}_f\right)_{21} \tag{D.30}$$

$$\left(\mathbf{I}_f\right)_{13} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_{B-1}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial m \partial \upsilon}\right\} = -\frac{2}{m} = \left(\mathbf{I}_f\right)_{31} \tag{D.31}$$

$$\left(\mathbf{I}_f\right)_{22} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial \alpha^2}\right\} = \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[ef_{\upsilon+1} ef_\upsilon - ef_{\upsilon+1/2}^2\right] \tag{D.32}$$

$$\left(\mathbf{I}_f\right)_{23} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial\alpha\partial\upsilon}\right\} = \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[\frac{\partial ef_{\upsilon+1/2}}{\partial\upsilon}ef_\upsilon - ef_{\upsilon+1/2}\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial\upsilon}\right] \qquad \text{(D.33)}$$

$$= \left(\mathbf{I}_f\right)_{32}$$

$$\left(\mathbf{I}_f\right)_{33} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_B(x;m,\alpha,\upsilon)}{\partial\upsilon^2}\right\} = \frac{1}{ef_\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 ef_\upsilon}{\partial\upsilon^2}ef_\upsilon - \left(\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial\upsilon}\right)^2\right] \qquad \text{(D.34)}$$

ANNEXE E : DÉRIVÉES DES QUANTILES

Selon le théorème de la limite centrale (Bobée et Ashkar, 1991), l'estimateur $\hat{x}_p$ du quantile x_p d'une distribution de paramètres (m, α, υ) est distribué asymptotiquement selon une loi normale de moyenne x_p et de variance donnée par:

$$\begin{aligned} Var\{\hat{x}_p\} = &\left(\frac{\partial x_p}{\partial m}\right)^2 Var\{\hat{m}\} + \left(\frac{\partial x_p}{\partial \alpha}\right)^2 Var\{\hat{\alpha}\} + \left(\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon}\right)^2 Var\{\hat{\upsilon}\} + \\ &2\left(\frac{\partial x_p}{\partial m}\right)\left(\frac{\partial x_p}{\partial \alpha}\right) Cov\{\hat{m}, \hat{\alpha}\} + 2\left(\frac{\partial x_p}{\partial m}\right)\left(\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon}\right) Cov\{\hat{m}, \hat{\upsilon}\} \\ &2\left(\frac{\partial x_p}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon}\right) Cov\{\hat{\alpha}, \hat{\upsilon}\} \end{aligned} \qquad \text{(E.1)}$$

où $(\hat{m}, \hat{\alpha}, \hat{\upsilon})$ sont des estimateurs des paramètres. Ainsi, la variance asymptotique de $\hat{x}_p$ dépend :

- des variances et covariances asymptotiques des estimateurs des paramètres (cf. annexe D, pour la méthode du maximum de vraisemblance) ;
- des dérivées partielles de x_p par rapport à chacun des paramètres de la loi (le quantile est une fonction des paramètres).

Nous présentons dans ce qui suit, pour chacune des trois lois de Halphen, le calcul des dérivées partielles du quantile x_p par rapport à chacun des paramètres. Pour ce faire, nous employons le théorème de Leibniz, qui permet de déduire la dérivée des bornes d'intégration :

$$\frac{\partial}{\partial c}\int_{a(c)}^{b(c)} g(x,c)\,dx = \int_{a(c)}^{b(c)} \frac{\partial}{\partial c} g(x,c)\,dx + g(b,c)\frac{\partial b}{\partial c} - g(a,c)\frac{\partial a}{\partial c} \qquad \text{(E.2)}$$

Loi de Type A

Par définition, x_p est tel que (éq. 3.36) :

$$\phi(x_p, m, \alpha, \upsilon) = \int_0^{x_p} f_A(x; m, \alpha, \upsilon)\,dx = 1 - p \qquad \text{(E.3)}$$

d'où, en appliquant la règle de Leibniz (éq. E.2), on a :

$$\frac{\partial}{\partial m}\phi(x_p,m,\alpha,\upsilon)=\int_0^{x_p}\frac{\partial}{\partial m}f_A(x;m,\alpha,\upsilon)\,dx+f_A(x_p;m,\alpha,\upsilon)\frac{\partial x_p}{\partial m} \tag{E.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\phi(x_p,m,\alpha,\upsilon)=\int_0^{x_p}\frac{\partial}{\partial \alpha}f_A(x;m,\alpha,\upsilon)\,dx+f_A(x_p;m,\alpha,\upsilon)\frac{\partial x_p}{\partial \alpha} \tag{E.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \upsilon}\phi(x_p,m,\alpha,\upsilon)=\int_0^{x_p}\frac{\partial}{\partial \upsilon}f_A(x;m,\alpha,\upsilon)\,dx+f_A(x_p;m,\alpha,\upsilon)\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon} \tag{E.6}$$

Pour p fixé, les dérivées de $\phi(x_p,m,\alpha,\upsilon)$ par rapport à chacun des paramètres sont nulles et on peut donc déduire que :

$$\frac{\partial x_p}{\partial m}=\frac{-\int_0^{x_p}\frac{\partial}{\partial m}f_A(x;m,\alpha,\upsilon)\,dx}{f_A(x_p;m,\alpha,\upsilon)} \tag{E.7}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \alpha}=\frac{-\int_0^{x_p}\frac{\partial}{\partial \alpha}f_A(x;m,\alpha,\upsilon)\,dx}{f_A(x_p;m,\alpha,\upsilon)} \tag{E.8}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon}=\frac{-\int_0^{x_p}\frac{\partial}{\partial \upsilon}f_A(x;m,\alpha,\upsilon)\,dx}{f_A(x_p;m,\alpha,\upsilon)} \tag{E.9}$$

- *Dérivée par rapport à m*

En dérivant la f.d.p. de la loi de Type A (éq. 2.2) par rapport à m, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial m}f_A(x;m,\alpha,\upsilon)&=\frac{x^{\upsilon-1}}{2K_\upsilon}\frac{\partial}{\partial m}\left[\frac{1}{m^\upsilon}\exp\left\{-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right\}\right]\\&=\frac{x^{\upsilon-1}}{2K_\upsilon}\left[-\frac{\upsilon}{m^{\upsilon+1}}\exp\left\{-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right\}+\frac{\alpha}{m^\upsilon}\left(\frac{x}{m^2}-\frac{1}{x}\right)\exp\left\{-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right\}\right]\\&=\frac{1}{2K_\upsilon}\left[-\frac{\upsilon}{m^{\upsilon+1}}+\frac{\alpha}{m^{\upsilon+2}}x-\frac{\alpha}{m^\upsilon}\frac{1}{x}\right]x^{\upsilon-1}\exp\left\{-\alpha\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}\right)\right\}\end{aligned}$$

