Record Number:
Author, Monographic: Paradis, M.//Bobée, B.
Author Role:
Title, Monographic: Les algorithmes de génération pour les distributions de la famille gamma
Translated Title:
Reprint Status:
Edition:
Author, Subsidiary:
Author Role:
Place of Publication: Québec
Publisher Name: INRS-Eau
Date of Publication: 1983
Original Publication Date: Août 1983
Volume Identification:
Extent of Work: 67
Packaging Method: pages incluant 2 annexes
Series Editor:
Series Editor Role:
Series Title: INRS-Eau, Rapport de recherche
Series Volume ID: 159
Location/URL:
ISBN: 2-89146-157-6
Notes: Rapport annuel 1983-1984
Abstract: 10.00$
Call Number: R000159
Keywords: rapport/ ok/ dl

LES ALGORITHMES DE GENERATION POUR LES DISTRIBUTIONS DE LA FAMILLE GAMMA

par

Marc Paradis

Rapport scientifique no 159

Août 1983

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La littérature est très abondante en ce qui concerne les algorithmes de génération de variables aléatoires selon les distributions de la famille Gamma. Leur usage s'étend aux études par simulation de nombreux phénomènes, parmi lesquels on peut retrouver les problèmes des files d'attente, des gestions d'inventaire, du contrôle de la qualité de certains objets manufacturés et particulièrement des débits de crue pour les modèles statistiques en hydrologie.

Des algorithmes très rapides, et qui sont également exacts, ont été développés depuis la fin des années 70 et il semblent êtres des candidats excellents pour les simulations d'envergure, toutefois d'autres algorithmes plus anciens et parfois approximatifs, sont encore d'usage courant en statistiques. Ce rapport a pour but de préciser la notion de "qualité de la génération" et d'effectuer des recommandations pour le choix des algorithmes dans le cadre des plans de simulation de la variable gamma pour différents paramètres de forme.

GÉNÉRALITÉS

La fonction de densité gamma est la suivante:

$$f(x) = \frac{e^{-x} \, x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$$

pour $x \geqslant 0$ et $\lambda > 0$

$\Gamma(\lambda)$ est la fonction gamma du paramètre λ:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda} \, x^{\lambda-1} \, dx$$

Cette fonction est à l'origine de distributions plus intéressantes telles que Pearson type 3, gamma généralisée, log-gamma, log-Pearson ... Ces dernières possèdent un potentiel intéressant pour les travaux d'analyse des données avec calculs des probabilités et des intervalles de confiance, ceci est dû au fait que les fonctions de la famille gamma possèdent des propriétés théoriques particulières et permettent d'en arriver à des considérations fondamentales en statistiques. Comme mentionné auparavant, la génération des variables aléatoires du type gamma a fait l'objet de travaux considérables, car un simple changement de variable permet de passer aux fonctions plus complexes et plus utiles.

La fonction de distribution gamma s'obtient ainsi:

$$F(w) = \int_0^w f(x)\ dx = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^w e^{-x}\ x^{\lambda-1}\ dx = \frac{\Gamma(w,\ \lambda)}{\Gamma(\lambda)}$$

$\Gamma(w, \lambda)$ est la fonction gamma incomplète correspondant à l'événement W considéré, en fonction du paramètre de forme λ. Malheureusement cette intégrale ne s'effectue pas directement, on doit l'évaluer de façon numérique ou encore interpoler dans les tables qui ont été développées à cet effet (Harter, 1969); un développement polynomial fait à partir de ces tables est également disponible (Bobée, B., Boucher, H. et M. Paradis, 1983); il y a aussi un développement en série pour cette fonction gamma incomplète (Thom, 1968) (Paradis, M. et B. Bobée, 1983).

Ainsi, lorsque λ n'est pas un entier, la méthode de génération directe n'est pas applicable car on ne peut exprimer W en fonction de F(W). Cependant si $\lambda = 1$, l'expression précédente se simplifie, nous permettant de poser:

$$x_i = -\ln\ (U_i)$$

où les U_i sont des nombres aléatoires uniformes entre 0 et 1, dont l'algorithme de génération est partout disponible, X_i sont les variables gamma dont le paramètre de forme λ est égal à l'unité.

De façon plus générale, il a été démontré (Bobée, B. et P. Boucher, 1979) que lorsque λ est un entier quelconque:

$$x = -\left[\ln \prod_{j=1}^{\lambda} U_j\right]$$

On dispose maintenant d'un algorithme direct de génération pour les cas où le paramètre λ est entier, en pratique cependant, λ ne peut être trop élevé car à ce moment, il y a risque d'"underflow" dans le calcul du produit des variables uniformes, une erreur fatale suivra immédiatement pour le calcul de ln 0. On peut exprimer l'expression précédente sous la forme d'une somme de logarithmes, mais cela n'est guère intéressant, car le temps de calcul est augmenté considérablement. Dans les tests qui sont décrits et présentés en annexe 2, on a généré un échantillon de taille 15 000, avec succès* même pour $\lambda = 20$, le temps de calcul demeurait compétitif avec les meilleurs algorithmes.

Il existe une autre particularité qui fait qu'une variable normale standardisée au carré et divisée par deux obéit à une loi gamma de paramètre $\lambda = 0,5$. Robinson, W. et A.W. Lewis (1975) montrent qu'on peut ainsi générer directement des variables gamma pour $\lambda = 0,5 \quad 1,5 \quad 2,5 \quad 3,5 \ldots$

Cette procédure n'est cependant pas employée en pratique à cause du temps excessif de génération d'une variable normale standardisée (toutefois

---

Le système informatique utilisé pouvait considérer des nombres jusqu'à 10^{-322}

certains systèmes informatiques peuvent posséder une fonction rapide pour la génération de ce type de variable, ce n'est pas le cas à l'INRS-Eau).

Cas où le paramètre λ est quelconque

La méthode de réjection technique a permis de développer des algorithmes qui sont à la fois exacts et rapides pour la génération de variables de type gamma. L'idée générale en est la suivante: on génère des variables aléatoires possédant une fonction de densité de probabilité qui est assez semblable à celle désirée, ces variables doivent pouvoir être obtenues facilement, occasionnellement certaines de ces variables sont rejetées de façon à ce que les variables acceptées obéissent exactement à la distribution visée. Tadikamalla, P.R. et M.E. Johnson (1981) donnent des détails généraux relativement à cette méthode de réjection technique. Les algorithmes qui sont recommandés plus loin dans ce rapport pour λ non entier, utilisent tous ce genre de technique de réjection.

Notion d'exactitude

Il convient de bien faire la différence entre un algorithme exact et un algorithme approximatif pour la génération de variables aléatoires; le premier type permet de générer un échantillon de taille N dont les caractéristiques statistiques (les moments) convergent vers les valeurs théoriques correspondant à la distribution simulée, pour une taille croissante. Un algorithme approximatif ne manifeste pas ce type de convergence, encore que l'illusion puisse être excellente pour les premiers moments même pour une taille N élevée. Cependant, les variables extrêmes, c'est-à-dire les variables possédant une période de retour élevée, sont susceptibles d'être mal représentées par ces algorithmes approximatifs et de fausser les conclusions de la simulation.

La question de la qualité de la génération ne se pose pas avec des algorithmes exacts: pour une distribution donnée et avec des paramètres fixés, ils sont absolument équivalents, les qualificatifs tels que "plus exact" ou "moins exact" ne sont pas employés dans le cadre de discussions faisant intervenir des algorithmes qui, bien que faisant usage de méthodes différentes, obéissent à la notion mathématique de l'exactitude.

On dispose essentiellement de deux sources de renseignements afin de déterminer si un algorithme est exact:

1° la démonstration théorique et l'affirmation de l'auteur de l'algorithme sur son caractère exact;

2° l'essai de l'algorithme en calculant pour une taille croissante les caractéristiques d'un échantillon.

Dans le premier cas, la démonstration théorique peut ne pas être à la portée du scientifique qui, bien qu'ayant des idées originales pour la simulation d'un phénomène quelconque, ne possède pas la formation ou le temps nécessaire pour comprendre les éléments théoriques qui sont à la base de l'algorithme utilisé. Normalement on peut se fier à l'auteur lorsque celui-çi affirme que son algorithme est exact.

Les tests qu'il est possible d'effectuer sur un algorithme sont également affligés d'un réel désavantage; toutes les caractéristiques statistiques d'un échantillon dépendent de sa taille et même pour une taille de l'ordre de 10 000, les moments d'ordre élevé resteront biaisés. On retrouvera à l'annexe 2 de tels genres de tests qu'on pourrait qualifier d'"asymptotiquement rigoureux". Il y est également présenté des algorithmes qui possèdent à peu près les mêmes moyennes, variances, asymétries et aplatissements que les populations désirées, mais dont les variables fournies pour les périodes de retour élevées sont inacceptables.

Critères de rapidité et de simplicité

Ces critères permettent d'effectuer le choix entre plusieurs algorithmes exacts, ils sont dépendants du système informatique en usage; ainsi un algorithme qui est le plus rapide sur un certain ordinateur peut être plus lent ailleurs. Le système C.D.C. qui est en usage à l'INRS possède une fonction intégrée en langage machine qui permet d'obtenir des nombres aléatoires de distribution uniforme entre 0 et 1, cette fonction, qui est très rapide, est à la base de tous les algorithmes. Les fonctions Log et Exp sont les plus lentes et défavorisent les algorithmes qui en font un trop grand usage. La procédure de réjection technique qui fait que certaines des variables générées doivent être refusées, est un élément important en ce qui concerne la rapidité.

Il est aussi fort possible que le temps de génération soit négligeable vis-à-vis le temps d'exécution total d'un projet de simulation, à ce moment l'usage d'un algorithme très rapide ne peut amoindrir beaucoup les frais de calcul.

La plupart des algorithmes possèdent certaines instructions qui servent seulement à initialiser quelques paramètres, ces instructions ne sont effectuées qu'une fois au début de la simulation d'une population quelconque et les paramètres obtenus demeurent constants par la suite. Ce n'est que dans le cas d'un plan de simulation qui nécessite un petit nombre d'échantillons de tailles réduites et ceci pour un grand nombre de populations différentes que le critère simplicité de l'initialisation peut intervenir au niveau de la rapidité.

L'annexe 2 contient les résultats obtenus en terme de temps de génération pour les algorithmes les plus compétitifs pour la distribution gamma, c'est à partir de ces résultats qu'on a établi les recommandations pour le choix des algorithmes.

Génération d'échantillons de tailles réduites

Ici également, les algorithmes exacts qui génèrent des variables aléatoires, homogènes et indépendantes sont absolument équivalents dans le cadre des simulations d'échantillons de petites tailles. On peut illustrer ce fait en supposant qu'on possède 10 urnes contenant une quantité quasi infinie de nombres aléatoires provenant de dix algorithmes différents mais exacts, on considère la même population dans tous les cas. Puisque les caractéristiques statistiques de chacune des urnes sont égales aux valeurs théoriques de la population, le contenu de chacune des urnes est identique et on peut tirer des échantillons sans tenir compte de l'urne choisie.

