

**Rapport scientifique No 346**

par

Luc Perreault  
Bernard Bobée  
Vincent Fortin

**Approximation des quantiles  
de la loi Pearson Type 3 standardisée  
par les polynômes de Tchebichef**

Mars 1992

INRS-Eau  
Université du Québec  
C.P. 7500  
Sainte-Foy, Québec  
G1V 4C7

## TABLE DES MATIERES

|   |           |
|---|-----------|
| Liste des tableaux et figures .....   | ii        |
| <b>INTRODUCTION .....</b>   | <b>1</b>  |
| <b>CHAPITRE 1 : APPROXIMATIONS USUELLES DE <math>K_T</math>.....</b>  | <b>4</b>  |
| 1.1 Principales méthodes d'approximation.....   | 4         |
| 1.2 Étude comparative de Chowdhury et Stedinger.....  | 6         |
| <b>CHAPITRE 2 : POLYNOMES DE TCHEBICHEF.....</b>  | <b>9</b>  |
| 2.1 Aspects théoriques.....   | 9         |
| 2.2 Approximation de la table de Harter par les<br>polynômes de Tchebichef.....   | 11        |
| <b>CHAPITRE 3 : APPROXIMATION DE LA DÉRIVÉE PAR RAPPORT A <math>C_s</math> DES<br/>        QUANTILES DE LA LOI P3 STANDARDISÉE.....</b> | <b>19</b> |
| <b>CONCLUSION.....</b>  | <b>24</b> |
| <b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>   | <b>25</b> |
| <b>ANNEXE A : PROGRAMME EN PASCAL AJUSTANT UN POLYNOME A LA<br/>        TABLE DE HARTER.....</b>  | <b>27</b> |

## LISTE DES TABLEAUX ET FIGURES

|   |    |
|---|----|
| <b>Tableau 1.</b> Rangs des différentes méthodes d'approximation<br>(d'après Chowdhury et Stedinger, 1991)..... | 7  |
| <b>Tableau 2.</b> Coefficients du polynôme de degré 4 pour 21<br>probabilités au dépassement $1 - p$ .....      | 18 |
| <b>Figure 1.</b> Erreurs absolues du polynôme de degré 4.....   | 13 |
| <b>Figure 2.</b> Erreurs relatives pour la probabilité au<br>dépassement $1 - p = 0.9999$ .....                 | 14 |
| <b>Figure 3.</b> Erreurs relatives pour la probabilité au<br>dépassement $1 - p = 0.99$ .....                   | 15 |
| <b>Figure 4.</b> Erreurs relatives pour la probabilité au<br>dépassement $1 - p = 0.95$ .....                   | 15 |
| <b>Figure 5.</b> Erreurs relatives pour la probabilité au<br>dépassement $1 - p = 0.5$ .....                    | 16 |
| <b>Figure 6.</b> Erreurs relatives pour la probabilité au<br>dépassement $1 - p = 0.01$ .....                   | 16 |
| <b>Figure 7.</b> Erreurs relatives pour la probabilité au<br>dépassement $1 - p = 0.005$ .....                  | 17 |
| <b>Figure 8.</b> Approximations des dérivées pour la probabilité au<br>dépassement $1 - p = 0.9999$ .....       | 20 |
| <b>Figure 9.</b> Approximations des dérivées pour la probabilité au<br>dépassement $1 - p = 0.99$ .....         | 21 |

|  |    |
|--|----|
| <b>Figure 10.</b> Approximations des dérivées pour la probabilité au dépassement $1 - p = 0.95$ .....  | 21 |
| <b>Figure 11.</b> Approximations des dérivées pour la probabilité au dépassement $1 - p = 0.5$ .....   | 22 |
| <b>Figure 12.</b> Approximations des dérivées pour la probabilité au dépassement $1 - p = 0.01$ .....  | 22 |
| <b>Figure 13.</b> Approximations des dérivées pour la probabilité au dépassement $1 - p = 0.005$ ..... | 23 |

## INTRODUCTION

En hydrologie, on est souvent amené à estimer le débit  $X_p$  correspondant à une probabilité au dépassement donnée  $1 - p$ . Cette statistique correspond à un débit  $X_T$  que l'on appelle généralement le débit de période de retour  $T$ , telle que

$$1 - p = \text{Prob}\{X > X_p\} = \text{Prob}\{X > X_T\} = \frac{1}{T}$$

Dans la plupart des cas, cette estimation est obtenue en ajustant une loi de probabilité à une série de données et en estimant ses quantiles.

Pour les lois dont les quantiles  $X_p$  peuvent s'exprimer explicitement comme une fonction  $G(\alpha, \beta, \gamma; p)$  des paramètres, il suffit d'estimer ces derniers et de remplacer ensuite dans  $G$  les valeurs théoriques  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  par leurs estimations  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\gamma}$ . Toutefois, pour certaines lois, les quantiles ne peuvent être définis de façon explicite. C'est le cas entre autres de la loi Pearson Type 3 (P3) et de ses lois dérivées (gamma, log-gamma, gamma généralisée et log-Pearson Type 3). Il faut donc procéder autrement.

Une approche employée fréquemment pour estimer le quantile  $X_p$  de la loi P3 consiste à se ramener à la loi standardisée. On utilise donc le quantile correspondant  $K_p(C_s)$  de la loi Pearson Type 3 standardisée (Chow, 1964) tabulé en fonction du coefficient d'asymétrie par Harter (1969). En effet, on peut exprimer  $X_p$  de la façon suivante :

$$X_p = \mu + \sigma K_p(C_s)$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la loi Pearson Type 3 et  $K_p(C_s)$  le quantile de la variable  $K$  distribuée selon une loi P3 standardisée, c'est-à-dire telle que  $E\{K\} = 0$  et  $Var\{K\} = 1$ . Ainsi, pour estimer le quantile, il suffit d'estimer les paramètres en ajustant la loi P3, d'en déduire la moyenne, l'écart-type et le coefficient d'asymétrie, d'extraire  $K_p(C_s)$  de la table de Harter (1969), et enfin de remplacer les valeurs obtenues dans cette équation.

Puisque, pour une probabilité au dépassement  $1 - p$  donnée, la valeur de  $K_p(C_s)$  n'est tabulée que pour un nombre restreint de coefficients d'asymétrie, on doit généralement procéder par interpolation linéaire de la table. Cette approche, quoique simple, devient extrêmement lourde lorsqu'on effectue plusieurs ajustements en série. Si l'on dispose d'un logiciel d'ajustement automatique, ceci est un moindre problème. Cela nous oblige tout de même à entrer les valeurs de la table de Harter dans le programme, soit 1107 valeurs si on se limite à  $|C_s| \leq 4$ . C'est pourquoi, plusieurs auteurs ont proposé des méthodes d'approximation des quantiles de la loi Pearson Type 3 standardisée, la plupart étant des fonctions du coefficient d'asymétrie.

Ce rapport présente une méthode d'approximation des quantiles  $K_p(C_s)$  basée sur les polynômes orthogonaux de Tchebichef. Cette approche a été proposée par Bobée (1979). Les résultats d'une étude comparative menée par Chowdhury et Stedinger (1991) montrent qu'elle performe très bien pour des coefficients d'asymétrie compris entre -3.0 et 5.0. Les polynômes développés par Bobée (1979) conduisent donc à une estimation efficace de  $K_p(C_s)$  pour les valeurs de coefficients d'asymétrie que l'on rencontre généralement en hydrologie.

Dans le Chapitre 1, nous présentons brièvement les principales méthodes d'approximation des quantiles de la loi Pearson Type 3 standardisée proposées dans la littérature. Nous discutons aussi de l'étude comparative effectuée par Chowdhury et Stedinger (1991). Au Chapitre 2, nous décrivons en détail la méthode d'approximation par les polynômes de Tchebichef pour ensuite donner les coefficients polynômiaux obtenus afin d'approximer  $K_p(C_s)$ . Enfin, le Chapitre 3 est consacré à l'approximation de la dérivée de  $K_p(C_s)$  par rapport au coefficient d'asymétrie ( $\frac{dK_p(C_s)}{dC_s}$ ). En effet, le calcul de la variance asymptotique associée à l'estimation du quantile fait intervenir cette valeur.

On montre qu'il est possible d'obtenir une bonne approximation en dérivant tout simplement le polynôme correspondant obtenu par la méthode de Bobée (1979). Nous avons ainsi une expression explicite pour la dérivée, ce qui est le principal avantage de cette approche.

Les développements théoriques présentés dans ce rapport ont été effectués dans le cadre d'un projet de partenariat entre Hydro-Québec et INRS-Eau concernant le logiciel AJUSTE qui permet l'ajustement automatique de lois de probabilité. Ce projet consistait entre autres à ajouter l'estimation de quantiles correspondant à des périodes de retour très élevées (5000 et 1000 ans), d'où la nécessité d'avoir une approximation précise de  $K_p(C_s)$ .

## CHAPITRE 1

### APPROXIMATIONS USUELLES DE $K_p(C_s)$

#### 1.1 Principales méthodes d'approximation

Le quantile  $K_p(C_s)$  de la loi Pearson Type 3 standardisée (moyenne nulle et variance unitaire) est souvent appelé en hydrologie "Facteur de Fréquence" (Frequency Factor). La table de Harter (1969) donne les valeurs de  $K_p(C_s)$  pour différentes valeurs de  $1 - p$  (probabilité au dépassement) et de  $C_s$ . Les quantiles de la loi Pearson Type 3 standardisée obéissent à la relation de symétrie suivante :

$$K_p(C_s) = -K_{1-p}(-C_s) \quad (1.1)$$

Ainsi, on peut facilement déduire les quantiles associés à des coefficients d'asymétrie négatifs à partir de ceux qui correspondent aux coefficients d'asymétrie positifs. Par exemple, pour obtenir le quantile de probabilité au dépassement égale à 99% pour  $C_s = -1.5$ , il suffit d'extraire de la table de Harter le quantile de probabilité au dépassement de 1% correspondant au coefficient d'asymétrie de 1.5, et de lui affecter le signe moins. Cette propriété sera utilisée pour le développement de la méthode d'approximation du chapitre 2.

Puisque les quantiles disponibles dans la table de Harter (1969) le sont que pour un nombre restreint de valeurs du coefficient d'asymétrie, il est souhaitable de disposer d'expressions analytiques en fonction de  $C_s$  nous permettant d'approximer  $K_p(C_s)$ . Plusieurs auteurs ont développé de telles approximations. Nous vous présentons ici celles qui sont le plus utilisées.