Si on insère cette expression dans l'équation (E.7), on peut montrer, après quelques manipulations algébriques, que :

$$\frac{\partial x_p}{\partial m} = \frac{\int_0^{x_p} \left(\frac{\upsilon}{m} - \frac{\alpha}{m^2} x + \alpha \frac{1}{x} \right) x^{\upsilon-1} \exp\left\{ -\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right\} dx}{x_p^{\upsilon-1} \exp\left\{ -\alpha \left(\frac{x_p}{m} + \frac{m}{x_p} \right) \right\}} \tag{E.10}$$

$$= \frac{(-\alpha/m^2) I_1 + (\upsilon/m) I_2 + \alpha I_3}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon} f_A(x_p; m, \alpha, \upsilon)}$$

où,

$$I_1 = \int_0^{x_p} x^{\upsilon} \exp\left[-\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right] dx = 2m^{\upsilon+1} K_{\upsilon+1} F_A(x_p; m, \alpha, \upsilon+1) \tag{E.11}$$

$$I_2 = \int_0^{x_p} x^{\upsilon-1} \exp\left[-\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right] dx = (1-p) 2m^{\upsilon} K_{\upsilon} \tag{E.12}$$

$$I_3 = \int_0^{x_p} x^{\upsilon-2} \exp\left[-\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right] dx = 2m^{\upsilon-1} K_{\upsilon-1} F_A(x_p; m, \alpha, \upsilon-1) \tag{E.13}$$

- *Dérivée par rapport à α*

Si on dérive la f.d.p. de la loi de Type A par rapport à α, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f_A(x; m, \alpha, \upsilon) = \frac{x^{\upsilon-1}}{2m^{\upsilon}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{K_{\upsilon}} \exp\left\{ -\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right\} \right]$$

$$= \frac{x^{\upsilon-1}}{2m^{\upsilon}} \left[-\frac{\partial K_{\upsilon}}{\partial \alpha} \frac{1}{K_{\upsilon}^2} \exp\left\{ -\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right\} - \frac{1}{K_{\upsilon}} \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \exp\left\{ -\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2m^{\upsilon} K_{\upsilon}} \left[-\frac{\partial K_{\upsilon}}{\partial \alpha} \frac{1}{K_{\upsilon}} - \frac{x}{m} - \frac{m}{x} \right] x^{\upsilon-1} \exp\left\{ -\alpha \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right\}$$

En insérant cette expression dans l'équation (E.8), on déduit, après quelques manipulations algébriques, que :

$$\frac{\partial x_p}{\partial \alpha} = \frac{\int_0^{x_p} \left(\frac{\partial K_\upsilon}{\partial \alpha} \frac{1}{K_\upsilon} + \frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) x^{\upsilon-1} \exp\left\{ -\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right\} dx}{x_p^{\upsilon-1} \exp\left\{ -\alpha\left(\frac{x_p}{m} + \frac{m}{x_p} \right) \right\}}$$
$$= \frac{m^{-1} I_1 + \left(\partial K_\upsilon / \partial \alpha \right) K_\upsilon^{-1} I_2 + m I_3}{2 m^\upsilon K_\upsilon f_A(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{E.14}$$

où I_1, I_2 et I_3 sont respectivement les intégrales (E.11), (E.12) et (E.13).

- *Dérivée par rapport à υ*

En dérivant la f.d.p. de la loi de Type A par rapport à υ, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \upsilon} f_A(x; m, \alpha, \upsilon) = \frac{1}{2} \exp\left\{ -\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial \upsilon} \left(\frac{x^{\upsilon-1}}{m^\upsilon K_\upsilon} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \exp\left\{ -\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right\} \left[-\frac{1}{m^\upsilon} \left(\frac{\ln m}{K_\upsilon} + \frac{\partial K_\upsilon}{\partial \upsilon} \frac{1}{K_\upsilon^2} - \frac{\ln x}{K_\upsilon} \right) x^{\upsilon-1} \right]$$
$$= \frac{1}{2 m^\upsilon K_\upsilon} \left[-\ln m - \frac{\partial K_\upsilon}{\partial \upsilon} \frac{1}{K_\upsilon} + \ln x \right] x^{\upsilon-1} \exp\left\{ -\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right\}$$

En insérant cette expression dans l'équation (E.9), on a que :

$$\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon} = \frac{\int_0^{x_p} \left(\ln m + \frac{\partial K_\upsilon}{\partial \upsilon} \frac{1}{K_\upsilon} + \ln x \right) x^{\upsilon-1} \exp\left\{ -\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right\} dx}{x_p^{\upsilon-1} \exp\left\{ -\alpha\left(\frac{x_p}{m} + \frac{m}{x_p} \right) \right\}}$$
$$= \frac{\left[\ln m + \left(\partial K_\upsilon / \partial \upsilon \right) K_\upsilon^{-1} \right] I_2 - I_4}{2 m^\upsilon K_\upsilon f_A(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{E.15}$$

où I_2 est donnée à l'expression (E.12) et I_4 est l'intégrale suivante :

$$I_4 = \int_0^{x_p} x^{\upsilon-1} \ln(x) \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right] dx \tag{E.16}$$

Loi de Type B

Pour la loi de Type B, x_p est tel que (éq. 4.33) :

$$\phi(x_p, m, \alpha, \upsilon) = \int_0^{x_p} f_B(x; m, \alpha, \upsilon)\,dx = 1 - p \tag{E.17}$$

En appliquant le théorème de Leibniz (éq. E.2) pour p fixé, on déduit que :

$$\frac{\partial x_p}{\partial m} = \frac{-\int_0^{x_p} \frac{\partial}{\partial m} f_B(x; m, \alpha, \upsilon)\,dx}{f_B(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{E.18}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \alpha} = \frac{-\int_0^{x_p} \frac{\partial}{\partial \alpha} f_B(x; m, \alpha, \upsilon)\,dx}{f_B(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{E.19}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon} = \frac{-\int_0^{x_p} \frac{\partial}{\partial \upsilon} f_B(x; m, \alpha, \upsilon)\,dx}{f_B(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{E.20}$$