Il existe quelques tests sur de petits échantillons qui ont été réalisés mais qui ont été mal interprétés, contribuant ainsi à quelques idées obscures qui ont cours dans la littérature.

Le test du Kolmogorov-Smirnov est supposé déterminer si une série d'échantillons provient bien d'une distribution donnée et cela pour un niveau de signification donné (5 %, 1 %). Ce test n'est cependant pas assez puissant pour les échantillons de petites tailles et nos expériences nous ont démontré que des échantillons appartenant à des populations uniformes, normales ou gamma avec des paramètres convenablement choisis pourraient être facilement confondus pour des petites tailles, en étant acceptés par le test du Kolmogorov-Smirnov.

Si on possède deux algorithmes, l'un est exact et l'autre est approximatif, le test du Kolmogorov-Smirnov permettra de conclure que ces deux algorithmes sont équivalents pour des échantillons de petites tailles. Ceci est cependant faux, car les variables de période de retour élevée sont mal représentées dans le cas de l'algorithme approximatif et la simulation est alors mauvaise.

Un autre test a été utilisé dans le but de déterminer lequel, parmi plusieurs algorithmes, est le meilleur: on génère deux groupes d'échantillons pour deux algorithmes différents, on ajuste chacun des échantillons sur la base d'une loi gamma grâce à une méthode d'estimation quelconque pour le paramètre de forme λ.

Ce dernier constitue une variable aléatoire et on peut alors en calculer la moyenne, la variance ... à partir des données obtenues pour λ selon les ajustements. Le meilleur algorithme devrait être celui qui fournit une valeur moyenne de λ qui est plus proche de la valeur théorique utilisée lors de la simulation, de plus la variance de λ devrait être également plus faible. Les résultats obtenus présentent certaines anomalies qui peuvent être interprétées comme étant dues à un mauvais algorithme, en réalité ce type de problème peut se présenter même avec un algorithme exact. Bowman, K.O. et J.J. Beauchamp (1975) font des mises en garde sur le nombre d'échantillons dont on doit tenir compte dans l'étude par simulation de certaines statistiques: le paramètre λ possède un domaine de variation de 0 à l'infini et parmi tous les échantillons générés il peut y en avoir un dont l'asymétrie est faible et dont la valeur estimée de λ sera très élevée, au point de venir fausser les statistiques recueillies pour ce paramètre de forme. La distribution de ce dernier est généralement fortement asymétrique et le nombre d'échantillons à considérer est en pratique trop élevé.

L'utilisation de formes plus complexes telles que la distribution gamma à 2 paramètres, la distribution Pearson type 3 ou la distribution gamma généralisée est encore plus difficile pour ce qui est d'obtenir les caractéristiques statistiques des paramètres au moyen de simulation, à cause de la dépendance et de la sensibilité de ces derniers.

Bobée, B. et P. Boucher (1979) ont réalisé ce genre de test sur la base d'une distribution gamma à deux paramètres, leurs résultats permettent d'effectuer les observations suivantes:

- Les valeurs moyennes des deux paramètre sont en général surestimées. Ceci peut être dû au fait que parmi les échantillons analysés, il y en a quelques uns dont le paramètre de forme est très grand, l'autre paramètre augmentant également pour compenser.

- Les variances des paramètres devraient diminuer à mesure que la taille des échantillons augmente, l'examen des tableaux nous montre un comportement erratique de ces variances en fonction des tailles. Ceci peut être dû également à des valeurs aberrantes des 2 paramètres.

- Le comportement non régulier en fonction de la taille pour les pourcentages de déviation des valeurs moyennes des paramètres par rapport aux valeurs théoriques est dû à la même cause.

Donc, les tests basés sur les estimations des paramètres pour un nombre réduit d'échantillons de petites tailles ne peuvent évaluer le meilleur algorithme, pas plus que les méthodes basées sur le test du Kolmogorov-Smirnov. Ces tentatives sont de toutes façons inutiles si on travaille avec des algorithmes exacts.

RÉCENTS PROGRÈS DES ALGORITHMES DE GÉNÉRATION

On peut résumer les progrès qui ont été réalisés sur le thème des algorithmes de génération de variables aléatoires pour les lois de type gamma par la phrase suivante: "Les temps de génération sont passés de 800 microsecondes (μs) par variable pour l'algorithme de Johnk (1964), à moins de 300 μs/var. pour les algorithmes les plus compétitifs actuellement". Ces temps réfèrent au système informatique C.D.C. en usage à l'INRS, l'algorithme de Johnk est ancien, exact et utilisable pour tout λ. Les nouveaux algorithmes sont exacts, rapides, mais ne sont pas utilisables pour $0 < \lambda < \infty$ et doivent se partager le domaine.

Peu d'améliorations peuvent survenir dans le futur, car la génération ne dépasse habituellement pas 10 % du temps d'exécution, ainsi un algorithme qui ferait en 8 μs ce que fait un autre en 10 μs ne ferait diminuer le temps d'exécution total que de 2 %. Il en va autrement d'un rare problème dont la génération occupe 80 % du temps d'exécution car dans ce cas l'amélioration serait de 16 % ce qui est non négligeable. Le type de problème qui nous intéresse présentement utilise un grand nombre d'échantillons de petites tailles qui demandent chacun un travail numérique important, donc le pourcentage du temps d'exécution occupé par la génération n'est que de quelques % du temps total.

Les travaux futurs devraient porter davantage sur l'utilisation des algorithmes exacts, au lieu du développement d'un algorithme qui serait légèrement plus rapide. La voie est ouverte aux utilisateurs d'algorithmes qui pourront, grâce à des ordinateurs puissants, élaborer des simulations intéressantes dans le but de tirer des conclusions d'origines statistiques pour des phénomènes complexes, ces derniers étant d'un traitement mathématique ardu ou même impossible.

RECOMMANDATIONS

Après consultation de la littérature sur le sujet et après les tests qui sont décrits et présentés en annexe 2, on a déterminé que les algorithmes exacts devant être utilisés à l'INRS-Eau, dans le cadre des simulations, tout en diminuant au maximum le temps de génération, sont les suivants:

- Pour λ = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10: on suggère d'utiliser le logarithme du produit de variables aléatoires uniformes (0, 1):

$$x = - \ln \prod_{i=1}^{\lambda} U_i$$

- Pour $\lambda \leq 0{,}25$: on suggère l'algorithme GS - Ahrens et Dieter (1974).

- Pour $0{,}25 < \lambda \leq 0{,}5$: on suggère l'algorithme GBH - Cheng et Feast (1980).

- Pour $\lambda > 0{,}5$: on suggère l'algorithme GT - Cheng et Feast (1980).

Un autre bon candidat est l'algorithme G4PE de Schmeiser (1978), il a en effet remplacé celui de Johnk pour $\lambda > 1$ dans la librairie IMSL, qui contient des programmes usuels en statistiques. Il est un peu plus lent que prévu, sans doute parce que les procédures d'IMSL ne font pas appel à la fonction Ranf qui génère rapidement des nombres uniformes.

Les algorithmes GS, GBH et GT sont programmés et présentés en Annexe 1, les quelques énoncés IF(...) montrent qu'il s'agit de méthodes faisant appel à une procédure de réjection technique. X est le vecteur contenant les N éléments de l'échantillon, ALAM est le paramètre de forme λ.

Takidamalla, P.R. et M.E. Johnson (1981) ont réalisé un excellent ouvrage de synthèse sur la rapidité des meilleurs algorithmes actuellement, ces auteurs donnant également une excellente discussion pour le choix d'un algorithme selon les types de problèmes.

BIBLIOGRAPHIE

AHRENS, J.H. et U. DIETER (1974).
Computer methods for sampling from gamma, beta, Poisson and binomial distributions. Computing, 12, p. 223-246.

BOBÉE, B., BOUCHER, H. et M. PARADIS (1983).
Ajustement polynomial de la variable Pearson type 3 standardisée. INRS-Eau, Québec (en préparation).

BOBÉE, B. et P. BOUCHER (1979).
Comparaison des algorithmes de génération de la distribution Gamma et de ses formes dérivées. IRNS-Eau, Québec, rapport scientifique no 112, 103 p.

BOWMAN, K.O. and J.J. BEAUCHAMP (1975).
Pitfalls with some gamma variate simulation routines. J. Statist. Comput. Simul., vol. 4, p. 141-154.

CHENG, R.C.H. and G.M. FEAST (1980).
Gamma variate generators with increased shape parameter range. Communications of the ACM, vol. 23, no 7, p. 389-394.

JOHNK, M.D. (1964).
Erzeugung von Betaverteilten und Gammaverteilten Zufallszahlen. Metrika 8(1), p. 5-15.

PARADIS, M. et B. BOBÉE (1983).
La distribution gamma généralisée et son application en hydrologie. INRS-Eau, rapport scientifique no 156, 52 p.

RAMBERG, J.S. et P.R. TADIKAMALLA (1974).
An algorithm for generating Gamma variates based on the Weibull distribution, ADE transactions, vol. 6, no 3, 1974, p. 257-260.

ROBINSON, W. et A.W. LEWIS (1975).
Generating Gamma and Cauchy random variables: an extension to the naval postgraduate school random number package. Naval Postgraduate School (U.S.A.)

SCHMEISER, B.W. et R. LAL (1980).
Squeeze methods for generating gamma variates. Journal of the American Statistical Association, vol. 75, no 371, p. 679-682.

TADIKAMALLA, P.R. et M.E. JOHNSON (1981).
A complete guide to gamma variate generation. American Journal of Mathematical and Management Sciences, vol. 1, no 3, p. 213-236.

WILSON, E.B. and M.M. HILFERTY (1931).
The distribution of chi-square. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., vol. 17, no 12, p. 684-688.