La première, basée sur l'approximation normale de la loi chi-deux, a été proposée par Wilson et Hilferty (1931) :

$$K_p(C_s) \approx \frac{2}{C_s} \left\{ \left[ \left( z_p - \frac{C_s}{6} \right) \frac{C_s}{6} + 1 \right]^3 - 1 \right\} \quad (1.2)$$

où  $z_p$  est le quantile correspondant de la loi normale centré-réduite. McGinnis et Sammons (1970) et McMahon et Miller (1967) ont observé que cette approximation performe pauvrement pour de grandes valeurs du coefficient d'asymétrie. Selon Kite (1975) cette expression est efficace pour  $C_s \leq 1$  et peut être suffisamment bonne pour des coefficients d'asymétrie approchant 2.

Kirby (1972) a modifié l'approximation de Wilson et Hilferty (éq. 1.2). Il propose l'expression:

$$K_p(C_s) \approx D \left\{ \max \left[ H, 1 - \left( \frac{F}{6} \right)^2 + z_p \left( \frac{F}{6} \right) \right]^3 - R \right\} \quad (1.3)$$

où  $D$ ,  $F$  et  $R$  sont des fonctions du coefficient d'asymétrie, et  $H$  est tel que

$$H = \left[ R - \frac{2D}{C_s} \right]^{1/3} \quad (1.4)$$

Kirby (1972) a tabulé les valeurs de  $D$ ,  $F$  et  $R$  pour différentes valeurs de  $C_s$ , dans l'intervalle [0.25, 9.75]. Toutefois, pour éviter des erreurs d'interpolation linéaire de cette table, il a proposé les formules d'approximation suivantes :

$$D \approx \max \left( \frac{2}{C_s}, 0.40 \right) \quad (1.5)$$

$$R \approx 1 + 0.0144 \max(0, C_s - 2.25)^2 \quad (1.6)$$

$$F \approx C_s - 0.063 \max(0, C_s - 1)^{1.85} \quad (1.7)$$

Pour améliorer la procédure de Kirby, Hoshi et Burges (1981) ont développé des approximations polynomiales du cinquième degré pour  $1/D$ ,  $F$ ,  $H^3$  et  $R$ . Ils ont comparé leur approximation à celle de Kirby avec la table de Harter (1969).

En utilisant une approximation pour les quantiles de la loi de chi-deux, Kite (1976) a proposé une nouvelle formule :

$$K_p(C_s) \approx z_p + (z_p^2 - 1)\frac{C_s}{6} + \frac{1}{3}(z_p^3 - 6z_p)\left(\frac{C_s}{6}\right)^2 \quad (1.8)$$
$$- (z_p^2 - 1)\left(\frac{C_s}{6}\right)^3 + z_p\left(\frac{C_s}{6}\right)^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{C_s}{6}\right)^5$$

En développant l'approximation de Wilson et Hilferty (éq. 1.2), on retrouve cette expression de Kite (1976) à une signe près pour le dernier terme. Des comparaisons entre les deux approximations indiquent que cette dernière formule approche mieux les quantiles de la loi Pearson Type 3 standardisée pour des coefficients d'asymétrie supérieurs à 1.

Une dernière approximation proposée par Bobée (1979), qui est décrite en détail au chapitre 2, et qui consiste en l'ajustement de polynômes de Tchebichef d'ordre quatre à la table de Harter, est de la forme :

$$K_p(C_s) \approx d_0 + d_1C_s + d_2C_s^2 + d_3C_s^3 + d_4C_s^4 \quad (1.9)$$

## 1.2 Etude comparative de Chowdhury et Stedinger

Une étude comparative des méthodes décrites à la section précédente a été menée par Chowdhury et Stedinger (1991) pour  $-9.0 \leq C_s \leq 9.0$  et pour des probabilités au dépassement  $1 - p = 0.1, 0.02, 0.01$  et  $0.001$ . Le critère de comparaison employé par ces auteurs est l'erreur relative  $ER$  définie par :

$$ER = 100 \frac{K_H - K_A}{K_H} \quad (1.10)$$

où  $K_H$  est la valeur extraite de la table de Harter (1969) et  $K_A$  l'approximation.

Chowdhury et Stedinger (1991) ont classé les méthodes selon leur erreur relative maximale. Le tableau qui suit, tiré de leur article, donne les résultats pour différentes plages du coefficient d'asymétrie. Ici, le rang 1 indique la méthode la plus performante, le rang deux la deuxième plus performante, et ainsi de suite.

**Tableau 1.** Rangs des différentes méthodes d'approximation (d'après Chowdhury et Stedinger, 1991).

| Coefficient d'asymétrie  | Méthodes        |       |              |      |       |
|--------------------------|-----------------|-------|--------------|------|-------|
|                          | Wilson Hilferty | Kirby | Hoshi Burges | Kite | Bobée |
| $-9.0 \leq C_s < -3.0$   | - <sup>1</sup>  | 1     | -            | -    | -     |
| $-3.0 \leq C_s < -1.0$   | 4               | 1     | 5            | 3    | 2     |
| $-1.0 \leq C_s \leq 1.0$ | 2               | 2     | 3            | 2    | 1     |
| $1.0 < C_s \leq 3.0$     | 3               | 2     | 2            | 2    | 1     |
| $3.0 < C_s \leq 5.0$     | 4               | 2     | 2            | 3    | 1     |
| $5.0 < C_s \leq 9.0$     | -               | 1     | 1            | -    | -     |

La méthode de Bobée (1979) donne les meilleurs résultats pour des coefficients d'asymétrie compris dans l'intervalle [-1.0, 5.0] qui couvre la plupart des valeurs que l'on rencontre en hydrologie. L'erreur relative maximale en valeur absolue obtenue dans l'étude pour cette méthode est inférieure à 0.5% pour  $-3.5 \leq C_s \leq 5.0$ , et ce pour toutes les probabilités au dépassement  $1 - p$  considérées par Chowdhury et Stedinger.

---

<sup>1</sup> - signifie que la méthode ne convient pas à cette plage de  $C_s$ .

La procédure de Kirby (1972) se classe seconde. En particulier, elle reproduit correctement la borne inférieure théorique ( $-2/C_s$ ) qu'atteignent les quantiles de la loi Pearson Type 3 standardisée. Son erreur relative maximale en valeur absolue est inférieure à 5.0% sur toute la plage des coefficients d'asymétrie. La méthode proposée par Hoshi et Burges (1981) est aussi précise que celle de Kirby (1972) pour  $C_s \geq 0.5$ , mais devient moins performante lorsque  $C_s < 0.5$ . Enfin, l'approximation de Kite (1976) est comparable à celle de Wilson et Hilferty (1931) et ne donne pas une très bonne précision.

La méthode proposée par Bobée (1979) étant la plus performante pour les valeurs du coefficient d'asymétrie qui nous intéressent, elle a été introduite dans le logiciel AJUSTE. Ainsi, chaque fois qu'un usager ajuste la loi Pearson Type 3 ou l'une des distributions dérivées à un ensemble de données, le programme fait appel aux polynômes de Tchebichef. Le chapitre qui suit décrit cette méthode d'approximation.

## CHAPITRE 2

### POLYNOMES DE TCHEBICHEF

#### 2.1 Aspects théoriques

Soit une fonction  $f(x)$  continue ou sous forme d'une table, prenant ses valeurs dans le domaine  $D$  (qui peut être soit un intervalle continu, soit un ensemble discret de points), que l'on veut approximer par un polynôme en  $x$ ,  $F_n(x)$ , de degré  $n$ . Supposons, de plus, que nous désirons obtenir le polynôme qui minimise une somme des écarts aux carrés pondérés. Alors, un tel polynôme est défini de la façon suivante :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k f_k(x) = \sum_{k=0}^n d_k x^k \quad (2.1)$$

où les coefficients  $a_k$  sont donnés par :

$$a_k = \frac{(f, f_k)}{(f_k, f_k)} \quad \text{avec } f_k = f_k(x) \quad (2.2)$$

$(f, g)$  étant le produit scalaire défini de la manière suivante :

$$(f, g) = \left\{ \begin{array}{l} \int_D w(x)f(x)g(x)dx, D \text{ est un intervalle continu} \\ \sum_{i=1}^N w(x_i)f(x_i)g(x_i), D \text{ est un ensemble } \in N \text{ points} \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

La fonction  $w(x) \geq 0$  est une fonction de poids choisie selon l'importance relative que l'on accorde aux erreurs dans différentes parties du domaine  $D$ . Les  $f_k(x)$  sont des polynômes d'ordre  $k$  orthogonaux sur ce domaine relativement à la fonction de poids considérée, c'est-à-dire :

$$(f_k, f_{k'}) = 0, \quad \forall k \neq k' \quad (2.4)$$

Lorsque le domaine  $D$  de la fonction  $f(x)$  est un ensemble de points discrets également espacés et que la fonction de poids peut être raisonnablement définie par  $w(x) = 1, \forall x \in D$ , une façon simple d'approximer  $f(x)$  est d'utiliser les polynômes orthogonaux  $T_k$  de Tchebichef (Abramowitz et Stegun, 1972) adaptés aux espaces discrets.

Pour  $x_i = i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ), ceux-ci sont définis comme suit :

$$T_k(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k+j}{j} \frac{x!(N-j)!}{(x-j)!N!} \quad (2.5)$$

On peut montrer que le produit scalaire  $(T_k, T_l)$ , nécessaire au calcul des coefficients  $a_k$  (éq. 2.2), prend une forme simple pour ce type de polynômes orthogonaux :

$$(T_k, T_k) = \frac{(N+k+1)!(N-k)!}{(2k+1)(N!)^2} \quad (2.6)$$

De plus, pour le calcul pratique des polynômes de Tchebichef d'ordres variés, on peut utiliser la relation de récurrence suivante :

$$T_{k+1}(x) = \frac{(2k+1)(N-2x)T_k(x) - k(N+k+1)T_{k-1}(x)}{(k+1)(N-k)} \quad (2.7)$$

où, initialement,

$$T_0 = 1 \quad \text{et} \quad T_1 = 1 - \frac{2x}{N} \quad (2.8)$$

Les polynômes de Tchebichef, adaptés aux domaines discrets, peuvent donc être utilisés facilement afin d'approximer la table de Harter (1969) au sens des moindres carrés pondérés. Il suffit de les déterminer (éq. 2.5 ou 2.7 et 2.8), pour ensuite appliquer la procédure des moindres carrés décrite plus haut. La section qui suit traite de ce problème.

## 2.2 Approximation de la table de Harter par les polynômes de Tchebichef

Nous considérons ici l'approximation d'une portion de la table de Harter (1969). Celle-ci correspond aux quantiles de la loi Pearson Type 3 standardisée associés aux valeurs de  $C_s$  comprises dans l'intervalle  $[-4.0, 4.0]$ . Il nous apparaît suffisant de ne considérer que cet intervalle, puisqu'en hydrologie celui-ci couvre les valeurs rencontrées en pratique.