- *Dérivée par rapport à m*

En dérivant la f.d.p. de la loi de Type B (éq. 2.6) par rapport à m, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m} f_B(x; m, \alpha, \upsilon) &= \frac{2x^{2\upsilon-1}}{ef_\upsilon} \frac{\partial}{\partial m}\left[\frac{1}{m^{2\upsilon}} \exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\}\right] \\
&= \frac{2x^{2\upsilon-1}}{ef_\upsilon}\left[-\frac{2\upsilon}{m^{2\upsilon+1}} \exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\} + \frac{1}{m^{2\upsilon}}\left(\frac{2}{m^3}x^2 - \frac{\alpha}{m^2}x\right) \exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\}\right] \\
&= \frac{2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon}\left[-\frac{2\upsilon}{m} + \frac{2}{m^3}x^2 - \frac{\alpha}{m^2}x\right] x^{2\upsilon-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\}
\end{aligned}$$

Si on insère cette expression dans l'équation (E.18), on a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_p}{\partial m} &= \frac{\int_0^{x_p}\left(\frac{2\upsilon}{m} - \frac{2}{m^3}x^2 + \frac{\alpha}{m^2}x\right) x^{2\upsilon-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\} dx}{x_p^{2\upsilon-1} \exp\left\{-\left(\frac{x_p}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x_p}{m}\right\}} \\
&= 2\frac{(2\upsilon/m) I_1 + (\alpha/m^2) I_2 - (2/m^3) I_3}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon\, f_B(x_p; m, \alpha, \upsilon)}
\end{aligned} \tag{E.21}$$

où,

$$I_1 = \int_0^{x_p} x^{2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right)\right] dx = (1-p)\frac{1}{2} m^{2\upsilon} ef_\upsilon(\alpha) \qquad \text{(E.22)}$$

$$I_2 = \int_0^{x_p} x^{2\upsilon} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right)\right] dx = \frac{1}{2} m^{2\upsilon+1} ef_{\upsilon+1/2}(\alpha) F_B(x_p; m, \alpha, \upsilon+1/2) \qquad \text{(E.23)}$$

$$I_3 = \int_0^{x_p} x^{2\upsilon+1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right)\right] dx = \frac{1}{2} m^{2\upsilon+2} ef_{\upsilon+1}(\alpha) F_B(x_p; m, \alpha, \upsilon+1) \qquad \text{(E.24)}$$

- *Dérivée par rapport à α*

Si on dérive la f.d.p. de la loi de Type B par rapport à α et qu'on utilise la propriété (B.8) de la fonction exponentielle factorielle, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha} f_B(x; m, \alpha, \upsilon) &= \frac{2x^{2\upsilon-1}}{m^{2\upsilon}} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{ef_\upsilon} \exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\}\right] \\
&= \frac{2x^{2\upsilon-1}}{m^{2\upsilon}}\left[-\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon^2} \exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\} + \frac{x}{mef_\upsilon} \exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\}\right] \\
&= \frac{2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon}\left[-\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon} + \frac{x}{m}\right] x^{2\upsilon-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\}
\end{aligned}$$

En insérant cette expression dans l'équation (E.19), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_p}{\partial\alpha} &= \frac{\int_0^{x_p}\left(\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon} - \frac{x}{m}\right) x^{2\upsilon-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\} dx}{x_p^{2\upsilon-1} \exp\left\{-\left(\frac{x_p}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x_p}{m}\right\}} \\
&= 2\frac{\left(ef_{\upsilon+1/2}/ef_\upsilon\right) I_1 - (1/m) I_2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon\, f_B(x_p; m, \alpha, \upsilon)}
\end{aligned} \qquad \text{(E.25)}$$

où I_1 et I_2 sont respectivement les intégrales (E.22) et (E.23).

- *Dérivée par rapport à υ*

En dérivant la f.d.p. de la loi de Type B par rapport à υ, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \upsilon} f_B(x;m,\alpha,\upsilon) = 2\exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\} \frac{\partial}{\partial \upsilon}\left(\frac{x^{2\upsilon-1}}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon}\right)$$

$$= 2\exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\}\left[-\frac{1}{m^{2\upsilon}}\left(\frac{2\ln m}{ef_\upsilon} + \frac{\partial ef_\upsilon}{\partial \upsilon}\frac{1}{ef_\upsilon^2} - \frac{2\ln x}{ef_\upsilon}\right)x^{2\upsilon-1}\right]$$

$$= \frac{2}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon}\left[-2\ln m - \frac{\partial ef_\upsilon}{\partial \upsilon}\frac{1}{ef_\upsilon} + 2\ln x\right] x^{2\upsilon-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\}$$

En insérant cette expression dans l'équation (E.20), on a que :

$$\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon} = \frac{\int_0^{x_p}\left(2\ln m + \frac{\partial ef_\upsilon}{\partial \upsilon}\frac{1}{ef_\upsilon} - 2\ln x\right)x^{2\upsilon-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x}{m}\right\}dx}{x_p^{2\upsilon-1}\exp\left\{-\left(\frac{x_p}{m}\right)^2 + \alpha\frac{x_p}{m}\right\}} \tag{E.26}$$

$$= 2\frac{\left[2\ln m + \left(\partial ef_\upsilon/\partial \upsilon\right)ef_\upsilon^{-1}\right] I_1 - 2I_4}{m^{2\upsilon} ef_\upsilon f_B(x_p;m,\alpha,\upsilon)}$$

où I_1 est donnée à l'expression (E.22) et I_4 est l'intégrale suivante :

$$I_4 = \int_0^{x_p} x^{2\upsilon-1}\ln(x)\exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right)\right]dx \tag{E.27}$$

Loi de Type B^{-1}

Pour la loi de Type B^{-1}, x_p est tel que (éq. 5.27) :

$$\phi(x_p,m,\alpha,\upsilon) = \int_0^{x_p} f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)\,dx = 1-p \tag{E.28}$$

En appliquant le théorème de Leibniz (éq. E.2) pour p fixé, on déduit que :

$$\frac{\partial x_p}{\partial m} = \frac{-\int_0^{x_p}\frac{\partial}{\partial m} f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)\,dx}{f_{B^{-1}}(x_p;m,\alpha,\upsilon)} \tag{E.29}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \alpha} = \frac{-\int_0^{x_p}\frac{\partial}{\partial \alpha} f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon)\,dx}{f_{B^{-1}}(x_p;m,\alpha,\upsilon)} \tag{E.30}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon} = \frac{-\int_0^{x_p} \frac{\partial}{\partial \upsilon} f_{B^{-1}}(x; m, \alpha, \upsilon)\, dx}{f_{B^{-1}}(x_p; m, \alpha, \upsilon)} \tag{E.31}$$