ANNEXE 1

Annexe 1

```
      SUBROUTINE GBH(ALAM,X,N)
C VALABLE POUR ALAM>0.25, RECOMMANDE POUR 0.25<ALAM<0.5
      DIMENSION X(1)
      A=ALAM-0.25
      B=ALAM/A
      C=2.0/A
      D=C+2.0
      T=1.0/SQRT(ALAM)
      H1=(0.4417+0.0245*T/ALAM)*T
      H2=(0.222-0.043*T)*T
      DO 4 I=1,N
    1 U1=RANF(0)
      U2=U1+H1*RANF(0)-H2
      IF(U2.LE..0.OR.U2.GE.1.)GO TO 1
      W=B*(U1/U2)**4
      IF((C*U2-D+W+1.0/W).LE.0.0)GO TO 4
      IF((C*ALOG(U2)-ALOG(W)+W-1.0).GE.0.0)GO TO 1
    4 X(I)=A*W
      RETURN
      END

      SUBROUTINE GT(ALAM,X,N)
C VALABLE POUR ALAM>0.5
      DIMENSION X(1)
      A=ALAM-0.5
      B=ALAM/A
      C=2.0/A
      D=C+2.0
      S=SQRT(ALAM)
      H1=(0.855+0.064/ALAM)/S
      H2=(0.4343-0.105/S)/S
      DO 4 I=1,N
    1 U1=RANF(0)
      U2=U1+H1*RANF(0)-H2
      IF(U2.LE..0.OR.U2.GE.1.)GO TO 1
      W=B*(U1/U2)**2
      IF((C*U2-D+W+1./W).LE..0)GO TO 4
      IF((C*ALOG(U2)-ALOG(W)+W-1.0).GE..0)GO TO 1
    4 X(I)=A*W
      RETURN
      END

      SUBROUTINE GS(ALAM,X,N)
C VALABLE POUR ALAM<1 RECOMMANDE POUR ALAM<0.25
      DIMENSION X(1)
      B=(2.71828+ALAM)/2.71828
      DO 50 I=1,N
    1 P=B*RANF(0)
      IF(P.GT.1.0)GO TO 3
      X(I)=EXP(ALOG(P)/ALAM)
      IF(RANF(0).GT.EXP(-X(I)))1,50
    3 X(I)=-ALOG((B-P)/ALAM)
      IF(ALOG(RANF(0)).GT.(ALAM-1.0)*ALOG(X(I)))GO TO 1
   50 CONTINUE
      RETURN
      END
```

ANNEXE 2

Tests de quelques algorithmes de génération de variables aléatoires

On a généré, pour chacun des algorithmes et pour différents paramètres de forme, un échantillon de 15 000 éléments, on a calculé les caractéristiques statistiques de cet échantillon (moyenne, variance, C_V, C_S, C_K, C_5, C_6), ces valeurs peuvent être comparées aux valeurs théoriques de la population considérée. On donne également les temps pour la partie génération (en μs/var.) et le temps total d'exécution (en sec.). Les variables d'amplitude extrême ont été recueillies et leurs probabilités ont été calculées selon la méthode décrite par Paradis, M. et B. Bobée (1983), ces probabilités sont des indices très sensibles à l'exactitude de l'algorithme étudié; ainsi dans certains cas, les variables extrêmes possédaient environ 1 chance sur 100 d'être dépassées alors qu'on devrait s'attendre, pour un échantillon de taille 15 000, à des probabilités de l'ordre de 10^{-3}, illustrant ainsi une grossière approximation.

On a également divisé par classes, les variables X obtenues pour ces générations, les largeurs de ces classes sont inégales mais les bornes sont choisies pour qu'elles correspondent à des intervalles réguliers sur F(x). F(x) est la fonction de distribution de X ($0 < F(x) < 1$).

Plus précisément on a calculé les x correspondant à:

F(x) = 0,001	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7
0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99	0,999	

pour chacune des populations considérées. L'intervalle est de 0,05 sauf dans les bouts qui sont plus finement divisés.

On cherche à exploiter le principe suivant: si les variables aléatoires pour une population donnée proviennent d'un algorithme exact, alors les F(x) qui y correspondent appartiendront à une distribution aléatoire uniforme entre 0 et 1. Si l'algorithme n'est pas exact, certaines classes seront significativement plus remplies que d'autres.

Les résultats qui sont montrés dans chacun des cas comparent la fréquence observée avec la fréquence théorique pour chacune des classes: la probabilité que X soit dans une classe obéit à une loi binomiale qui tend vers une loi normale de moyenne Np et de variance Np (1 - P). N = 15 000 et p = largeur de la classe, on a ainsi calculé la probabilité que la fréquence observée soit aussi éloignée (en plus ou en moins) de la fréquence théorique.

On peut accepter de façon intuitive que le rapport entre la fréquence observée et théorique de chacune des classes tendront vers 1 à mesure que la taille de l'échantillon croît (si l'algorithme est exact). En effet, la contribution d'une variable aléatoire devient de plus en plus infime pour une taille croissante. L'écart type $\surd$ [Np (1 - p)] augmente selon une puisun ancien algorithme approximatif qui est testé surtout pour montrer les résultats des tests pour un mauvais algorithme, WILSON-HILFERTY (1931) utilise simplement les équations de W.-H. (sans technique de réjection) qui sont bien connues comme pouvant approximer de façon satisfaisante une loi gamma pour λ élevé. L'algorithme G4PE (Schmeiser, 1980) est celui utilisé par la librairie IMSL, il a remplacé celui de Johnk pour $\lambda > 1$ dans une récente mise à jour.

Remarque supplémentaire: les temps qui sont donnés sont approximatifs car le système travaille en temps partagés.

TEST DE L↑ALGORITHME RANF (DISTRIBUTION UNIFORME,SYSTEME CDC)

TABLEAU REPRESENTANT POUR 24 CLASSES ET POUR N CROISSANT
LES VALEURS DE: (FREQUENCE OBSERVEE)X1000/(FREQUENCE THEORIQUE)
(SI L↑ALGORITHME EST EXACT IL Y A CONVERGENCE VERS 1000
POUR CHAQUE COLONNE DU TABLEAU)
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

	++++++++++++					+CLASSES+						+++++++++++++
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
50	0	2222	500	0	799	1199	399	2000	2000	799	0	399
100	0	1111	750	0	599	1000	599	1000	1799	1399	1000	799
150	0	740	1166	399	666	1066	399	1199	1599	1466	933	666
200	0	1111	1125	399	599	899	599	1399	1399	1399	1099	699
250	0	1333	1099	639	799	959	559	1199	1199	1359	879	719
300	0	1111	1083	666	666	933	666	1333	1466	1266	1000	599
350	0	952	1000	742	914	971	571	1199	1428	1257	1028	799
400	0	1111	1187	699	799	899	750	1149	1449	1149	1149	849
450	0	987	1277	711	933	844	888	1111	1377	1022	1199	844
500	0	1111	1250	799	1000	1000	879	1159	1279	1000	1199	839
600	0	925	1250	799	1000	966	1099	1133	1166	1033	1199	933
700	0	1111	1214	771	942	1028	1057	1057	1171	1085	1171	914
800	0	972	1312	750	849	1049	1125	1024	1149	1049	1125	924
900	0	864	1388	933	777	1111	1088	1000	1111	1066	1022	911
1000	0	1111	1274	899	939	1119	1139	1019	1059	1059	1019	919
2000	500	777	1287	1019	889	959	1000	919	939	1039	1009	1000
3000	666	1037	1224	979	953	879	979	1013	986	959	979	986
4000	500	944	1224	969	949	909	964	989	974	949	984	979
5000	1000	1044	1179	955	967	895	903	1000	975	903	995	959
6000	833	1166	1149	926	963	889	923	966	953	943	1003	986
7000	857	1222	1114	928	951	928	942	934	977	922	988	971
8000	750	1194	1084	964	959	914	937	942	959	932	992	974
9000	777	1123	1077	982	951	922	933	957	955	948	995	982
10000	799	1122	1077	973	949	925	937	969	965	955	1001	1001
11000	727	1151	1063	985	958	941	930	979	978	938	994	1016
12000	750	1120	1087	994	951	934	946	986	981	926	971	1039
13000	692	1085	1071	1003	955	916	973	983	995	936	975	1016
14000	785	1063	1069	991	954	945	974	974	1004	952	949	1018
15000	933	1037	1061	991	946	950	970	979	1009	950	946	1014
OBSV	14	140	637	744	710	713	728	735	757	713	710	761
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.796	.666	.123	.822	.134	.166	.410	.574	.793	.166	.134	.680

TEST DE L↑ALGORITHME RANF (SUITE 1)

N	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	++++++++++++	+++++++++	+++++++	CLASSES	++++++++	+++++++++	+++++++++					
50	2000	1599	399	2399	799	1199	1599	399	399	1000	0	0
100	1199	1399	799	1799	1000	1399	1599	599	599	500	1111	0
150	1066	1466	799	1466	1066	1066	1599	666	799	500	740	0
200	1099	1399	799	1500	799	1199	1500	799	699	375	1666	0
250	959	1199	959	1359	879	1119	1359	879	799	899	1777	0
300	933	1066	1000	1199	933	1133	1199	799	933	1083	1481	0
350	857	1028	971	1257	1028	1199	1142	685	857	1000	1587	0
400	899	1049	1049	1199	1000	1149	1099	750	750	875	1666	0
450	933	1066	1111	1155	977	1111	977	711	711	1055	1481	0
500	919	1039	1079	1119	959	1079	919	719	639	1049	1777	0
600	966	1033	966	1000	1000	1133	933	766	666	875	1851	0
700	857	1085	1057	1000	971	1000	1057	828	771	821	1904	0
800	974	1074	1000	1049	924	1024	1099	824	799	750	1944	0
900	933	1044	1066	1000	933	1022	1155	844	755	777	1851	0
1000	919	1039	1059	979	939	979	1139	799	779	799	1777	0
2000	1059	989	1019	1179	1000	1000	1029	869	829	949	1555	1000
3000	966	1019	993	1146	1019	986	1026	919	926	1033	1370	1000
4000	969	1039	1074	1129	964	1029	1024	959	924	1018	1194	750
5000	1003	1067	1091	1091	979	1055	1000	983	979	1009	1133	1000
6000	1043	1049	1089	1069	979	1043	1016	1006	973	991	1148	1166
7000	1037	1045	1077	1091	974	1025	1028	1019	1017	989	1095	1000
8000	1007	1037	1112	1074	949	1024	1027	1062	1017	996	1069	875
9000	997	1031	1119	1068	951	1004	1017	1075	1008	994	1111	1000
10000	1005	1025	1105	1053	951	993	1019	1053	1015	992	1077	1000
11000	994	1029	1085	1049	939	1005	1012	1058	1005	1015	1050	1090
12000	994	1019	1084	1031	931	1014	1021	1056	1018	1002	1000	1083
13000	993	1007	1067	1019	950	1013	1030	1053	1029	1013	991	1000
14000	989	1025	1064	1004	957	1019	1015	1039	1042	1008	1015	1071
15000	990	1014	1061	1006	970	1015	1005	1033	1047	1031	1051	1133
OBSV	743	761	796	755	728	762	754	775	786	619	142	17
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.793	.680	.085	.851	.410	.653	.881	.349	.177	.429	.545	.605

TEST DE L↑ALGORITHME RANF (SUITE 2)

```
      -MOYENNE DES PROB.=     .49677  ECART-TYPE=    .27347
  -SOMME DES LOG10(PROB.)=  -9.56846
```

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

```
    .5046:MU      .2901:SIG      .5750:CV     -.0280:CS
   (.5)          (.28868)       (.57735)      (0)

   1.8016:CK    -.1135:C5      3.8559:C6
  (1.8)         (0)            (3.8571)
```

```
    TEMPS DE GENERATION=     14.600 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION=      4.490 SECONDES
```

LES VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.9996970E+00	3300	.8117532E-05	123190
.9996780E+00	3106	.1703269E-03	5871
.9995139E+00	2057	.1852927E-03	5397
.9994672E+00	1877	.1866313E-03	5358
.9993420E+00	1520	.1888434E-03	5295
.9993239E+00	1479	.2204893E-03	4535
.9992707E+00	1371	.3733358E-03	2679
.9992683E+00	1367	.4060172E-03	2463
.9991568E+00	1186	.4145481E-03	2412
.9991137E+00	1128	.4767316E-03	2098

Remarque : - Bonne distribution uniforme, les fréquences observées sont très proches des fréquences théoriques.
- Les moments de la distribution semblent corrects.
- Le temps de génération pour cette fonction intégrée au système C.D.C. est rapide.
- Les variables extrêmes semblent plausibles pour un échantillon de taille 15 000.
- On peut considérer comme exact cet algorithme qui est à la base de tous les autres algorithmes (voir page suivante).