On est donc intéressé à approximer la fonction  $K_p(C_s)$  pour différentes valeurs de  $1 - p$  (probabilité au dépassement). Compte tenu de la relation de symétrie qui caractérise ces quantiles (éq. 1.1), nous nous sommes restreint, lors de l'application de la procédure décrite à la Section 2.1, au domaine qui correspond aux valeurs positives du coefficient d'asymétrie ( $0 < C_s \leq 4.0$ ). Ainsi, le domaine de la fonction  $K_p(C_s)$  est un ensemble de quarante points discrets également espacés (voir la table de Harter, 1969). Plus précisément, on a que :

$$D = C_s \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 4.0\}$$

Pour alléger la notation et pour être consistant avec celle de la Section 2.1, supposons que  $1 - p$  est fixe, et posons  $K_p(C_s) = f(C_s)$ . Nous cherchons donc un polynôme en  $C_s$ ,  $F_n(C_s)$ , qui approxime cette fonction.

Avant d'utiliser la procédure décrite à la section précédente pour approximer la table de Harter, on applique d'abord une transformation linéaire sur l'ensemble des quarante points de façon à ce que ceux-ci deviennent des entiers appartenant à l'ensemble  $\{1, 2, 3, \dots, 40\}$ . En effet, pour utiliser les polynômes de Tchebychev, il est nécessaire de définir un tel domaine (voir éq. 2.3). On note par  $x$  les nouveaux points ainsi obtenus, la transformation étant donnée par :

$$x = 10 C_s$$

Pour déterminer le polynôme  $F_n(C_s)$ , on procède comme suit :

- 1- On fixe le degré  $n$  du polynôme désiré;
- 2- On détermine les  $n$  polynômes orthogonaux de Tchebichef d'ordre  $k$ ,  $T_k$ , en utilisant les équations (2.5), (2.7) et (2.8);
- 3- On calcule les produits scalaires  $(T_k, T_k)$  en utilisant l'équation (2.6);
- 4- On calcule les produits scalaires  $(f, T_k)$  en utilisant l'équation (2.3), c'est-à-dire :

$$(f, T_k) = \sum_{x=1}^{40} T_k(x) f\left(\frac{x}{10}\right)$$

- 5- On détermine les coefficients  $a_k$  à l'aide de l'équation (2.2), c'est-à-dire :

$$a_k = \frac{(f, T_k)}{(T_k, T_k)}$$

- 6- On exprime le polynôme obtenu  $F_n(x)$  en fonction de  $C_s$  :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(10C_s) = \sum_{k=0}^n d_k C_s^k = F_n(C_s)$$

Un programme, développé à l'INRS-Eau, effectue ce type d'ajustement polynomial, au sens des moindres carrés, à partir de polynômes orthogonaux de Tchebichef. Pour un degré  $n$  spécifié par l'utilisateur, ce logiciel calcule automatiquement les coefficients des polynômes approximant la table de Harter (1969) pour 21 probabilités au dépassement  $1 - p$ . L'utilisateur peut aussi spécifier la portion de la table qu'il désire approximer en donnant les bornes inférieures et supérieures de  $C_s$  dans l'intervalle [0.1, 4.0]. Ce logiciel fournit les coefficients et les erreurs absolues qui comparent les approximations obtenues aux valeurs de la table de Harter. Le code du programme, développé en Turbo Pascal, est donné à l'annexe A.

Pour déterminer le degré du polynôme que nous avons incorporé au logiciel AJUSTE afin d'estimer les quantiles, nous avons effectué plusieurs essais. A la lumière des résultats obtenus, nous avons convenu, compte tenu des erreurs de mesures souvent observées dans les données de débits et de celles attribuables aux estimations des paramètres lors d'un ajustement, de considérer le polynôme de degré 4. En effet, dans la comparaison des approximations issues du polynôme de degré 4 avec les valeurs de la table de Harter (1969), les erreurs absolues sont inférieures à 0.01 pour l'ensemble des valeurs de  $C_s$ , et pour pratiquement toutes les probabilités au dépassement considérées. De plus, sachant qu'un polynôme de degré élevé peut très mal se comporter pour des points à l'extérieur du domaine de calibration, il nous semble raisonnable de considérer des polynômes de faible degré. La Figure 1 montre schématiquement les erreurs absolues observées après approximation de la portion de la table de Harter qui nous intéresse par le polynôme  $F_4(C_s)$

**Figure 1.** Erreurs absolues du polynôme de degré 4.

On tire principalement de cette figure les observations suivantes :

- 1- Les erreurs absolues sont inférieures à 0.001 pour la majorité des probabilités au dépassement qui intéressent plus particulièrement Hydro-Québec, soit 0.5 et moins;
- 2- Les erreurs absolues sont supérieures à 0.01 seulement pour de fortes probabilités au dépassement : 0.995, 0.999 et 0.9995.

Le polynôme à quatre degrés donne donc de très bons résultats. Toutefois, on a comparé celui-ci aux polynômes de degrés inférieurs afin de voir si ces derniers ne seraient pas aussi performant. Les Figures 2 à 7 comparent les polynômes de degré 1, 2, 3 et 4 selon l'erreur relative (éq. 1.10) pour les probabilités au dépassement  $1 - p$  égales à 0.9999, 0.99, 0.95, 0.5, 0.01 et 0.005. Cette mesure nous apparaît plus appropriée que l'erreur absolue comme critère de comparaison puisqu'elle tient compte du domaine. En effet, pour certaines portion de la table de Harter une bonne approximation peut être plus difficile à obtenir.

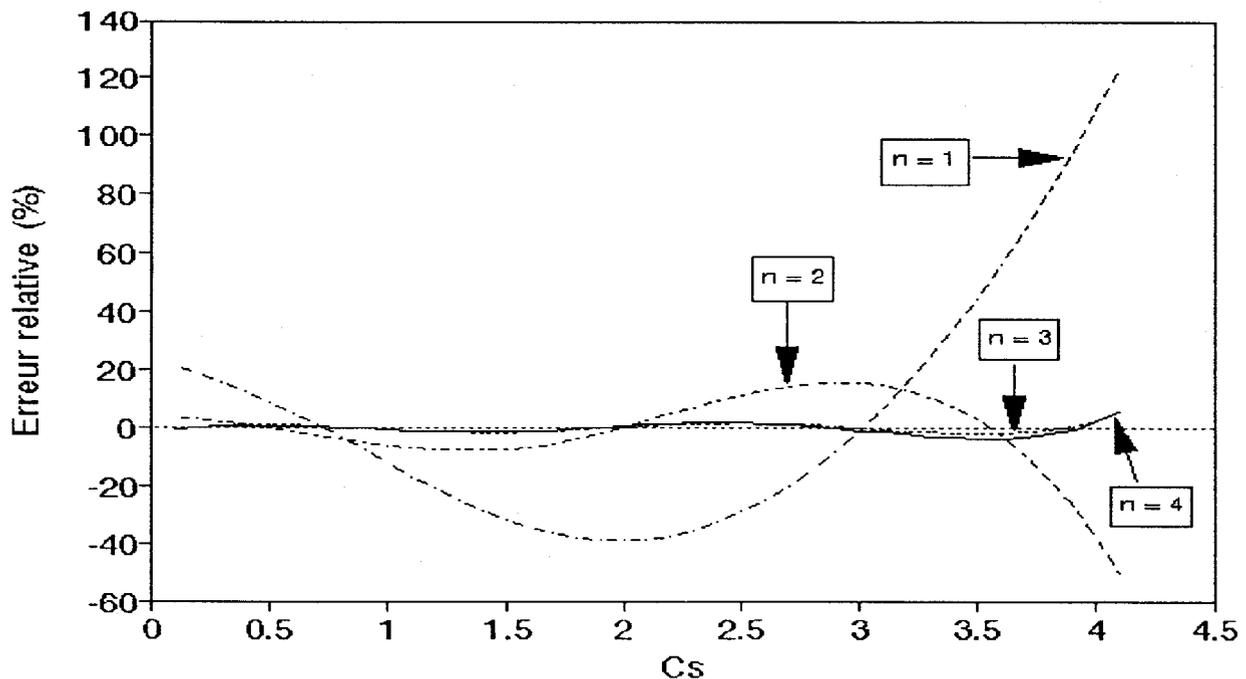


Figure 2. Erreurs relatives pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.9999$ .

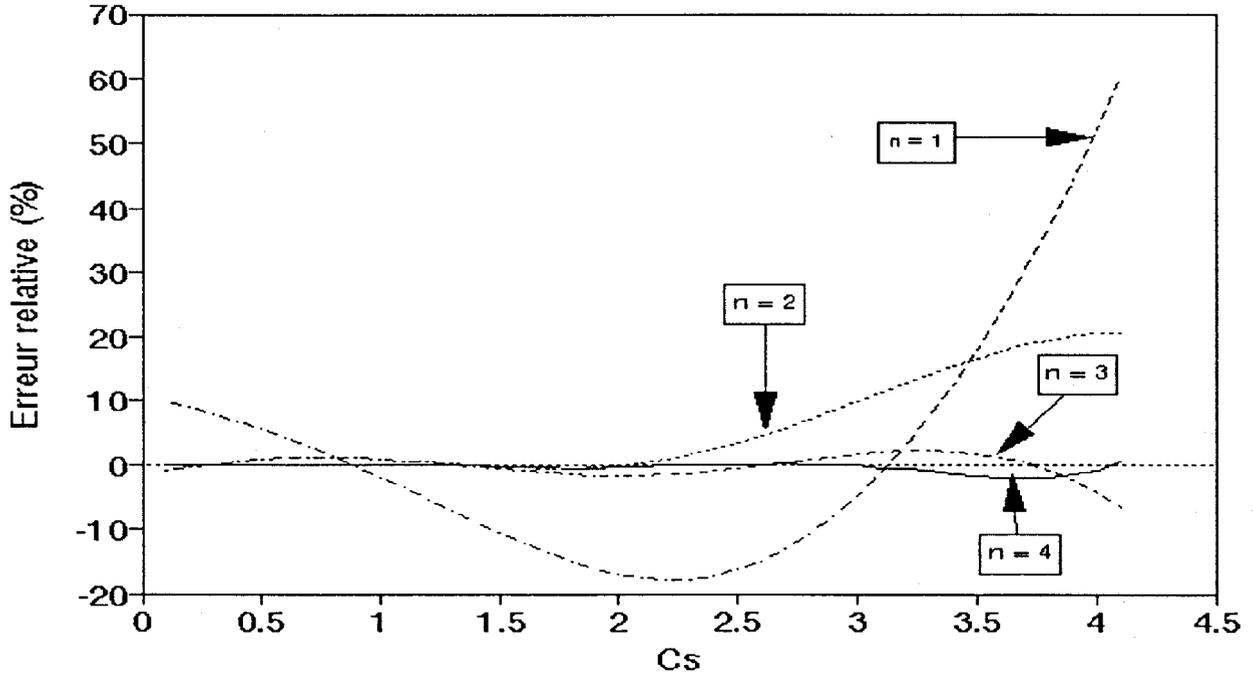


Figure 3. Erreurs relatives pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.99$ .

