

**Rapport scientifique N° 338**

par

Diane Leroux  
Fahim Ashkar  
Bernard Bobée

**L'INTÉGRATION DE LA MÉTHODE  
GÉNÉRALISÉE DES MOMENTS POUR LA LOI  
GAMMA GÉNÉRALISÉE DANS LE LOGICIEL  
HFA**

Juillet 1991

INRS-Eau  
Université du Québec  
C.P. 7500  
Sainte-Foy, (Québec)  
G1V 4C7

## TABLE DES MATIERES

	Page
1. Introduction .....	1
2. Propriétés statistiques de la distribution Gamma généralisée .....	1
3. Estimation des paramètres par la méthode généralisée des moments (MGM).....	2
3.1 Description théorique.....	2
3.2 Méthodes de résolution du système d'équations.....	3
4. Intégration de la MGM dans Ajust.....	4
4.1 Problème des valeurs numériques élevées.....	4
4.2 Problème de vitesse de convergence .....	9
4.2.1 Le module d'initialisation des paramètres (START) .....	9
4.2.2 Solutions envisagées .....	11
4.2.3 Algorithme de modification des valeurs de $C_s$ .....	12
5. Conclusion .....	13
Références.....	14
Annexe: Description et listings des sous-routines utilisées dans Ajust pour l'intégration de la MGM dans le cas de la distribution gamma généralisée.....	15

## 1. INTRODUCTION

La distribution gamma généralisée (GG) possède une fonction densité de probabilité qui peut prendre plusieurs formes fréquemment rencontrées en hydrologie. Cette caractéristique importante a conduit plusieurs auteurs à proposer différentes méthodes d'estimation pour les paramètres de cette distribution en vue de son utilisation pratique.

Le logiciel HFA (Bobée et Ashkar, 1991) permet d'utiliser la distribution GG et d'en estimer les paramètres par la méthode des moments et par la méthode du maximum de vraisemblance (voir Paradis et Bobée, 1983, pour la description de ces méthodes).

Au cours de l'année 1987, nous avons développé pour cette distribution une méthode générale appelée Méthode Généralisée des Moments (MGM) (Ashkar *et al.*, 1988). Cette méthode permet de combiner trois moments quelconques de la distribution GG. Elle a l'avantage d'avoir comme cas particuliers d'autres méthodes d'estimation déjà étudiées par différents auteurs (méthode des moments, méthode indirecte des moments, méthode mixte des moments, etc.).

Nous reprenons brièvement ici les aspects théoriques inhérents à l'estimation des paramètres par la MGM et présentons les moyens qui ont été mis en oeuvre afin d'éviter les problèmes numériques qui surviennent lors de l'automatisation du calcul.

## 2. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE LA DISTRIBUTION GAMMA GÉNÉRALISÉE

La fonction densité de probabilité de la distribution GG est donnée par:

$$f(x; \beta, \lambda, s) = \frac{|s| x^{s\lambda - 1} e^{-(x/\beta)^s}}{\beta^{s\lambda} \Gamma(\lambda)} \quad x > 0 \quad (2.1)$$

où  $\beta$  est un paramètre d'échelle et où  $\lambda$  et  $s$  sont des paramètres de forme. Les paramètres  $\beta$  et  $\lambda$  doivent être positifs alors que  $s$  peut être positif ou négatif.

Les moments non centrés de la distribution sont donnés (Stacy, 1962) par:

$$\mu_r'(x) = \frac{\beta^r \Gamma(\lambda + r/s)}{\Gamma(\lambda)} \quad (2.2)$$

En utilisant  $r = 1$  dans l'équation 2.2, on obtient la moyenne  $\mu_1'(x)$  de la distribution:

$$\mu_1'(x) = \frac{\beta \Gamma(\lambda + 1/s)}{\Gamma(\lambda)} \quad (2.3)$$

### 3. ESTIMATION DES PARAMETRES PAR LA MÉTHODE GÉNÉRALISÉE DES MOMENTS (MGM)

#### 3.1 Description théorique

La méthode généralisée des moments (MGM) (Ashkar et al., 1988) est décrite de la manière suivante:

- 1) Soit un échantillon  $x_1, x_2, \dots, x_N$  de taille  $N$  tiré d'une distribution GG. On définit le moment non centré d'ordre  $r$  par:

$$m'_r(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^r \quad (3.1)$$

- 2) On choisit trois nombres entiers distincts  $t, u$  et  $v$  non nuls (le cas  $t, u$  ou  $v$  tendant vers zéro est expliqué plus loin) et on considère les trois équations:

$$\begin{aligned} m'_t(x) &= \mu'_t(x) \\ m'_u(x) &= \mu'_u(x) \\ m'_v(x) &= \mu'_v(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

où les termes de gauche du système d'équations 3.2 sont les moments de l'échantillon (équation 3.1) et ceux de droite sont les moments correspondants pour la population (équation 2.2).

- 3) On résout le système d'équations 3.2 pour les paramètres  $\beta$ ,  $\lambda$  et  $s$  afin d'obtenir les estimateurs  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\lambda}$  et  $\hat{s}$ .

**Remarque:** Dans le cas où l'on choisit  $t$ ,  $u$  ou  $v$  tendant vers zéro (moment d'ordre quasi-zéro) l'équation générale:

$$m'_{\underline{r}}(x) = \mu'_{\underline{r}}(x) \quad r = t, u \text{ ou } v = \underline{0} \quad (3.3)$$

devient

$$\sum \frac{\ln x_i}{N} = \ln \beta + \Psi(\lambda)/s \quad (3.4)$$

puisque (Bobée et Ashkar, 1991)

$$m'_{\underline{0}}(x) = \sum \frac{\ln x_i}{N} \quad (3.5)$$

et

$$\mu'_{\underline{0}}(x) = \ln \beta + \Psi(\lambda)/s \quad (3.6)$$

### 3.2 Méthodes de résolution du système d'équations

Ashkar et al. (1988) proposent de résoudre le système d'équations 3.2 en isolant le paramètre  $\beta$  dans la première équation et en substituant le résultat dans les deux dernières équations. Le système d'équations devient:

$$\begin{aligned} g_1(\lambda, 1/s) &= \beta^u \Gamma(\lambda + u/s) - m'_u(x) \Gamma(\lambda) = 0 \\ g_2(\lambda, 1/s) &= \beta^v \Gamma(\lambda + v/s) - m'_v(x) \Gamma(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec

$$\beta = \frac{m'_t(x) \Gamma(\lambda)^{1/t}}{\Gamma(\lambda + t/s)}$$

Ce système est alors résolu pour  $\lambda$  et  $s$  en utilisant la méthode Newton-Raphson. Ashkar et al. (1988) donnent les dérivées partielles nécessaires à l'application de cette méthode.

En pratique, lorsqu'on utilise cette méthode dans le cadre du logiciel HFA, on rencontre un certain nombre de difficultés numériques, les principales étant la manipulation de valeurs numériques élevées (les moments non centrés d'ordre supérieur à 2) et la convergence du processus itératif de résolution du système d'équations (convergence lente ou non convergence).

Dans le chapitre 4, on indique comment ces problèmes ont été résolus en pratique (sans affecter la théorie sous-jacente à la méthode).

#### 4. INTÉGRATION DE LA MGM DANS AJUST

##### 4.1 Problème des valeurs numériques élevées

Afin de diminuer l'ordre de grandeur des valeurs numériques à manipuler lors du processus de résolution du système, on a modifié le système d'équations original 3.2 en un nouveau système où les termes sont d'un ordre de grandeur moins élevé.