TEST DE L'ALGORITHME RANF (SUITE 3)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.716718	************
100	1	.463397	************
150	1	.383276	-.0347189611
200	1	.352435	-.0284861872
250	1	.237176	-.0124113983
300	1	.237925	-.0124908835
350	1	.213407	-.0100517002
400	1	.196013	-.0080457252
450	1	.180966	-.0070353792
500	1	.168710	-.0063600692
600	1	.138074	-.0043293378
700	1	.121925	-.0032369489
800	1	.125394	-.0034004219
900	1	.124878	-.0033192111
1000	1	.111450	-.0026239660
2000	1	.087359	-.0015711257
3000	1	.071508	-.0010137340
4000	1	.064563	-.0008271301
5000	1	.066605	-.0009023952
6000	1	.062464	-.0007948478
7000	1	.058392	-.0006935414
8000	1	.056893	-.0006594317
9000	1	.053891	-.0005885833
10000	1	.047978	-.0004689113
11000	1	.045165	-.0004195498
12000	1	.047468	-.0004638456
13000	1	.040796	-.0003457773
14000	1	.037299	-.0002866735
15000	1	.036443	-.0002742903

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

- Les paramètres P.Q. et SIG manifestent la convergence propre aux algorithmes exacts.

TEST DE L'ALGORITHME JOHNK LAMBDA: .50

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES:15000
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	18	134	626	728	765	753	746	739	761	713	731	763
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.438	.931	.279	.410	.574	.911	.881	.680	.680	.166	.477	.626

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	721	767	796	750	754	723	769	740	750	602	137	14
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.277	.524	.085	1.000	.881	.312	.477	.708	1.000	.934	.863	.796

-MOYENNE DES PROB.= .62119 ECART-TYPE= .27668
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -6.44382

CARACTERISTIQUES DE L'ECHANTILLON (THEORIE)

.5017:MU	.7118:SIG	1.4188:CV	2.8275:CS
(.5)	(.7071)	(1.4142)	(2.8284)

14.5753:CK	86.6000:C5	591.6757:C6
(15)	(96.167)	(755)

TEMPS DE GENERATION= 873.667 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D'EXECUTION= 17.458 SECONDES

LES VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D'ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.7811675E+01	12398	.9672464E-10	90111
.7085551E+01	5991	.6334994E-08	11135
.6806695E+01	4453	.1681214E-07	6835
.6620707E+01	3652	.2476359E-07	5632
.6508785E+01	3241	.3328481E-07	4858
.6503024E+01	3221	.7481329E-07	3240
.6495653E+01	3195	.1575880E-06	2232
.6449316E+01	3041	.2171137E-06	1902
.6445891E+01	3030	.2171846E-06	1902
.6354365E+01	2748	.2934352E-06	1636

TEST DE L↑ALGORITHME JOHNK LAMBDA=0.5 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.784052	************
100	1	.601752	-.0765539241
150	1	.395294	-.0294279340
200	1	.307794	-.0219966164
250	1	.283734	-.0173121813
300	1	.242791	-.0123331325
350	1	.227441	-.0107306242
400	1	.215211	-.0100118603
450	1	.192112	-.0081706338
500	1	.169706	-.0063218713
600	1	.182574	-.0071713541
700	1	.148606	-.0049596358
800	1	.157906	-.0054894094
900	1	.155973	-.0053934067
1000	1	.152592	-.0050519458
2000	1	.090960	-.0016986157
3000	1	.067849	-.0009132113
4000	1	.066432	-.0008880323
5000	1	.076766	-.0011718113
6000	1	.066200	-.0008745123
7000	1	.058341	-.0006900246
8000	1	.046382	-.0004432974
9000	1	.039915	-.0003258396
10000	1	.037180	-.0002839259
11000	1	.033959	-.0002360865
12000	1	.035950	-.0002633108
13000	1	.032101	-.0002102481
14000	1	.027259	-.0001522685
15000	1	.027564	-.0001564805

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque :
- On peut retrouver ici une bonne distribution uniforme pour les F(x) correspondant aux x générés.
- Les moments semblent corrects, quoique biaisés pour ceux d'ordre 5 et 6.
- Le temps de génération est élevé.
- Les variables extrêmes semblent plausibles pour un échantillon de taille 15 000.
- L'algorithme de Johnk semble exact.

TEST DE L↑ALGORITHME JOHNK LAMBDA= 4.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000 ISEED= 91
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

	CLASSES											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	12	139	585	797	734	757	740	723	807	762	716	731
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.438	.729	.532	.078	.549	.793	.708	.312	.033	.653	.203	.477

	CLASSES											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	742	744	730	751	766	776	714	770	747	603	134	20
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.764	.822	.454	.970	.549	.330	.177	.454	.911	.901	.931	.196

-MOYENNE DES PROB.= .54016 ECART-TYPE= .28250
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -8.79624

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

4.0008:MU	2.0061:SIG	.5014:CV	1.0212:CS
(4.0)	(2.0)	(0.5)	(1.0)
4.6580:CK	14.1881:C5	62.8636:C6	
(4.5)	(13.0)	(55.0)	

TEMPS DE GENERATION= 748.267 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION= 15.213 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.1682848E+02	114816	.2647044E+00	6036
.1545540E+02	6862	.2750745E+00	5218
.1531906E+02	6137	.3015750E+00	3689
.1526152E+02	5856	.3042915E+00	3566
.1502048E+02	4810	.3554255E+00	1995
.1500534E+02	4751	.3598806E+00	1905
.1489632E+02	4348	.3715198E+00	1693
.1467892E+02	3645	.3753775E+00	1629
.1432921E+02	2748	.4029610E+00	1254
.1397609E+02	2069	.4054255E+00	1226

TEST DE L↑ALGORITHME JOHNK   LAMBDA= 4.00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.558193	-.0684536959
100	1	.485582	-.0512537969
150	1	.288574	-.0187791566
200	1	.271448	-.0192705198
250	1	.227017	-.0110956721
300	1	.229925	-.0106655695
350	1	.268984	-.0150699342
400	1	.246555	-.0125085319
450	1	.230940	-.0113832515
500	1	.245207	-.0130053755
600	1	.219249	-.0110476904
700	1	.228007	-.0113552345
800	1	.191428	-.0074178953
900	1	.161861	-.0053631820
1000	1	.133614	-.0035602564
2000	1	.115940	-.0026906289
3000	1	.093634	-.0017655829
4000	1	.075568	-.0011803224
5000	1	.054968	-.0006182089
6000	1	.054730	-.0006207543
7000	1	.047710	-.0004772982
8000	1	.041015	-.0003486622
9000	1	.034862	-.0002547688
10000	1	.035190	-.0002547228
11000	1	.032971	-.0002246202
12000	1	.034927	-.0002509536
13000	1	.033521	-.0002303432
14000	1	.030055	-.0001846733
15000	1	.032996	-.0002216362

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : Cet algorithme exact fut un des premiers à être développé, il est lent.

TEST DE L↑ALGORITHME RAMBERG LAMBDA: .50

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES:15000
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

	++++CLASSES++++											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	0	1	20	83	139	164	245	281	376	474	559	649
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.000	.0000	.0000	.0000	.0000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

	++++CLASSES++++											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	722	800	955	1071	1212	1427	1556	1645	1680	899	42	0
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.294	.061	.000	.000	.0000	.0000	.0000	.0000	.000	.000	.000	.000

-MOYENNE DES PROB.= .01482 ECART-TYPE= .06079
-SOMME DES LOG10(PROB.)=**********

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

.7851:MU	.6367:SIG	.8109:CV	1.2430:CS
(.5)	(.7071)	(1.4142)	(2.8284)
4.8808:CK	15.8408:C5	67.1561:C6	
(15.0)	(96.167)	(755)	

TEMPS DE GENERATION= 406.400 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION= 11.155 SECONDES

LES VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.5216940E+01	808	.2387784E-04	181
.5062248E+01	683	.1064123E-03	86
.4748789E+01	486	.1240408E-03	80
.4409909E+01	336	.1785665E-03	66
.4204870E+01	268	.4228264E-03	43
.4175180E+01	259	.5924604E-03	36
.4172638E+01	259	.6116917E-03	36
.4168474E+01	257	.6295331E-03	35
.4113533E+01	242	.8454804E-03	30
.3923977E+01	197	.8940502E-03	30

TEST DE L↑ALGORITHME RAMBERG (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.958068	************
100	1	.924520	************
150	1	.773237	************
200	1	.758808	************
250	1	.747093	************
300	1	.717696	************
350	1	.703650	************
400	1	.735205	************
450	1	.736040	************
500	1	.733097	************
600	1	.717859	************
700	1	.721795	************
800	1	.727966	************
900	1	.718058	************
1000	1	.695641	************
2000	1	.690324	-.1890859264
3000	1	.687400	-.1652403802
4000	1	.687857	-.1710011814
5000	1	.685150	-.1753622807
6000	1	.695778	-.1800425512
7000	1	.699303	-.1821184452
8000	1	.705952	-.1805435718
9000	1	.710197	-.1814942881
10000	1	.713838	-.1815148160
11000	1	.713441	-.1770502617
12000	1	.721060	-.1799935264
13000	1	.723058	-.1786384181
14000	1	.722366	-.1805071727
15000	1	.724052	-.1818576558

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - L'auteur de cet algorithme ne le recommande pas pour $\lambda < 1$, on présente surtout ici un exemple d'algorithme mauvais.
- Mauvaise distribution uniforme pour les F(x), les PROB sont souvent nulles : ,000 → très faible
  0,000 → écart de plus de 20 écarts type
- Mauvaises caractéristiques de la variable x.
- Les variables extrêmes ne sont pas extrêmes.
- P.Q. et SIG ne tendent pas vers 0.