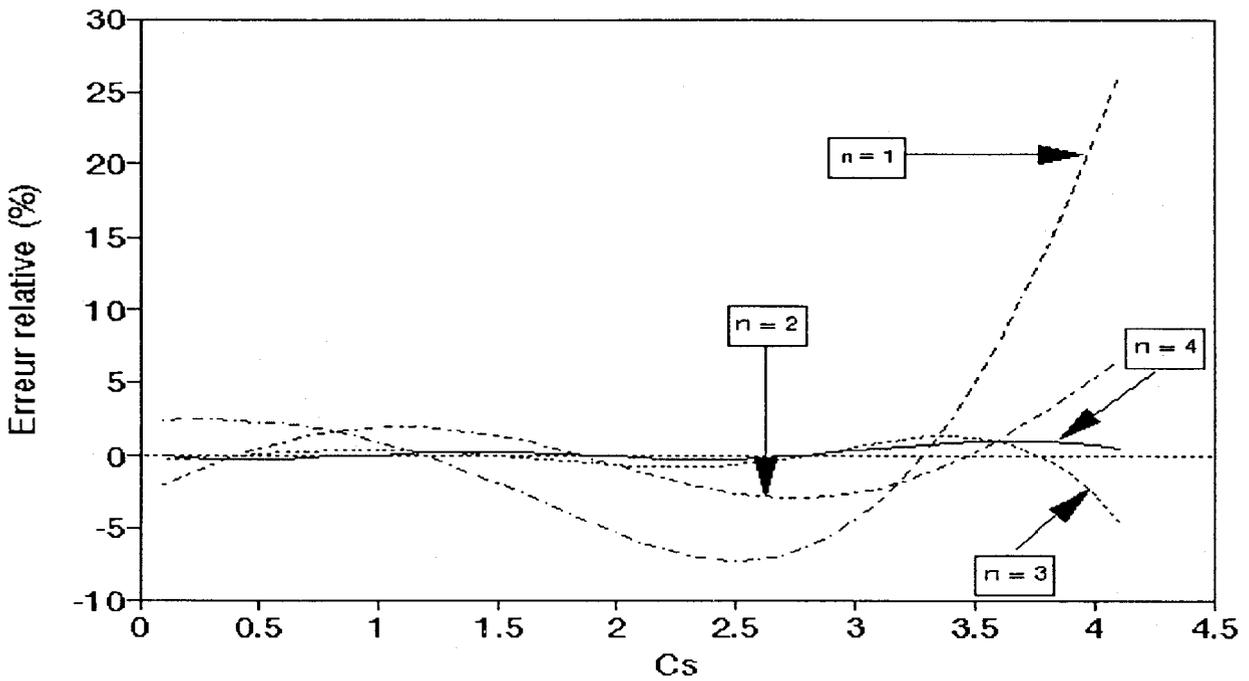


Figure 4. Erreurs relatives pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.95$ .

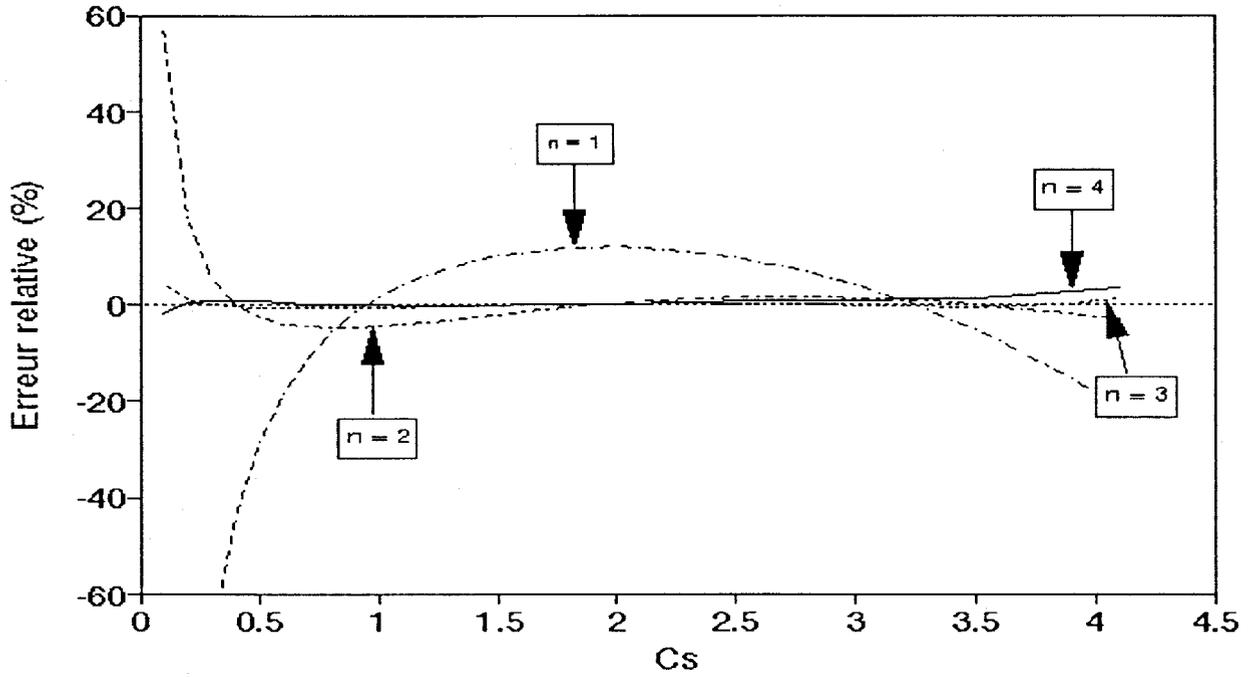


Figure 5. Erreurs relatives pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.5$ .

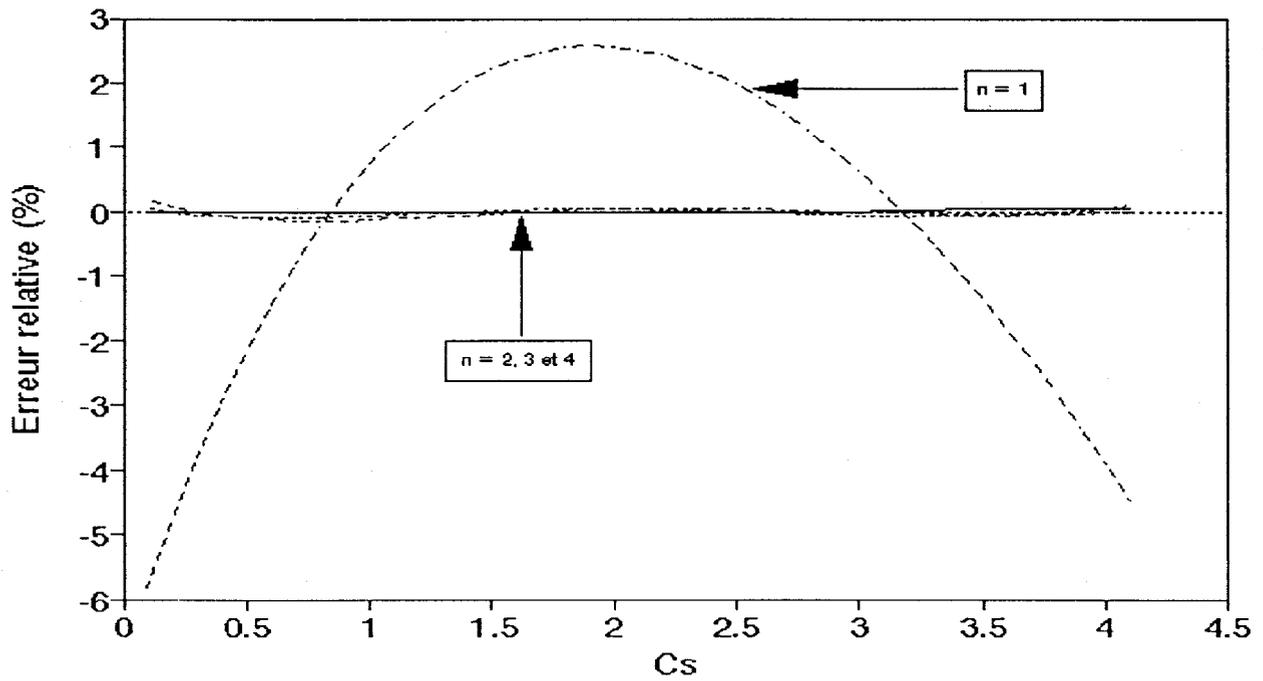


Figure 6. Erreurs relatives pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.01$ .

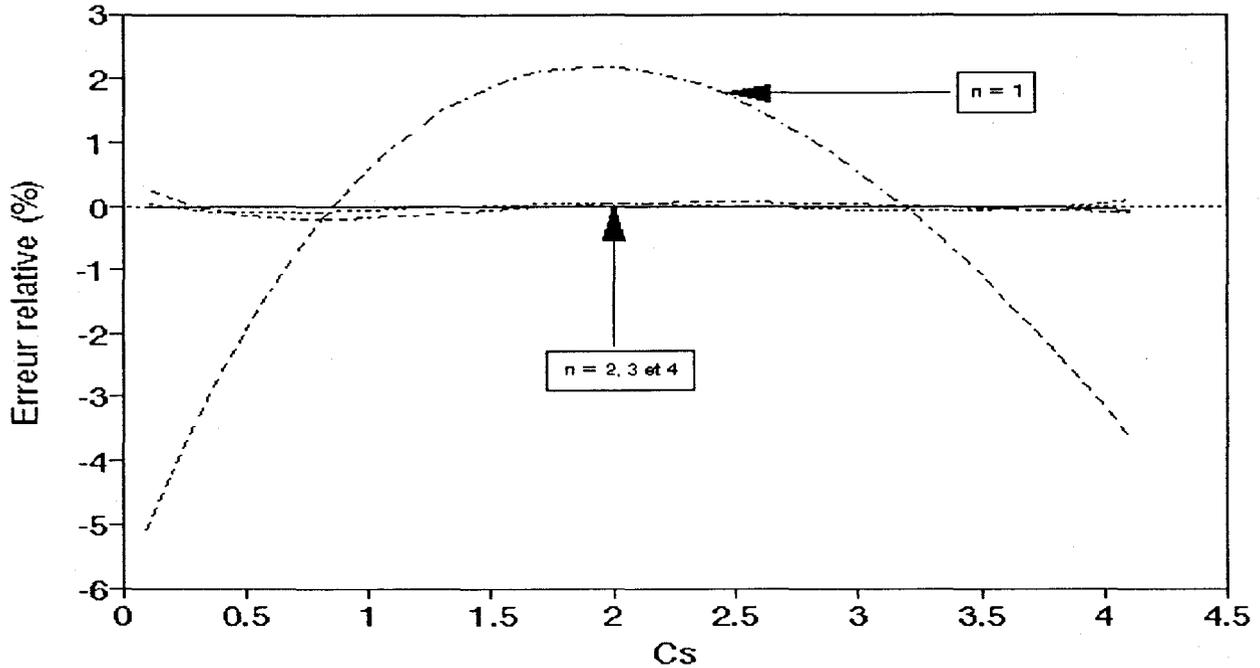


Figure 7. Erreurs relatives pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.005$ .