On définit pour  $t$ ,  $u$  et  $v$  différents de 0 les rapports des moments échantillonnaires  $C_1$  et  $C_2$  et les rapports des moments correspondants de la population  $C_1(\lambda, 1/s)$  et  $C_2(\lambda, 1/s)$  par:

$$C_1 = \frac{[m'_u]^{t/u}}{m'_t} \quad C_1(\lambda, 1/s) = \frac{[\mu'_u]^{t/u}}{\mu'_t} \quad (4.1)$$

et

$$C_2 = \frac{[m'_v]^{t/v}}{m'_t} \quad C_2(\lambda, 1/s) = \frac{[\mu'_v]^{t/v}}{\mu'_t} \quad (4.2)$$

On a donc:

$$C_1(\lambda, 1/s) = \frac{\left[ \frac{\beta^u \Gamma(\lambda + u/s)}{\Gamma(\lambda)} \right]^{t/u}}{\frac{\beta^t \Gamma(\lambda + t/s)}{\Gamma(\lambda)}} = \frac{\left[ \frac{\Gamma(\lambda + u/s)}{\Gamma(\lambda)} \right]^{t/u}}{\frac{\Gamma(\lambda + t/s)}{\Gamma(\lambda)}} = A^{t/u}/B \quad (4.3)$$

et

$$C_2(\lambda, 1/s) = \frac{\left[ \frac{\beta^v \Gamma(\lambda + v/s)}{\Gamma(\lambda)} \right]^{t/v}}{\frac{\beta^t \Gamma(\lambda + t/s)}{\Gamma(\lambda)}} = \frac{\left[ \frac{\Gamma(\lambda + v/s)}{\Gamma(\lambda)} \right]^{t/v}}{\frac{\Gamma(\lambda + t/s)}{\Gamma(\lambda)}} = C^{t/v}/B \quad (4.4)$$

Le système d'équations original 3.2 devient donc:

$$\begin{aligned} g_1^*(\lambda, 1/s) &= C_1(\lambda, 1/s) - C_1 = 0 \\ g_2^*(\lambda, 1/s) &= C_2(\lambda, 1/s) - C_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

On utilise une méthode itérative Newton-Raphson pour résoudre les deux premières équations à deux inconnues ( $\lambda$  et  $s$ ). On pose:

$$C_1 = C_1(\lambda, 1/s) + \Delta\lambda \frac{\partial C_1(\lambda, 1/s)}{\partial \lambda} + \Delta(1/s) \frac{\partial C_1(\lambda, 1/s)}{\partial (1/s)} \quad (4.6)$$

$$C_2 = C_2(\lambda, 1/s) + \Delta\lambda \frac{\partial C_2(\lambda, 1/s)}{\partial \lambda} + \Delta(1/s) \frac{\partial C_2(\lambda, 1/s)}{\partial (1/s)} \quad (4.7)$$

Si on suppose des valeurs de départ pour  $\lambda$  et  $s$ , on peut résoudre 4.6 et 4.7 pour  $\Delta\lambda$  et  $\Delta(1/s)$ .

Les itérations sont poursuivies jusqu'à ce que  $\Delta\lambda/\lambda$  et  $\Delta(1/s)/(1/s)$  soient devenus suffisamment petits. On utilise également:

$$\frac{\partial C_1(\lambda, 1/s)}{\partial \lambda} = C_1(\lambda, 1/s) \left[ \frac{t}{u} \frac{\partial A}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \lambda} \right] \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial C_1(\lambda, 1/s)}{\partial (1/s)} = C_1(\lambda, 1/s) \left[ \frac{t}{u} \frac{\partial A}{\partial (1/s)} \cdot \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial (1/s)} \right] \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial C_2(\lambda, 1/s)}{\partial \lambda} = C_2(\lambda, 1/s) \left[ \frac{t}{v} \frac{\partial C}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \lambda} \right] \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial C_2(\lambda, 1/s)}{\partial (1/s)} = C_2(\lambda, 1/s) \left[ \frac{t}{v} \frac{\partial C}{\partial (1/s)} \cdot \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial (1/s)} \right] \quad (4.11)$$