TEST DE L'ALGORITHME RAMBERG LAMBDA: 1.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES:15000 ISEED=5
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	7	54	285	431	419	473	469	544	538	680	713	710
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.039	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.009	.166	.134

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	733	822	842	909	1015	1075	1116	1185	1171	747	59	3
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.524	.007	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.002

-MOYENNE DES PROB.= .03670 ECART-TYPE= .11219
-SOMME DES LOG10(PROB.)=-448.84706

CARACTERISTIQUES DE L'ECHANTILLON (THEORIE)

1.2212:MU	.9393:SIG	.7691:CV	1.1392:CS
(1)	(1)	(1)	(2)
4.5067:CK	13.6793:C5	55.9878:C6	
(9)	(44)	(265)	

TEMPS DE GENERATION= 367.133 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D'EXECUTION= 10.522 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D'ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.7562481E+01	1925	.4558857E-04	21936
.7349823E+01	1556	.8981292E-04	11135
.6918573E+01	1011	.3029036E-03	3302
.6169140E+01	478	.3639274E-03	2748
.6128189E+01	459	.8051164E-03	1243
.6124682E+01	457	.8478261E-03	1180
.6118938E+01	454	.9579421E-03	1044
.6043144E+01	421	.1301345E-02	769
.5781513E+01	324	.1327102E-02	754
.5739227E+01	311	.1369921E-02	730

TEST DE L↑ALGORITHME RAMBERG (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.773237	************
100	1	.519109	************
150	1	.452672	-.0425990516
200	1	.425503	-.0426602946
250	1	.410802	-.0363070351
300	1	.397065	-.0346935346
350	1	.396548	-.0374515087
400	1	.406202	-.0414643019
450	1	.402591	-.0400200903
500	1	.407095	-.0417492106
600	1	.394405	-.0357152841
700	1	.367767	-.0296055278
800	1	.373990	-.0312725341
900	1	.374009	-.0309590767
1000	1	.373152	-.0311824786
2000	1	.330820	-.0255941650
3000	1	.336977	-.0268731387
4000	1	.331389	-.0263134399
5000	1	.328154	-.0258700653
6000	1	.328938	-.0255087063
7000	1	.333330	-.0258059029
8000	1	.338473	-.0266715487
9000	1	.340393	-.0268789224
10000	1	.342919	-.0269847626
11000	1	.344701	-.0270041243
12000	1	.348838	-.0275974795
13000	1	.350754	-.0277825416
14000	1	.354820	-.0281387221
15000	1	.354678	-.0278285845

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - Les mêmes remarques que pour le cas $\lambda = 0,5$ sont applicables.
- Cet algorithme est une grossière approximation et est à proscrire.

TEST DE L↑ALGORITHME WILSON-HILFERTY LAMBDA=20.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000 ISEED= 9
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	19	130	596	794	724	723	749	748	764	735	702	734
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.301	.666	.868	.099	.330	.312	.970	.940	.600	.574	.072	.549

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	743	765	789	764	795	718	798	770	714	587	124	15
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.793	.574	.144	.600	.092	.231	.072	.454	.177	.588	.342	1.000

-MOYENNE DES PROB.= .47282 ECART-TYPE= .29959
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -10.66765

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

19.9889:MU	4.4398:SIG	.2221:CV	.3994:CS
(20)	(4.4721)	(0.2236)	(0.4472)
3.2474:CK	4.2565:C5	20.5175:C6	
(3.3)	(4.7405)	(21.8)	

TEMPS DE GENERATION= 310.133 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION= 8.771 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.4057600E+02	7775	.6720505E+01	39195
.4008151E+02	5930	.7009572E+01	22111
.3936768E+02	4028	.7169743E+01	16339
.3889960E+02	3136	.7399470E+01	10770
.3888002E+02	3103	.7519548E+01	8729
.3883671E+02	3033	.7812889E+01	5334
.3850777E+02	2548	.8139078E+01	3187
.3847598E+02	2505	.8213505E+01	2846
.3815724E+02	2118	.8418155E+01	2104
.3783402E+02	1789	.8487183E+01	1905

TEST DE L↑ALGORITHME WILSON-HILFERTY LAMBDA=20.00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.573080	************
100	1	.378362	-.0402580844
150	1	.298142	-.0193999254
200	1	.259554	-.0148802791
250	1	.222521	-.0109278447
300	1	.193460	-.0081655514
350	1	.141801	-.0042575646
400	1	.154749	-.0049313358
450	1	.164726	-.0059172470
500	1	.154647	-.0053198458
600	1	.153326	-.0051213727
700	1	.141497	-.0043026061
800	1	.107606	-.0024452807
900	1	.102724	-.0022315007
1000	1	.111450	-.0026476662
2000	1	.103771	-.0022662982
3000	1	.077263	-.0012139852
4000	1	.066531	-.0009063108
5000	1	.062374	-.0007956250
6000	1	.057583	-.0006901402
7000	1	.049902	-.0005132058
8000	1	.040951	-.0003405975
9000	1	.042053	-.0003637725
10000	1	.044091	-.0003966920
11000	1	.042172	-.0003630590
12000	1	.040595	-.0003343232
13000	1	.042664	-.0003700818
14000	1	.040499	-.0003365553
15000	1	.038653	-.0003066856

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - On utilise les équations de Wilson-Hilferty directement, sans procédure d'acceptation-réjection.

- La littérature sur le sujet les recommande seulement pour $\lambda > 20$ (certains auteurs $\lambda > 4$).
- Tout semble exact, sauf pour les variables extrêmes qui sont un peu trop extrêmes.

  $X_{W.H.} = 8{,}922$ au lieu de 8,958 pour $F(x) = 0{,}001$

  $X_{W.H.} = 36{,}747$ au lieu de 36,701 pour $F(x) = 0{,}999$
- Cet algorithme demeure approximatif et est à déconseiller

TEST DE L↑ALGORITHME WILSON-HILFERTY LAMBDA= 4.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000 ISEED= 27
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	21	152	590	781	727	736	742	744	794	763	802	744
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.121	.142	.677	.245	.389	.600	.764	.822	.099	.626	.051	.822

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	749	733	745	762	760	701	760	733	689	628	130	14
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.970	.524	.851	.653	.708	.066	.708	.524	.022	.243	.666	.796

-MOYENNE DES PROB.= .50384 ECART-TYPE= .30202
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -10.80756

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

3.9799:MU	1.9967:SIG	.5017:CV	.9900:CS
(4.0)	(2.0)	(0.5)	(1.0)
4.3406:CK	11.5970:C5	44.6874:C6	
(4.5)	(13.0)	(55.0)	

TEMPS DE GENERATION= 324.867 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION= 9.420 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.1481180E+02	4060	.1108060E+00	173934
.1477115E+02	3928	.1731511E+00	30654
.1439877E+02	2906	.2142295E+00	13516
.1438078E+02	2864	.2229395E+00	11605
.1405233E+02	2199	.2259591E+00	11023
.1401921E+02	2141	.2431374E+00	8335
.1392604E+02	1987	.2497359E+00	7528
.1391617E+02	1972	.2565662E+00	6795
.1380592E+02	1805	.2702107E+00	5583
.1369729E+02	1655	.2853994E+00	4540

TEST DE L'ALGORITHME WILSON-HILFERTY LAMBDA= 4.00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.476832	************
100	1	.485582	************
150	1	.429334	-.0473713371
200	1	.321182	-.0236406866
250	1	.294225	-.0197720716
300	1	.242791	-.0137863222
350	1	.251825	-.0137348674
400	1	.225365	-.0116080959
450	1	.215573	-.0109835761
500	1	.232877	-.0124919601
600	1	.197054	-.0088643461
700	1	.174902	-.0065154296
800	1	.187083	-.0077823347
900	1	.173486	-.0065004858
1000	1	.167332	-.0060859414
2000	1	.062744	-.0008504541
3000	1	.086518	-.0016089841
4000	1	.073842	-.0011183714
5000	1	.058773	-.0007059335
6000	1	.060340	-.0007556866
7000	1	.054187	-.0006117854
8000	1	.048633	-.0004897042
9000	1	.042360	-.0003723156
10000	1	.044272	-.0004018622
11000	1	.043224	-.0003837372
12000	1	.039890	-.0003266950
13000	1	.038534	-.0003058043
14000	1	.037643	-.0002921647
15000	1	.036648	-.0002792775

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - En apparence les résultats sont plausibles, mais les variables extrêmes faibles sont sensiblement favorisées. Cet état de chose peut apporter de mauvaises conclusions.

$X_{W.H.}$ = 0,382 au lieu de 0,429 (pour F(x) = 0,001)

$X_{W.H.}$ = 13,160 au lieu de 13,062 (pour F(x) = 0,999)

TEST DE L↑ALGORITHME WILSON-HILFERTY LAMBDA= 1.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000   ISEED= 101
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE   THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

	CLASSES											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	138	217	574	684	697	736	729	717	735	763	802	749
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	0.000	.000	.279	.013	.047	.600	.431	.216	.574	.626	.051	.970

	CLASSES											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	753	755	733	755	747	805	717	744	730	566	142	12
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.911	.851	.524	.851	.911	.039	.216	.822	.454	.157	.545	.438

-MOYENNE DES PROB.=   .43868 ECART-TYPE=   .33274
-SOMME DES LOG10(PROB.)=**********

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

.9892:MU	.9903:SIG	1.0011:CV	1.9830:CS
(1.0)	(1.0)	(1.0)	(2.0)
8.7314:CK	40.2691:C5	219.7667:C6	
(9.0)	(44.0)	(265.0)	

TEMPS DE GENERATION= 324.933 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION=   9.332 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.9267525E+01	10589	0.	INFINI
.8860393E+01	7047	0.	..
.8768530E+01	6429	0.	..
.8206124E+01	3663	0.	..
.7880056E+01	2644	0.	..
.7851230E+01	2569	0.	..
.7757605E+01	2339	0.	..
.7490662E+01	1791	0.	..
.7460614E+01	1738	0.	..
.7446610E+01	1714	0.	..