- *Dérivée par rapport à m*

En dérivant la f.d.p. de la loi de Type B^{-1} (éq. 2.8) par rapport à m, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m} f_{B^{-1}}(x; m, \alpha, \upsilon) &= \frac{2x^{-2\upsilon-1}}{ef_\upsilon} \frac{\partial}{\partial m}\left[m^{2\upsilon} \exp\left\{ -\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x} \right\}\right] \\
&= \frac{2x^{-2\upsilon-1}}{ef_\upsilon}\left[2\upsilon m^{2\upsilon-1} \exp\left\{ -\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x} \right\} + m^{2\upsilon}\left(-\frac{2m}{x^2} + \frac{\alpha}{x}\right) \exp\left\{ -\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x} \right\}\right] \\
&= \frac{2m^{2\upsilon}}{ef_\upsilon}\left[\frac{2\upsilon}{m} - \frac{2m}{x^2} + \frac{\alpha}{x} \right] x^{-2\upsilon-1} \exp\left\{ -\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x} \right\}
\end{aligned}$$

Si on insère cette expression dans l'équation (E.29), on a alors que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_p}{\partial m} &= \frac{-\int_0^{x_p} \left(\frac{2\upsilon}{m} - \frac{2m}{x^2} + \frac{\alpha}{x} \right) x^{-2\upsilon-1} \exp\left\{ -\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x} \right\} dx}{x_p^{-2\upsilon-1} \exp\left\{ -\left(\frac{m}{x_p}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x_p} \right\}} \\
&= 2\frac{-2\upsilon m^{-1} I_1 - \alpha I_2 + 2m I_3}{m^{-2\upsilon} ef_\upsilon\, f_{B^{-1}}(x_p; m, \alpha, \upsilon)}
\end{aligned} \tag{E.32}$$

où,

$$I_1 = \int_0^{x_p} x^{-2\upsilon-1} \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right) \right] dx = (1-p)\frac{1}{2m^{2\upsilon}} ef_\upsilon(\alpha) \tag{E.33}$$

$$I_2 = \int_0^{x_p} x^{-2\upsilon-2} \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right) \right] dx = \frac{1}{2m^{2\upsilon+1}} ef_{\upsilon+1/2}(\alpha) F_{B^{-1}}(x_p; m, \alpha, \upsilon+1/2) \tag{E.34}$$

$$I_3 = \int_0^{x_p} x^{-2\upsilon-3} \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right) \right] dx = \frac{1}{2m^{2\upsilon+2}} ef_{\upsilon+1}(\alpha) F_{B^{-1}}(x_p; m, \alpha, \upsilon+1) \tag{E.35}$$

- *Dérivée par rapport à α*

Si on dérive la f.d.p. de la loi de Type B^{-1} par rapport à α et on utilise la propriété (B.8) de la fonction exponentielle factorielle, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon) &= 2m^{2\upsilon}x^{-2\upsilon-1}\exp\left\{-(m/x)^2\right\}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\exp\{\alpha m/x\}}{ef_\upsilon}\right]\\ &= 2m^{2\upsilon}x^{-2\upsilon-1}\exp\left\{-\left(\frac{m}{x}\right)^2+\frac{\alpha m}{x}\right\}\left[\frac{(m/x)ef_\upsilon-ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon^2}\right]\\ &= \frac{2m^{2\upsilon}}{ef_\upsilon}\left[\frac{m}{x}-\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon}\right]x^{-2\upsilon-1}\exp\left\{-\left(\frac{m}{x}\right)^2+\frac{\alpha m}{x}\right\}\end{aligned}$$

En insérant cette expression dans l'équation (E.30), on a que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_p}{\partial\alpha} &= \frac{-\int_0^{x_p}\left(\frac{m}{x}-\frac{ef_{\upsilon+1/2}}{ef_\upsilon^2}\right)x^{-2\upsilon-1}\exp\left\{-\left(\frac{m}{x}\right)^2+\frac{\alpha m}{x}\right\}dx}{x_p^{-2\upsilon-1}\exp\left\{-\left(\frac{m}{x_p}\right)^2+\frac{\alpha m}{x_p}\right\}}\\ &= 2\frac{\left(ef_{\upsilon+1/2}/ef_\upsilon\right)I_1-mI_2}{m^{-2\upsilon}ef_\upsilon\, f_{B^{-1}}(x_p;m,\alpha,\upsilon)}\end{aligned} \tag{E.36}$$

où I_1 et I_2 sont respectivement les intégrales (E.33) et (E.34).

- *Dérivée par rapport à υ*

En dérivant la f.d.p. de la loi de Type B^{-1} par rapport à υ, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\upsilon}f_{B^{-1}}(x;m,\alpha,\upsilon) &= 2\exp\left\{-\left(\frac{m}{x}\right)^2+\frac{\alpha m}{x}\right\}\frac{\partial}{\partial\upsilon}\left(\frac{m^{2\upsilon}x^{-2\upsilon-1}}{ef_\upsilon}\right)\\ &= 2\exp\left\{-\left(\frac{m}{x}\right)^2+\frac{\alpha m}{x}\right\}\left[m^{2\upsilon}\left(\frac{2\ln m}{ef_\upsilon}-\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial\upsilon}\frac{1}{ef_\upsilon^2}-\frac{2\ln x}{ef_\upsilon}\right)x^{2\upsilon-1}\right]\\ &= \frac{2m^{2\upsilon}}{ef_\upsilon}\left[2\ln m-\frac{\partial ef_\upsilon}{\partial\upsilon}\frac{1}{ef_\upsilon}-2\ln x\right]x^{2\upsilon-1}\exp\left\{-\left(\frac{m}{x}\right)^2+\frac{\alpha m}{x}\right\}\end{aligned}$$

En insérant cette expression dans l'équation (E.31), on a que :

$$\frac{\partial x_p}{\partial \upsilon} = \frac{-\int_0^{x_p} \left(2\ln m - \frac{\partial ef_\upsilon}{\partial \upsilon}\frac{1}{ef_\upsilon} - 2\ln x\right) x^{-2\upsilon-1} \exp\left\{-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x}\right\} dx}{x_p^{-2\upsilon-1} \exp\left\{-\left(\frac{m}{x_p}\right)^2 + \frac{\alpha m}{x_p}\right\}} \tag{E.37}$$

$$= 2\frac{\left[\left(\partial ef_\upsilon / \partial \upsilon\right) ef_\upsilon^{-1} - 2\ln m\right] I_1 + 2 I_4}{m^{-2\upsilon}\, ef_\upsilon\, f_{B^{-1}}(x_p; m, \alpha, \upsilon)}$$

où I_1 est donnée à l'expression (E.33) et I_4 est l'intégrale suivante :

$$I_4 = \int_0^{x_p} x^{-2\upsilon-1} \ln(x) \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right] dx \tag{E.38}$$