avec

$$A = \Gamma(\lambda + u/s) / \Gamma(\lambda) \quad (4.12)$$

$$B = \Gamma(\lambda + t/s) / \Gamma(\lambda) \quad (4.13)$$

$$C = \Gamma(\lambda + v/s) / \Gamma(\lambda) \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \lambda} = [\Psi(\lambda + u/s) - \Psi(\lambda)] \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial (1/s)} = u \cdot \Psi(\lambda + u/s) \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \lambda} = [\Psi(\lambda + t/s) - \Psi(\lambda)] \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial (1/s)} = t \cdot \Psi(\lambda + t/s) \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial \lambda} = [\Psi(\lambda + v/s) - \Psi(\lambda)] \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial (1/s)} = v \cdot \Psi(\lambda + v/s) \quad (4.20)$$

et  $\Psi(\lambda) = d \ln \Gamma(\lambda) / d\lambda$  est la fonction digamma (disponible dans AJUST sous la forme d'une approximation polynômiale).

Cas où le moment d'ordre quasi-zéro est utilisé

Dans le cas où  $t = 0$ , on déduit du système d'équations original:

$$\begin{aligned} m'_{\underline{0}}(x) &= \mu'_{\underline{0}} = \ln \beta + \Psi(\lambda)/s \\ m'_{\underline{u}}(x) &= \mu'_{\underline{u}} = \frac{\beta^u \Gamma(\lambda + u/s)}{\Gamma(\lambda)} \\ m'_{\underline{v}}(x) &= \mu'_{\underline{v}} = \frac{\beta^v \Gamma(\lambda + v/s)}{\Gamma(\lambda)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

le système:

$$\begin{aligned} m'_{\underline{0}}(x) &= \mu'_{\underline{0}} = \ln \beta + \Psi(\lambda)/s \\ \ln m'_{\underline{u}}(x) &= \ln \mu'_{\underline{u}} = u \ln \beta + \ln \Gamma(\lambda + u/s) - \ln \Gamma(\lambda) \\ \ln m'_{\underline{v}}(x) &= \ln \mu'_{\underline{v}} = v \ln \beta + \ln \Gamma(\lambda + v/s) - \ln \Gamma(\lambda) \end{aligned} \quad (4.22)$$

De la première équation, on tire  $\ln \beta = m'_{\underline{0}} - \Psi(\lambda)/s$  et on remplace  $\ln \beta$  par cette valeur dans les deux dernières équations. On obtient alors:

$$\begin{aligned} \ln m'_{\underline{u}}(x) &= u \cdot (m'_{\underline{0}}(x) - \Psi(\lambda)/s) + \ln \Gamma(\lambda + u/s) - \ln \Gamma(\lambda) \\ \ln m'_{\underline{v}}(x) &= v \cdot (m'_{\underline{0}}(x) - \Psi(\lambda)/s) + \ln \Gamma(\lambda + v/s) - \ln \Gamma(\lambda) \end{aligned} \quad (4.23)$$

qui s'écrit aussi:

$$\begin{aligned} \ln m'_u(x) - u \cdot m'_0(x) &= \ln \Gamma(\lambda + u/s) - \ln \Gamma(\lambda) - u\Psi(\lambda)/s \\ \ln m'_v(x) - v \cdot m'_0(x) &= \ln \Gamma(\lambda + v/s) - \ln \Gamma(\lambda) - v\Psi(\lambda)/s \end{aligned} \quad (4.24)$$

On définit les quantités  $C_1$  et  $C_2$  pour l'échantillon et les expressions correspondantes  $C_1(\lambda, 1/s)$  et  $C_2(\lambda, 1/s)$  pour la population:

$$C_1 = \ln m'_u(x) - u \cdot m'_0(x) \quad (4.25)$$

$$C_2 = \ln m'_v(x) - v \cdot m'_0(x) \quad (4.26)$$

$$C_1(\lambda, 1/s) = \ln \Gamma(\lambda + u/s) - \ln \Gamma(\lambda) - u \cdot \Psi(\lambda)/s = A - B - u \cdot C \quad (4.27)$$

$$C_2(\lambda, 1/s) = \ln \Gamma(\lambda + v/s) - \ln \Gamma(\lambda) - v \cdot \Psi(\lambda)/s = D - B - v \cdot C \quad (4.28)$$