TEST DE L↑ALGORITHME WILSON-HILFERTY LAMBDA= 1.00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.751139	************
100	1	.580381	-.0748026598
150	1	.590767	-.0776405330
200	1	.436493	-.0383754665
250	1	.335920	-.0222283593
300	1	.305888	-.0178394411
350	1	.254540	-.0136635341
400	1	.234521	-.0122581347
450	1	.232734	-.0117337314
500	1	.233599	-.0126542124
600	1	.234708	-.0124269752
700	1	.210773	-.0094682746
800	1	.216278	-.0096968035
900	1	.190209	-.0076093974
1000	1	.179473	-.0068001545
2000	1	.110406	-.0025113679
3000	1	.102507	-.0021375443
4000	1	.110084	-.0024888353
5000	1	.091812	-.0017270630
6000	1	.086396	-.0015211194
7000	1	.084406	-.0014422648
8000	1	.078476	-.0012465360
9000	1	.076760	-.0011743324
10000	1	.076033	-.0011354892
11000	1	.074055	-.0010596327
12000	1	.067748	-.0008896587
13000	1	.067318	-.0008733895
14000	1	.065734	-.0008272005
15000	1	.068288	-.0008835664

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - Cette génération peut sembler bonne en ce qui concerne les moments mais elle est complètement inexacte pour les variables extrêmes.
- P.Q. et SIG ne convergent pas vers 0.

TEST DE L↑ALGORITHME EXPO.   LAMBDA= 1.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000   ISEED=   51
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE   THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	16	151	591	777	712	761	707	793	741	749	750	785
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.796	.167	.708	.312	.155	.680	.107	.107	.736	.970	1.000	.190

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	760	708	775	763	728	752	715	765	773	569	147	12
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.708	.116	.349	.626	.410	.940	.190	.574	.389	.196	.300	.438

-MOYENNE DES PROB.=   .46514   ECART-TYPE=   .29588
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -10.44264

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

.9983:MU	1.0000:SIG	1.0018:CV	1.9898:CS
(1.0)	(1.0)	(1.0)	(2.0)
8.8030:CK	41.6601:C5	236.1265:C6	
(9.0)	(44.0)	(265.0)	

TEMPS DE GENERATION=   93.667 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION=   5.411 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.9627802E+01	15181	.5036191E-04	19857
.9593689E+01	14672	.8563009E-04	11679
.9453346E+01	12751	.9879055E-04	10123
.8921624E+01	7492	.1112131E-03	8992
.7990151E+01	2952	.1205790E-03	8294
.7904035E+01	2708	.1207003E-03	8285
.7843267E+01	2549	.2447038E-03	4087
.7412819E+01	1657	.3658867E-03	2734
.7267059E+01	1432	.3751590E-03	2666
.7263584E+01	1427	.3848935E-03	2599

TEST DE L↑ALGORITHME EXPO.   LAMBDA= 1.00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.542897	************
100	1	.389331	-.0312895407
150	1	.347422	-.0244906723
200	1	.314559	-.0199729035
250	1	.248278	-.0120292856
300	1	.213026	-.0097648175
350	1	.214211	-.0100591174
400	1	.232266	-.0110526641
450	1	.212660	-.0093409580
500	1	.195529	-.0082383109
600	1	.167542	-.0062156072
700	1	.118349	-.0029593129
800	1	.120033	-.0030514774
900	1	.113769	-.0027025834
1000	1	.108966	-.0024956047
2000	1	.081950	-.0014017045
3000	1	.086329	-.0015589389
4000	1	.084058	-.0015080790
5000	1	.082793	-.0014638692
6000	1	.070843	-.0010685528
7000	1	.058053	-.0007111488
8000	1	.049710	-.0005186238
9000	1	.052819	-.0005982012
10000	1	.049332	-.0005185254
11000	1	.050758	-.0005487647
12000	1	.045277	-.0004328146
13000	1	.042717	-.0003824926
14000	1	.037255	-.0002887646
15000	1	.034839	-.0002523093

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - Dans ce cas X = -ln U, où U est une variable aléatoire uniforme (0,1).
- Cet algorithme est très rapide car il utilise simplement la fonction Ranf intégrée au système.
- Il est aussi exact que la fonction Ranf.

TEST DE L↑ALGORITHME EXPO.   LAMBDA= 4.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000   ISEED= 999
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE   THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE DE LA FREQUENCE THEORIQUE

++++++++++++++++++++++++CLASSES+++++++++++++++++++++++++++++

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	22	112	573	719	745	722	799	769	726	749	739	724
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.071	.047	.261	.245	.851	.294	.066	.477	.369	.970	.680	.330

++++++++++++++++++++++++CLASSES+++++++++++++++++++++++++++++

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	729	787	763	766	692	778	776	770	751	627	147	15
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.431	.166	.626	.549	.030	.294	.330	.454	.970	.261	.300	1.000

-MOYENNE DES PROB.= .41963   ECART-TYPE= .29553
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -12.48423

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

4.0334:MU	2.0159:SIG	.4998:CV	1.0413:CS
(4.0)	(2.0)	(0.5)	(1.0)
4.9909:CK	18.9538:C5	121.4924:C6	
(4.5)	(13.0)	(55.0)	

TEMPS DE GENERATION= 125.600 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION= 5.923 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.2468968E+02	18803708	.2305658E+00	10205
.1565816E+02	8103	.2686976E+00	5703
.1530716E+02	6078	.2894026E+00	4308
.1470667E+02	3728	.3045822E+00	3554
.1468197E+02	3654	.3132344E+00	3199
.1438520E+02	2874	.3353717E+00	2477
.1400725E+02	2121	.3421049E+00	2300
.1378481E+02	1775	.3447594E+00	2235
.1347697E+02	1389	.3554652E+00	1994
.1336618E+02	1272	.3587083E+00	1928

TEST DE L↑ALGORITHME EXPO.   LAMBDA= 4.00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.704870	************
100	1	.510933	-.0719135047
150	1	.388128	-.0389602567
200	1	.344887	-.0260174561
250	1	.271603	-.0154866511
300	1	.252241	-.0129538627
350	1	.247001	-.0131726165
400	1	.209008	-.0093793843
450	1	.194265	-.0080062284
500	1	.195098	-.0079158819
600	1	.180642	-.0069198363
700	1	.162684	-.0052617050
800	1	.146674	-.0044472648
900	1	.132943	-.0036201310
1000	1	.136111	-.0037640125
2000	1	.120350	-.0030639212
3000	1	.079678	-.0012831398
4000	1	.068056	-.0009526461
5000	1	.045589	-.0004341692
6000	1	.051742	-.0005690347
7000	1	.048390	-.0004972777
8000	1	.046700	-.0004623227
9000	1	.048750	-.0005016550
10000	1	.046657	-.0004577768
11000	1	.045678	-.0004336836
12000	1	.043730	-.0003966267
13000	1	.041806	-.0003628691
14000	1	.041518	-.0003585248
15000	1	.039572	-.0003249142

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - Un événement extrêmement rare s'est réalisé.
- Les moments d'ordre 4, 5 et 6 sont biaisés.
- La rapidité est excellente.

TEST DE L↑ALGORITHME EXPO.   LAMBDA=20.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000   ISEED= 111
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE   THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	15	132	616	752	741	799	740	709	742	747	697	741
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	1.000	.795	.505	.940	.736	.066	.708	.125	.764	.911	.047	.736

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	744	740	767	757	765	764	725	782	754	613	137	21
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.822	.708	.524	.793	.574	.600	.349	.231	.881	.588	.863	.121

-MOYENNE DES PROB.=   .59947 ECART-TYPE=   .29438
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -7.84616

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

20.0324:MU	4.5119:SIG	.2252:CV	.4586:CS
(20.0)	(4.4721)	(0.2236)	(0.4472)

3.3323:CK	5.0283:C5	22.9340:C6
(3.3)	(4.7405)	(21.8)

TEMPS DE GENERATION= 294.533 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION=   8.561 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.4307340E+02	31723	.6459157E+01	67876
.4270872E+02	25738	.6468130E+01	66574
.4158269E+02	13604	.6583383E+01	52080
.3999467E+02	5656	.8187735E+01	2959
.3928232E+02	3848	.8196452E+01	2921
.3927838E+02	3840	.8468328E+01	1957
.3924551E+02	3773	.8674072E+01	1465
.3910343E+02	3496	.8718576E+01	1378
.3840584E+02	2414	.8731560E+01	1354
.3805629E+02	2009	.8768814E+01	1287

TEST DE L↑ALGORITHME EXPO.   LAMBDA=20.00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.527157	************
100	1	.420526	-.0554875747
150	1	.397654	-.0356233595
200	1	.280976	-.0159896237
250	1	.265330	-.0146948534
300	1	.249444	-.0117836138
350	1	.227441	-.0094624855
400	1	.222427	-.0094879996
450	1	.212660	-.0087829104
500	1	.203133	-.0084372243
600	1	.192551	-.0077631180
700	1	.193115	-.0075928992
800	1	.203425	-.0081316887
900	1	.188148	-.0072529187
1000	1	.158014	-.0051619295
2000	1	.128800	-.0034239680
3000	1	.096972	-.0020073334
4000	1	.072909	-.0011338604
5000	1	.052843	-.0005912616
6000	1	.049994	-.0005306869
7000	1	.043440	-.0003977550
8000	1	.043777	-.0004034616
9000	1	.041524	-.0003665736
10000	1	.037326	-.0002949751
11000	1	.034493	-.0002512492
12000	1	.038221	-.0003074160
13000	1	.037731	-.0002962909
14000	1	.033955	-.0002399891
15000	1	.031195	-.0002021639

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - Dans le cas présent $X = -\ln \prod_{i=1}^{20} (U)_i$

Malgré cela il n'y a pas eu d'"underflow" ce qui aurait causé une erreur lors du calcul de - ln 0.

- Le temps de génération demeure peu élevé sur le système C.D.C.

TEST DE L↑ALGORITHME GS   LAMBDA= .25

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000   ISEED=   38
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE   THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	19	128	605	784	737	733	741	730	765	698	781	735
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.301	.545	.835	.203	.626	.524	.736	.454	.574	.051	.245	.574

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	735	766	762	744	724	773	727	751	763	623	165	11
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.574	.549	.653	.822	.330	.389	.389	.970	.626	.338	.009	.301

-MOYENNE DES PROB.=   .48420 ECART-TYPE=   .23950
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -10.20110

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

.2574:MU	.5120:SIG	1.9894:CV	3.7586:CS
(0.25)	(0.5)	(2.0)	(4.0)

22.6382:CK	163.6496:C5	1374.5116:C6
(27.0)	(232.0)	(2455.0)

TEMPS DE GENERATION= 342.733 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION=   9.149 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.6449665E+01	10238	.3290232E-18	37846
.6320017E+01	8873	.3220059E-14	3805
.5931114E+01	5766	.4260580E-14	3548
.5901078E+01	5577	.5273240E-14	3364
.5734027E+01	4631	.8373894E-14	2996
.4965922E+01	1956	.4289125E-13	1992
.4861084E+01	1737	.4309576E-13	1989
.4685180E+01	1422	.5585918E-13	1864
.4638380E+01	1349	.9248010E-13	1644
.4393141E+01	1019	.1201333E-12	1540

TEST DE L↑ALGORITHME GS   LAMBDA=   .25 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.587591	***********
100	1	.367065	-.0368434892
150	1	.307413	-.0199149232
200	1	.231699	-.0115656716
250	1	.256289	-.0138522323
300	1	.227881	-.0115297974
350	1	.209341	-.0094494790
400	1	.201311	-.0088244331
450	1	.164726	-.0055507052
500	1	.171679	-.0059619945
600	1	.141834	-.0042724976
700	1	.125056	-.0032294039
800	1	.109725	-.0024489932
900	1	.093450	-.0017496752
1000	1	.082078	-.0013739882
2000	1	.086876	-.0016141658
3000	1	.079177	-.0013096854
4000	1	.057124	-.0006701712
5000	1	.047612	-.0004664646
6000	1	.041039	-.0003503449
7000	1	.044058	-.0003997951
8000	1	.037302	-.0002880581
9000	1	.040317	-.0003343282
10000	1	.040142	-.0003343774
11000	1	.036388	-.0002729803
12000	1	.036834	-.0002790130
13000	1	.033532	-.0002323284
14000	1	.032501	-.0002181278
15000	1	.032343	-.0002157931

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0   P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - L'algorithme GS est le meilleur pour $\lambda \leqslant 0,25$.
- Les moments d'ordre supérieur demeurent biaisés même pour une taille de 15 000.