Nous remarquons que le polynôme de degré quatre donne les meilleurs résultats quoiqu'en général celui d'ordre trois a un comportement fort similaire. Cependant, comme nous le verrons dans l'étude de la dérivée  $\frac{dK_p(C_s)}{d(C_s)}$  (Chapitre 3), le polynôme de degré 4 approxime plus efficacement cette fonction. C'est pourquoi nous le retenons.

Les coefficients  $d_k$  de ce polynôme sont donnés pour 21 probabilités au dépassement  $1 - p$  au Tableau 2.

Nous discutons dans le chapitre qui suit de l'approximation de cette dérivée. En effet, cette quantité étant nécessaire au calcul de la variance asymptotique de l'estimateur de  $X_p$ , on doit l'approximer.

**Tableau 2.** Coefficients du polynôme de degré 4 pour 21 probabilités au dépassement  $1 - p$ .

| $1 - p$ | Coefficients  |               |               |               |               |
|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|         | $d_0$         | $d_1$         | $d_2$         | $d_3$         | $d_4$         |
| 0.0001  | 3.71614E(+0)  | 2.16774E(+0)  | 1.12977E(-1)  | -4.45680E(-2) | 3.96968E(-3)  |
| 0.0005  | 3.28882E(+0)  | 1.65508E(+0)  | 5.05707E(-2)  | -3.06119E(-2) | 2.78799E(-3)  |
| 0.0010  | 3.08892E(+0)  | 1.43793E(+0)  | 2.69371E(-2)  | -2.52839E(-2) | 2.34542E(-3)  |
| 0.0050  | 2.57523E(+0)  | 9.44787E(-1)  | -1.81393E(-2) | -1.47376E(-2) | 1.49707E(-3)  |
| 0.0100  | 2.32597E(+0)  | 7.38757E(-1)  | -3.24123E(-2) | -1.10135E(-2) | 1.21358E(-3)  |
| 0.0200  | 2.05352E(+0)  | 5.38160E(-1)  | -4.28302E(-2) | -7.78232E(-3) | 9.82718E(-4)  |
| 0.0500  | 1.64472E(+0)  | 2.84933E(-1)  | -4.93828E(-2) | -4.19201E(-3) | 7.59583E(-4)  |
| 0.1000  | 1.28142E(+0)  | 1.07657E(-1)  | -4.74915E(-2) | -1.82287E(-3) | 6.46719E(-4)  |
| 0.2000  | 8.41362E(-1)  | -4.69089E(-2) | -3.83075E(-2) | 8.65881E(-4)  | 5.09275E(-3)  |
| 0.3000  | 5.23933E(-1)  | -1.17299E(-1) | -2.91909E(-2) | 3.34621E(-3)  | 2.87031E(-4)  |
| 0.5000  | -9.61077E(-4) | -1.58299E(-1) | -1.37076E(-2) | 9.48677E(-3)  | -6.46024E(-4) |
| 0.7000  | -5.25250E(-1) | -1.12191E(-1) | 7.45350E(-3)  | 1.34780E(-2)  | -1.94097E(-3) |
| 0.8000  | -8.41251E(-1) | -4.91533E(-2) | 3.24050E(-2)  | 8.07586E(-3)  | -1.94164E(-3) |
| 0.9000  | -1.27831E(+0) | 8.19252E(-2)  | 8.34280E(-2)  | -1.45522E(-2) | 1.70272E(-4)  |
| 0.9500  | -1.63994E(+0) | 2.41089E(-1)  | 1.21127E(-1)  | -4.14784E(-2) | 3.47418E(-3)  |
| 0.9800  | -2.05005E(+0) | 4.94968E(-1)  | 1.25709E(-1)  | -6.80384E(-2) | 7.48092E(-3)  |
| 0.9900  | -2.32589E(+0) | 7.14910E(-1)  | 9.23829E(-2)  | -7.73100E(-2) | 9.53986E(-3)  |
| 0.9950  | -2.58002E(+0) | 9.53095E(-1)  | 3.10380E(-2)  | -7.71675E(-3) | 1.06249E(-2)  |
| 0.9990  | -3.10796E(+0) | 1.55124E(+0)  | -1.94287E(-2) | -4.64574E(-2) | 9.77831E(-3)  |
| 0.9995  | -3.31442E(+0) | 1.82014E(+0)  | -3.17570E(-2) | -2.29354E(-2) | 8.21544E(-3)  |
| 0.9999  | -3.75641E(+0) | 2.45437E(+0)  | -6.43257E(-2) | 4.84558E(-2)  | 2.54792E(-3)  |

## CHAPITRE 3

### APPROXIMATION DE LA DERIVEE PAR RAPPORT A $C_s$ DES QUANTILES DE LA LOI P3 STANDARDISEE

Pour déterminer la variance asymptotique d'un estimateur  $\hat{X}_p$  du quantile  $X_p$  de la loi Pearson Type 3, ou d'une loi dérivée de celle-ci, il est nécessaire de calculer la dérivée par rapport à  $C_s$  du quantile  $K_p(C_s)$  de la loi P3 standardisée.

Plusieurs approches peuvent être considérées pour obtenir cette valeur. Une façon naturelle serait de procéder par dérivation numérique de la table de Harter (1969). En effet, en utilisant la définition de la dérivée en un point, on peut obtenir une approximation de la dérivée pour un coefficient d'asymétrie et une probabilité au dépassement  $1 - p$  donnés à l'aide de l'expression suivante :

$$\frac{dK_p(C_s)}{dC_s} \approx \frac{K_p(C_s + \varepsilon) - K_p(C_s - \varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (3.1)$$

En prenant  $\varepsilon = 0.1$ , puisque  $C_s$  varie par pas de 0.1 dans la table, on peut ainsi obtenir la dérivée en tout point du domaine. Cette approche, quoiqu'efficace puisque la fonction  $K_p(C_s)$  est absolument continue et dérivable en tout point, nécessite l'entrée des valeurs de la table de Harter dans le logiciel AJUSTE et le calcul systématique de la dérivée pour chaque valeur. Cette contrainte, comme nous l'avons mentionnée plus haut, nous apparaît importante. C'est pourquoi, nous avons adopté une approche différente.

Une approximation tout aussi naturelle que la dérivation numérique consiste à utiliser l'expression de la dérivée des polynômes présentés à la Section 2.2, c'est-à-dire :

$$\frac{dK_p(C_s)}{dC_s} \approx \frac{dF_n(C_s)}{dC_s} = \sum_{k=1}^n k d_k C_s^{k-1} \quad (3.2)$$

Les coefficients  $d_k$  étant à notre disposition et puisqu'on obtient une fonction explicite de la dérivée, cette méthode nous apparaît la plus pratique. De plus, vue les caractéristiques de la fonction que l'on veut dériver (fonction continue et dérivable en tout point), cette approche devrait donner des résultats assez précis.

Nous avons examiné le comportement de cette approximation (éq. 3.2) pour des degrés  $n = 3, 4$ . Pour ce faire, on a tracé les valeurs obtenues à partir des deux polynômes en fonction de  $C_s$  pour les mêmes probabilités au dépassement qu'à la Section 2.2, soit 0.9999, 0.99, 0.95, 0.5, 0.01 et 0.005. Nous avons ajouté à ces courbes les valeurs issues de la dérivée numérique de la table de Harter (éq. 3.1) comme critère de comparaison. Ces graphiques sont présentés aux Figures 8 à 13.

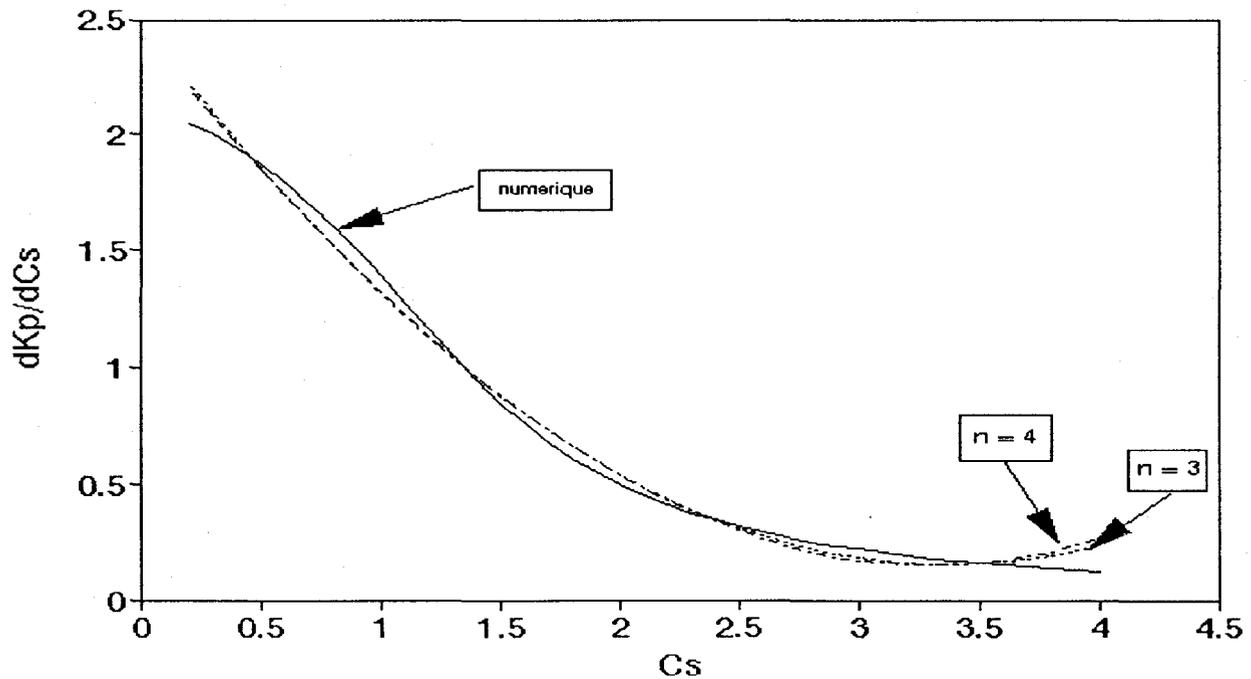


Figure 8. Approximations des dérivées pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.9999$ .