ANNEXE F : CARACTÉRISTIQUES STATISTIQUES

Station	n	QT^{1}	H	G	A	Q	U	V	W	δ_1	δ_2
01BD002	20	6.53E-06	410.94	430.71	451.45	2.25E+05	11.14	4.79	4.87	0.0470	0.0470
01BF001	25	1.90E-05	244.84	260.84	276.64	8.50E+04	8.70	4.50	3.64	0.0588	0.0633
01BH001	24	2.10E-05	228.37	239.66	252.17	7.05E+04	10.59	4.58	5.39	0.0509	0.0483
01BH002	35	2.52E-05	205.65	212.69	220.23	5.21E+04	15.11	6.77	7.49	0.0348	0.0337
01BH005	20	3.16E-05	190.52	206.87	228.92	6.67E+04	5.96	1.83	3.38	0.1013	0.0823
02JB003	24	4.69E-05	149.38	153.15	157.33	2.62E+04	19.79	8.29	10.52	0.0270	0.0249
02JB004	33	7.64E-04	37.95	39.77	41.69	1.91E+03	11.14	5.04	5.02	0.0471	0.0470
02JB013	20	1.80E-05	249.13	260.78	271.25	7.91E+04	12.26	6.65	4.22	0.0394	0.0457
02KJ003	22	1.64E-04	80.27	82.42	84.42	7.44E+03	20.36	11.32	8.41	0.0239	0.0264
02KJ007	22	8.02E-04	37.22	38.97	40.56	1.76E+03	12.15	6.92	4.52	0.0399	0.0460
02LC043	21	7.95E-03	11.97	12.90	14.01	2.32E+02	6.87	2.77	3.62	0.0823	0.0751
02LD001	46	7.09E-05	122.60	126.77	131.34	1.86E+04	15.02	6.42	7.66	0.0354	0.0334
02LD002	43	3.04E-04	61.06	65.19	69.56	5.48E+03	8.18	3.80	3.71	0.0649	0.0654
02LD005	20	1.30E-04	90.22	92.68	95.01	9.44E+03	19.87	10.82	8.50	0.0248	0.0268
02LH002	26	1.09E-04	100.55	105.48	110.36	1.32E+04	11.25	5.76	4.85	0.0452	0.0479
02LH004	20	1.35E-04	90.27	94.63	99.07	1.07E+04	11.26	5.41	5.00	0.0459	0.0472
02NE007	28	2.49E-05	207.43	214.15	220.64	5.15E+04	16.70	8.76	7.21	0.0299	0.0319
02NE011	24	2.34E-05	219.28	232.84	247.13	6.84E+04	8.88	4.15	4.05	0.0595	0.0600
02OA035	35	2.28E-06	702.09	745.04	788.71	6.90E+05	9.11	4.61	4.07	0.0570	0.0594
02OE018	42	2.66E-04	63.38	65.50	67.60	4.85E+03	16.03	8.09	7.10	0.0315	0.0329
02OE027	36	3.55E-05	174.48	181.74	189.77	3.96E+04	12.41	5.08	6.14	0.0433	0.0407
02OG026	20	1.64E-04	83.41	88.82	93.91	9.71E+03	8.95	4.93	3.46	0.0557	0.0628
02OJ001	36	1.18E-06	943.09	963.54	981.50	9.95E+05	25.55	15.29	9.76	0.0185	0.0214
02OJ007	53	1.40E-06	873.13	898.98	921.96	8.88E+05	18.88	11.27	7.29	0.0252	0.0292
02PA007	22	3.18E-06	575.12	589.20	602.64	3.79E+05	21.90	11.77	9.52	0.0225	0.0242
02PB006	25	4.52E-05	156.23	164.11	172.09	3.24E+04	10.85	5.40	4.88	0.0475	0.0492
02PC009	22	2.39E-04	65.90	67.17	68.44	4.85E+03	26.92	13.72	12.79	0.0187	0.0191
02PD012	24	9.73E-01	1.07	1.13	1.19	1.60E+00	9.93	3.97	4.24	0.0525	0.0536
02PD013	23	1.16E-01	3.13	3.34	3.58	1.47E+01	7.96	3.40	3.70	0.0682	0.0661
02PD014	22	6.12E+00	0.43	0.47	0.51	3.00E-01	6.86	3.08	3.27	0.0820	0.0754
02PE009	22	4.27E-05	169.91	193.81	227.65	7.25E+04	3.94	1.26	2.14	0.1609	0.1316
02PG004	23	1.41E-04	97.24	107.71	115.69	1.49E+04	6.27	4.32	1.49	0.0715	0.1023
02PJ007	62	4.28E-05	163.44	173.89	183.58	3.70E+04	9.11	5.16	3.48	0.0542	0.0620
02PJ030	23	4.10E-05	162.32	168.22	173.89	3.21E+04	15.03	7.96	6.34	0.0331	0.0357
02PL001	44	1.70E-05	263.45	287.65	312.98	1.14E+05	6.32	3.05	2.73	0.0844	0.0879
02PL005	21	2.70E-05	202.26	212.39	222.52	5.40E+04	10.98	5.54	4.77	0.0466	0.0489
02QA002	27	2.09E-05	232.53	248.17	265.56	8.07E+04	8.04	3.47	3.89	0.0677	0.0651
02QB011	23	2.51E-05	208.28	217.19	226.44	5.57E+04	12.47	5.79	5.72	0.0417	0.0419
02QC001	35	1.62E-05	261.69	277.74	296.74	1.01E+05	8.47	3.30	4.51	0.0662	0.0595
02RD002	28	1.03E-06	1010.02	1032.90	1054.89	1.16E+06	23.51	12.25	10.18	0.0211	0.0224
02RD003	27	8.27E-07	1140.62	1179.59	1216.00	1.56E+06	16.13	8.86	6.56	0.0304	0.0336
02RF001	27	6.29E-07	1322.15	1377.49	1428.15	2.18E+06	13.47	7.41	5.05	0.0361	0.0410
02RF002	27	1.12E-06	987.90	1028.26	1065.56	1.21E+06	13.72	7.49	5.29	0.0356	0.0400
02RF006	27	1.20E-05	300.34	309.88	318.15	1.06E+05	17.86	10.34	6.18	0.0263	0.0313
02UC002	23	2.31E-07	2189.94	2288.91	2377.83	6.04E+06	12.66	7.30	4.68	0.0381	0.0442
02VA001	32	4.83E-05	153.60	168.02	191.94	5.38E+04	5.01	1.08	3.60	0.1331	0.0898
02VC001	32	4.95E-07	1499.84	1573.77	1640.56	2.89E+06	11.66	6.83	4.39	0.0416	0.0481
02WA001	25	8.58E-06	353.20	364.84	376.08	1.50E+05	16.44	8.74	7.17	0.0303	0.0324
02XC001	20	9.60E-07	1087.03	1159.01	1237.65	1.75E+06	8.22	3.54	3.74	0.0657	0.0641
03AB002	22	4.64E-07	1495.37	1527.86	1566.36	2.60E+06	22.06	8.45	13.08	0.0249	0.0215
03AC001	36	1.57E-04	84.37	90.02	96.96	1.11E+04	7.70	2.77	4.15	0.0743	0.0648
03AC002	26	3.98E-06	533.03	567.26	602.42	4.06E+05	8.68	4.22	3.83	0.0602	0.0622
03AC004	27	5.65E-07	1356.20	1384.51	1415.19	2.10E+06	23.99	10.67	12.70	0.0219	0.0207
03AD001	21	1.52E-07	2631.30	2701.79	2776.67	8.16E+06	19.10	8.53	9.42	0.0273	0.0264
03BA003	20	1.19E-06	934.43	951.10	968.10	9.71E+05	28.75	14.05	14.10	0.0177	0.0177
03BB002	20	2.44E-06	648.98	658.37	668.05	4.59E+05	35.03	16.91	17.69	0.0146	0.0144
03BC002	26	5.65E-07	1348.92	1367.86	1387.31	1.98E+06	36.14	17.40	18.05	0.0141	0.0139
03BE001	20	2.45E-06	661.76	685.44	710.15	5.41E+05	14.68	6.85	6.97	0.0354	0.0352
03CC001	20	1.18E-07	2955.58	3003.77	3051.00	9.59E+06	31.98	16.47	14.97	0.0156	0.0162
03DC002	20	3.56E-07	1733.20	1794.50	1858.50	3.70E+06	14.83	6.91	7.11	0.0350	0.0348
03DD002	27	1.45E-06	853.12	875.98	897.67	8.43E+05	20.15	10.85	8.58	0.0245	0.0264
03DD003	20	1.24E-06	920.29	945.42	973.05	1.01E+06	18.44	7.96	9.73	0.0288	0.0269