TEST DE L↑ALGORITHME GS   LAMBDA= .50

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000   ISEED=   46
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE   THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	11	130	594	765	716	769	810	750	781	737	769	780
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.301	.666	.803	.574	.203	.477	.025	1.000	.245	.626	.477	.261

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	781	755	685	761	719	731	754	738	718	569	168	9
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.245	.851	.015	.680	.245	.477	.881	.653	.231	.196	.004	.121

-MOYENNE DES PROB.=   .42740   ECART-TYPE=   .29374
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -13.84693

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON   (THEORIE)

.4954:MU	.7108:SIG	1.4347:CV	2.8016:CS
(0.5)	(0.7071)	(1.4142)	(2.8284)

13.9496:CK	80.1694:C5	544.6474:C6
(15.0)	(96.167)	(755.0)

TEMPS DE GENERATION=   383.067 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION=   9.730 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.8707018E+01	33267	.1781428E-08	20997
.6790537E+01	4377	.6426259E-08	11055
.6198861E+01	2326	.1031971E-07	8724
.6155242E+01	2220	.6148240E-07	3574
.5910912E+01	1708	.7773775E-07	3179
.5808904E+01	1531	.8368738E-07	3063
.5728005E+01	1403	.1194579E-06	2564
.5539161E+01	1145	.1306548E-06	2452
.5498678E+01	1096	.2250526E-06	1868
.5405199E+01	991	.2670358E-06	1715

TEST DE L↑ALGORITHME GS LAMBDA= .50 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.692820	************
100	1	.498419	************
150	1	.400000	-.0394699524
200	1	.374166	-.0321157600
250	1	.296506	-.0213119296
300	1	.298142	-.0200362154
350	1	.274674	-.0169864953
400	1	.241704	-.0130213143
450	1	.238470	-.0127783811
500	1	.218319	-.0104790844
600	1	.189490	-.0076463061
700	1	.171178	-.0059595589
800	1	.159770	-.0051036900
900	1	.150718	-.0046711378
1000	1	.145240	-.0043595007
2000	1	.119296	-.0028911953
3000	1	.094677	-.0018829522
4000	1	.073449	-.0011350962
5000	1	.063789	-.0008573124
6000	1	.054505	-.0006194658
7000	1	.042388	-.0003737738
8000	1	.045270	-.0004221776
9000	1	.047360	-.0004703670
10000	1	.046390	-.0004472116
11000	1	.048018	-.0004799715
12000	1	.042910	-.0003824780
13000	1	.038219	-.0003044417
14000	1	.037537	-.0002920092
15000	1	.038464	-.0003070462

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

TEST DE L'ALGORITHME GBH   LAMBDA= .50

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000   ISEED= 123
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE   THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	13	135	585	772	761	756	776	745	726	750	762	752
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.605	1.000	.532	.410	.680	.822	.330	.851	.369	1.000	.653	.940

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	735	702	731	795	713	766	778	765	742	594	132	14
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.574	.072	.477	.092	.166	.549	.294	.574	.764	.803	.795	.796

-MOYENNE DES PROB.= .58954   ECART-TYPE= .27228
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -7.29429

CARACTERISTIQUES DE L'ECHANTILLON (THEORIE)

.4966:MU	.6960:SIG	1.4016:CV	2.7890:CS
(0.5)	(0.7071)	(1.4142)	(2.8284)
14.6578:CK	90.8221:C5	661.5702:C6	
(15.0)	(96.167)	(755.0)	

TEMPS DE GENERATION= 235.467 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D'EXECUTION= 7.590 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D'ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.8276446E+01	21136	.1086370E-07	8503
.7501031E+01	9312	.5077099E-07	3933
.6860901E+01	4717	.6130430E-07	3579
.6751315E+01	4198	.9614410E-07	2858
.6429884E+01	2979	.1096036E-06	2677
.6391408E+01	2859	.1163477E-06	2598
.6244737E+01	2443	.1837919E-06	2067
.5999068E+01	1878	.2011468E-06	1976
.5987249E+01	1854	.2798790E-06	1675
.5836120E+01	1576	.3755658E-06	1446

TEST DE L'ALGORITHME GBH   LAMBDA= .50 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.629118	************
100	1	.389331	-.0326909769
150	1	.375881	-.0330769949
200	1	.267542	-.0172246289
250	1	.240000	-.0129363772
300	1	.218447	-.0105135297
350	1	.195766	-.0084203277
400	1	.198016	-.0087731882
450	1	.201618	-.0097496483
500	1	.206831	-.0103766811
600	1	.187005	-.0076937061
700	1	.160290	-.0055391086
800	1	.158114	-.0053999294
900	1	.143474	-.0044359794
1000	1	.133298	-.0039227110
2000	1	.087238	-.0016185792
3000	1	.054376	-.0006220909
4000	1	.056148	-.0006516438
5000	1	.046231	-.0004364846
6000	1	.050956	-.0005253055
7000	1	.039274	-.0003141381
8000	1	.042866	-.0003814091
9000	1	.038946	-.0003157624
10000	1	.042242	-.0003693949
11000	1	.040967	-.0003474534
12000	1	.042937	-.0003800996
13000	1	.039461	-.0003215668
14000	1	.032268	-.0002154923
15000	1	.030693	-.0001952469

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - L'algorithme GBH est utilisable pour $\lambda > 0,25$.
- Il est exact et rapide.

TEST DE L↑ALGORITHME GBH LAMBDA= 4.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000 ISEED= 43
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	14	124	633	736	744	775	745	747	780	761	755	766
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.796	.342	.169	.600	.822	.349	.851	.911	.261	.680	.851	.549

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	705	703	727	730	759	733	799	758	702	651	141	12
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.092	.078	.389	.454	.736	.524	.066	.764	.072	.034	.604	.438

-MOYENNE DES PROB.= .47638 ECART-TYPE= .29052
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -11.09079

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

4.0069:MU	2.0178:SIG	.5036:CV	.9961:CS
(4.0)	(2.0)	(0.5)	(1.0)
4.3369:CK	11.7728:C5	46.0336:C6	
(4.5)	(13.0)	(55.0)	

TEMPS DE GENERATION= 260.867 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION= 7.907 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.1644092E+02	15460	.2833081E+00	4668
.1561740E+02	7837	.2892606E+00	4316
.1489417E+02	4341	.3204646E+00	2936
.1469546E+02	3694	.3425478E+00	2289
.1390671E+02	1957	.3470748E+00	2180
.1389832E+02	1944	.3479520E+00	2159
.1386892E+02	1898	.3536048E+00	2034
.1366082E+02	1608	.3546748E+00	2011
.1346651E+02	1377	.3671649E+00	1768
.1344755E+02	1357	.3932788E+00	1371

```
TEST DE L↑ALGORITHME GBH       LAMBDA= 4.00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

            20 CLASSES EQUIDISTANTES
    N       MOY.       SIG.          P.Q.
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
   50        1       .629118    ************
  100        1       .435286    -.0578721742
  150        1       .378362    -.0459246872
  200        1       .347926    -.0361329876
  250        1       .272841    -.0201943158
  300        1       .289383    -.0206785834
  350        1       .272790    -.0191712626
  400        1       .248681    -.0137271731
  450        1       .208213    -.0091654099
  500        1       .208857    -.0091537374
  600        1       .197647    -.0085138230
  700        1       .202667    -.0089588438
  800        1       .205836    -.0096803548
  900        1       .176898    -.0070539027
 1000        1       .162351    -.0059547563
 2000        1       .129412    -.0033626490
 3000        1       .108472    -.0025529727
 4000        1       .095779    -.0019762402
 5000        1       .085918    -.0015554966
 6000        1       .069265    -.0010089707
 7000        1       .057210    -.0006865550
 8000        1       .055807    -.0006527855
 9000        1       .053255    -.0005922174
10000        1       .049651    -.0005136045
11000        1       .043930    -.0004034362
12000        1       .042243    -.0003712971
13000        1       .042380    -.0003679946
14000        1       .039752    -.0003257262
15000        1       .038513    -.0003064986

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0  P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)
```

TEST DE L↑ALGORITHME GT   LAMBDA= 1.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000   ISEED=   77
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE   THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	10	135	597	795	725	746	750	784	794	697	766	750
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.196	1.000	.901	.092	.349	.881	1.000	.203	.099	.047	.549	1.000

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	755	740	757	740	767	716	734	779	769	539	144	11
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.851	.708	.793	.708	.524	.203	.549	.277	.477	.011	.437	.301

-MOYENNE DES PROB.=   .50649   ECART-TYPE=   .33051
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -11.00701

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

.9925:MU	.9945:SIG	1.0020:CV	2.0165:CS
(1.0)	(1.0)	(1.0)	(2.0)
9.1961:CK	46.1598:C5	286.5056:C6	
(9.0)	(44.0)	(265.0)	

TEMPS DE GENERATION=   233.733 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION=   7.562 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.1073341E+02	45864	.3193721E-03	3132
.1019964E+02	26894	.3875936E-03	2581
.9572062E+01	14358	.4052688E-03	2468
.8196045E+01	3627	.4103800E-03	2437
.8049817E+01	3133	.6081352E-03	1645
.7952682E+01	2843	.6715252E-03	1490
.7717853E+01	2248	.7837318E-03	1276
.7692284E+01	2191	.8645106E-03	1157
.7495021E+01	1799	.8669465E-03	1154
.7317293E+01	1506	.9399845E-03	1064

TEST DE L↑ALGORITHME GT   LAMBDA= 1.00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.762268	************
100	1	.539005	-.0637771398
150	1	.397654	-.0316733431
200	1	.304354	-.0181454291
250	1	.275299	-.0154175179
300	1	.251312	-.0124717630
350	1	.217396	-.0087722403
400	1	.214599	-.0087985549
450	1	.209210	-.0087000388
500	1	.200631	-.0082919276
600	1	.182894	-.0069407160
700	1	.155390	-.0050235645
800	1	.165235	-.0055893607
900	1	.136607	-.0039663950
1000	1	.131229	-.0035171604
2000	1	.079934	-.0013252572
3000	1	.065140	-.0008951552
4000	1	.050341	-.0005287281
5000	1	.059641	-.0007577642
6000	1	.055219	-.0006462203
7000	1	.051261	-.0005556984
8000	1	.056002	-.0006662723
9000	1	.051765	-.0005630596
10000	1	.048467	-.0004910043
11000	1	.049206	-.0005009013
12000	1	.049630	-.0005059738
13000	1	.043617	-.0003928297
14000	1	.040086	-.0003343809
15000	1	.037712	-.0002961388

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - L'algorithme GT est utilisable pour $\lambda > 0,5$.
- Il est exact et rapide.