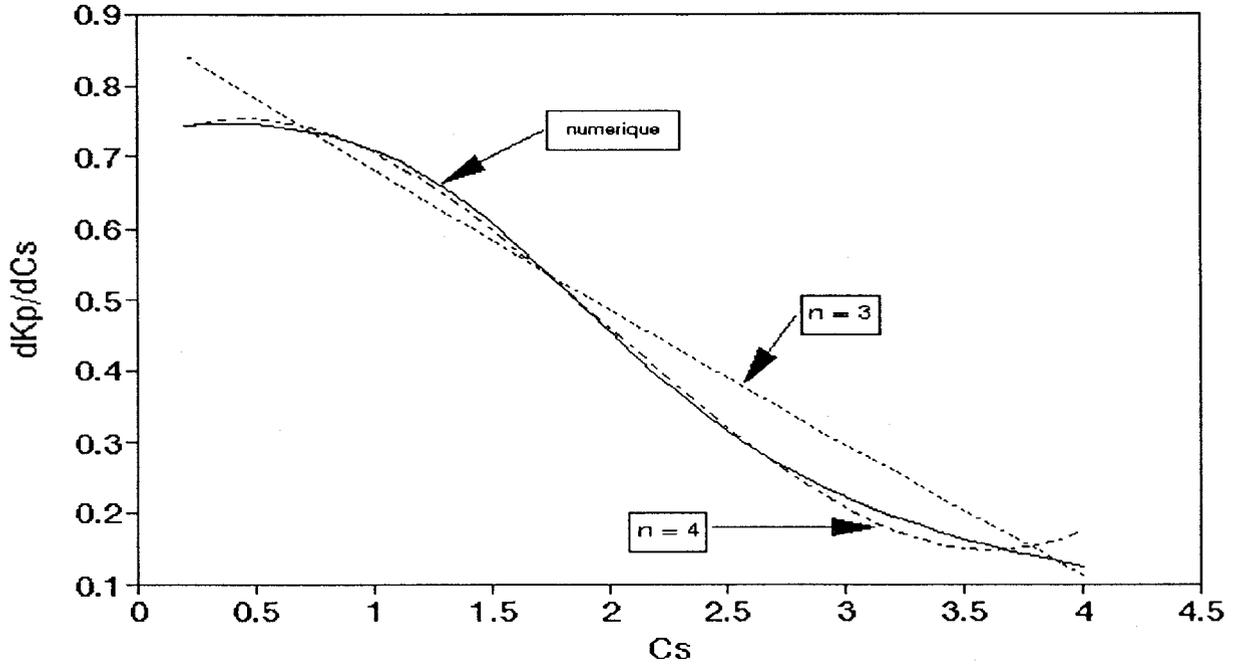


Figure 9. Approximations des dérivées pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.99$ .

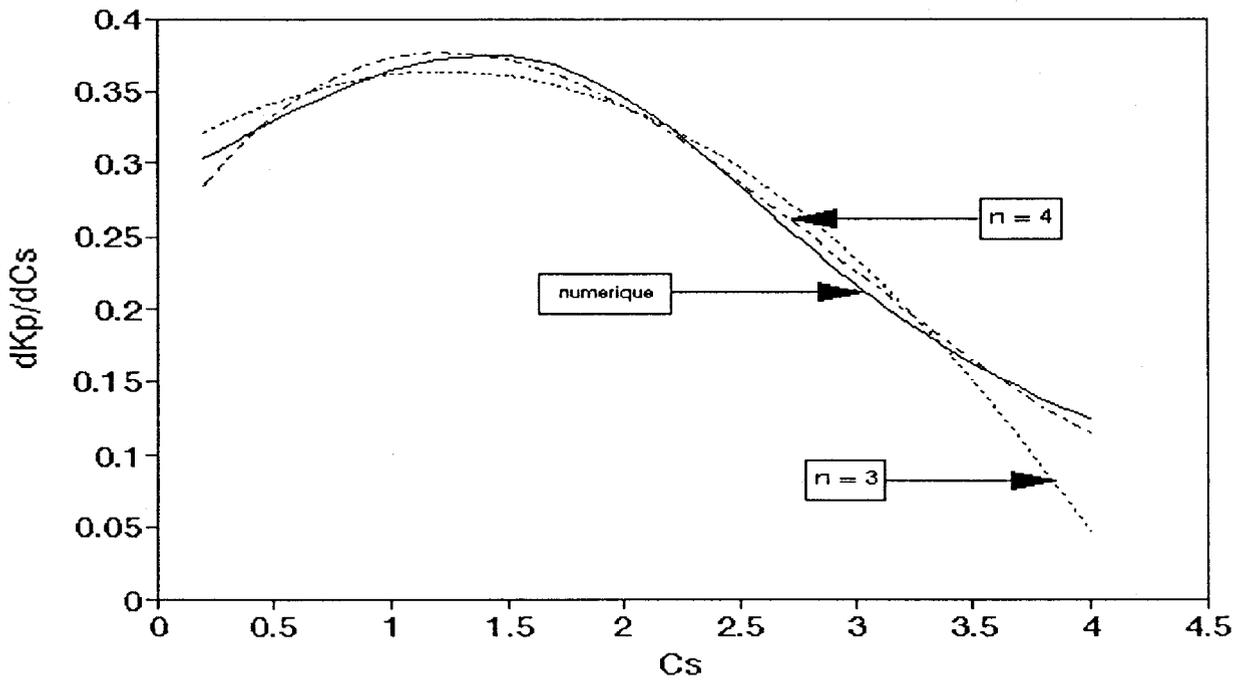


Figure 10. Approximations des dérivées pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.95$ .

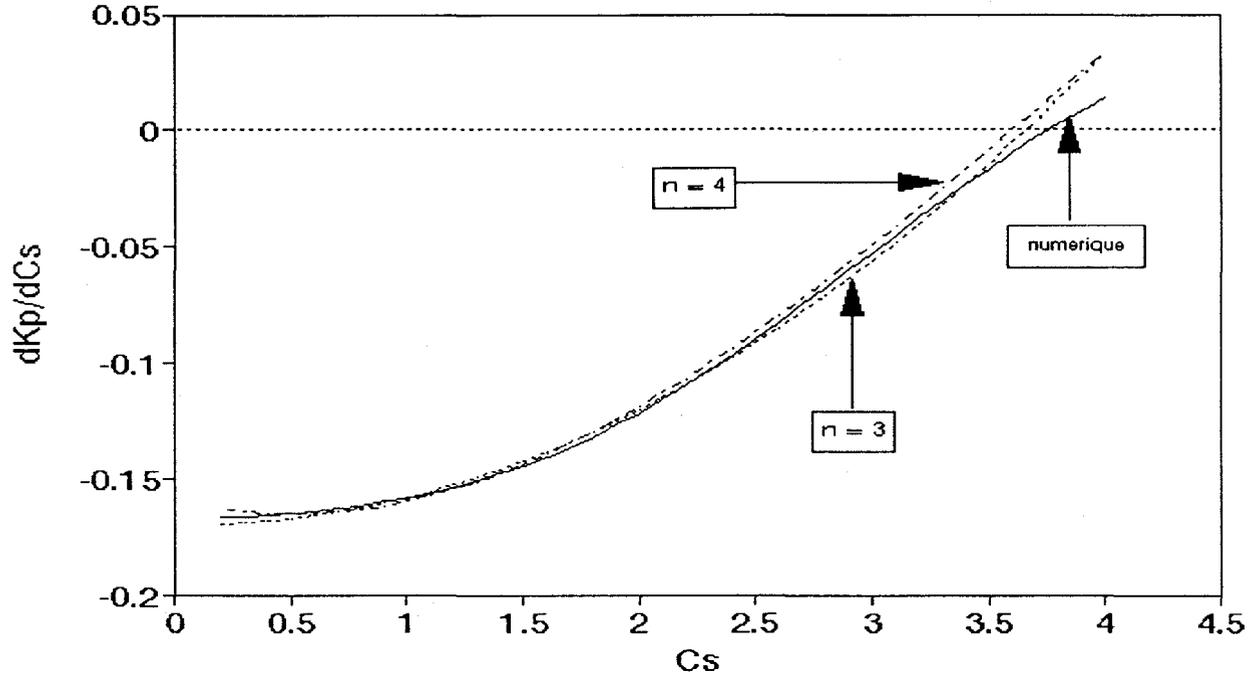


Figure 11. Approximations des dérivées pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.5$ .

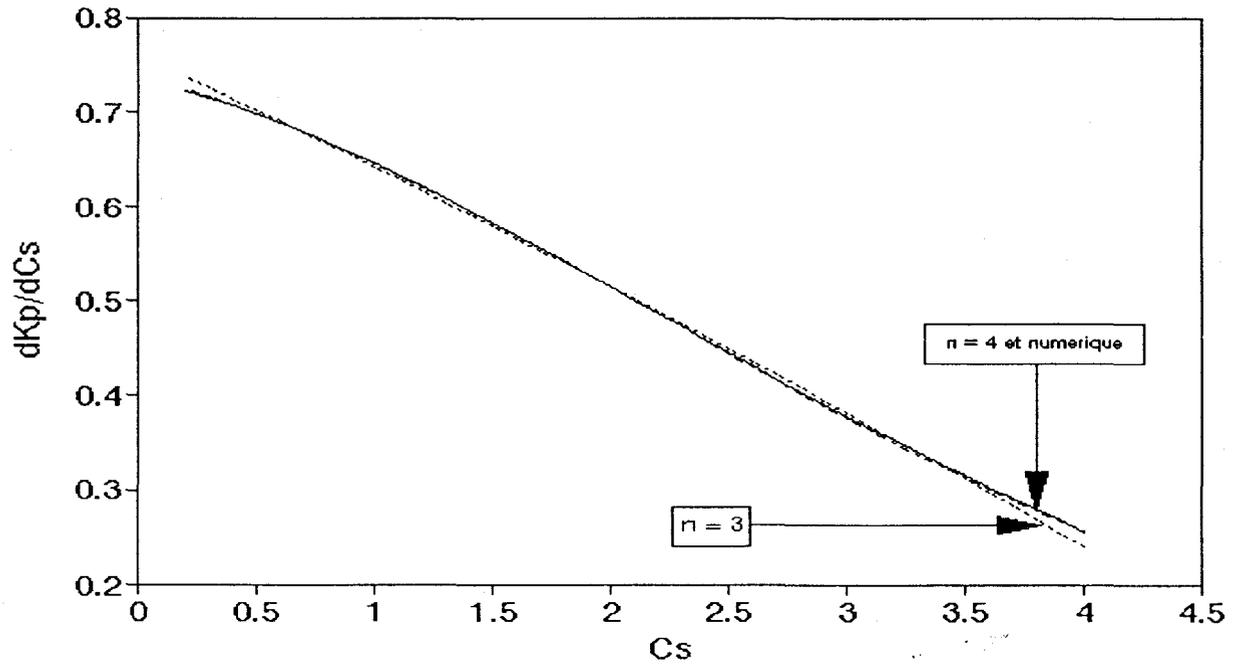


Figure 12. Approximations des dérivées pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.01$ .