Station	n	$Q\Gamma^{1}$	H	G	A	Q	U	V	W	δ_1	δ_2
03EA001	26	1.80E-06	773.94	801.83	829.69	7.35E+05	14.88	7.43	6.62	0.0342	0.0354
03EC001	28	1.81E-05	244.83	253.99	262.46	7.30E+04	14.88	8.36	5.99	0.0328	0.0367
03ED001	24	6.30E-07	1283.65	1309.92	1337.92	1.87E+06	24.66	11.41	12.96	0.0211	0.0203
03ED004	25	4.89E-06	470.34	489.09	508.20	2.78E+05	13.42	6.58	6.18	0.0383	0.0391
03FC007	23	3.78E-04	53.05	54.77	56.54	3.40E+03	16.20	7.83	7.75	0.0318	0.0319
03FC008	25	1.58E-05	253.89	256.57	259.28	6.86E+04	48.09	23.70	23.75	0.0105	0.0105
03HA001	20	3.68E-07	1725.35	1797.02	1864.75	3.73E+06	13.38	6.93	5.17	0.0370	0.0407
03JB001	23	7.17E-08	3886.54	4043.94	4200.44	1.89E+07	13.38	6.81	6.02	0.0380	0.0397
03KA001	23	2.47E-06	661.98	687.50	713.65	5.49E+05	13.81	6.41	6.20	0.0373	0.0378
03KC004	25	4.83E-08	4729.89	4900.57	5060.00	2.71E+07	15.33	8.41	6.21	0.0320	0.0355
03LF002	27	3.33E-08	5847.66	6259.36	6692.96	5.08E+07	7.92	3.73	3.60	0.0670	0.0680
03MB002	27	9.01E-08	3428.18	3523.03	3615.19	1.37E+07	19.33	9.97	8.49	0.0258	0.0273
04NA001	55	3.33E-05	178.12	182.95	187.82	3.72E+04	19.35	9.17	8.67	0.0263	0.0268
02AB008	37	7.36E-03	15.91	20.11	24.05	7.77E+02	2.96	1.45	0.58	0.1787	0.2343
02AC001	20	1.60E-03	37.54	49.38	59.05	4.78E+03	2.75	1.35	0.40	0.1789	0.2740
02BA002	21	3.33E-04	61.15	66.67	71.01	5.53E+03	7.20	5.19	2.05	0.0630	0.0864
02BB002	23	3.79E-05	172.57	181.40	188.87	3.81E+04	11.58	7.30	3.92	0.0404	0.0499
02BB003	21	1.16E-05	326.22	355.64	380.19	1.60E+05	7.04	4.58	2.15	0.0667	0.0863
02BD003	43	6.01E-05	139.30	149.10	158.85	2.86E+04	8.13	3.73	3.02	0.0633	0.0680
02BF001	23	3.34E-05	183.83	196.01	209.88	5.09E+04	8.06	3.21	3.87	0.0684	0.0641
02BF002	23	5.46E-05	151.32	165.53	178.35	3.63E+04	6.60	3.53	2.00	0.0746	0.0897
02CA002	20	2.10E-03	23.01	24.28	25.61	7.25E+02	9.85	4.70	4.45	0.0531	0.0539
02CD001	24	1.52E-04	87.53	93.34	98.51	1.06E+04	8.97	5.21	3.05	0.0540	0.0642
02CF007	30	1.20E-03	31.54	34.28	37.08	1.60E+03	6.69	3.09	2.64	0.0786	0.0833
02DD008	26	3.90E-03	16.95	17.96	19.07	4.13E+02	9.02	3.65	4.17	0.0600	0.0575
02EA005	75	7.01E-04	39.77	41.92	44.17	2.16E+03	10.06	4.63	4.59	0.0523	0.0525
02EA010	23	1.37E-03	27.95	28.94	30.02	9.71E+02	14.51	6.47	7.24	0.0364	0.0350
02EC002	75	7.38E-05	121.49	125.89	129.79	1.78E+04	15.65	8.93	5.63	0.0305	0.0355
02EC009	25	3.16E-03	19.05	20.72	22.80	6.34E+02	6.07	2.28	3.41	0.0960	0.0839
02EC010	22	3.61E-02	5.67	6.08	6.48	4.72E+01	7.93	4.05	3.15	0.0647	0.0700
02EC011	24	1.23E-03	32.26	35.68	38.51	1.67E+03	6.16	3.94	1.75	0.0764	0.1007
02ED003	42	1.46E-04	91.12	101.09	112.70	1.58E+04	5.22	2.06	2.37	0.1088	0.1038
02ED007	25	2.65E-03	20.59	21.77	22.95	5.83E+02	9.74	4.64	4.01	0.0528	0.0555