TEST DE L↑ALGORITHME GT LAMBDA= 4.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000 ISEED= 37
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

++++++++CLASSES++++++++	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	21	136	578	739	771	741	696	731	731	759	752	761
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.121	.931	.359	.680	.431	.736	.043	.477	.477	.736	.940	.680

++++++++CLASSES++++++++	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	763	756	782	739	723	751	730	796	765	625	137	17
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.626	.822	.231	.680	.312	.970	.454	.085	.574	.298	.863	.605

-MOYENNE DES PROB.= .54715 ECART-TYPE= .27390
-SOMME DES LOG10(PROB.)= -8.47075

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

4.0282:MU	2.0177:SIG	.5009:CV	1.0044:CS
(4.0)	(2.0)	(0.5)	(1.0)
4.5191:CK	12.9387:C5	53.3152:C6	
(4.5)	(13.0)	(55.0)	

TEMPS DE GENERATION= 243.600 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION= 7.758 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.1624936E+02	13192	.1252245E+00	107862
.1593281E+02	10158	.1370970E+00	75792
.1577578E+02	8926	.2604959E+00	6414
.1505905E+02	4964	.2688633E+00	5689
.1483484E+02	4136	.2774194E+00	5054
.1432824E+02	2745	.3134263E+00	3191
.1432263E+02	2733	.3320494E+00	2571
.1426496E+02	2609	.3484510E+00	2148
.1411395E+02	2311	.3568945E+00	1965
.1404241E+02	2182	.3676237E+00	1760

TEST DE L↑ALGORITHME GT LAMBDA= 4.00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.494177	************
100	1	.394702	-.0396463616
150	1	.373383	-.0441074788
200	1	.347926	-.0291634312
250	1	.303246	-.0192961453
300	1	.310442	-.0207950803
350	1	.247696	-.0131746595
400	1	.247620	-.0132259488
450	1	.248295	-.0120943984
500	1	.235752	-.0109895599
600	1	.201166	-.0083398717
700	1	.151753	-.0047769174
800	1	.146449	-.0045144423
900	1	.164410	-.0056966462
1000	1	.149666	-.0046395913
2000	1	.094979	-.0018651374
3000	1	.098027	-.0019836559
4000	1	.077649	-.0012383466
5000	1	.062415	-.0007931672
6000	1	.054580	-.0006114495
7000	1	.048230	-.0004790667
8000	1	.046862	-.0004497849
9000	1	.045479	-.0004221808
10000	1	.044886	-.0004157753
11000	1	.037610	-.0002890457
12000	1	.036671	-.0002773326
13000	1	.032742	-.0002216142
14000	1	.030457	-.0001941123
15000	1	.031156	-.0002011029

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - L'algorithme GT demeure rapide même pour des paramètres de forme qui sont élevés.

TEST DE L↑ALGORITHME G4PE   LAMBDA= 2.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES: 15000   ISEED=   213
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE   THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE

CLASSES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	16	133	615	744	730	808	721	752	760	757	777	702
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.796	.863	.532	.822	.454	.030	.277	.940	.708	.793	.312	.072

CLASSES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	744	773	755	764	756	772	784	738	709	541	133	16
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.822	.389	.851	.600	.822	.410	.203	.653	.125	.014	.863	.796

-MOYENNE DES PROB.=   .54777   ECART-TYPE=   .30599
-SOMME DES LOG10(PROB.)=   -9.93449

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON (THEORIE)

1.9800:MU	1.3937:SIG	.7039:CV	1.4688:CS
(2.0)	(1.4142)	(0.7071)	(1.4142)
6.5420:CK	26.7969:C5	140.8021:C6	
(6.0)	(22.627)	(110.0)	

TEMPS DE GENERATION=   284.333 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION=   8.273 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)

X	M	X	(M)
.1392206E+02	74551	.1095419E-01	16790
.1230398E+02	16579	.1628156E-01	7627
.1161707E+02	8796	.1647473E-01	7450
.1150975E+02	7968	.1980985E-01	5164
.1150972E+02	7968	.2034624E-01	4897
.1091534E+02	4617	.2120361E-01	4512
.1046122E+02	3048	.2618462E-01	2968
.1039808E+02	2877	.2809822E-01	2581
.1026530E+02	2549	.3048230E-01	2197
.1006239E+02	2119	.3069172E-01	2167

TEST DE L↑ALGORITHME G4PE LAMBDA= 2.00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.751139	************
100	1	.454220	-.0396956572
150	1	.339246	-.0277164965
200	1	.240613	-.0130668145
250	1	.221003	-.0106905774
300	1	.187317	-.0076138207
350	1	.206032	-.0091458889
400	1	.220645	-.0107318569
450	1	.218447	-.0108663267
500	1	.201050	-.0088812763
600	1	.171338	-.0066366783
700	1	.143906	-.0044573462
800	1	.171103	-.0060931205
900	1	.135844	-.0038194578
1000	1	.121222	-.0030346996
2000	1	.100577	-.0021475720
3000	1	.096779	-.0019687907
4000	1	.074321	-.0011459750
5000	1	.071625	-.0010613684
6000	1	.060456	-.0007566965
7000	1	.051795	-.0005510890
8000	1	.055589	-.0006367791
9000	1	.056005	-.0006428323
10000	1	.051585	-.0005529985
11000	1	.049382	-.0005022070
12000	1	.044093	-.0003994809
13000	1	.039058	-.0003137779
14000	1	.039153	-.0003161178
15000	1	.038583	-.0003102229

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)

Remarque : - L'algorithme G4PE est utilisable pour $\lambda > 1$.
- La littérature le cite comme étant le plus rapide mais la procédure utilisée par la librairie I.M.S.L. n'utilise probablement pas la fonction Ranf, qui est très rapide.
- Algorithme exact.

```
TEST DE L↑ALGORITHME G4P2      LAMBDA: 4.00

NOMBRE DE VARIABLES GENEREES:15000     ISEED=5
OBSV=FREQUENCE OBSERVEE    THEO=FREQUENCE THEORIQUE
PROB=LA PROBABILITE QUE LA FREQUENCE OBSERVEE SOIT AUSSI ELOIGNEE
DE LA FREQUENCE THEORIQUE
```

	CLASSES 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
OBSV	12	120	593	800	727	730	779	755	791	702	681	771
THEO	15	135	600	750	750	750	750	750	750	750	750	750
PROB	.438	.195	.771	.061	.389	.454	.277	.851	.125	.072	.010	.431

	CLASSES 13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
OBSV	731	748	754	737	797	759	738	800	741	589	139	6
THEO	750	750	750	750	750	750	750	750	750	600	135	15
PROB	.477	.940	.881	.626	.078	.736	.653	.061	.736	.647	.729	.020

```
     -MOYENNE DES PROB.=      .44410   ECART-TYPE=      .30997
   -SOMME DES LOG10(PROB.)= -13.60252

CARACTERISTIQUES DE L↑ECHANTILLON   (THEORIE)
   4.0008:MU      1.9799:SIG       .4949:CV        .9252:CS
  (4)            (2)              (0.5)           (1)

   4.0904:CK     10.3542:C5      38.7195:C6
  (4.5)          (13)             (55)

    TEMPS DE GENERATION=   258.133 MICROSECONDES/VARIABLE
TEMPS TOTAL D↑EXECUTION=     8.328 SECONDES

VARIABLES EXTREMES OBTENUES LORS DE LA GENERATION
L EVENEMENT X AVAIT 1 CHANCE SUR M D↑ETRE PLUS GRAND (PLUS PETIT)
```

X	M	X	(M)
.1497954E+02	4653	.1611017E+00	40511
.1456208E+02	3316	.2592799E+00	6529
.1406128E+02	2215	.2928448E+00	4120
.1366620E+02	1615	.3116855E+00	3259
.1341363E+02	1321	.3585889E+00	1930
.1335675E+02	1262	.3610683E+00	1882
.1302292E+02	969	.3735925E+00	1658
.1280659E+02	818	.3950250E+00	1349
.1279871E+02	813	.3986283E+00	1305
.1263451E+02	715	.3993456E+00	1296

TEST DE L↑ALGORITHME G4P2   LAMBDA= 4,00 (SUITE)

STATISTIQUES DE LA VARIABLE
(FREQUENCE OBSERVEE/FREQUENCE THEORIQUE)

20 CLASSES EQUIDISTANTES

N	MOY.	SIG.	P.Q.
50	1	.573080	************
100	1	.440096	-.0500548566
150	1	.383276	-.0482230040
200	1	.340279	-.0270006194
250	1	.293078	-.0219808843
300	1	.268415	-.0183450417
350	1	.261204	-.0173188098
400	1	.257007	-.0154472927
450	1	.228678	-.0119363175
500	1	.222521	-.0105935287
600	1	.186692	-.0073606421
700	1	.160825	-.0056908055
800	1	.180278	-.0074437188
900	1	.172585	-.0068249158
1000	1	.169706	-.0068720601
2000	1	.097764	-.0020590540
3000	1	.076594	-.0012645920
4000	1	.071617	-.0010993452
5000	1	.074709	-.0011957929
6000	1	.076564	-.0012594229
7000	1	.072554	-.0011206048
8000	1	.064242	-.0008751572
9000	1	.062663	-.0008278799
10000	1	.057499	-.0006950014
11000	1	.052401	-.0005770265
12000	1	.050982	-.0005461477
13000	1	.045186	-.0004240464
14000	1	.043787	-.0003997360
15000	1	.043181	-.0003860993

POUR UN ALGORITHME EXACT ET POUR N INFINI: SIG.=0 P.Q.=0
(P.Q. EST LE PARAMETRE DE QUALITE)