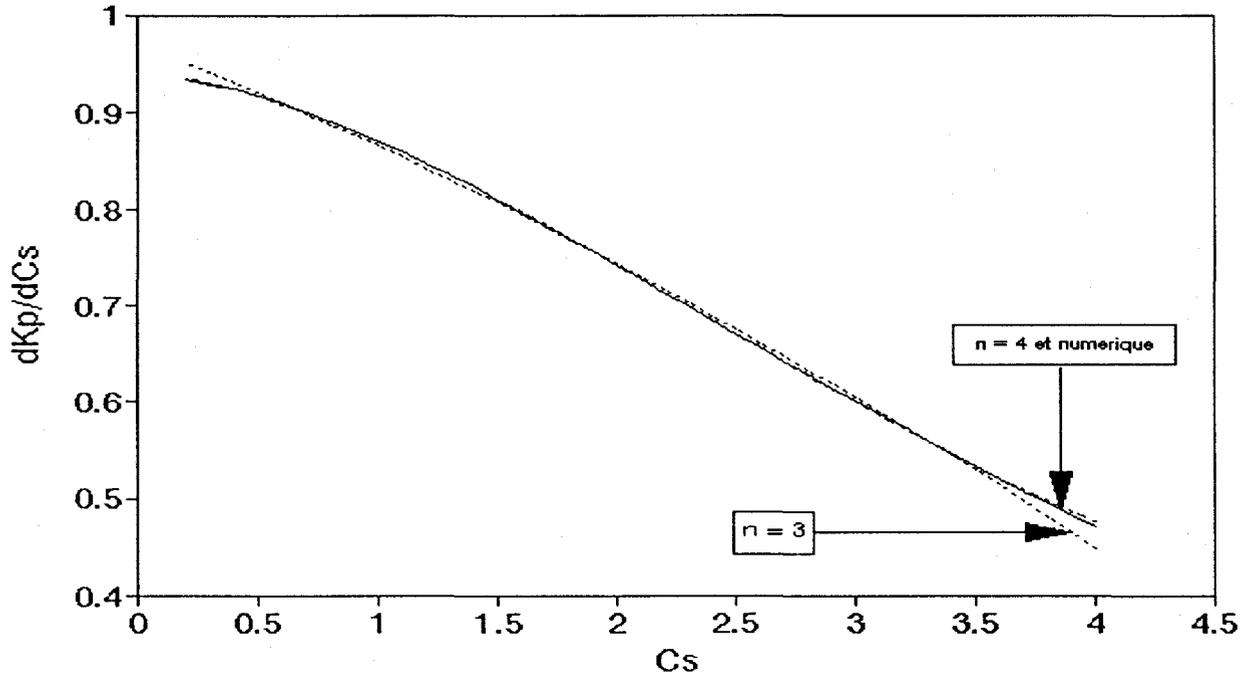


Figure 13. Approximations des dérivées pour la probabilité au dépassement  $1 - p = 0.005$ .

La dérivée déduite du polynôme d'ordre 4,  $F_4(C_s)$ , donne de meilleures approximations que celles issues du polynôme de degré 3  $F_3(C_s)$ . En particulier, pour les probabilités au dépassement 0.99 et 0.95, la dérivée de  $F_4(C_s)$  est nettement plus proche de la dérivée numérique (Figures 9 et 10). On remarque aussi que cette approximation s'éloigne moins des valeurs attendues aux extrémités du domaine ( $C_s < 0.5$  et  $C_s > 3.5$ ) lorsque la probabilité au dépassement est faible (0.01, Figure 12 ; 0.005, Figure 13).

Ces observations justifient l'emploi de la dérivée de  $F_4(C_s)$  pour approximer  $\frac{dK_p(C_s)}{dC_s}$ . De plus, cela confirme le choix de ce polynôme afin d'approcher les valeurs de la table de Harter (1969).

## CONCLUSION

Ce rapport traite de l'approximation des quantiles de la loi Pearson Type 3 standardisée nécessaires au calcul des quantiles de la loi Pearson Type 3 ou d'une loi dérivée de celle-ci. Partant des résultats de l'étude comparative de Chowdhury et Stedinger (1991), nous avons présenté en détail la méthode proposée par Bobée (1979) qui utilise les polynômes de Tchebychev. Nous avons montré qu'un polynôme à quatre degrés est suffisant pour bien approximer ces quantiles compte tenu des erreurs de mesures souvent observées dans les données de débits et de celles attribuables aux estimations des paramètres. Enfin, nous avons proposé une manière simple d'approcher la dérivée, par rapport au coefficient d'asymétrie, des quantiles  $K_p(C_s)$ . Cette valeur est utilisée lors du calcul de la variance asymptotique de  $\hat{X}_p$ .

Tous les développements présentés dans ce rapport ont été effectués dans le but d'introduire ces approximations dans le logiciel AJUSTE qui permet de faire l'ajustement automatique d'une distribution théorique choisie à une série de données observées. Ce logiciel fournit aussi les quantiles estimés pour 21 probabilités au dépassement ainsi que les intervalles de confiance asymptotiques associés à ces événements pour divers niveaux de confiance.

## BIBLIOGRAPHIE

Abramowitz, M. et Stegun, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York.

Bobée, B. (1979). Discussion of "Fitting the Pearson type 3 distribution in practice" par J. Buckett and F.R. Oliver. *Water Resour. Res.*, **15(3)**, 730.

Chow, V.T. (1964). *Handbook of Applied Hydrology*. McGraw-Hill, New York, N.Y.

Chowdhury, J.U. et Stedinger J.R. (1991). Confidence interval for design floods with estimated skew coefficient. *Journal of Hydraulic Engineering*, **117(7)**, 811-831.

Harter, H.L. (1969). A new table of percentage points of the Pearson type III distribution. *Technometrics*, **11(1)**, 177-187.

Hoshi, K. et Burges, S.J. (1981). Approximate estimation of the derivative of a standard gamma quantile for use in confidence interval estimates. *Journal of Hydrology*, **53(3/4)**, 317-325.

Kirby, W. (1972). Computer-oriented Wilson-Hilferty transformation that preserves the first three moments and the lower bound of the Pearson type 3 distribution. *Water Resour. Res.*, **8(5)**, 1251-1254.

Kite, G.W. (1975). Confidence limits for design events. *Water Resour. Res.*, **11(1)**, 48-53.

Kite, G.W. (1976). Reply to comment on "Confidence limits for design events". *Water Resour. Res.*, **12(4)**, 826.

McGinnis, D.G. et Sammons, W.H. (1970). Discussion of "Daily stream flow simulation" par K. Paine, W.R. Neuman et K.P. Kerri. *J. Hydr. Div., ASCE*, **96(5)**, 1201-1206.

McMahon, T.A. et Miller, A.J. (1967). Application of the Thomas and Fiering model to skewed hydrologic data. *Water Resour. Res.*, **3(4)**, 937-946.

Wilson, E.B. et Hilferty, M.M. (1931). The distribution of Chi-square. *Proc. National Academy Sci.*, **17**, 684-688.

**ANNEXE A**

**PROGRAMME EN PASCAL AJUSTANT UN  
POLYNOME A LA TABLE DE HARTER**

## Programme Hartcheb

```
Program HarterTchebichef;
{Ajuste des polynomes de Tchebichef pour obtenir la table de Harter}
Uses BinHart, ChevChev, Crt;

Const
  ProbDep : Array[IntProb] of Double =
    (0.0001,0.0005,0.001,0.005,0.01,0.02,0.05,0.1,0.2,0.3,0.5,
     0.7,0.8,0.9,0.95,0.98,0.99,0.995,0.999,0.9995,0.9999);

Var Harter : TableHarter;
    Ajustement : Array[IntProb] of Polynome;
    IBinf, IBsup : IntCs;

Procedure Ajuster;
  Var NoPolynome : IntProb;
      Degre : IntDegre;
      Binf, Bsup : Double;
      Cs : IntCs;
  Begin {Ajuster}
    Write ('Quel est le degré du polynome à ajuster : ');
    Readln (Degre);
    Write ('Entrez la borne inférieure pour le Cs : ');
    Readln (Binf);
    Write ('Entrez la borne supérieure pour le Cs : ');
    Readln (Bsup);
    IBinf := Trunc (Binf * 10);
    IBsup := Trunc (Bsup * 10);
    For NoPolynome := 1 to NbProb do
      Begin {Ajuster un polynome}
        Harter[NoPolynome].DernPoint := IBsup - IBinf;
        For Cs := IBinf to IBsup do
          Harter[NoPolynome].Valeur[Cs - IBinf] :=
            Harter[NoPolynome].Valeur[Cs];
          Ajustement[NoPolynome].Degre := Degre;
          Ajuste_Tchebichef (Harter[NoPolynome],Ajustement[NoPolynome])
        End; {Ajuster un polynome}
      End; {Ajuster}
  End;

Procedure Transformer;
  Var NoPolynome : IntProb;
      NoCoef : IntDegre;
  Begin {Transformer}
  End; {Transformer}
```

```
Procedure Imprimer (Var F : Text);
  Var NoCoef : IntDegre;
      NoPolynome : IntProb;
  Begin {Imprimer}
    Writeln (F);
    Writeln (F,'Coefficients :');
    Writeln (F,'-----');
    Writeln (F);
    For NoPolynome := 1 to NbProb do
      Begin
        Writeln (F);
        Writeln (F,'Probabilité au dépassement : ',ProbDep[NoPolynome]);
        For NoCoef := 0 to Ajustement[NoPolynome].Degre do
          Writeln (F,'x^',NoCoef,' : ',Ajustement[NoPolynome].Coef[NoCoef])
        End
      End; {Imprimer}
Procedure Comparer;
  Var TotErreur : Double;
  Function Code_Comp (N1, N2 : Double) : Char;
    Const Degrade : String[5] = 'x****';
    Legende : Array [1..5] of Double =
      (0,0.1,0.01,0.001,0.0001);
    Var Difference : Double;
        i : 1..5;
    Begin {Code_Comp}
      Difference := Abs (N1-N2);
      TotErreur := TotErreur + Difference;
      Code_Comp := Degrade[5];
      For i := 5 downto 2 do
        If Difference >= Legende[i] Then
          Code_Comp := Degrade[i-1]
        End; {Code_Comp}
    Var NoPolynome : IntProb;
        Cs : IntCs;
        Nom_Fic : String;
        Fichier : Text;
    Begin {Comparer}
      TotErreur := 0;
      Write ('Nom du fichier: ');
      Readln (Nom_Fic);
      Assign (Fichier,Nom_Fic);
      Rewrite (Fichier);
      Writeln (Fichier,'ESTIMATION DE Kt: TCHEBICHEF DEGRE DU POLYNOME: ',
        Ajustement[1].Degre);
      Writeln (Fichier,'PROB 0 1 2 3 4');
      For NoPolynome := 1 to NbProb do
        Begin
          Write (Fichier,ProbDep[NoPolynome]:6:4,' ');
```

```
For Cs := 0 to MaxCs do
  If (Cs >= IBinf) and (Cs <= IBsup) Then
    Write (Fichier,
           Code_Comp (Harter[NoPolynome].Valeur[Cs-IBinf],
                     EvalPoly (Ajustement[NoPolynome],Cs-IBinf))
    Else
      Write (Fichier, ' ');
    Writeln (Fichier)
  End;
Writeln (Fichier,'Somme des erreurs absolues : ',TotErreur);
Writeln (Fichier,Chr(12));
Imprimer (Fichier);
Close (Fichier)
End; {Comparer}

Begin {HarterTchebichef}
ClrScr;
(*Convertir ('HARTER.PRN','HARTER.BIN');*)
Lire ('HARTER.BIN',Harter);
Ajuster;
Comparer;
Transformer
End. {HarterTchebichef}
```