On utilise une méthode itérative Newton-Raphson pour résoudre ce système à deux équations et à deux inconnues ( $\lambda$  et  $s$ ):

$$C_1 = C_1(\lambda, 1/s) + \Delta\lambda \frac{\partial C_1(\lambda, 1/s)}{\partial \lambda} + \Delta 1/s \frac{\partial C_1(\lambda, 1/s)}{\partial 1/s} \quad (4.6)$$

$$C_2 = C_2(\lambda, 1/s) + \Delta\lambda \frac{\partial C_2(\lambda, 1/s)}{\partial \lambda} + \Delta 1/s \frac{\partial C_2(\lambda, 1/s)}{\partial (1/s)} \quad (4.7)$$

Le processus itératif est le même que celui décrit pour le cas général plus haut. Les dérivées partielles nécessaires aux calculs sont:

$$\frac{\partial C_1(\lambda, 1/s)}{\partial \lambda} = \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{\partial B}{\partial \lambda} - u \cdot \frac{\partial C}{\partial \lambda} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial C_1(\lambda, 1/s)}{\partial 1/s} = \frac{\partial A}{\partial 1/s} - \frac{\partial B}{\partial 1/s} - u \cdot \frac{\partial C}{\partial 1/s} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial C_2(\lambda, 1/s)}{\partial \lambda} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial C_2(\lambda, 1/s)}{\partial 1/s} \quad (4.34)$$

avec

$$A = \ln \Gamma(\lambda + u/s) \quad (4.35)$$

$$B = \ln \Gamma(\lambda) \quad (4.36)$$

$$C = \Psi(\lambda) / s \quad (4.37)$$

$$D = \ln \Gamma(\lambda + v/s) \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda} = \Psi(\lambda + u/s) \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial A}{\partial(1/s)} = u \cdot \Psi(\lambda + u/s) \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \lambda} = \Psi(\lambda) \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial B}{\partial(1/s)} = 0 \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda} = \frac{\Psi'(\lambda)}{s} \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial C}{\partial(1/s)} = \Psi(\lambda) \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda} = \Psi(\lambda + v/s) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial D}{\partial(1/s)} = v \cdot \Psi(\lambda + v/s) \quad (4.46)$$

## 4.2 Problème de vitesse de convergence

### 4.2.1 Le module d'initialisation des paramètres (START)

On a observé que l'utilisation des fonctions  $C_1(\lambda, 1/s)$  et  $C_2(\lambda, 1/s)$  au lieu des moments non centrés non transformés a contribué à diminuer substantiellement le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution.

Toutefois la vitesse de convergence dépend aussi de la proximité des valeurs initiales des paramètres  $\lambda$  et  $s$  avec les valeurs qui sont des solutions du système d'équations à résoudre.

Dans AJUST, le module START permettant de fournir des valeurs initiales pour les paramètres dans le cas de la méthode des moments peut être utilisé pour la méthode généralisée des moments, mais il arrive que les valeurs initiales soient beaucoup trop éloignées des solutions. Ceci a pour conséquence un nombre plus élevé d'itérations pour obtenir une solution et parfois même une divergence du processus.

En effet, la méthode classique des moments, pour le cas à trois paramètres, consiste à résoudre un système d'équations obtenu en égalant la moyenne, le coefficient de variation ( $C_v$ ) et d'asymétrie ( $C_s$ ) de l'échantillon aux valeurs correspondantes de la population. Cette méthode est un cas particulier de la MGM correspondant à  $t=1$ ,  $u=2$  et  $v=3$ .

Le module START a été constitué à partir de régressions linéaires multiples effectuées pour relier les valeurs de  $C_v$  et  $C_s$  à des valeurs de  $\lambda$  et  $s$  (Paradis et Bobée, 1983). Ainsi, à partir des valeurs de  $C_v$  et de  $C_s$  pour l'échantillon, le module fournit des valeurs initiales pour  $\lambda$  et  $s$ .