02FA001	33	1.08E-04	103.91	111.29	117.85	1.52E+04	8.45	5.12	2.98	0.0572	0.0687
02FB007	56	2.11E-03	24.13	26.59	29.05	9.90E+02	5.91	2.88	2.18	0.0883	0.0971
02FC001	76	6.45E-06	431.64	468.32	501.99	2.84E+05	7.14	3.98	2.47	0.0694	0.0815
02FC002	76	1.96E-05	247.51	270.14	292.99	9.98E+04	6.44	3.08	2.46	0.0812	0.0875
02FC004	25	4.88E-03	15.06	15.81	16.63	3.10E+02	10.55	4.14	4.70	0.0509	0.0486
02FC011	37	2.60E-03	22.24	24.98	27.81	9.50E+02	4.99	2.19	1.75	0.1075	0.1160
02FE008	23	7.58E-05	126.32	137.49	148.01	2.49E+04	6.83	3.63	2.39	0.0737	0.0847
02FE009	23	2.14E-04	73.64	79.38	85.58	8.49E+03	7.16	3.14	3.10	0.0752	0.0751
02FF002	45	6.40E-05	140.58	158.44	176.87	3.77E+04	4.87	2.43	1.89	0.1100	0.1196
02FF004	25	7.82E-03	12.34	13.71	15.57	3.24E+02	4.82	1.49	2.64	0.1273	0.1053
02FF007	24	1.12E-04	106.01	118.04	130.15	2.03E+04	5.39	2.55	1.93	0.0977	0.1075
02GA010	52	6.33E-05	142.07	159.85	177.21	3.72E+04	5.04	2.69	1.80	0.1031	0.1179
02GA017	22	2.34E-04	76.63	87.05	95.21	1.03E+04	5.12	3.75	1.33	0.0896	0.1275
02GA018	38	7.18E-05	129.07	141.56	154.49	2.78E+04	6.08	3.01	2.56	0.0874	0.0923
02GB007	26	8.37E-04	38.60	42.43	45.74	2.35E+03	6.41	4.00	2.02	0.0751	0.0946
02GB009	28	4.25E-03	17.72	20.09	22.32	5.95E+02	4.85	2.57	1.49	0.1056	0.1253
02GC002	24	3.15E-04	67.91	78.93	88.96	9.76E+03	4.23	2.14	1.10	0.1197	0.1504
02GC010	30	7.78E-04	42.11	49.35	56.93	4.13E+03	3.84	1.83	1.31	0.1429	0.1586
02GC018	26	3.49E-04	64.06	73.95	82.75	8.27E+03	4.43	2.40	1.16	0.1124	0.1435
02GD010	44	1.47E-03	32.56	39.17	45.41	2.64E+03	3.53	1.79	0.90	0.1478	0.1847
02GD019	24	8.35E-03	11.66	12.43	13.26	2.01E+02	8.28	3.52	3.68	0.0646	0.0641
02GD020	25	3.11E-03	19.69	21.63	23.79	6.86E+02	5.80	2.36	2.44	0.0952	0.0942
02GE005	23	2.47E-03	21.63	23.58	26.08	8.50E+02	5.86	2.01	3.23	0.1010	0.0861
02GG002	42	1.98E-04	81.07	90.86	99.94	1.18E+04	5.29	2.81	1.66	0.0952	0.1141
02GG004	20	1.81E-04	81.05	89.25	98.30	1.16E+04	5.70	2.55	2.62	0.0966	0.0963
02GG005	24	2.52E-03	23.10	26.23	29.40	1.08E+03	4.66	1.98	1.45	0.1144	0.1269
02GG006	24	5.54E-04	48.49	56.35	65.67	5.68E+03	3.82	1.58	1.66	0.1530	0.1504
02HA006	34	4.24E-04	53.84	59.34	64.59	4.81E+03	6.01	3.25	2.18	0.0847	0.0973
02HB004	34	1.28E-03	31.82	35.62	39.07	1.78E+03	5.39	3.02	1.71	0.0922	0.1128
02HB012	25	1.04E-02	10.83	11.99	13.24	2.13E+02	5.51	2.30	2.21	0.0993	0.1010
02HC009	37	5.45E-03	16.55	20.15	23.96	7.84E+02	3.23	1.37	1.01	0.1733	0.1968
02HC013	30	8.11E-03	13.33	15.94	18.80	4.84E+02	3.44	1.35	1.14	0.1651	0.1789
02HC018	28	9.95E-03	11.96	14.10	16.09	3.14E+02	3.90	2.35	1.18	0.1316	0.1647
02HC019	28	5.78E-03	15.11	17.39	19.72	4.80E+02	4.28	2.12	1.57	0.1253	0.1410