### Programme ChebChev

```
Unit Chebchev;
{Ajuste un polynome a une serie de n+1 points (x,f(x)),}
{où les x sont les entiers de 0 à n }
{-----}
Interface
{-----}

Const
  MaxDegre = 20;
  MaxPoint = 100;

Type
  IntDegre = 0..MaxDegre;
  IntPoint = 0..MaxPoint;
  Polynome = Record
    Degre : IntDegre;
    Coef : Array [IntDegre] of Double
  End; {Polynome}
```

```
Experience = Record
  DemPoint : IntPoint;
  Valeur : Array [IntPoint] of Double
End; {Experience}

Procedure Ajuste_Tchebichef (Point : Experience; Var Ajustement : Polynome);
{Trouve le polynome minimisant la somme des carres des residus
Entree : Point : DemPoint : nombre de points experimentaux
      : Valeur : valeur de chacun des points
Ajustement : Degre : degre du polynome a trouver
Sortie : Ajustement : Polynome minimisant la somme des carres des residus}

Function EvalPoly (F : Polynome; x : Double) : Double;
{Evalue un polynome F en un point x}
{-----}
Implementation
{-----}

Function Expo (x, y : Double) : Double;
{ y}
{Evalue x }
Begin {Expo}
  If y = 0 Then
    Expo := 1
  Else If x = 0 Then
    Expo := 0
  Else
    Expo := Exp (y * ln(x))
End; {Expo}

Function EvalPoly (F : Polynome; x : Double) : Double;
{Evalue un polynome F en un point x}
  Var i : IntDegre;
  Resultat : Double;

  Begin {EvalPoly}
  Resultat := 0;
  For i := 0 to F.Degre do
    Resultat := Resultat + F.Coeff[i] * Expo (x,i);
  EvalPoly := Resultat
End; {EvalPoly}

Procedure Ajuste_Tchebichef (Point : Experience; Var Ajustement : Polynome);
{Trouve le polynome minimisant la somme des carres des residus
Entree : Point : DemPoint : nombre de points experimentaux
      : Valeur : valeur de chacun des points
Ajustement : Degre : degre du polynome a trouver
Sortie : Ajustement : Polynome minimisant la somme des carres des residus}

Type Ortho = Array [IntDegre] of Polynome;
```

```
Procedure Calculer_Fk (Point : Experience; Degre : IntDegre;
    Var Fk : Ortho);
{Calcule les polynomes orthogonaux }
    Procedure Estimer_un_Fi (NbPoint : IntPoint; Fk : Ortho;
        Degre : IntDegre; Var F : Polynome);
{Calcule un polynome orthogonal }
    Var i : IntDegre;
    Begin {Estimer_un_Fi}
    F.Degre := Degre;
    If Degre = 0 Then
        F.Coeff[0] := 1
    Else If Degre = 1 Then
        Begin
        F.Coeff[0] := 1;
        F.Coeff[1] := -2 / NbPoint
        End
    Else {Degre > 1}
        Begin
        F.Coeff[Degre] := 0;
        For i := 0 to Degre - 1 do
            F.Coeff[i] :=
                Fk[Degre-1].Coeff[i]*(2*Degre-1)*NbPoint;
        For i := 0 to Degre - 2 do
            F.Coeff[i] := F.Coeff[i] -
                Fk[Degre-2].Coeff[i]*(Degre-1)*(NbPoint+Degre);
        For i := 1 to Degre do
            F.Coeff[i] := F.Coeff[i] -
                Fk[Degre-1].Coeff[i-1]*(2*Degre-1)*2;
        For i := 0 to Degre do
            F.Coeff[i] := F.Coeff[i] / (Degre*(NbPoint-Degre+1))
        End
        End; {Estimer_un_Fi}
    Var i : IntDegre;
    N : IntPoint;
    Begin {Calculer_Fk}
    For i := 0 to Degre do
        Estimer_un_Fi (Point.DernPoint,Fk,i,Fk[i]);
    End; {Calculer_Fk}
Procedure Estimer_Ak (Point : Experience; Degre : IntDegre; Fk : Ortho;
    Var Ak : Polynome);
{Estime le rapport des produits scalaires suivant: (Point, Fk)
pour chacun des Fk
    (Fk,Fk) }
```

```
Function Produit_Scalaire_2_Fn
  (F, G : Polynome; NbPoint : IntPoint) : Double;
{Estime le produit scalaire de deux fonctions}
  Var i : IntPoint;
  Produit : Double;
  Begin {Produit_Scalaire_2_Fn}
  Produit := 0;
  For i := 0 to NbPoint do
    Produit := Produit + EvalPoly (F,i) * EvalPoly (G,i);
  Produit_Scalaire_2_Fn := Produit
  End; {Produit_Scalaire_2_Fn}

Function Produit_Scalaire_Point_Fn
  (F : Polynome; Point : Experience) : Double;
{Estime le produit scalaire entre une fonction et les donnees}
  Var i : IntPoint;
  Produit : Double;
  Begin {Produit_Scalaire_Point_Fn}
  Produit := 0;
  For i := 0 to Point.DernPoint do
    Produit := Produit + EvalPoly (F,i) * Point.Valeur[i];
  Produit_Scalaire_Point_Fn := Produit
  End; {Produit_Scalaire_Point_Fn}

Var i : IntDegre;
Begin {Estimer_Ak}
Ak.Degre := Degre;
For i := 0 to Degre do
  Ak.Coeff[i] :=
    Produit_Scalaire_Point_Fn (Fk[i],Point) /
    Produit_Scalaire_2_Fn (Fk[i],Fk[i],Point.DernPoint)
End; {Estimer_Ak}

Procedure Simplifier (Fk : Ortho; Ak : Polynome;
  Var Ajustement : Polynome);
{Simplifie l'expression  $\sum Ak Fk$  pour obtenir  $\sum Ck x^k$ }

Function Calcul_du_Coef
  (Fk : Ortho; Ak : Polynome;
  Degre_Coef, Degre_Poly : IntDegre) : Double;
{Evalue un des coefficients Ck du polynome final}
  Var i : IntDegre;
  Coef : Double;
  Begin {Calcul_du_Coef}
  Coef := 0;
  For i := Degre_Coef to Degre_Poly do
    Coef := Coef + Ak.Coeff[i]*Fk[i].Coef[Degre_Coef];
  Calcul_du_Coef := Coef
  End; {Calcul_du_Coef}

Var i : IntDegre;
```

```
Begin {Simplifier}
  For i := 0 to Ajustement.Degre do
    Ajustement.Coeff[i] := Calcul_du_Coef (Fk,Ak,i,Ajustement.Degre)
  End; {Simplifier}
Var Ak : Polynome;
  Fk : Ortho;
Begin {Ajuste_Tchebichef}
  Calculer_Fk (Point,Ajustement.Degre,Fk);
  Estimer_Ak (Point,Ajustement.Degre,Fk,Ak);
  Simplifier (Fk,Ak,Ajustement)
End; {Ajuste_Tchebichef}
End.
```

### Programme BinHart

```
Unit BinHart;
{Convertit HARTER.PRN en fichier binaire, et permet de lire HARTER.BIN}

{-----}
Interface
{-----}

Uses
  Chebchev;

Const
  MaxCs = 41;
  NbProb = 21;

Type
  Path = String[80];
  IntCs = 0..MaxCs;
  IntProb = 1..NbProb;
  TableHarter = Array[IntProb] of Experience;

Procedure Convertir (FicSource, FicDest : Path);
Procedure Lire (FicSource : Path; Var Table : TableHarter);
{-----}
Implementation
{-----}

Procedure Convertir (FicSource, FicDest : Path);
  Var Source : Text;
      Dest : File of TableHarter;
      Cs : IntCs;
      Prob : IntProb;
      Table : TableHarter;
  Begin {Convertir}
  Assign (Source,FicSource);
  Assign (Dest,FicDest);
  Reset (Source);
  For Prob := 1 to NbProb do
    Begin {Lire une ligne du fichier}
    Table[Prob].DernPoint := MaxCs;
    For Cs := 0 to 15 do
      Read (Source,Table[Prob].Valeur[Cs]);
    Readln (Source)
    End; {Lire une ligne du fichier}
  Readln (Source);
  For Prob := 1 to NbProb do
```

```
Begin {Lire une ligne du fichier}
For Cs := 16 to 31 do
  Read (Source,Table[Prob].Valeur[Cs]);
  Readln (Source)
End; {Lire une ligne du fichier}
Readln (Source);
For Prob := 1 to NbProb do
  Begin {Lire une ligne du fichier}
  For Cs := 32 to 41 do
    Read (Source,Table[Prob].Valeur[Cs]);
    Readln (Source)
  End; {Lire une ligne du fichier}
Close (Source);
Rewrite (Dest);
Write (Dest,Table);
Close (Dest)
End; {Convertir}

Procedure Lire (FicSource : Path; Var Table : TableHarter);
  Var Source : File of TableHarter;
  Begin {Lire}
  Assign (Source,FicSource);
  Reset (Source);
  Read (Source,Table);
  Close (Source)
  End; {Lire}

End. {BinHart}
```