Toutefois, pour des triplets  $(t, u, v)$  où les moments d'ordre 2 et 3 n'interviennent pas (le cas MGM(-1,0,1) par exemple), les valeurs de  $\lambda$  et  $s$  fournies par START sont assez éloignées des solutions du système d'équations puisque les valeurs de  $\lambda$  et  $s$  qui satisfont les égalités:

$$\begin{aligned}
C_v(\text{échantillon}) &= C_v(\text{population}) \\
C_s(\text{échantillon}) &= C_s(\text{population})
\end{aligned}
\tag{4.47}$$

ne sont pas nécessairement voisines des valeurs qui satisfont:

$$\begin{aligned}
m'_{-1}(x) &= \mu'_{-1}(x) \\
m'_0(x) &= \mu'_0(x) \\
m'_1(x) &= \mu'_1(x)
\end{aligned}
\tag{4.48}$$

#### 4.2.2 Solutions envisagées

Pour remédier à cette situation, il y a deux solutions possibles:

- 1) refaire le module START pour différentes combinaisons de valeurs de  $t$ ,  $u$  et  $v$  (il faut alors refaire autant de régressions linéaires multiples que le nombre de combinaisons de  $t$ ,  $u$  et  $v$  acceptées par le programme);
- 2) intégrer dans le processus itératif une possibilité de modifier les valeurs de  $C_v$  et de  $C_s$  soumises au module START dans le cas où le processus ne semble pas vouloir converger. La modification forcée des valeurs de  $C_v$  et  $C_s$  entraîne comme résultat de nouvelles valeurs de  $\lambda$  et  $s$  pouvant être utilisées lorsqu'on recommence le processus itératif.

La deuxième solution nous est apparue plus acceptable et plus facile à réaliser que la première. En effet, la première diminue la généralisation de la méthode, car on doit restreindre le nombre de triplets  $(t, u, v)$  différents acceptés par le programme.

La deuxième solution a comme avantage de conserver ce caractère général de la méthode mais nécessite un certain tâtonnement sur les valeurs de  $C_v$  et  $C_s$  à fournir au module d'initialisation des paramètres.

La première modification à faire est d'enlever la correction de biais que AJUST applique dans le calcul du coefficient d'asymétrie de l'échantillon. En effet, AJUST calcule  $C_s$  par la formule:

$$C_s = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2} \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \quad (4.49)$$

On peut donc modifier cette valeur pour ne conserver que  $(m_3/m_2)^{1/2}$  comme valeur de  $C_s$  à passer au module START.

#### 4.2.3 Algorithme de modification des valeurs de $C_s$

Soit  $\lambda_0$  et  $s_0$  les valeurs de paramètres fournies par START lorsqu'on lui donne en entrée les valeurs  $C_{v_0}$  et  $C_{s_0}$  ( $C_v$  et  $C_s$  de l'échantillon). Si ces valeurs ne permettent pas au processus de converger, on veut faire appel à START de nouveau mais cette fois avec les valeurs  $C_{v_1}$  et  $C_{s_1}$  telles que les valeurs de paramètres fournies,  $\lambda_1$  et  $s_1$ , permettent cette fois la convergence du processus. Il s'agit donc de trouver des valeurs  $C_{v_1}$  et  $C_{s_1}$  qui soient le plus près possible des valeurs de  $C_v$  et  $C_s$  de la population.

Le problème revient donc à trouver la transformation qui permet de passer de  $C_{v_0}$  à  $C_{v_1}$  et de  $C_{s_0}$  à  $C_{s_1}$ . Il faut donc observer l'écart qu'il y a entre les valeurs échantillonales ( $C_{v_0}$  et  $C_{s_0}$ ) et les valeurs de  $C_v$  et  $C_s$  qu'on peut calculer lorsque la procédure converge vers une solution.