Station	n	QT^{1}	H	G	A	Q	U	V	W	δ_1	δ_2
02HC023	28	2.96E-02	6.61	7.55	8.53	8.82E+01	4.44	2.34	1.71	0.1210	0.1341
02HC025	28	2.25E-03	23.21	25.72	28.51	9.92E+02	5.38	2.26	2.34	0.1031	0.1024
02HC027	24	8.93E-03	11.26	12.04	12.91	1.90E+02	7.84	3.49	3.78	0.0690	0.0673
02HC028	27	6.47E-03	13.68	14.82	15.81	2.77E+02	7.41	4.59	2.38	0.0645	0.0803
02HC029	26	3.66E-03	18.00	19.92	22.32	6.26E+02	5.16	1.95	2.69	0.1136	0.1017
02HC030	24	9.45E-04	36.39	40.64	45.13	2.46E+03	5.16	2.39	1.99	0.1046	0.1106
02HC031	21	2.39E-03	22.00	23.99	26.55	8.78E+02	5.83	2.03	3.17	0.1012	0.0869
02HC032	25	1.52E-02	9.02	10.03	11.05	1.44E+02	5.46	2.76	2.12	0.0967	0.1058
02HC033	25	9.46E-03	11.73	13.25	14.89	2.78E+02	4.70	1.97	1.66	0.1173	0.1220
02HD002	25	1.66E-03	28.39	33.47	39.51	2.10E+03	3.55	1.44	1.47	0.1660	0.1646
02HD006	31	7.02E-03	13.24	15.27	18.45	5.23E+02	3.54	0.93	2.16	0.1891	0.1428
02HD007	24	1.19E-02	11.03	13.24	15.82	3.68E+02	3.30	1.07	1.12	0.1783	0.1824
02HD008	31	1.85E-02	11.84	16.67	20.86	6.11E+02	2.31	1.24	0.32	0.2244	0.3420
02HD009	25	1.52E-02	9.37	11.04	13.45	2.85E+02	3.29	0.87	1.50	0.1971	0.1646
02HE001	21	2.18E-01	2.29	2.46	2.66	8.20E+00	7.18	3.10	3.58	0.0766	0.0733
02HJ001	28	7.01E-03	13.20	14.42	15.65	2.87E+02	6.40	2.89	2.25	0.0821	0.0878
02HL004	33	3.01E-04	60.94	64.17	67.32	4.96E+03	10.55	5.30	4.22	0.0479	0.0517
02HL005	25	1.07E-03	31.48	32.51	33.60	1.20E+03	15.86	7.47	8.00	0.0329	0.0322
02HM004	25	3.12E-03	19.02	20.13	21.25	5.03E+02	9.55	4.40	3.84	0.0540	0.0566
02HM005	21	1.30E-03	28.49	29.42	30.54	1.02E+03	14.84	5.65	8.58	0.0373	0.0324
02JC008	20	4.05E-05	164.31	170.94	177.05	3.34E+04	13.90	7.79	5.40	0.0351	0.0396
02KA003	24	6.37E+00	0.41	0.42	0.43	2.00E-01	21.30	4.90	9.93	0.0238	0.0243
02LA007	21	1.44E-04	87.84	92.52	97.02	1.02E+04	10.56	5.87	4.51	0.0476	0.0519
02LB006	43	1.48E-04	91.16	99.52	106.79	1.28E+04	6.84	4.19	2.16	0.0705	0.0877
02LB007	43	7.98E-04	38.93	42.80	46.77	2.57E+03	5.97	2.86	2.38	0.0887	0.0947
02LB008	35	1.60E-04	89.52	101.46	114.29	1.63E+04	4.61	2.01	1.75	0.1192	0.1252
02MC001	30	2.61E-04	66.96	71.81	76.22	6.42E+03	8.23	4.78	2.96	0.0597	0.0699
04CA002	24	3.82E-06	551.08	593.57	636.04	4.57E+05	7.49	3.83	3.12	0.0691	0.0743
04CA003	23	1.64E-03	27.00	29.63	32.53	1.27E+03	5.88	2.54	2.57	0.0934	0.0929
04CB001	23	3.34E-05	183.51	195.00	206.91	4.78E+04	8.84	4.30	4.01	0.0593	0.0607
04CE002	22	3.84E-04	53.83	57.02	60.51	4.11E+03	9.05	4.07	4.46	0.0594	0.0577
04DA001	24	2.80E-05	206.53	226.27	248.61	7.46E+04	5.91	2.42	2.60	0.0942	0.0913
04DB001	24	2.15E-05	231.68	250.76	271.88	8.61E+04	6.76	3.03	3.24	0.0808	0.0792
04DC001	23	7.34E-07	1273.70	1396.59	1528.00	2.75E+06	6.01	2.78	2.62	0.0899	0.0921
04DC002	22	1.47E-05	275.84	291.23	307.18	1.05E+05	9.80	4.64	4.34	0.0533	0.0543
04EA001	22	3.52E-06	575.81	624.60	676.96	5.32E+05	6.69	3.11	3.02	0.0805	0.0813
04FA003	24	2.40E-05	213.48	223.88	235.25	6.11E+04	10.80	4.79	5.40	0.0495	0.0476
04FB001	25	2.19E-06	727.31	785.13	846.64	8.27E+05	7.10	3.26	3.11	0.0754	0.0765
04FC001	23	7.87E-07	1195.98	1280.27	1381.78	2.25E+06	7.44	2.83	3.96	0.0763	0.0681
04GA002	20	2.35E-04	69.77	75.44	82.80	8.53E+03	6.36	2.04	3.49	0.0931	0.0781
04JA002	36	2.26E-05	216.14	221.75	227.22	5.41E+04	20.50	10.64	9.10	0.0244	0.0256
04JC002	40	8.16E-05	114.44	118.24	122.06	1.58E+04	16.01	7.95	7.34	0.0318	0.0327
04JC003	37	2.73E-05	196.85	202.78	209.00	4.64E+04	17.21	8.07	8.50	0.0302	0.0297
04JD005	23	4.20E-05	166.48	176.13	183.64	3.60E+04	10.70	7.49	3.06	0.0418	0.0564
04JF001	22	5.26E-05	149.52	161.18	173.46	3.50E+04	7.25	3.07	2.84	0.0735	0.0751
04LJ001	71	1.72E-06	804.74	846.29	886.79	8.57E+05	10.81	5.56	4.48	0.0467	0.0503
04MF001	24	3.90E-06	582.99	645.65	693.00	5.33E+05	6.30	4.59	1.54	0.0708	0.1021
05PA006	68	2.01E-05	258.81	291.05	318.56	1.18E+05	5.33	3.17	1.43	0.0903	0.1174
05PB014	74	1.28E-04	99.18	111.36	123.85	1.85E+04	5.02	2.46	1.91	0.1063	0.1159
05PC010	35	5.95E-03	15.93	18.92	21.63	5.82E+02	3.79	2.05	0.98	0.1343	0.1717
05PC011	39	2.46E-03	24.33	30.11	36.49	1.79E+03	3.00	1.45	1.09	0.1923	0.2133
05PD017	20	2.59E+01	0.21	0.22	0.24	1.00E-01	8.50	0.65	3.51	0.0651	0.0601
05QA001	60	2.39E-05	229.62	258.14	288.95	1.03E+05	4.87	2.14	1.91	0.1127	0.1171
05QA004	29	1.99E-04	84.43	97.51	109.93	1.48E+04	4.31	2.21	1.19	0.1199	0.1441
05QC003	21	1.14E-03	33.80	37.88	41.73	2.08E+03	5.26	2.60	1.67	0.0969	0.1138
05QE008	21	5.47E-03	15.79	18.56	21.95	6.83E+02	3.57	1.20	1.38	0.1680	0.1612
05QE009	21	2.04E-03	26.64	31.04	35.27	1.57E+03	4.08	1.93	1.13	0.1279	0.1529