A partir d'un certain nombre d'échantillons pour lesquels les valeurs initiales  $\lambda_0$  et  $s_0$  permettaient d'obtenir une solution pour n'importe quel triplet de moments  $(t, u, v)$ , on a calculé les valeurs de  $C_v$  et  $C_s$  de la population résultante. On a observé que l'écart entre  $C_{v_0}$  et  $C_v$  est faible et on a donc supposé qu'un tâtonnement autour de  $C_s$  serait suffisant pour trouver des valeurs initiales pour les paramètres qui soient près de la solution.

L'algorithme qui est inclus dans AJUST consiste à ajouter .1 à la valeur  $C_{s_0}$  pour obtenir  $C_{s_1}$  et à utiliser  $C_{v_0}$  pour  $C_{v_1}$ . Si cette modification ne suffit pas à obtenir une solution, on

ajoute .1 à nouveau. Si après 4 tentatives on n'a toujours pas de résultat, alors on retranche .1 à  $C_{s_0}$  (jusqu'à concurrence de 4 fois). On a donc les cas possibles:

$$C_{s_2} = C_{s_1} + .1 \quad (= C_{s_0} + 0.2)$$

$$C_{s_3} = C_{s_2} + .1 \quad (= C_{s_0} + 0.3)$$

$$C_{s_4} = C_{s_3} + .1 \quad (= C_{s_0} + 0.4)$$

$$C_{s_5} = C_{s_0} - .1$$

$$C_{s_6} = C_{s_5} - .1 \quad (= C_{s_0} - 0.2)$$

$$C_{s_7} = C_{s_6} - .1 \quad (= C_{s_0} - 0.3)$$

$$C_{s_8} = C_{s_7} - .1 \quad (= C_{s_0} - 0.4)$$

Cette procédure pourrait être améliorée car il peut arriver que, même après 10 tentatives, on n'obtienne pas de valeurs initiales assez près des valeurs solutions. Toutefois, elle fonctionne dans environ 90% des cas.

Une autre avenue à explorer serait un tâtonnement autour des valeurs  $\lambda_0$  et  $s_0$  directement plutôt que sur les valeurs de  $C_{v_0}$  et  $C_{s_0}$ . Cette procédure aurait l'avantage de ne nécessiter qu'un appel au module START. Le temps de calcul serait alors considérablement réduit.

## 5. CONCLUSION

Nous avons présenté brièvement la méthode généralisée des moments ainsi que la méthode originalement proposée pour résoudre le système d'équations.

Nous avons donné les détails des moyens numériques mis en oeuvre pour s'assurer que l'estimation des paramètres de la loi Gamma Généralisée par cette méthode fonctionne sans heurt de façon automatique.

## RÉFÉRENCES

ASHKAR, F., BOBÉE, B., LEROUX, D. and D. MORISSETTE (1988). The generalized method of moments as applied to the generalized gamma distribution, Stochastic Hydrology and Hydraulics, 2, p. 161-174.

BOBÉE, B. et F. ASHKAR (1991). The gamma family and derived distribution applied in hydrology. Water Resources Publications, 203 p.

PARADIS, M. et B. BOBÉE (1983). La distribution Gamma généralisée et son application en hydrologie, INRS-Eau, Rapport scientifique no 156, 52 p.

STACY, E.W. (1962). A generalization of the gamma distribution, Ann. of Math. Stat., 33, p. 1187-1192.

**ANNEXE: Description et listings des sous-routines utilisées dans AJUST pour l'intégration de la MGM dans le cas de la distribution gamma généralisée**

Sous-routines:

GGMMG sous-routine appelée par le programme principal permettant de déterminer les paramètres  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $s$ . Cette sous-routine inclut aussi le calcul des moments de la population ainsi que le calcul des variances et des covariances des moments.

GGMMGXT sous-routine appelée par le programme principal permettant le calcul des événements  $X_T$  ainsi que de leur variance et la préparation des résultats pour la sortie.

GGXTMGM sous-routine appelée par GGXT (sous-routine générale pour le calcul de  $X_T$  et  $\text{Var}(X_T)$  dans le cas de la loi gamma généralisée) permettant de calculer les variances et covariances des paramètres.